Correspondencia entre Fermat e Pascal

Tradución comentada

Profesores

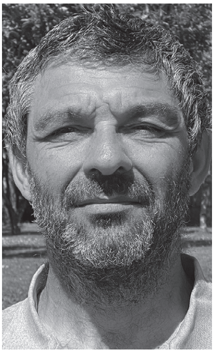
José Nicanor Alonso Álvarez
Miguel Ángel Mirás Calvo
Carmen Quinteiro Sandomingo

Monografías
Serie científico-tecnolóxica

José Nicanor Alonso Álvarez

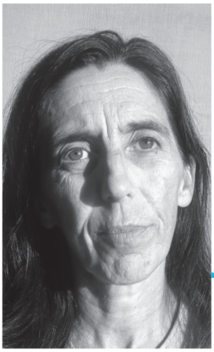
Nado en 1964 en Ourense, é licenciado en Matemáticas e en Economía e doutor en Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela. É autor dun libro sobre o matemático David Hilbert e de varias tradución ao galego de obras clásicas, como o primeiro libro de Os Elementos de Euclides, xunto co profesor José Montero, ou do Arenarius de Arquímedes, xunto co profesor Miguel Mirás, co cal publicou na Colección Básicos Ciencia da Editorial Xerais o libro Mate-glifos. No eido da literatura, ten publicadas tres novelas, “Osa menor” (editorial Galaxia), “O kylix dos deuses” (editorial Toxosoutos) e “Apto cum laude” (editorial Suabia).

Miguel Ángel Miras Calvo



Nado en 1966 en Santiago de Compostela, é licenciado en Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela e doutor pola Universidade de Vigo. Participou en varios proxectos de divulgación científica relacionados co teatro e as Matemáticas. Autor de O libro que ninguén puido ler. Sobre a revolución dos orbes celestes xunto cos profesores Nicanor Alonso e Raúl Gómez e da tradución ao galego da peza Proof (Demostración) de David Auburn coa profesora Carmen Quinteiro.

Carmen Quinteiro Sandomingo



Nada en 1968 en As Regadas (Ourense) é licenciada e doutora en Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela. Ten participado en diferentes proxectos de divulgación e innovación educativa. Dirixiu o curso de innovación Matemáticas x matemáticas, xunto co profesor Miguel Mirás con quen, ademais, publicou, na sección Cultura y Matemáticas/ Teatro y Matemáticas de DivulgaMAT varias reseñas de obras de teatro con contido matemático e elaborou o capítulo dedicado á astrónoma Caroline Herschel no libro Mujeres matemáticas. Trece matemáticas, trece espejos coordinado por Marta Macho (editorial SM-RSME).

Servizo de Publicacións
Universidade de Vigo

Monografías
Serie Científico-Tecnolóxica

n.º 031

Edición
Universidade de Vigo
Servizo de Publicacións
Rúa de Leonardo da Vinci, s/n
36310 Vigo

Deseño gráfico
Tania Sueiro Graña
Área de Imaxe
Vicerreitoría de Comunicacións e Relacións Institucionais

Fotografía da portada
Adobe Stock e Wikipedia

Maquetación e impresión
Tórculo Comunicación Gráfica, S. A.

ISBN (Libro impreso)
978-84-1188-000-8

Depósito legal
VG 111-2024

Servizo de Publicacións
Universidade de Vigo

Este volumen publícase co financiamento da

XUNTA
DE GALICIA

Correspondencia entre Fermat e Pascal

Tradución comentada

Profesores

José Nicanor Alonso Álvarez
Miguel Ángel Mirás Calvo
Carmen Quinteiro Sandomingo

Índice xeral

O contexto científico

O século XVII é coñecido como o da revolución científica. O termo revolución defínese, de acordo co dicionario da Real Academia Galega, como un cambio profundo e brusco. E, se ben cómpre aceptar que todo cambio, por rápido que sexa, é consecuencia dun proceso previo máis ou menos visible, cremos que a definición resulta neste caso ben acaída. Neste capítulo, centrándonos nas Matemáticas (aínda que moitas das afirmacións serán válidas para outras ciencias), condensaremos os principais cambios que se produciron durante ese século, pois comprender o contexto histórico permitirá ás persoas lectoras entender mellor o contido das cartas dos nosos protagonistas, Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

Certamente, non hai cambios no século XVII con respecto ao anterior no relativo á ocupación dos matemáticos. Agás contadas excepcións, adoitan ser afeccionados, con profesións do máis variado. Tampouco existía unha formación específica en matemáticas nas universidades, de xeito que os descubrimentos se realizaban fóra destas institucións. Pero si se observa unha diferenza importante tocante á actitude ante os descubrimentos. E para explicala retrocederemos cen anos.

Situémonos na primeira metade do século XVI. Os principais matemáticos están en Italia. A álxebra é a raíña das matemáticas, e un dos problemas máis importantes que se pretende solucionar é atopar un método para resolver ecuacións de grao 3, chamadas *cúbicas* (as de grao 2 xa hai tempo que se saben resolver). É dicir, téntase desenvolver un método xeral que permita obter as solucións da ecuación:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

O problema era complicado, e frei Luca Pacioli (1445-1517), que traballou nel arreo, acabou por renderse, afirmando: «Os matemáticos non poden solucionar ecuacións cúbicas por métodos alxébricos». Pero, nestas, Scipione del Ferro (1465-1526) atopou un método para un caso particular deste tipo de ecuacións, a denominada *ecuación cúbica deprimida* (sen termo elevado ao cadrado). E como actuou Del Ferro? Pois ocultando o seu procedemento. E por que? Pois porque nesa época era corrente que os matemáticos se desafiasen entre si, intercambiándose listaxes de enunciados, de xeito que perder o reto podía significar a perda do posto na universidade. Ser a única persoa capaz de resolver tales ecuacións convertía a Del Ferro nun adversario temible, e quen ousase desafialo sabía que este lle proporía problemas imposibles de resolver sen coñecer un método que permitise calcular as solucións das ecuacións cúbicas.

Aínda que a historia do que aconteceu despois é abondo interesante (envolvendo xuramentos, traizóns e actitudes pouco edificantes), non a detallaremos por non ser o obxecto deste libro. Limitémonos a sinalar o contraste entre a actitude de Del Ferro no século XVI e a que adoptaría calquera matemático do XVII. No segundo caso, o afortunado descubridor aseguraría a prioridade apresurándose a comunicar ao resto da comunidade o seu achado, aínda que sen dar detalles que permitisen atopar o método, mentres redactaba un tratado para a súa publicación.

A segunda diferenza importante entre os dous séculos é consecuencia da primeira. O feito de quereren anunciar ao mundo as súas descubertas, leva a estes sabios a estar en contacto os uns cos outros. E comezan a formarse grupos que se reúnen periodicamente, patrocinados por un mecenas ou arredor dun erudito. No que atinxe ás Matemáticas en Francia, o grupo máis sobranceiro é o dirixido en París polo monxe Marin Mersenne (1588-1648), que reúne a científicos tan destacados como Pierre Gassendi (1592-1655), Ismaël Bouillaud (1605-1694), Étienne Pascal (1588-1651) (pai de Blaise), Giles de Roberval (1602-1675), Girard Desargues (1591-1661), Pierre de Carcavi (1603-1684)... e Blaise Pascal, quen comeza a asistir ás reunións con pouco máis de doce anos. Ademais, Mersenne mantén correspondencia regular con outros matemáticos de fóra de París, o que permite ao mozo Pascal coñecer as achegas doutros autores e as controversias entre eles. Así, por exemplo, é sabedor das discrepancias entre Fermat e René Descartes (1596-1650) sobre os principios da xeometría analítica. Morto Mersenne en 1648, o traballo é continuado por Jacques Le Pailleur (?-1654) e culmina no ano 1666 coa creación por Jean-Baptiste Colbert (1619-1683) da Academia de Ciencias de Francia.

Un proceso semellante acontece noutros países e, co tempo, estas institucións científicas editarán revistas destinadas a difundir os achados. Pero os transportes son lentos e pesados e non sempre é posible reunirse. Daquela, os científicos adoitan usar o correo para comunicarse os resultados acadados, que ás veces só chegan a publicarse por esta vía (máis rápida que a edición dun libro). Por iso, para comprender ben estes avances, resulta fundamental o estudo da correspondencia entre os autores. No caso que nos ocupa, esta cuestión é particularmente importante, xa que o intercambio epistolar entre Pascal e Fermat é a proba dos seus descubrimentos nunha área das Matemáticas inexistente naquela época: o cálculo de probabilidades. E como vantaxe engadida, e non menos importante, permítenos coñecer o carácter e as relacións entre os autores e as situacións vitais que van atravesando, pois as cartas adoitan conter referencias persoais e históricas.

Pasemos agora a explicar outros cambios deste século, desta volta atendendo aos contidos e ao modo de facer ciencia. Paseniño, os científicos do XVII van abandonando a superstición como ferramenta para explicar o descoñecido, substituíndoa pola razón. Pero a razón debe estar ben asentada. E para iso precisan dun maior formalismo, co que a base matemática colle un pulo importante. Como consecuencia natural, hai unha certa perda da influencia da relixión. Pero non nos debemos confundir. Non existe en absoluto unha ruptura entre relixión e ciencia. Nin sequera un enfrontamento, exceptuando casos como o do famoso xuízo de Galileo Galilei (1564-1642). Os científicos do século XVII son crentes, e en casos como Pascal, aínda profesando a herexía xansenista, ferventes católicos. O que non lles impide cuestionar certas crenzas, apoiados en importantes inventos deste século, como o telescopio, que confirma a teoría heliocéntrica de Nicolás Copérnico (1473-1543).

No eido das Matemáticas é un século de grandes avances. O descubrimento dos logaritmos por parte de John Napier (1550-1617), a xeometría analítica de Descartes, a xeometría proxectiva debida a Desargues, os resultados de teoría de números obtidos por Fermat, a teoría da probabilidade froito do mencionado intercambio epistolar entre este e Pascal, ou o cálculo diferencial e integral desenvolvido independentemente por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) son produtos deste século XVII.

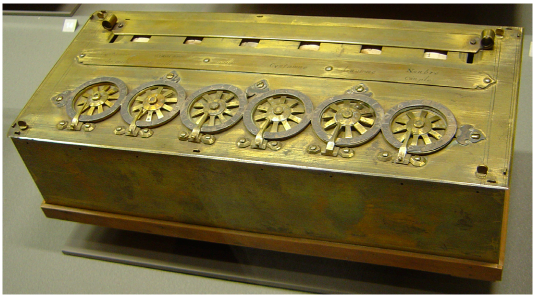
Moitas destas achegas teñen unha importante débeda coa maneira de escribir a ciencia, pois o formalismo obriga a desenvolver unha linguaxe precisa para explicar os avances. Os matemáticos van abandonando progresivamente a matemática retórica do século XVI por outra na que, se ben o latín segue a ser o vehículo de expresión de boa parte das demostracións, van aparecendo novos símbolos que substitúen as palabras e as abreviaturas latinas. Son deste século XVII moitos dos símbolos matemáticos usados actualmente, como por exemplo os de maior ($>$) e menor ($<$), de Thomas Harriot (1560-1621), o da raíz cadrada ($\sqrt{}$), xunto coa popularización do uso da letra x para expresar a incógnita dunha ecuación (Descartes), ou o símbolo para infinito (∞), de John Wallis (1616-1703). Nótese que os propoñentes xa non son matemáticos italianos, pois tamén no século XVII a ciencia deixa de estar centrada en Italia para pasar a Inglaterra, Francia e a actual Alemaña.

Dado que o texto que presentamos está dedicado á correspondencia entre Pierre de Fermat e Blaise Pascal, sinalaremos para finalizar algunha achega concreta de cada un deles. No caso de Fermat, el mesmo declarou sentirse orgulloso da invención dun novo método de demostración matemática, confesando telo utilizado en moitas das súas probas, e que denominou *método de descenso infinito*. Por poñernos en situación, cómpre indicar que no século XVII, cando se quería probar unha propiedade dependente dun número natural n, dábaselle validez a un método de demostración que hoxe chamamos *indución incompleta* ou *indución das ciencias experimentais*. A indución incompleta consistía en dar por boa unha propiedade logo de probala unicamente para os primeiros casos. Así, verificábase o resultado para $n = 1$ e empregábase a proba para obter o caso $n = 2$. Usando este feito acadábase a demostración para $n = 3$ e, como moito, comprobábanse os dous casos seguintes, $n = 4$ e $n = 5$, antes de dar o resultado como válido para calquera número natural n.

Naturalmente, ese método non é aceptado na actualidade para validar unha demostración matemática. A indución incompleta foi substituída pola *indución matemática*, consistente en demostrar un caso particular para despois, supoñendo o resultado certo para o caso n, probar o caso $n+1$. Pero como diciamos, no século XVII era de uso común entre matemáticos destacados. Cunha excepción: Pierre de Fermat, que manifestaba as súas reservas sobre os traballos de John Wallis dicindo:

> ...podería propoñerse unha afirmación e utilizar tal método para mostrar que se verifica nalgúns casos particulares e porén ser falsa e non universal.

En contraposición, el propuña o seu método de descenso infinito, moi acaído para probar enunciados negativos, nos que pretendemos probar que unha determinada propiedade non se verifica para ningún número natural. O método, impecable matematicamente, vén sendo unha indución matemática inversa, é dicir, de adiante cara a atrás. A estratexia consiste en demostrar que, se existen números verificando a propiedade, é posible atopar outros menores ca eles que tamén a cumpren. Dese xeito construímos unha sucesión infinita e estritamente decrecente de números naturais, o que é imposible.



Pascalina. Musée des Arts et Métiers
Imaxe de David.Monniaux

Deixamos agora a Fermat para pasar ao outro protagonista deste libro. Son moitos os campos nos que traballou Blaise Pascal, dende a Matemática ata a Filosofía, pasando pola Física. Centraremos a nosa atención nunha das contribucións matemáticas que utilizou no estudo dos problemas que orixinaron a correspondencia con Fermat. Xa dende o século X había constancia da existencia dunha disposición en forma de triángulo dos coeficientes binomiais (é dicir, os que expresan os posibles subconxuntos de k elementos tomados dun conxunto de n). Tamén eran coñecidas, se ben en moitos casos sen demostración, moitas das propiedades desta construción. E no ano 1654 circulou un manuscrito de Pascal titulado *Traité du triangle arithmétique* onde ordena toda a información coñecida, enuncia novas propiedades e proporciona as demostracións que faltaban. E, ao igual que pasou con Fermat e o seu descenso infinito, Pascal utiliza por vez primeira na demostración dunha desas propiedades o método correcto de indución matemática. O manuscrito, que acabou sendo editado en 1665, xa morto o seu autor, tivo unha grande influencia, ata o punto que, co tempo, esa disposición dos coeficientes binomiais acabou sendo chamada *o triángulo de Pascal*.

Ata aquí o Pascal investigador, pero non queremos rematar sen deternos brevemente noutra faceta súa que pon de manifesto o carácter práctico dos homes de ciencia do século XVII: a de inventor. A contribución á que nos estamos a referir é a invención da primeira calculadora mecánica, a *pascalina*, capaz de efectuar sumas e restas, produtos, divisións, proporcións e raíces cadradas. Pascal ideouna tendo en mente a axuda que a máquina lle podía prestar ao seu pai, que traballaba como recadador de impostos.Foi perfeccionando a máquina co tempo, chegando Pascal a deseñar ata cincuenta modelos. Tan orgulloso estaba da súa creación que fixo unha forte inversión para comercializala e non perdía ocasión de presentala en cantas reunións podía. Por desgraza non foi un éxito, pois resultaba cara e complexa de manexar. Cómpre sinalar que a seguinte máquina calculadora non aparecería ata douscentos anos máis tarde, deseñada por Charles Babagge (1791-1871), polo que non hai dúbida de que Pascal foi un adiantado ao seu tempo.

En resumo, asistimos no século XVII ao nacemento do método científico, cuxas regras son establecidas por Descartes no *Discours de la méthode*, e que nas Matemáticas se traduce nun maior rigor nas demostracións e nunha maior precisión no formalismo, axudada pola invención de novos símbolos que permitirán abandonar a matemática retórica. A Matemática convértese nunha ciencia cada vez máis útil para outras disciplinas, entre as que podemos citar a Física, a Astronomía, a Mecánica ou a Hidrodinámica. Os intercambios entre os científicos son constantes, así como o seu desexo de establecer a prioridade dando a coñecer os seus descubrimentos. E o nacemento das primeiras academias científicas dará o pulo preciso para que este progreso non se deteña nos séculos seguintes. E entre os matemáticos deste século, dous desempeñaron un papel fundamental: Pierre de Fermat e Blaise Pascal.

Notas biográficas

Pierre de Fermat

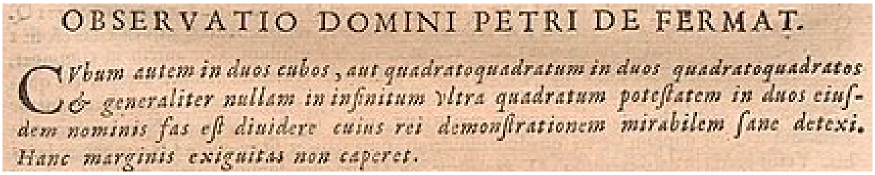
(Beaumont-de-Lomagne, 1601 - Castres, 1665)

Retrato de Pierre de Fermat por Rolland Lefevre (1608-1677).
Museo de Arte e de Historia de Narbonne

Xurista de profesión e matemático por afección. Destacou tanto nas Matemáticas que foi chamado *o príncipe dos afeccionados*. Compartía os seus descubrimentos mediante cartas dirixidas aos seus amigos, especialmente o monxe Marin Mersenne, con cuxa academia mantiña un contacto regular. En calquera caso, adoitaba limitarse a indicar as súas achegas sen presentar demostración ningunha, en parte, como el mesmo recoñecía, porque non consideraba ter capacidade abondo para facelo (hai que ter en conta que a linguaxe matemática non estaba o suficientemente desenvolvida nesa época, e a matemática resultaba difícil de explicar de xeito retórico).

Traballou en xeometría analítica, describindo a espiral que leva o seu nome, e en colaboración con Pascal realizou achegas en teoría da probabilidade. Pero a súa especialidade era a teoría de números. Nela, se ben errou algunha vez, demostrou posuír unha intuición extraordinaria. O seu libro de cabeceira para o estudo era un exemplar da tradución da *Arithmetica* de Diofanto de Alexandría (século III) realizada por Claude Gaspard Bachet (1581-1638). Nas marxes das páxinas dese texto puña notas cos seus propios resultados.

Trala morte de Fermat, o seu fillo maior publicou o libro de Diofanto xunto coas corenta e oito anotacións que o seu pai escribira nas marxes. Os principais matemáticos de Europa comezaron a tarefa de ir demostrando as anotacións daquel exemplar, acadando o éxito con todas, agás unha, que dicía:


OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum poteſtatem in duos eiuſdem nominis fas eſt diuidere cuius rei demonſtrationem mirabilem ſane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

> É imposible descompoñer un cubo na suma de dous cubos, unha potencia cuarta na suma de dúas potencias cuartas, ou en xeral calquera potencia máis alta que o cadrado na suma de dúas potencias do mesmo expoñente. Descubrín para isto unha demostración admirable, pero esta marxe é demasiado pequena para que colla nela.

En termos modernos, Fermat estaba a asegurar que se n é un número natural maior ou igual que 3, non existen naturais x, y e z tales que $x^n + y^n = z^n$. Fermat non comunicara a ninguén a idea daquela marabillosa demostración, e aínda que rexistraron a súa vivenda, non apareceu por ningures. Probar aquel resultado, que pasou a ser coñecido como *o último teorema de Fermat*, converteuse nun reto e para moitos matemáticos nunha obsesión. Finalmente, a conxectura foi demostrada despois de sete anos de traballo polo matemático Andrew Wiles (1953) en 1995, máis de trescentos anos despois de que Fermat o enunciara. Naturalmente, as técnicas empregadas por Wiles están moi lonxe das que Fermat puido sequera imaxinar, pero o que conta é que a súa intuición non andaba descamiñada, e o resultado era correcto. E por outra banda, quen sabe? Igual a admirable demostración existiu, pero aínda non apareceu outro Fermat con capacidade abondo para imaxinala.

En honor de Fermat, levan o seu nome un asteroide e un cráter lunar. Ademais o Instituto de matemáticas de Toulouse concede cada dous anos dende 1989 o Premio Fermat á investigación en Matemáticas.

Blaise Pascal

(Clermont-Ferrand, 1623 - París, 1662)

Retrato de Blaise Pascal (anónimo)
Palacio de Versalles

Home de razón e a un tempo home de fe, pois como el mesmo dicía: «O corazón ten razóns que a razón non entende», foi un dos principais científicos e pensadores franceses do século XVII. Do seu labor nas ciencias atopamos achegas á Física, principalmente estudos de hidrodinámica e hidrostática. Tamén realizou experimentos sobre a presión, e hoxe leva por nome *pascal* a unidade de medida desta no Sistema Internacional de Unidades. No eido das Matemáticas, e en colaboración con Fermat, sentou as bases da teoría de probabilidades que conxugaba as matemáticas e o azar, e é ben coñecido o chamado *triángulo de Pascal* para desenvolver as potencias de binomios.

Grazas a asistir dende moi novo ás reunións do grupo do abade Marin Mersenne, tratou os principais matemáticos da época e estaba ao tanto das achegas dos científicos do seu tempo. En particular, coñeceu a Descartes en 1647 e discutiu con el, sen chegar a un acordo, sobre a existencia do baleiro (*vacuum*). Tamén era inventor. Por axudar ao seu pai, o cal tiña un cargo na administración fiscal que o obrigaba a realizar cálculos frecuentes, deseñou unha calculadora mecánica, que denominou *pascalina*, capaz de facer as operacións elementais e extraer raíces.

Era tamén filósofo e persoa de profunda relixiosidade, aínda que durante un tempo fraqueou nas súas conviccións dedicándose a gozar da vida, frecuentando os salóns da corte, alternando con libertinos e xogadores como Antoine Gombaud, cabaleiro de Meré (1607-1684). Dise que abandonou esa vida ao interpretar que a divina providencia o protexera nun accidente na ponte de Neuilly, no que os cabalos que levaban a súa carroza caeron ao río Sena e el salvou a vida grazas a que o peitoril da ponte impediu que caese tamén a carroza. Despois desta experiencia pasou longas estadías preto de París nun monasterio pertencente aos xansenistas, un movemento puritano relixioso en conflito cos xesuítas e considerado herético pola igrexa católica. Sobre as súas crenzas, para Pascal non había contradición ningunha entre fe e razón. Máis aínda, cumpría conxugar ambas para comprender o mundo. Como exemplo, a súa argumentación sobre a existencia de Deus, a famosa aposta de Pascal, que podemos resumir no seguinte:

> Deus existe, ou non existe. A razón é incapaz de probar nin unha cousa nin a outra. Crer ou non crer é como lanzar unha moeda. Cal é a aposta correcta? Se apostamos a que non existe só ganamos no caso de acertar, pois de resultar que si existía, perdemos todo, condenándonos para toda a eternidade. Pero se apostamos por que existe, se acertamos, ganamos a felicidade eterna, e se non acertamos non perdemos nada, pois como nese caso Deus non existiría nada había que perder. Xa que logo a razón diríxenos á opción de ter fe e crer que Deus existe.

Por desgraza para a ciencia, non tardou moito en ter a oportunidade de comprobar se a súa aposta fora a ganadora, falecendo antes de cumprir os corenta anos. En honor de Pascal, levan o seu nome un asteroide, un cráter lunar e a universidade de Clermont-Ferrand. Ademais a Academia de Ciencias francesa concede dende 1984 o Premio Blaise-Pascal á investigación científica.

A correspondencia entre Fermat e Pascal

Antoine Gombaud, que se ben non tiña título nobiliario ningún se facía chamar a si mesmo cabaleiro de Méré, foi escritor e filósofo e, para o que nos ocupa neste texto, un empedernido xogador na Francia do século XVII.

Pola súa afección polo xogo, vivira con toda seguridade situacións nas que unha partida debía abandonarse despois de iniciada sen chegar a finalizala, co conseguinte problema de acordar un repartimento xusto das cantidades apostadas. Ademais, como xogador case profesional, era moi observador e comprobara que certas apostas eran máis vantaxosas ca outras. Pero a súa sabedoría era principalmente empírica, e sendo un home curioso desexaba coñecer as razóns que explicasen as diferentes vicisitudes do xogo.

Por fortuna, coincidiu nunha viaxe en carruaxe en dirección a Poitou co famoso matemático Blaise Pascal, e non dubidou en expoñerlle os dous problemas que máis o preocupaban. O primeiro, que imos nomear *o problema da aposta vantaxosa*, dicía así:

> Cantas veces debemos lanzar dous dados para ter vantaxe se apostamos que obteremos polo menos un *sonnez*?[1]

O cabaleiro de Méré sabía que, no caso de lanzar un único dado para obter un seis, apostaría con vantaxe de permitírselle catro intentos, nunha proporción de 671

[1]Dobre seis: tirada máis alta que se pode facer no xogo do trictrac. Aínda que co tempo foron desaparecendo, esta tirada tamén recibía os nomes *sonnés* e *sonnet*. O trictrac é un xogo de azar razoado que estivo moi de moda entre a nobreza francesa durante os séculos XVII e XVIII.

Ademais do dobre seis, o resto de dobres tamén tiña a súa propia denominación:

- dobre as (non se di 1): bezas.
- dobre 2: dobre dous.
- dobre 3: ternes.
- dobre 4: carmes.
- dobre 5: quines.
- dobre 6: sonnez.

Cada vez que alguén obtiña un sonnez, adoitábase dicir: «Sonnez la trompette le diable est mort».

contra 625.[2] Argumentaba que, de lanzar dous dados, como o número de resultados posibles é de 36, para manter a proporción debía realizar 24 tiradas (pois 4 é a 6 como 24 a 36). Pero pola propia experiencia en infinidade de partidas comprobara que non era así. O resultado teórico de 24 partidas non abondaba, e para realizar a aposta con vantaxe debía dispoñer de 25 oportunidades. Entendía que aquela discrepancia entre teoría e práctica indicaba que existía un fallo na Aritmética.

O segundo problema xa o enunciaran un século antes Luca Pacioli, Tartaglia (ca. 1499-1557) e outro xogador profesional, Girolamo Cardano (1501-1576), resolvéndoo todos erroneamente, e era coñecido como *o problema do repartimento*. Di o seguinte:

> Dous xogadores lanzan unha moeda, apostando un deles por cara e o outro por cruz. Ganará a totalidade do apostado aquel que acade primeiro tres vitorias. Cando un deles leva ganadas dúas partidas e o outro unha, deben dar por rematado o xogo sen completalo. Tendo en conta o resultado das partidas xogadas, como deben repartir os cartos para que o repartimento sexa xusto?

Pascal traballou nos dous problemas, e o que é máis importante, aproveitou o seu contacto co xurista e matemático afeccionado Pierre de Fermat para compartir con el por correspondencia os seus avances. Polo contido das cartas non parece que lle deran especial importancia ao problema da aposta vantaxosa, sendo probablemente conscientes do erro do cabaleiro de Méré ao empregar a regra de tres nun caso onde non existe proporcionalidade. En palabras de Pascal referíndose ao cabaleiro de Méré (onde di xeómetra léase matemático, pois naquela época as dúas palabras eran sinónimas): «Ten moito talento, pero non é xeómetra, o que como vostede sabe é un gran defecto».

Máis interese prestaron Pascal e Fermat ao problema do repartimento de puntos, e o resultado foi unha correspondencia entre ambos (probablemente os matemáticos máis importantes do momento xunto con René Descartes), da que se conservan oito cartas. Nas seis primeiras, todas datadas no ano 1654, os dous resolveron o problema de xeito diferente, ao tempo que establecían as bases do que máis adiante sería o cálculo de probabilidades, unha nova rama das matemáticas, apenas esbozada anteriormente polos nomeados Pacioli, Tartaglia ou Cardano, ou xa na época de Pascal e Fermat nalgún texto de Galileo Galilei. Consciente da importancia dun traballo que conxugaba eidos tan aparentemente contraditorios como as matemáticas e o azar (un oxímoro naquela época), Pascal non dubidou en poñerlle nome, *A xeometría do azar*, describíndoa nun escrito dirixido á Academia de París en 1654:

> Ao unir así as demostracións das Matemáticas á incerteza do azar, e ao conciliar o que parece contrario, tomando o seu nome das dúas, esta arte arrógase con todo dereito este título asombroso: Xeometría do azar.

[2]Os posibles resultados ao lanzar catro dados son $6^4 = 1294$, dos que $5^4 = 625$ non teñen seis ningún. Polo tanto, hai $1294 - 625 = 671$ resultados que teñen polo menos un seis.

Cómpre salientar que dous meses despois deste primeiro intercambio epistolar con Fermat, Pascal deixou de lado as Matemáticas para dedicarse, case en exclusiva, ás súas reflexións místicas. Retomaría as cuestións matemáticas, centrándose principalmente na Xeometría, nos últimos anos da súa vida.

As dúas últimas cartas, datadas no ano 1660, non teñen contido matemático. Fermat, que estaba en Toulouse, escríbelle a Pascal, daquela de visita en Clermont-Ferrand, coa intención de encontrarse nalgunha cidade intermedia. Pascal responde declinando o ofrecemento por motivos de saúde. Os dous sabios non chegaron nunca a coñecerse persoalmente.

Fermat e Pascal non utilizaron nas cartas o termo "probabilidade" xa que, de feito, estaban iniciando o proceso de inventalo. A influencia posterior que a correspondencia entre Fermat e Pascal tivo na emerxencia do cálculo de probabilidades non se pode menosprezar. O *Traité du triangle arithmétique* de Pascal publicouse como obra póstuma en 1665, aínda que xa circulaban dúas versións, unha en latín e outra en francés, dende 1654. Seguramente, a raíz da discusión con Fermat, Pascal engadiu na versión en francés un apéndice no que explica como aplicar as propiedades do triángulo para resolver o problema do repartimento. Usa implicitamente o concepto de esperanza matemática para obter a solución, desenvolvendo formalmente as ideas expostas na correspondencia.

As solucións de Fermat e Pascal ao problema do repartimento foron debatidas nas reunións do grupo de Le Pailleur. Christian Huygens (1629-1695) coñeceunas durante a súa visita a París en 1655 e como el mesmo recoñece no limiar do libro *De ratiociniis in aleae ludo* de 1658:

> É necesario saber, por outra parte, que xa hai un tempo que algúns dos máis célebres matemáticos de toda Francia se ocuparon deste tipo de cálculo, para que ninguén me atribúa a honra da primeira invención, xa que non me pertence.

Durante cincuenta anos o texto de Huygens foi o único tratado sobre probabilidades. Na parte final do libro formulou cinco problemas como reto para a comunidade matemática. Varios autores estudaron os problemas propostos, achegando solucións e xeneralizacións: Jacob Bernuilli (1654-1705) na súa obra póstuma *Arts conjectandi* de 1713; Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) en *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* de 1708; ou Abraham de Moivre (1667-1754) en *De mensura sortis* publicado en 1711. Posteriormente, Pierre Simon Laplace (1749-1827) no *Essai philosophique sur les probabilités* de 1814 escribe:

> Xa hai tempo que se determinaron, nos xogos máis simples, as proporcións entre as posibilidades favorables ou contrarias aos xogadores, e se regularon conforme tales proporcións as apostas e os pagos. Pero ninguén antes de Pascal e Fermat estableceu principios nin métodos para abordar este problema co cálculo, e ninguén resolveu cuestións deste tipo

> aínda máis complicadas. É, pois, a estes dous grandes xeómetras aos que temos que atribuír os primeiros elementos da ciencia das probabilidades, un descubrimento que está á altura dos feitos destacados que fan glorioso ao século XVII, o século que máis honra ten proporcionado ao espíritu humano.

Siméon Denis Poisson (1781-1840), no seu *Recherches sur la probabilité* de 1837, resume con ironía:

> Un problema relativo a un xogo de azar proposto a un austero xansenista por un home de mundo é a orixe do cálculo de probabilidades.

A correspondencia entre Fermat e Pascal ten sido analizada polo miúdo por moitos autores modernos. As referencias ao final deste libro son unha pequena mostra. Presentamos por vez primeira a tradución ao galego dende o orixinal en francés (con algún parágrafo en latín) das oito cartas conservadas da correspondencia entre Fermat e Pascal. Utilizamos como texto fonte o segundo tomo da edición das obras de Fermat realizada polos editores Paul Tannery e Charles Henry no ano 1894. Asemade, incluímos uns breves apuntamentos biográficos e abundantes notas explicativas. Nelas concretamos aspectos matemáticos, que para unha mellor comprensión detallamos en notación (e terminoloxía) moderna, pois naquela época non existían a meirande parte dos signos que usamos na actualidade ou eran de uso infrecuente. Esperamos que o texto teña tamén un interese histórico e mesmo literario, servindo para facerse unha idea non só de como se escribían as matemáticas no século XVII, senón tamén das fórmulas de cortesía, de uso obrigado entre os autores de ciencia.

Correspondencia

Primeira carta

Fermat a Pascal

1654*

Monsieur,[3]

Se eu intento acadar un punto cun único dado en oito lanzamentos; se acordamos, logo de que a aposta estea botada, que non farei o primeiro lanzamento, é preciso, pola miña teoría, que eu retire do xogo $\frac{1}{6}$ do total para ser compensado, por razón do mencionado primeiro lanzamento.[4]

Que se ademais acordamos despois diso que non farei o segundo lanzamento,

---

*Esta carta non ten data. Imprimiuse por vez primeira na edición de 1779 das *Oeuvres* de Pascal. O editor situouna entre as cartas quinta e sexta da nosa serie. Pero, polo seu contido, parece ser anterior ás cinco restantes do ano 1654 que se conservan, e de feito aparece en primeiro lugar no texto fonte que utilizamos para esta tradución. Nesta misiva, Fermat responde a Pascal, polo que se deduce que o autor recibira unha carta anterior deste. Na primeira parte da carta, Fermat resolve o *problema do dado con partidas non xogadas*:

> Un xogador aposta que sacará un seis en oito lanzamentos dun dado. Que indemnización xusta debe recibir por renunciar ao cuarto lanzamento?

Na segunda parte da carta, Fermat alude a unha variante, que se entende é a que Pascal discutía na carta perdida:

> Un xogador aposta que sacará un seis en oito lanzamentos dun dado. Se aínda non sacou o seis despois de tres tiradas, que indemnización xusta debe recibir por renunciar ao cuarto lanzamento?

[3]Manteremos sen traducir por señor a palabra orixinal, *Monsieur*, a súa abreviatura, *M.*, e o plural, *Messieurs*, por seren universalmente coñecidas e porque naquela época tiñan unha connotación nobiliaria que non posúen actualmente.

[4]Como bo xurista que era, Fermat razoa que a cantidade a devolver debería ser proporcional ás posibilidades de que o primeiro xogador ganase no primeiro lanzamento: unha de seis.

debo, para ser indemnizado, retirar a sexta parte do restante, que é $\frac{5}{36}$ do total.[5]

E se despois diso acordamos que non farei o terceiro lanzamento, debo, para ser indemnizado, retirar a sexta parte do restante, que é $\frac{25}{216}$ do total.[6]

E se despois diso aínda acordamos que non farei o cuarto lanzamento, debo retirar a sexta parte do restante, que é $\frac{125}{1296}$ do total, e conveño con vostede en que é o valor do cuarto lanzamento, suposto que xa se acordaron os anteriores.[7]

Pero vostede proponme no último exemplo da súa carta (emprego os seus propios termos) que se eu intento obter un seis en oito lanzamentos e fixen tres deles sen conseguilo, se o meu contrincante me propón non facer o meu cuarto lanzamento e me quixese disuadir a causa de que puidese conseguilo, pertenceríame $\frac{125}{1296}$ da suma enteira das nosas apostas.[8]

O que porén non é certo, segundo á miña teoría.[9] Pois, nese caso, non achegando ganancia ningunha os tres primeiros lanzamentos para o que ten o dado, quedando a suma total en xogo, aquel que ten o dado e convén en non facer a súa cuarta tirada, debe tomar como indemnización $\frac{1}{6}$ do total.[10]

---

[5] A probabilidade de non sacar un seis no primeiro lanzamento é $\frac{5}{6}$ e de sacalo no segundo $\frac{1}{6}$. Polo tanto, a probabilidade de que o primeiro xogador gane na segunda partida é de $\frac{5}{36}$.

[6] Analogamente, a probabilidade de que o primeiro xogador non saque un seis nas dúas primeiras partidas é $\frac{5^2}{6^2} = \frac{25}{36}$. Polo tanto, en 25 de 216 alternativas, ganaría na terceira partida.

[7] A probabilidade de que o primeiro xogador non saque un seis nas tres primeiras partidas é $\frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$, polo que a probabilidade de ganar na cuarta partida, que Fermat denomina o valor do cuarto lanzamento, é $\frac{125}{1296}$.

[8] Fermat interpreta que na carta previa (que non se conserva) Pascal considera unha situación distinta: o primeiro xogador xa tirou o dado tres veces e non sacou o seis, e despois renuncia á cuarta.

[9] Na nova interpretación do problema, a proporción $\frac{125}{1296}$ non é a solución correcta.

[10] En terminoloxía moderna, o xusto é que o xogador que renuncia ao lanzamento sexa bonificado cunha cantidade tal que as súas potenciais ganancias futuras sexan as mesmas nos dous escenarios: renunciar ou non á tirada. Se supoñemos unha aposta dun euro, a situación é a seguinte:

- O xogador non renuncia á cuarta tirada.

	Gana na cuarta tirada	Perde na cuarta, gana nunha das outras 4
Ganancia	1 €	1 €
Probabilidade	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\right)$

  Polo tanto, a ganancia esperada é de $\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\right)$ €.

- O xogador renuncia á cuarta tirada.

	Indemnización	Gana nunha das outras 4 tiradas
Ganancia	$\frac{1}{6}$ €	$\frac{5}{6}$ €
Probabilidade	1	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$

  A ganancia esperada é de $\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\right)$ €.

Dado que as ganancias esperadas son as mesmas, $\frac{1}{6}$ de euro é o valor xusto por renunciar ao lanzamento.

E se fixese catro lanzamentos sen atopar o punto buscado e se acordase que non fixese o quinto, tería igualmente como indemnización $\frac{1}{6}$ do total. Pois como a suma enteira permanece en xogo, non se segue unicamente da teoría, senón que é de sentido común que cada lanzamento debe ter o mesmo valor.[11]

Prégovos pois que me fagades saber se estamos de acordo na teoría, como creo, ou se discrepamos unicamente na súa aplicación.

Quedo, con todo o meu corazón etc.

FERMAT

[11] Certamente, o razoamento é válido calquera que sexa o lanzamento ao que se renuncia.

Segunda carta

Pascal a Fermat

Mércores 29 de xullo 1654*

Monsieur,

1. A impaciencia domíname tanto como a vostede e, mesmo aínda encamado,[12] non podo evitar dicirlle que recibín onte pola tarde, de mans de M. de Carcavi a vosa carta sobre os repartimentos,[13] que admiro máis do que podo dicir. Non teño tempo para estenderme, mais, nunha palabra, vostede atopou os dous repartimentos, o dos dados e o das partidas, con perfecta exactitude: estou totalmente satisfeito, pois agora xa non dubido que non estea no certo, despois da marabillosa coincidencia na que me atopo con vostede.

Admiro moito máis o método das partidas que o dos dados: vira varias persoas atopar o dos dados, como M. o cabaleiro de Méré,[14] que é quen me propuxo estas cuestións,[15] e tamén M. de Roberval:[16] pero M. de Méré xamais podería ter atopado

---

*Polo que di o texto, debe existir outra carta de Fermat a Pascal que responde a outra de Pascal a Fermat, tratando ambas a solución aos problemas propostos polo cabaleiro de Méré. Non se conserva ningunha delas.

[12] A saúde de Pascal foi moi precaria durante toda a súa vida.

[13] Pierre de Carcavi (1600 ou 1603-1684). Matemático afeccionado e membro do Grand Conseil de Paris. Amigo íntimo de Pascal.

[14] Antoine Gombaud, cabaleiro de Méré, como se denominaba a si mesmo. Escritor e matemático afeccionado. Xogador empedernido, propúxolle a Pascal os dous problemas que motivaron esta correspondencia.

[15] Véxase o prólogo.

[16] Gilles Personne (1602-1675). A partir de 1628 adoptou como nome Gilles de Roberval (vila próxima a París onde vivía a súa familia). Catedrático de Matemáticas do Colexio Real de Francia.

o valor exacto das partidas nin un método para chegar a el, de xeito que me atopaba como o único coñecedor desa proporción.

2. O seu método é moi seguro e é o que primeiro me veu ao pensamento nesta busca; mais, por seren excesivas as combinacións, atopei un atallo e de feito outro método máis curto e máis nítido, que me gustaría contarlle aquí en poucas palabras: pois querería no sucesivo abrirlle o meu corazón, se se me permite, tal é a ledicia ao ver a nosa coincidencia. Ben vexo que a verdade é a mesma en Toulouse e en París.[17]

Velaquí pouco máis ou menos como fago para saber o valor de cada unha das partidas,[18] cando xogan dous xogadores, por exemplo, en tres partidas, e cada un

[17]Temos que supoñer, xa que Pascal menciona as combinacións, que o método co que Fermat abordou o problema do repartimento nunha das cartas perdidas é basicamente determinar o número máximo de roldas que poderían chegar a xogarse, enumerar exhaustivamente todas as posibilidades e contar aquelas que favorecen a cada xogador. A idea é consistente co xeito en que Fermat trata o problema do dado con partidas non xogadas na primeira carta, xa que ambos están relacionados.

Formulemos e resolvamos o problema en terminoloxía moderna. Dous xogadores lanzan unha moeda, un pide cara e o outro cruz. En cada lanzamento sumará un punto o xogador que acerte o resultado que mostre a moeda. Cada un aposta D euros. Ganará a cantidade acumulada ($2D$ euros en total) aquel que obteña antes P puntos. Nun momento dado, o primeiro xogador ten p_1 puntos e o outro p_2. Se o xogo se interrompe neste intre, queremos determinar o repartimento xusto da cantidade apostada entre os dous xogadores. Denotemos por $G_1(D; P, p_1, p_2)$ e $G_2(D; P, p_1, p_2)$, as cantidades que deberían recibir, na situación considerada, o primeiro e o segundo xogador, respectivamente. Agora ben, o primeiro xogador necesita $n_1 = P - p_1$ puntos para ganar e o segundo $n_2 = P - p_2$. A idea central nos razoamentos de Pascal e Fermat é que o xogo se decidirá como moito en $N = n_1 + n_2 - 1$ roldas. Certamente pode decidirse antes de chegar a ese número máximo, pero é correcto considerar todas as secuencias de lanzamentos e contar aquelas que favorecen a cada apostante. En N roldas poden darse 2^N casos posibles, igualmente probables, pois en cada rolda pode saír cara ou cruz. Deles, favorecen ao primeiro xogador aqueles casos nos que gane n_1 puntos ou máis. O número de casos nos que un xogador gana exactamente r puntos en m tiradas vén dado polas combinacións sen repetición de m elementos tomados de r en r, ou sexa,

$$\mathrm{C}_m^r = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}.$$

Polo tanto, a porcentaxe de casos favorables ao primeiro xogador é:

$$F(N, n_1) = \frac{1}{2^N}\left(\binom{N}{n_1} + \binom{N}{n_1+1} + \cdots + \binom{N}{N}\right) = \frac{1}{2^N}\sum_{r=n_1}^{N}\binom{N}{r}.$$

Deste xeito, o primeiro xogador recibiría, da aposta total, a cantidade

$$G_1(D; P, p_1, p_2) = 2DF(N, n_1) = \frac{D}{2^{N-1}}\sum_{r=n_1}^{N}\binom{N}{r}. \tag{1}$$

Por suposto, o segundo xogador recibiría o resto: $G_2(D; P, p_1, p_2) = 2D - G_1(D; P, p_1, p_2)$.

[18]O método que explica Pascal non se basea na enumeración das combinacións como o de Fermat, senón que é recursivo. Pascal descríbeo, paso a paso, para o xogo a tres puntos proposto polo cabaleiro de Méré.

puxo 32 pistolas en xogo:[19]

Supoñamos que o primeiro deles teña dúas partidas e o outro unha; xogan agora unha partida, de tal xeito que, se o primeiro a gana, ganará todo o diñeiro en xogo, a saber, 64 pistolas; se a gana o outro, estarán dúas a dúas, e polo tanto, se queren retirarse, cómpre que cada un deles retire a súa aposta, a saber, 32 pistolas cada un.

Considere entón, Monsieur, que, se o primeiro gana, perténcenlle 64; se perde, perténcenlle 32. Por tanto, se desexan non arriscar unha partida e retirarse sen xogala, o primeiro debe dicir: «Estou seguro de ter 32 pistolas, pois mesmo a perda mas dá; mais canto ás outras 32, quizais as terei eu, quizais as terá vostede, as posibilidades son as mesmas. Repartamos xa que logo estas 32 pistolas pola metade e dádeme, aparte disto, as miñas 32 que teño seguras». El terá polo tanto 48 pistolas e o outro 16.[20]

Supoñamos agora que o primeiro ten dúas partidas e o outro ningunha, e que comezan a xogar unha partida. As posibilidades son tales que, se a gana o primeiro, obtén todo o diñeiro, 64 pistolas; se a gana o outro, volven estar no caso anterior, no que o primeiro terá dúas partidas e o outro unha.

Agora ben, xa demostramos que nese caso lle pertencen, a aquel que ten dúas partidas, 48 pistolas: por tanto, se queren non xogar esta partida, el debe dicir así: «Se a gano, ganarei todo, que son 64; se a perdo, pertenceranme lexitimamente 48: xa que logo dádeme as 48 que teño seguras, mesmo no caso de perder, e repartamos as outras 16 pola metade, pois vostede ten tantas posibilidades coma min de ganalas». Dese xeito terá 48 e 8, que son 56 pistolas.[21]

Supoñamos finalmente que o primeiro só teña unha partida e o outro ningunha. Vostede ve, Monsieur, que se comezan unha nova partida, as posibilidades son tales que, se o primeiro a gana, terá dúas partidas contra ningunha, e por tanto, polo caso anterior, perténcenlle 56; se a perde, estarán unha a unha: xa que logo perténcenlle

[19] A pistola era unha moeda da época, tamén chamada louis de ouro (polo rei Louis XIII de Francia que aparecía no anverso), equivalente a dez libras francesas.

[20] Describamos o procedemento que explica Pascal en terminoloxía moderna. Supoñamos, sen perda de xeneralidade, que o primeiro xogador vai diante na puntuación, $p_1 \geq p_2$. Nalgúns casos triviais, é moi claro cal é o repartimento xusto. Así, se o primeiro xogador gana o último punto entón gana a aposta, é dicir, $G_1(D; P, P, p) = 2D$ para todo $p < P$. Se os dous xogadores están empatados a puntos e o xogo se interrompe entón cada un recupera a súa aposta, ou sexa, $G_1(D; P, p, p) = D$ para todo $p < P$. Polo tanto, tan só quedan por calcular os $\frac{1}{2}P(P-1)$ valores $G_1(D; P, p_1, p_2)$ cando $p_2 < p_1 < P$. No caso $P = 3$, que analiza Pascal, resultan 3 valores non triviais, a saber, $G_1(32; 3, 2, 1)$, $G_1(32; 3, 2, 0)$ e $G_1(32; 3, 1, 0)$. Pascal empeza calculando $G_1(32; 3, 2, 1)$ como a ganancia esperada:

$$G_1(32; 3, 2, 1) = \tfrac{1}{2}G_1(32; 3, 3, 1) + \tfrac{1}{2}G_1(32; 3, 2, 2) = \tfrac{1}{2} \times 64 + \tfrac{1}{2} \times 32 = 48.$$

Por tanto, $G_2(32; 3, 2, 1) = 16$. Así pois, xa neste paso inicial, Pascal obtén a solución ao problema orixinal do repartimento proposto polo cabaleiro de Méré.

[21] No segundo paso, Pascal obtén $G_1(32; 3, 2, 0)$ como:

$$G_1(32; 3, 2, 0) = \tfrac{1}{2}G_1(32; 3, 3, 0) + \tfrac{1}{2}G_1(32; 3, 2, 1) = \tfrac{1}{2} \times 64 + \tfrac{1}{2} \times 48 = 56.$$

Por tanto, $G_2(32; 3, 2, 0) = 8$.

32 pistolas. Daquela el debe dicir: «Se vostede quere non xogala, déame as 32 pistolas que xa teño seguras, e dividamos o resto de 56 pola metade. De 56 leva 32, quedan 24; partide daquela 24 pola metade, collede 12 e eu 12, as que, con 32, fan 44».[22]

Agora ben, por ese medio, vostede ve, por simples subtraccións, que, pola primeira partida, correspóndenlle do diñeiro do outro 12 pistolas; pola segunda, outras 12; e pola última, 8.[23]

Agora ben, para non facer máis misterio, xa que vostede ve tamén todo ao descuberto e que eu non facía isto máis que para ver se non me equivocaba, o valor (refírome soamente ao valor sobre a aposta do outro) da última partida de dúas é dobre do da última partida de tres e cuádrupla do da última partida de catro e óctupla do da última partida de cinco etc.[24]

---

[22]Neste último paso, Pascal calcula

$$G_1(32;3,1,0) = \tfrac{1}{2}G_1(32;3,2,0) + \tfrac{1}{2}G_1(32;3,1,1) = \tfrac{1}{2} \times 56 + \tfrac{1}{2} \times 32 = 44.$$

Entón $G_2(32;3,1,0) = 20$.

En xeral, Pascal está describindo un proceso recursivo, cara a atrás, dado por:

$$G_1(D,P,p_1,p_2) = \begin{cases} 2D & \text{se } p_1 = P, p_2 < P \\ D & \text{se } p_1 = p_2 < P \\ \tfrac{1}{2}G_1(D;P,p_1+1,p_2) + \tfrac{1}{2}G_1(D;P,p_1,p_2+1) & \text{se } p_2 < p_1 < P \end{cases}.$$

O proceso empeza fixando $p_1 = P - 1$ e calculando recursivamente, cara a atrás, os pagos $G_1(D;P,P-1,p_2)$ para p_2 desde $P-2$ ata 0. Procédese, despois, a fixar $p_1 = P-2$ e calcular recursivamente, cara a atrás, os pagos $G_1(D;P,P-2,p_2)$ para p_2 desde $P-3$ ata 0. E así sucesivamente.

[23]Dado que o primeiro xogador sempre leva vantaxe de puntos, ganará unha cantidade superior ás 32 pistolas que apostou inicialmente. Polo tanto, dos cartos apostados polo seu opoñente, correspóndenlle:

- Pola primeira partida: $B_1 = G_1(32;3,1,0) - 32 = 44 - 32 = 12$ pistolas.
- Polas dúas primeiras partidas: $B_2 = G_2(32;3,2,0) - 32 = 56 - 32 = 24$ pistolas.
- Polas tres primeiras partidas: $B_3 = G_2(32;3,3,0) - 32 = 64 - 32 = 32$ pistolas.

Xa que logo, restando, correspóndenlle:

- Pola primeira partida: $V_1 = B_1 = 12$ pistolas.
- Pola segunda partida: $V_2 = B_2 - B_1 = 24 - 12 = 12$ pistolas.
- Pola terceira partida: $V_3 = B_3 - B_2 = 32 - 24 = 8$ pistolas.

[24]Dos $G_1(D;P,p_1,p_2)$ euros que lle corresponden ao primeiro xogador se o xogo se suspende, D son os que puxo inicialmente e o resto $G_1(D;P,p_1,p_2) - D$ son da aposta do outro, é dicir, son o beneficio obtido polo primeiro xogador. Pascal denomina valor das p primeiras partidas o beneficio do primeiro xogador se o xogo se interrompe cando leva p puntos por ningún do opoñente:

$$B_p(D,P) = G_1(D;P,p,0) - D.$$

O valor da partida p é, polo tanto:

$$V_1(D,P) = B_1(D,P),\ V_p(D,P) = B_p(D,P) - B_{p-1}(D,P) \text{ se } p > 1.$$

3. Pero a proporción das primeiras partidas non é tan doada de atopar: é por tanto así, pois non quero agochar nada, e velaquí o problema do cal considerei tantos casos, como realmente me gusta facer:

Sendo dado o número de partidas que se queira, atopar o valor da primeira.[25]

Sexa dado o número de partidas, por exemplo oito. Collede os oito primeiros números pares e os oito primeiros números impares, a saber:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$$

e

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.$$

Multiplicade os números pares deste xeito: o primeiro polo segundo, o produto polo terceiro, o produto polo cuarto, o produto polo quinto etc.; multiplicade os números impares do mesmo xeito: o primeiro polo segundo, o produto polo terceiro etc.

O último produto dos pares é o denominador e o último produto dos impares é o numerador da fracción que expresa o valor da primeira partida de oito: é dicir, que se cada un xoga o número de pistolas expresado polo produto dos pares, pertenceranlle sobre o diñeiro do outro o número expresado polo produto dos impares.[26]

Obviamente, $B_P(D,P) = G_1(D;P,P,0) - D = 2D - D = D$ e o valor da última partida é

$$V_P(D,P) = D - B_{P-1}(D,P) = D - (G_1(D;P,P-1,0) - D) = 2D - G_1(D;P,P-1,0).$$

Agora ben, aplicando o método recursivo de Pascal é doado calcular o valor da última partida. En efecto, para cada $p < P-1$, denotando $r = P - p$, tense que

$$G_1(D;P,P-1,p) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{2^r} D = \frac{2^r - 1}{2^{r-1}} D.$$

A última igualdade vén dada pola suma dos r primeiros termos da progresión xeométrica de razón $\frac{1}{2}$. En particular, se $p = 0$ entón $r = P$ e

$$V_P(D,P) = 2D - G_1(D;P,P-1,0) = \Big(2 - \frac{2^P - 1}{2^{P-1}}\Big) D = \frac{D}{2^{P-1}}.$$

Daquela, o valor da última partida nun xogo a P puntos é o dobre do valor da última partida nun xogo a $P+1$, xa que $V_P(D,P) = 2V_{P+1}(D,P+1)$. En particular,

$$V_2(D,2) = \tfrac{D}{2},\ V_3(D,3) = \tfrac{D}{4},\ V_4(D,4) = \tfrac{D}{8} \text{ e } V_5(D,5) = \tfrac{D}{16}.$$

Así pois, a afirmación de Pascal é correcta, xa que $V_2(D,2)$ é dúas veces $V_3(D,3)$, catro veces $V_4(D,4)$ e oito veces $V_5(D,5)$.

[25] É dicir, calcular $V_1(D,P)$ para calquera valor de P.

[26] Pascal afirma que, se $P \geq 1$ entón

$$V_1(D,P) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2P-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2P} D.$$

O que se demostra, pero con moita dificultade, polas combinacións como as que vostede imaxinou, e eu non puiden demostralas por esta outra vía que lle acabo de dicir, senón pola das combinacións. E velaquí as proposicións que conducen a iso, que son propiamente proposicións aritméticas relativas a combinacións, das cales teño bastantes propiedades fermosas:[27]

4. Se dun número calquera de letras, por exemplo de oito:

A, B, C, D, E, F, G, H

tomades todas as combinacións posibles de 4 letras e logo todas as combinacións posibles de 5 letras, e despois de 6, de 7 e de 8 etc., e así tomades todas as combinacións posibles dende a multitude que é a metade do todo ata o todo, digo que se xuntades a metade das combinacións de 4 con cada unha das combinacións superiores, a suma será o número proporcional da progresión cuaternaria que comeza polo binario, que é a metade da multitude.[28]

Por exemplo, e diréivolo en latín, pois o francés non serve para iso:[29]

Se de calquera número de letras, por exemplo oito,

$$A, B, C, D, E, F, G, H,$$

tomamos todas as combinacións, de catro, de cinco, de seis etc., ata oito, digo, se unes a metade das combinacións de catro, é dicir 35 *(metade*

[27]Pascal presenta a continuación unha xustificación, analizando o caso $P = 4$, da súa afirmación.

[28]Refírese á progresión xeométrica de termo xeral $a_n = a_1 r^{n-1}$ para o caso $a_1 = 2$ e $r = 4$, é dicir, a sucesión de números $a_n = 2^{2n-1}$.

[29]Tal e como afirma Pascal, o seguinte parágrafo (que distinguimos en letra cursiva e con marxes máis estreitas cós do resto do texto) está escrito en latín na carta. Na Europa do século XVII, os autores que utilizaban a lingua vernácula para escribir os seus tratados científicos eran unha excepción. Galileo Galilei foi un dos pioneiros, publicando en italiano *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*. Tamén René Descartes escribiu o *Discours de la méthode* en francés. Pero, a maioría seguía considerando que o latín era o idioma da ciencia, ao que recorrían para transmitir con rigor as ideas científicas. Reproducimos a continuación o texto orixinal en latín.

Si quotlibet litterarum, verbi gratia octo: A, B, C, D, E, F, G, H, *sumantur omnes combinationes quaternarii, quinquenarii, senarii etc., usque ad octonarium, dico, si jungas dimidium combinationis quaternarii, nempe* 35 *(dimidium* 70*), cum omnibus combinationibus quinquenarii, nempe* 56, *plus omnibus combinationibus senarii, nempe* 28, *plus omnibus combinationibus septenarii, nempe* 8, *plus omnibus combinationibus octonarii, nempe* 1, *factum esse quartum numerum progressionis quaternarii cujus origo est* 2*: dico quartum numerum, quia* 4 *octonarii dimidium est. Sunt enim numeri progressionis quaternarii, cujus origo est* 2, *isti:* $2, 8, 32, 128, 512$, *etc., quorum* 2 *primus est,* 8 *secundus,* 32 *tertius et* 128 *quartus: cui* 128 *aequantur*

+35 *dimidium combinationis* 4 *litterarum*
+56 *combinationis* 5 *litterarum*
+28 *combinationis* 6 *litterarum*
+8 *combinationis* 7 *litterarum*
+1 *combinationis* 8 *litterarum.*

de 70*), con todas as combinacións de cinco, é dicir* 56*, mais todas as combinacións de seis, é dicir* 28*, mais todas as combinacións de sete, é dicir* 8*, mais todas as combinacións de oito, é dicir* 1*, obtemos o cuarto número da progresión cuaternaria cuxo primeiro termo é* 2*: digo o cuarto número porque* 4 *é a metade de* 8*.*[30]

Os números da progresión cuaternaria cuxo primeiro termo é o 2*, son:*[31]

$$2, 8, 32, 128, 512 \ \textit{etc.},$$

dos cales 2 *é o primeiro,* 8 *o segundo,* 32 *o terceiro e* 128 *o cuarto: o cal,* 128*, iguala*[32]

+35 *a metade das combinacións de* 4 *letras*
+56 *combinacións de* 5 *letras*
+28 *combinacións de* 6 *letras*
+8 *combinacións de* 7 *letras*
+1 *combinación de* 8 *letras*

5. Velaquí a primeira proposición que é puramente aritmética: a outra refírese á teoría das partidas e é así:[33]

[30]En xeral, Pascal afirma que se $P \geq 1$ entón:

$$\frac{1}{2}\binom{2P}{P} + \sum_{r=P+1}^{2P}\binom{2P}{r} = 2^{2P-1}. \tag{2}$$

Certamente, polas propiedades dos números combinatorios sabemos que:

$$2^{2P} = \sum_{k=0}^{2P}\binom{2P}{k} = \binom{2P}{P} + 2\sum_{r=P+1}^{2P}\binom{2P}{r}.$$

Dividindo entre 2 chégase á expresión anterior.

[31]Xa vimos que a progresión cuaternaria á que se refire Pascal coincide coa sucesión $a_n = 2^{2n-1}$. Os primeiros 5 termos son: 2, 8, 32, 128 e 512.

[32]Se na igualdade (2) tomamos $P = 4$, temos o caso particular que analiza Pascal:

$$\mathrm{C}_8^4 = \binom{8}{4} = \tfrac{8!}{4!(8-4)!} = \tfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70, \text{ sendo a metade } 35.$$

$$\mathrm{C}_8^5 = \binom{8}{5} = \tfrac{8!}{5!(8-5)!} = \tfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56. \quad C_8^6 = \binom{8}{6} = \tfrac{8!}{6!(8-6)!} = \tfrac{8\times7}{2\times1} = 28.$$

$$\mathrm{C}_8^7 = \binom{8}{7} = \tfrac{8!}{7!(8-7)!} = \tfrac{8}{1} = 8. \quad \mathrm{C}_8^8 = \binom{8}{8} = \tfrac{8!}{8!(8-8)!} = 1.$$

A suma total é

$$35 + 56 + 28 + 8 + 1 = 128 = 2^7.$$

[33]Pascal busca agora unha expresión para o valor da primeira partida, $V_1(D, P)$, en termos dos números combinatorios que usou no apartado anterior.

Cómpre dicir previamente: se temos unha partida de 5, por exemplo, e por tanto faltan 4, o xogo estará infaliblemente decidido en 8, que é o dobre de 4.

O valor da primeira partida de 5 sobre a aposta do outro é a fracción que ten por numerador a metade das combinacións de 4 sobre 8 (tomo 4 porque é igual ao número de partidas que faltan, e 8 porque é o dobre de 4) e por denominador ese mesmo numerador mais todas as combinacións superiores.[34]

Deste xeito, se teño unha partida de 5, correspóndenme, sobre os cartos do outro xogador, $\frac{35}{128}$: é dicir, se el puxo 128 pistolas, eu tomo 35 e déixolle o resto, 93.

Agora ben, esta fracción $\frac{35}{128}$ é a mesma que $\frac{105}{384}$, a cal obtense pola multiplicación dos pares para o denominador e a multiplicación dos impares para o numerador.[35]

Veredes sen dúbida todo isto, se vos molestades un pouco: e por isto encontro inútil entretervos máis.

6. Envíovos porén unha das miñas vellas táboas; non teño tempo para copiala, refareina.

Veredes que sempre o valor da primeira partida é igual ao da segunda, o que se encontra doadamente polas combinacións.

Veredes tamén que os números da primeira liña aumentan sempre, tamén os da segunda, e o mesmo os da terceira.

[34]Se o xogo vai a $P+1$ puntos, o primeiro xogador ten un punto, $p_1 = 1$, e o adversario ningún, $p_2 = 0$, entón o primeiro xogador necesita P puntos para ganar e o segundo $P+1$. Polo tanto, a aposta decídese como máximo en $N = 2P$ roldas. Aplicando a fórmula (1),

$$V_1(D, P+1) = G_1(D; P+1, 1, 0) - D = \left(\frac{1}{2^{2P-1}} \sum_{r=P}^{2P} \binom{2P}{r} - 1\right) D$$
$$= \frac{1}{2^{2P-1}} \left(\binom{2P}{P} + \sum_{r=P+1}^{2P} \binom{2P}{r} - 2^{2P-1} \right) D.$$

Tendo en conta que, pola igualdade (2), $2^{2P-1} - \sum_{r=P+1}^{2P} \binom{2P}{r} = \frac{1}{2}\binom{2P}{P}$, concluímos que

$$V_1(D, P+1) = \frac{1}{2^{2P-1}} \left(\binom{2P}{P} - \frac{1}{2}\binom{2P}{P} \right) D = \frac{\frac{1}{2}\binom{2P}{P}}{2^{2P-1}} D.$$

Logo a afirmación de Pascal é correcta. O numerador de $V_1(D, P+1)$ é a metade das combinacións sen repetición de $2P$ elementos tomados de P en P. De acordo coa igualdade (2), o denominador 2^{2P-1} coincide coa suma do numerador coas combinacións $\binom{2P}{r}$ para $r > P$.

[35]Finalmente, é fácil comprobar que:

$$V_1(D, P+1) = \frac{\frac{1}{2}\binom{2P}{P}}{2^{2P-1}} D = \frac{1}{2^{2P-1}} \binom{2P-1}{P} D$$
$$= \frac{(2P-1)!}{P!(P-1)!} \frac{1}{2^{2P-1}} D = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2P-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2P} D.$$

Pero logo os da cuarta diminúen, os da quinta etc. O que é estraño.[36]

Perténcenme, das 256 pistolas do xogador, por	Se xoga cada un 256 en					
	6 partidas	5 partidas	4 partidas	3 partidas	2 partidas	1 partida
A primeira partida..............................	63	70	80	96	128	256
A segunda partida........................	63	70	80	96	128	
A terceira partida........................	56	60	64	64		
A cuarta partida........................	42	40	32			
A quinta partida.......................	24	46				
A sexta partida........................	8					

Perténcenme, das 256 pistolas do xogador, por	Se xoga cada un 256 en					
	6 partidas	5 partidas	4 partidas	3 partidas	2 partidas	1 partida
A primeira partida..............................	63	70	80	96	128	256
As 2 primeiras partidas........................	126	140	160	192	256	
As 3 primeiras partidas........................	182	200	224	256		
As 4 primeiras partidas........................	224	240	256			
As 5 primeiras partidas........................	248	256				
As 6 primeiras partidas........................	256					

7. Non teño tempo de enviarvos a demostración dunha dificultade que sorprendía

[36]Na primeira táboa, o elemento que ocupa a cela situada na fila i e columna indicada por «k partidas» é o valor $V_i(256, k)$. Na segunda táboa, esa mesma cela contén o valor $B_i(256, k)$. Polo tanto, cada elemento da primeira táboa é a diferenza do que ocupa a mesma posición na segunda táboa co elemento situado na cela de arriba.

moito a M. (de Méré), pois el ten moi boa mente, pero non é xeómetra (o que é, como vostede sabe, un gran defecto),[37] e mesmo non comprende que unha liña matemática sexa divisible infinitamente e cre firmemente que está formada por un número finito de puntos, e nunca puiden quitarlle esa idea. Se vostede o puidese facer, volveriámolo perfecto.

Daquela dicíame que atopara unha falsidade nos números por esta razón:

Se tentamos quitar un seis cun dado,[38] hai vantaxe de obtelo en 4, como de 671 é a 625.

Se tentamos quitar un *sonnez* con dous dados, hai desvantaxe de tentalo en 24.[39]

E porén 24 é a 36 (que é o número de caras dos dous dados)[40] como 4 a 6 (que

---

[37]Refírese a que non é matemático. Xeometría e Matemáticas eran palabras sinónimas naquela época.

[38]En terminoloxía moderna, a probabilidade de non obter un seis nun lanzamento dun dado é

$$P(\text{Non } 6) = \tfrac{5}{6}.$$

Xa que son sucesos independentes, a de non obtelo en catro lanzamentos será

$$P(\text{Non 6 en 4 tiradas}) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^4 = \tfrac{625}{1296} = 0{,}482.$$

Por tanto, a probabilidade de obter polo menos un seis en catro lanzamentos dun dado será

$$P(\text{Un 6 en 4 tiradas}) = 1 - \tfrac{625}{1296} = \tfrac{671}{1296} = 0{,}518,$$

é dicir, que o apostante gañará máis da metade das veces.

O cabaleiro de Méré sabía empiricamente que era deste xeito. O seu cálculo baseábase na comparación entre casos favorables fronte a casos posibles. Así, cando lanzamos catro veces un dado de seis caras o número de resultados posibles é de $6^4 = 1296$. Agora calculamos cantos casos non conteñen un seis, $5^4 = 625$ (sería como eliminar unha cara). Daquela, o número de casos nos que si aparece un seis serían $1296 - 625 = 671$, que son as cifras calculadas polo cabaleiro de Méré.

[39]O resultado dun dobre seis no lanzamento de dous dados era coñecido como *sonnez*. O argumento é semellante ao anterior. A probabilidade de non obter un dobre seis nun lanzamento dun dado é

$$P(\text{Non dobre } 6) = \tfrac{35}{36}.$$

Como son sucesos independentes, a de non obtelo en vinte e catro lanzamentos será

$$P(\text{Non dobre 6 en 24 tiradas}) = \left(\tfrac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}509.$$

Por tanto, a probabilidade de obter polo menos un dobre seis en vinte e catro lanzamentos dun dado será

$$P(\text{Dobre } 6) = 1 - 0{,}509 = 0{,}491.$$

E daquela o apostante perderá máis da metade das veces.

Se seguimos o procedemento do cabaleiro de Méré, as cifras coas que deberiamos tratar son enormes. Habería 36^{24} resultados posibles dos que 35^{24} serían desfavorables, imposibles de calcular para el, máxime tendo e conta que non era matemático. Xa que logo, o cabaleiro de Méré debeu chegar á conclusión de que a aposta era desfavorable empiricamente, o que nos dá unha idea do tempo que pasaba xogando.

[40]Refírese ás variacións con repetición dun conxunto de n elementos tomados de r en r, que segue a fórmula $\mathrm{VR}_n^r = n^r$. Neste caso temos dous dados de seis caras, polo que calculamos $\mathrm{VR}_6^2 = 6^2 = 36$ que son en efecto todas as posibilidades cando se lanzan dous dados de seis caras cada un.

é o número de caras dun dado).[41]

Velaquí o que era o seu gran escándalo, que lle facía dicir abertamente que as proposicións non eran consistentes e que a Aritmética se desmentía: pero vostede verá facilmente a razón polos principios que posúe.[42]

Porei todo isto que fixen en orde, cando complete uns tratados xeométricos nos que levo traballando xa un tempo.

8. Fixen tamén algo de aritmética, sobre asuntos dos cales rógovos me enviedes a vosa opinión sobre esta demostración. Expoño o lema que todo o mundo sabe: que a suma de tantos números como se queira da progresión continua dende a unidade, como

$$1, 2, 3, 4,$$

sendo tomada dúas veces, é igual ao último termo, 4, multiplicado polo seguinte maior, 5: é dicir, que a suma dos números contidos en A,[43] sendo tomada dúas veces, é igual ao produto,[44]

$$A(A+1).$$

Agora vou coa miña proposición:[45]

A diferenza entre dous cubos consecutivos, diminuída a unidade, é o séxtuplo de todos os números contidos na raíz máis pequena.

---

[41]O cabaleiro de Méré non entendía que as dúas apostas desen resultados diferentes. Razoaba empregando a regra de tres: como $\frac{24}{36} = \frac{4}{6}$, apostar por un resultado de seis posibles en catro lanzamentos debe ser igual que apostar por un resultado de trinta e seis posibles en vinte e catro lanzamentos. Pero neste caso non se pode empregar a devandita regra de tres por non existir proporcionalidade entre os dous casos.

[42]Non se conserva a resposta de Fermat a esta carta, polo que non sabemos se chegou a ocuparse do tema. Pero vendo o que escribe Pascal, enténdese que consideraba o problema demasiado simple como para ocuparse nel.

[43]Enténdese que A é un número natural e Pascal alude á suma de todos os números naturais menores ou iguais que A, cuxo resultado é o seguinte:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + A = \frac{A(A+1)}{2}$$

de onde, como afirma, o dobre será $A(A+1)$.

[44]O uso do símbolo $\times$ para representar un produto aparece por vez primeira en 1631 nun texto de William Oughtred (1574-1660). Obviamente, na data desta carta aínda non era de uso xeral. Como era o corrente, Pascal optou polo latín, indicando o produto mediante a palabra *in*.

[45]De novo reproducimos o orixinal en latín:

Duorum quorumlibet cuborum proximorum differentia, unitate dempta, sextupla est omnium numerorum in minoris radice contentorum. Sint duae radices R, S, unitate differentes: dico $R^3 - S^3 - 1$ aequari summae numerorum in S contentorum sexies sumptae. Etenim S vocetur A: ergo R est $A+1$. Igitur cubus radicis R, seu $A+1$, est $A^3 + 3A^2 + 3A + 1^3$. Cubus vero S, seu A, est A^3 et horum differentia est $3A^2 + 3A + 1^3$, id est $R^3 - S^3$; igitur, si auferatur unitas, $3A^2 + 3A$ aeq. $R^3 - S^3 - 1$ Sed duplum summae numerorum in A seu S contentorum aequatur, ex lemmate, A in $(A+1)$ hoc est $A^2 + A$: igitur sextuplum summae numerorum in A contentorum aequatur $3A^2 + 3A$. Sed $3A^2 + 3A$ aeq. $R^3 - S^3 - 1$ igitur $R^3 - S^3 - 1$ aeq. sextuplo summae numerorum in A seu S contentorum. Quod erat demostrandum.

Sexan dúas raíces R, S, diferentes nunha unidade: digo que

$$R^3 - S^3 - 1$$

é igual a seis veces a suma dos números contidos en S.[46]

Sexa S chamado A: entón R é

$$A + 1.$$

Por tanto o cubo da raíz R, ou $A + 1$ é

$$A^3 + 3A^2 + 3A + 1^3.$$

O cubo de S, ou A, é

$$A^3$$

e a diferenza é

$$3A^2 + 3A + 1^3,$$

isto é

$$R^3 - S^3;$$

por tanto, se quitamos a unidade,[47]

$$3A^2 + 3A = R^3 - S^3 - 1.$$

Pero o dobre da suma dos números contidos en A ou S é igual, polo lema,

$$A(A + 1) \textit{ isto é } A^2 + A :$$

por tanto o séxtuplo da suma dos números contidos en A é igual a

$$3A^2 + 3A.$$

Pero

$$3A^2 + 3A = R^3 - S^3 - 1;$$

por tanto

$$R^3 - S^3 - 1$$

é igual ca o séxtuplo da suma dos números contidos en A ou S.

Que era o que se quería demostrar.[48]

[46] En terminoloxía moderna, $(n+1)^3 - n^3 - 1 = 6\frac{n(n+1)}{2}$.

[47] O uso do símbolo = para representar a igualdade aparece por vez primeira en 1557 nun texto de Robert Recorde (1510-1558), pero tardou séculos en ser aceptado, en parte pola oposición de Descartes, que propuña un símbolo alternativo. Pascal, no texto en latín, indica a igualdade mediante a abreviatura da palabra *aequalis*.

[48] *Quod erat demostrandum* é unha locución latina moi empregada no remate das demostracións matemáticas. Provén do grego, sendo utilizada xa por Euclides (ca. 325-265 a. e. c.) e Arquímedes (ca. 287-212 a. e. c.). Significa «que era o que se quería demostrar». Aínda na actualidade nas publicacións científicas aparece a abreviatura QED para marcar o final dunha demostración.

Non se me puxo dificultade ningunha sobre iso, pero díxoseme que era por razón de que todo o mundo está afeito hoxe a este método: e eu pretendo que, sen concederme graza, debe admitirse esta demostración como dun estilo excelente: agardo porén a vosa opinión con toda submisión.

Todo o que probei en Aritmética é desta natureza.

9. Velaquí aínda dúas dificultades:

Demostrei unha proposición no plano servíndome do cubo dunha liña comparada co cubo doutra; aseguro que é puramente xeométrica e do maior rigor.

Tamén resolvín o problema:

> De catro planos, catro puntos e catro esferas dadas, atopar unha esfera que, tocando as esferas dadas, pase polos puntos dados e deixe sobre os planos porcións de esfera nos cales poidan ser inscritos ángulos dados.

E este:

> De tres círculos, tres puntos e tres liñas calquera dadas, atopar un círculo que, tocando os círculos e os puntos, deixe sobre as liñas un arco no cal poida ser inscrito un ángulo dado.

Resolvín estes problemas plenamente, empregando unicamente na construción círculos e liñas rectas, pero, na demostración, utilizo seccións cónicas, parábolas ou hipérboles: afirmo porén que dado que a construción é no plano, a miña solución é no plano, e debe pasar por tal.

É ben pouco recoñecer o honor que vostede me fai por aturar os meus discursos importunándoo tanto tempo; non penso dicirlle só dúas palabras, e se non lle digo o máis importante que teño no corazón, que é que, canto máis o coñezo, máis o admiro e o honro, e que, se vostede vise ata que punto é así, concedería un lugar na súa amizade a quen é, Monsieur, voso etc.

PASCAL

Terceira carta

Pascal a Fermat

Luns 24 de agosto 1654*

Monsieur,

1. Non lle puiden abrir enteiramente os meus pensamentos sobre as partidas de varios xogadores no correo pasado, e mesmo teño certo reparo en facelo, por medo que esta admirable harmonía que hai entre nós e que tanto aprecio, comece a fraquear, pois temo que teñamos diferentes opinións sobre este asunto. Quero explicarlle todas as miñas razóns, e vostede farame a graza de corrixirme, se erro, ou de confirmarme, se estou no certo. Pídolle todo isto seria e sinceramente, pois non me terei por certo ata que vostede estea do meu lado.

Cando non hai máis que dous xogadores, o seu método, que procede por combinacións, é moi seguro; pero, cando hai tres, creo ter a demostración de que é incorrecto, a menos que vostede procedese dun xeito que eu non entendera. Pero o método que eu lle desvelei e do cal me sirvo en todos os casos é válido para todas as condicións imaxinables de todos os repartimentos posibles, mentres que o das combinacións (o cal non uso máis que para os casos particulares onde é máis curto que o xeral) non é válido máis que para esas ocasións e non para outras.

Estou seguro de que me farei entender, pero precisarei de algo de discurso e vostede de algo de paciencia.

2. Velaquí como procede vostede cando hai dous xogadores:

Se dous xogadores, xogando varias partidas, se atopan en tal estado que lle faltan dúas partidas ao primeiro e tres ao segundo, para atopar o repartimento, cómpre,

*Probablemente existiu unha carta de Fermat anterior a esta.

di vostede, ver en cantas partidas se decidirá completamente o xogo.

É doado adiviñar que será en catro partidas, de onde vostede conclúe que cómpre ver cantas combinacións hai de catro partidas entre dous xogadores e cantas delas hai que fagan ganar ao primeiro e cantas ao segundo e repartir o diñeiro seguindo esta proporción.[49] Apenas entendería ese argumento de non telo sabido antes por min mesmo; tamén vostede o tería escrito con ese pensamento. Por tanto, para ver cantas combinacións hai de catro partidas entre dous xogadores, cómpre imaxinar que xogan cun dado con dúas caras (dado que só son dous xogadores), como cara e cruz, e que lanzan catro deses dados (porque xogan catro partidas); e agora cómpre ver cantas posibilidades diferentes poden ter estes dados. Isto é doado de adiviñar: poden ser dezaseis, que é o segundo grao de catro, é dicir, o cadrado. Pois figurémonos que unha das caras está marcada cun a, favorable ao primeiro xogador, e a outra cun b, favorable ao segundo; entón estes catro dados poden caer nunha destas dezaseis posibilidades:[50]

$aaaa$	$aaaa$	$bbbb$	$bbbb$
$aaaa$	$bbbb$	$aaaa$	$bbbb$
$aabb$	$aabb$	$aabb$	$aabb$
$abab$	$abab$	$abab$	$abab$
1111	1112	1112	1222

E, como lle faltan dúas partidas ao primeiro xogador, todas as caras que teñen dous a fanlle ganar: por tanto hai 11 para el; e como lle faltan tres partidas ao segundo, todas as caras onde hai tres b poden facerlle ganar; por tanto hai 5. Xa que logo cómpre que repartan a suma como 11 é a 5.

Velaquí o seu método cando hai dous xogadores; sobre o cal vostede di que, de seren máis, non ía ser difícil facer os repartimentos polo mesmo método.

3. Sobre isto, Monsieur, teño que lle dicir que este repartimento para dous xogadores, baseado nas combinacións, é moi xusto e moi bo; pero que, se hai máis de dous xogadores, non será sempre xusto, e direille a razón desta diferenza.

Comuniquei o seu método aos nosos Messieurs, sobre o cal M. de Roberval indicoume esta obxección:

Está mal que se tome como base de repartimento a suposición de que se xoguen catro partidas, dado que, cando lle faltan dúas a un e tres ao outro, non é necesario que se xoguen catro, podendo ser que non se xoguen máis que dúas ou tres, ou certamente quizais catro.

Por esta razón el non vía por que se pretendía facer o repartimento baseándose xusto na condición finxida de que se xogarán catro partidas, visto que a condición natural do xogo é que non se xogará máis logo de que un xogador gane, e que polo

[49] Pascal resume a idea central de contar os casos continxentes futuros, equiprobables, para calcular as probabilidades desexadas.

[50] Naturalmente, os resultados dos lanzamentos deben lerse en columna.

menos, se isto non fose falso, non estaría demostrado, de xeito que el tiña sospeitas de termos feito un paraloxismo.

Respondinlle que eu non me baseaba tanto neste método das combinacións, o cal verdadeiramente non é axeitado nesta ocasión, como no meu outro método universal, ao que ningún caso escapa e que leva a demostración consigo, que atopa o mesmo repartimento precisamente que este das combinacións; e ademais demostreille a verdade do repartimento entre dous xogadores polas combinacións deste modo:

Non é certo que, se dous xogadores, encontrándose no caso hipotético de que lle falten dúas partidas a un e tres ao outro, acorden agora mutuamente que se xoguen catro partidas completas, é dicir, que se lancen os catro dados de dúas caras todos dunha vez, non é verdade, digo, que, se eles pactaron xogar as catro partidas, o repartimento debe ser, como dixemos, seguindo o conxunto de combinacións favorables a cada un?

El estivo de acordo e isto en efecto é demostrativo; pero negaba que a mesma cousa subsistise ao non restrinxirse a xogar as catro partidas. Díxenlle daquela deste xeito:

Non está claro que os mesmos xogadores, non estando obrigados a xogar as catro partidas, pero querendo deixar o xogo en canto un deles acade o seu número, poden, sen prexuízo nin vantaxe, obrigarse a xogar as catro partidas completas e que esta convención non cambia de xeito ningún a súa condición? Pois, se o primeiro gana as dúas primeiras partidas de catro, tendo ganado, refusaría xogar aínda dúas partidas, dado que, se as ganou, non ganou máis, e se as perde, non ganou menos? Pois estas dúas que o outro ganou non lle abondan, xa que precisa tres, e por tanto non hai bastante con catro partidas para facer que calquera dos dous puidese acadar o número que lles falta.

Certamente é fácil considerar que é absolutamente igual e indiferente para un e para outro xogar na condición natural ao seu xogo, que é rematar en canto un acade o seu número, ou xogar as catro partidas enteiras: por tanto, dado que estas dúas condicións son iguais e indiferentes, o repartimento debe ser completamente parello para un e para outro. Agora ben, é correcto cando eles están obrigados a xogar catro partidas, como demostrei: daquela é correcto tamén no outro caso.

Velaquí como o demostrei e, se vostede o ve con coidado, esta demostración está baseada na igualdade das dúas condicións, verdadeira e finxida, con respecto aos dous xogadores, e que nunha e noutra ganará sempre o mesmo e, se un gana ou perde nunha, ganará ou perderá noutra e xamais os dous terán o mesmo cómputo.

4. Sigamos o mesmo argumento para tres xogadores e supoñamos que lle falta unha partida ao primeiro, dúas ao segundo e dúas ao terceiro. Para facer o repartimento, seguindo o mesmo método das combinacións, cómpre buscar primeiramente en cantas partidas estará decidido o xogo, como fixemos cando había dous xogadores: isto será en tres, pois non poderían xogar tres partidas sen chegar necesariamente a unha decisión.

Cómpre ver agora cantas combinacións hai de tres partidas entre tres xogadores e cantas delas hai favorables a un, cantas a outro e cantas ao terceiro e, seguindo esta proporción, distribuír o diñeiro igual que se fixo na hipótese de dous xogadores.

Para ver cantas combinacións hai en total, é fácil: é a terceira potencia de 3, é dicir o seu cubo, 27. Pois, se se lanzan tres dados á vez (dado que cómpre xogar tres partidas), que teñan tres caras cada un (dado que hai tres xogadores), un marcado cun a favorable ao primeiro, outro cun b para o segundo, o outro cun c para o terceiro, é evidente que estes tres lanzados xuntos poden caer de 27 modos diferentes, a saber:[51]

aaa	aaa	aaa	bbb	bbb	bbb	ccc	ccc	ccc
aaa	bbb	ccc	aaa	bbb	ccc	aaa	bbb	ccc
abc	abc	abc	abc	abc	abc	abc	abc	abc
111	111	111	111	1	1	111	1	1
	2		2	222	2		2	
		3			3	3	3	333

Agora ben,[52] non lle falta máis que unha partida ao primeiro: xa que logo todas as posibilidades onde hai un a son para el: por tanto hai 19.

Ao segundo fáltanlle dúas partidas: xa que logo todas as posibilidades onde hai dous b son para el: por tanto hai 7.

Ao terceiro fáltanlle dúas partidas: xa que logo todas as posibilidades onde hai dous c son para el: por tanto hai 7.

Se disto se conclúe que sería necesario darlle a cada un segundo a proporción de 19, 7, 7, enganámonos demasiado groseiramente, e eu dubidaría en crer que vostede o fixese así; pois hai algúns casos favorables á vez ao primeiro e ao segundo, como abb, pois o primeiro atopa un a que necesita, e o segundo dous b que lle faltan; e do mesmo xeito é acc para o primeiro e o terceiro.

Xa que logo non é preciso contar estas caras que son comúns a dous como as que valen a suma enteira a cada un, senón soamente a metade. Pois, se saíse acc, o primeiro e o terceiro terían o mesmo dereito á suma, acadando cada un o seu número, polo que partirían o diñeiro pola metade; pero se sae aab, gana só o primeiro. Cómpre facer a suposición así:

Hai 13 resultados que dan todo ao primeiro e 6 que lle dan a metade e 8 que non lle dan nada: por tanto, se a suma enteira é unha pistola, hai 13 caras que lle valen cadansúa pistola, hai 6 que lle valen cada unha $\frac{1}{2}$ pistola e 8 que non valen nada.

Por tanto, en caso de repartimento, cómpre multiplicar:

[51] De novo, os resultados dos lanzamentos lense en columna.

[52] Pascal enumera correctamente os 27 casos posibles. A obxección que desenvolve a partir deste momento é chocante, pois non ten en conta que, a diferenza do caso de dous xogadores, neste a orde en que se producen os resultados é importante. Certamente, a secuencia de ganadores para os resultados enumerados na táboa é (de esquerda a dereita): *aaa aaa aaa aaa bbb abc aaa abc ccc*, o que dá 17 favorables a a, 5 favorables a b e outros 5 a c. Daquela, no repartimento xusto correspóndenlle $\frac{17}{27}$ da aposta ao primeiro xogador e $\frac{5}{27}$ tanto ao segundo como ao terceiro.

	13 por una pistola, que fan	13
	6 por unha metade, que fan	3
	8 por cero, que fan	0
Suma...	27	Suma... 16

e dividir a suma dos valores, 16, pola suma das posibilidades, 27, o que fai a fracción $\frac{16}{27}$, que é o que pertence ao primeiro en caso de repartimento, a saber, 16 pistolas de 27.

O repartimento para o segundo e o terceiro xogador atoparase igual:

Hai	4	posibilidades que valen 1 pistola: multiplicade.........	4
Hai	3	posibilidades que valen $\frac{1}{2}$ pistola: multiplicade.........	$1\frac{1}{2}$
Hai	20	posibilidades que non valen nada...............................	0
Suma...	27	Suma...	$5\frac{1}{2}$

Por tanto correspóndenlle ao segundo xogador 5 pistolas e $\frac{1}{2}$ das 27, e o mesmo para o terceiro, e estas tres sumadas, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ e 16, fan as 27.

5. Velaquí, paréceme, de que maneira habería que facer os repartimentos por combinacións seguindo o seu método, se vostede non ten outra cousa sobre este asunto que eu non saiba. Pero, se non me confundo, o repartimento non é xusto.

A razón diso é que se asume unha cousa falsa, que é que se xoga en tres partidas infaliblemente, mentres que a condición natural deste xogo é que só se xoga ata que un dos xogadores acade o número de partidas que lle falta, caso no que o xogo remata.

Non é que non poida acontecer que se xoguen tres partidas, pero pode ocorrer tamén que só se xoguen unha ou dúas, e non haxa necesidade ningunha de xogar outra.

Pero de onde vén, diráseme, que non estea permitido facer de novo a mesma suposición finxida que cando había dous xogadores? Velaquí a razón:

Na condición verdadeira destes tres xogadores, non hai máis ca un que pode ganar, pois a condición é que, en canto un ganou, o xogo remata. Mais, na condición finxida, dous poden acadar o número de partidas que precisan: a saber, se o primeiro gana unha que lle falta, e un dos outros, as dúas que lle faltan; pois non terán xogado máis que tres partidas, en lugar de que, cando non había máis ca dous xogadores, a condición finxida e a verdadeira concorrían en beneficio de todos os xogadores; e isto é o que fai a gran diferenza entre a condición finxida e a verdadeira.

Se os xogadores, atopándose no suposto da hipótese, é dicir, que lle falta unha partida ao primeiro e dúas ao segundo e dúas ao terceiro, deciden agora de común acordo que se xogarán tres partidas completas, e que os que acaden o número que lles falta tomen a suma enteira, se hai un só que o acade, ou, se o acadan dous, que a repartirán a partes iguais, neste caso, o repartimento debe facerse como acabo de explicar, ao primeiro correspóndenlle 16, ao segundo $5\frac{1}{2}$, ao terceiro $5\frac{1}{2}$, de 27 pistolas, e isto leva a demostración en si mesmo, supoñendo así esta condición.

Pero se xogan simplemente coa condición, non de que se xoguen necesariamente tres partidas, senón unicamente ata que un de entre eles acade as súas partidas, e que daquela o xogo remate sen dar posibilidade a outro de conseguilo, daquela correspóndenlle ao primeiro 17 pistolas, ao segundo 5, e ao terceiro 5 de 27.

E isto atópase polo meu método xeral que determina tamén que na condición anterior, correspóndenlle 16 ao primeiro, $5\frac{1}{2}$ ao segundo, e $5\frac{1}{2}$ ao terceiro, sen usar combinacións, pois funciona en todos os casos e sen obstáculo.

6. Velaquí, Monsieur, os meus pensamentos sobre este asunto sobre o cal non teño outra vantaxe sobre vostede máis que a de ter meditado moito máis; pero é pouca cousa con respecto a vostede, pois as súas primeiras olladas son máis penetrantes que a totalidade dos meus esforzos.

Non deixo de revelarlle as miñas razóns para agardar as súas opinións. Creo terlle feito coñecer por isto que o método das combinacións é bo entre dous xogadores por accidente, como tamén o é ás veces entre tres xogadores, como cando lle falta unha partida a un, unha a outro e dúas ao outro, pois nese caso o número de partidas no que o xogo estará rematado non é abondo para facer que ganen dous; pero non é xeral nin bo xeralmente agás para o caso no que sexa obrigado xogar un certo número de partidas exactamente.

De xeito que, como vostede non tiña o meu método cando me propuxo o repartimento de varios xogadores, senón unicamente o das combinacións, temo que sexamos de diferentes pareceres sobre o asunto.

Prégolle que me envíe de que xeito procede na investigación deste repartimento. Recibirei a súa resposta con respecto e ledicia, mesmo se o voso parecer me fose contrario. Eu son etc.

PASCAL

Cuarta carta

Fermat a Pascal

Sábado 29 agosto 1654*

Monsieur,

1. A nosa trama aínda continúa, e estou tan admirado como vostede de que os nosos pensamentos coincidan tan exactamente que pareza que tomasen a mesma ruta e fixesen o mesmo camiño. Os seus últimos tratados do triángulo aritmético e da súa aplicación son unha auténtica proba: e se non me equivoco, a súa undécima consecuencia ía por correo de Paris a Toulouse, mentres que a miña proposición dos números figurados, que é de feito a mesma, ía de Toulouse a Paris.[53]

Non me preocupa equivocarme mentres nos encontremos así, e estou convencido de que o verdadeiro medio para evitar fallar e este de colaborar con vostede. Pero, se digo máis, parecería un cumprido, e nós desterramos este inimigo das conversacións agradables e simples.

Será agora a miña quenda de darvos algún dos meus descubrimentos numéricos;

*Da lectura do texto dedúcese que Fermat aínda non recibira a carta anterior, pois responde aos descubrimentos de Pascal sobre o triángulo aritmético que este lle debeu enviar anteriormente. Hai tamén alusións a outras cartas que non se conservan.

[53]Fermat alude ao libro de Pascal *Traité du triangle arithmétique*, publicado como obra póstuma en 1665 pero do que circulaba unha versión impresa no ano 1654. Nel, Pascal presenta unha curiosa disposición de números naturais, formando un triángulo, do xeito seguinte (en notación moderna). O triángulo constrúese dispoñendo números (que chamaremos nós) de modo axeitado. Comezamos colocando o 1 como vértice superior. Na segunda fila avanzamos nos lados do triángulo poñendo dúas veces o número 1. Xa na terceira fila temos tres nós, o 1, seguido dun 2 entre os dous 1 da fila superior, e outro 1. Así continuamos, de xeito que cada nó resulta ser a suma dos dous inmediatamente superiores. O resultado, e a súa relación cos números combinatorios, é o seguinte:

pero o fin do parlamento aumenta as miñas ocupacións,[54] e ouso esperar da súa bondade que me conceda un respiro xusto e case necesario.

2. Porén responderei á vosa cuestión dos tres xogadores que xogan a dúas partidas. Cando o primeiro ten unha e os outros ningunha, a súa primeira solución é a correcta, e a división do diñeiro debe facerse en proporción de 17, 5 e 5; a razón é manifesta e sae sempre do mesmo principio, as combinacións deixan ver ante todo

---

Fila 0:	1	$\binom{0}{0}$
Fila 1:	1 1	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
Fila 2:	1 2 1	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
Fila 3:	1 3 3 1	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
Fila 4:	1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$
Fila 5:	1 5 10 10 5 1	$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$
Fila 6:	1 6 15 20 15 6 1	$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$
Fila 7:	1 7 21 35 35 21 7 1	$\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$ $\binom{7}{7}$

A idea non era nova, pero no seu libro Pascal comunicaba outras aplicacións e propiedades, e hoxe é coñecida como o *triángulo de Pascal*.

Entre as achegas citadas, concretamente na undécima, o autor indicaba que, se trazamos a bisectriz dende o vértice superior do triángulo, cada número resulta ser o dobre do situado á dereita ou á esquerda na fila anterior (Pascal dispuña os díxitos formando un triángulo isóscele rectángulo, de xeito que no seu caso a bisectriz era unha diagonal que comezaba no vértice do ángulo recto, e os números que había que duplicar eran os situados enriba ou á esquerda do considerado).

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	
1	3	6	10	15	21		
1	4	10	20	35			
1	5	15	35				
1	6	21					
1	7						
1							

Na carta que nos ocupa, Fermat sinala que el xa descubrira esa propiedade, recollida nunha proposición sobre números figurados (é dicir, os que poden dispoñerse formando polígonos regulares). Polo que sabemos, foi tal, e o descubrimento de Fermat, que era máis xeral que a undécima consecuencia de Pascal, fora comunicada ao abade Marin Mersenne en 1636. Fiel ao seu costume, Fermat non detallara a proba, pero pode que Pascal tivese coñecemento da propiedade, pois asistía regularmente ás reunión científicas do grupo capitaneado por Mersenne. En calquera caso resulta evidente a despreocupación de Fermat, que non reclama en momento ningún a súa prioridade no descubrimento, limitándose a sinalar a coincidencia.

[54]En 1631, Fermat comprou un cargo no Parlamento de Tolouse. O cargo permitiulle ennobrecer o seu apelido engadindo a palabra «de», de xeito que cambiou o seu nome de Pierre Fermat por Pierre de Fermat. En 1648 ascendeu a Conselleiro Real no mesmo Parlamento, cargo que mantivo durante o resto da súa vida.

que ao primeiro lle favorecen 17 posibilidades, mentres a cada un dos outros só 5.

3. Do resto, non hai nada no futuro que non lle comunique con toda franqueza. Considere porén, se lle parece oportuno, esta proposición:

As potencias cadradas de 2, aumentadas nunha unidade, son sempre números primos.

O cadrado de 2, aumentado nunha unidade, dá 5, que é número primo.

O cadrado do cadrado dá 16 que, aumentado nunha unidade, dá 17, número primo.

O cadrado de 16 dá 256 que, aumentado nunha unidade, dá 257, número primo.

O cadrado de 256 dá 65536 que, aumentado nunha unidade, dá 65537, número primo.

E así ata o infinito.

É unha propiedade sobre cuxa veracidade respondo.[55] A demostración é moi difícil e admito que aínda non a atopei completamente; non lle proporía buscala se eu tivese chegado ao final.

Esta proposición serve para descubrir números que están en razón dada coas súas partes alícuotas, sobre a cal fixen uns descubrimentos considerables. Falaremos disto noutra ocasión.

Son, Monsieur, voso etc.

FERMAT

En Toulouse, a 29 de agosto de 1654.

[55] Neste caso, a extraordinaria intuición de Fermat resultou errada. De feito, non se coñecen máis primos dese tipo que os que el mesmo sinala. Trátase dos números que se obteñen mediante a fórmula:

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Os cinco primeiros son en efecto primos, coñecidos como primos de Fermat:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3 \qquad F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17 \quad F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537.$$

Pero, como demostrou Leonhard Euler (1707-1783), o seguinte non é primo, pois

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417.$$

Non se sabe se hai algún primo máis dese tipo. Pero de existir, o seguinte terá máis de 40 000 cifras.

Quinta carta

Fermat a Pascal

Venres 25 setembro 1654*

Monsieur,

1. Non tema que o noso acordo se desminta, vostede mesmo confirmouno pensando en destruílo, e paréceme que respondendo a M. de Roberval por vostede, tamén respondeu por min.

Collo o exemplo dos tres xogadores, ao primeiro deles fáltalle unha partida, e a cada un dos outros dous dúas, que é o caso que vostede me propón.

Non atopo máis que 17 combinacións para o primeiro e 5 para cada un dos outros dous: pois, cando vostede di que a combinación *acc* é boa para o primeiro e para o terceiro, parece que non recorda que todo o que se fai logo de que un dos xogadores ganou non serve de nada.[56] Agora ben, facendo esta combinación ganar ao primeiro dende a primeira partida, que importa que o terceiro gane dúas despois, dado que, mesmo ganando trinta, todo iso sería superfluo?

O que vén de que, como vostede remarcou moi ben, esta ficción de estender o xogo ata un certo número de partidas non serve máis que para facilitar a regra e (segundo a miña opinión) igualar todas as oportunidades, ou ben, máis intelixiblemente, a reducir todas as fraccións a un mesmo denominador.

E a fin de que vostede non dubide máis, se en lugar de tres partidas, estende, no caso proposto, a suposición a catro, haberá non só 27 combinacións, senón 81, e cumprirá ver cantas combinacións farán ganar ao primeiro unha partida antes

*Resposta de Fermat á carta de Pascal do 24 de agosto.

[56]Fermat está a indicarlle a Pascal que debe ter en conta a orde na que aparecen os resultados.

que ganen dúas cada un dos outros, e cantas farán ganar a cada un dos outros dúas partidas antes que gane unha o primeiro. Atopará que as combinacións para a ganancia do primeiro serán 51 e as de cada un dos outros dous 15, o que vén sendo a mesma proporción.

Se vostede colle cinco partidas ou outro número que lle praza,[57] atopará sempre tres números en proporción de 17, 5, 5.

E así teño dereito a dicir que a combinación *acc* non vale máis que para o primeiro e non para o terceiro, e que *cca* non vale máis que para o terceiro e non para o primeiro, e que por tanto a miña regra das combinacións é a mesma para tres xogadores que para dous, e en xeral para todo número de xogadores.

2. Vostede puido ver xa pola miña carta precedente que non dubidaba coa solución verdadeira da cuestión dos tres xogadores, da que lle enviara os tres números decisivos, 17, 5, 5. Pero como M. de Roberval estará quizais máis satisfeito de ver unha solución sen nada finxido, e que esta pode quizais abreviar moitos casos, velaquí a temos no exemplo proposto:[58]

O primeiro pode ganar, ou nunha soa partida, ou en dúas, ou en tres.

Se gana nunha soa partida, cómpre que cun dado de tres caras acade o resultado favorable no primeiro intento. Un único dado produce tres posibilidades: este xogador ten por tanto $\frac{1}{3}$ das posibilidades, cando se xoga unha partida.

Se se xogan dúas partidas, pode ganar de dúas maneiras, ou cando o segundo xogador gana a primeira e el a segunda, ou cando o terceiro gana a primeira e el a segunda. Agora ben, dous dados producen 9 posibilidades:[59] este xogador ten por tanto $\frac{2}{9}$ das posibilidades, cando se xogan dúas partidas.

Se se xogan tres, só pode ganar de dúas maneiras, ou cando o segundo gana a primeira, o terceiro a segunda e el a terceira, ou cando o terceiro gana a primeira, o segundo a segunda e el a terceira: pois, se o segundo ou o terceiro xogadores ganasen as dúas primeiras, eles ganarían o xogo e non o primeiro xogador. Agora ben, tres dados producen 27 posibilidades:[60] por tanto este primeiro xogador ten $\frac{2}{27}$

---

[57] A afirmación de Fermat é correcta. Dado un número arbitrario de partidas $n \geq 3$, haberá $\mathrm{VR}_n^3 = 3^n$ posibilidades, dadas polas tiras de lonxitude n que se poden formar cos tres símbolos a, b e c. Gañará o primeiro xogador sempre que a tira comenze por: 1) $a\ldots$, 2) $ba\ldots$, 3) $ca\ldots$, 4) $bca\ldots$ ou 5) $cba\ldots$. Do tipo 1) hai 3^{n-1} tiras. De cada un dos tipos 2) e 3) hai 3^{n-2} tiras. De cada un dos tipos 4) e 5) hai 3^{n-3}. Polo tanto, a probabilidade de que gane o primeiro xogador é:

$$\frac{3^{n-1} + 2 \times 3^{n-2} + 2 \times 3^{n-3}}{3^n} = \frac{3^{n-3}}{3^n}\left(3^2 + 2 \times 3 + 2\right) = \frac{17}{27}.$$

Un razoamento similar pode aplicarse para os outros xogadores.

[58] Fermat formula un xenial procedemento alternativo que evita as «partidas finxidas».

[59] Sendo as caras de cada dado a, b e c, as nove posibilidades son: *aa*, *ab*, *ac*, *ba*, *bb*, *bc*, *ca*, *cb* e *cc*. Neste caso, as variacións con repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2, é dicir, $\mathrm{VR}_3^2 = 3^2 = 9$. Destas posibilidades Fermat só conta *ba* e *ca*, xa que aquelas nas que a figura en primeiro lugar corresponden ao caso anterior (o primeiro xogador gana na primeira partida).

[60] Ou sexa $\mathrm{VR}_3^3 = 3^3 = 27$. Eliminando as situacións nas que o primeiro xogador gana na primeira

das posibilidades cando se xogan tres partidas.

A suma das posibilidades que fan ganar a este primeiro xogador é consecuentemente $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ e $\frac{2}{27}$, o que fai en total $\frac{17}{27}$.

E a regra é boa e xeral en todos os casos, de xeito que, sen recorrer a artificios, as combinacións verdadeiras en cada número de partidas levan a súa solución e fan ver o que dixen ao comezo, que a extensión a un certo número de partidas non é máis que a redución de diversas fraccións a un mesmo denominador. Velaquí en poucas palabras todo o misterio, que nos porá sen dúbida de acordo, pois un e outro non buscamos máis que a razón e a verdade.

3. Agardo enviarlle polo San Martiño un resumo de todo o que descubrín de interese sobre os números. Vostede permitirame ser conciso e facerme escoitar unicamente por un home que comprende todo a media palabra.

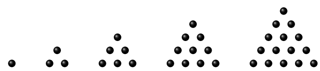
O máis importante que alí atopará concirne á proposición de que todo número está composto dun, de dous ou de tres triángulos; dun, de dous, de tres ou de catro cadrados; dun, de dous, de tres, de catro ou de cinco pentágonos; dun, de dous, de tres, de catro, de cinco ou de seis hexágonos, e así ata o infinito.[61]

Para obter isto, cómpre demostrar que todo número primo que exceda nunha

ou na segunda rolda, só gana na terceira nos casos *bca* e *cba*.

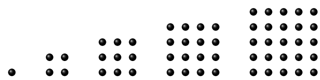
[61]Fermat alude aos números poligonais, é dicir, os números naturais que se poden dispoñer formando polígonos regulares. En concreto, cita os seguintes:

- Triangulares, que se obteñen cando imos sumando números naturais consecutivos e forman triángulos equiláteros. Veñen definidos pola fórmula $T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, sendo os primeiros:



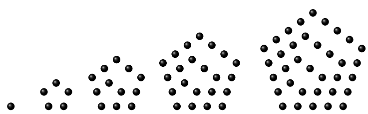
1 3 6 10 15

- Cadrados, que son o resultado de elevar ao cadrado os números naturais e forman cadrados. Veñen definidos pola fórmula $C_n = n^2$, sendo os primeiros:



1 4 9 16 25

- Pentagonais, que forman pentágonos e se obteñen pola fórmula $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$, sendo os primeiros:



1 5 12 22 35

- Hexagonais, que forman hexágonos e se obteñen pola fórmula $H_n = n(2n-1)$, sendo os primeiros:

unidade a un múltiplo de 4, está composto de dous cadrados, como 5, 13, 17, 29, 37 etc.[62]

Sendo dado un número primo desta natureza, como 53, atopar, por regra xeral, os dous cadrados que o compoñen.

Todo número primo, que exceda nunha unidade a un múltiplo de 3, está composto dun cadrado e da tripla doutro cadrado, como 7, 13, 19, 31, 37 etc.[63]

Todo número primo, que exceda 1 ou 3 a un múltiplo de 8, está composto dun cadrado e do dobre doutro cadrado, como 11, 17, 19, 41, 43 etc.[64]

Non hai triángulo ningún de números cuxa área sexa igual a un número cadrado.[65]

Isto estará seguido polo descubrimento de moitas proposicións que Bachet confesa ignorar, e que faltan no Diophante.[66]

Estou convencido de que conforme vostede coñeza o meu método de demostrar este tipo de proposicións, pareceralle fermoso e daralle oportunidade de facer novos descubrimentos; pois cómpre, como sabe, que *multi pertranseant ut augeatur scientia*.[67]

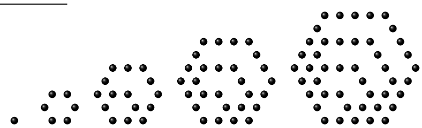
Se me queda tempo, falaremos logo dos números máxicos, e recordarei os meus vellos traballos sobre o asunto.

Son de todo corazón, Monsieur, voso etc.

FERMAT

Este 25 de setembro

Desexo a saúde de M. Carcavi como a miña e son sempre seu. Escríbolle dende a campiña, e isto quizais retarde as miñas respostas durante estas vacacións.



1 6 15 28 45

[62]En notación moderna: sendo p primo e n natural, se $p = 4n + 1$ entón existen dous números naturais a e b tales que $p = a^2 + b^2$.

[63]En notación moderna: sendo p primo e n natural, se $p = 3n + 1$ entón existen dous números naturais a e b tales que $p = a^2 + 3b^2$.

[64]En notación moderna: sendo p primo e n natural, se $p = 8n + 1$ ou $p = 8n + 3$, entón existen dous números naturais a e b tales que $p = a^2 + 2b^2$.

[65]É dicir, non existen ternas pitagóricas (números naturais a, b e c de xeito que $a^2 + b^2 = c^2$) tales que a área do triángulo rectángulo que determinan coincida co cadrado doutro número natural.

[66]Refírese á *Arithmetica*, un conxunto de trece libros de matemáticas, dos que se conservan seis, atribuídos a Diofanto de Alexandría. Fermat posuía un exemplar, traducido polo matemático francés Claude Gaspard Bachet, no que ía facendo anotacións. Na marxe dunha das súas páxinas enunciou o que sería coñecido como *o último teorema de Fermat*, que non foi probado ata máis de 350 anos despois, en 1995, polo matemático Andrew Wiles.

[67]Pasen moitos para que aumente o coñecemento.

Sexta carta

Pascal a Fermat

Martes 27 de outubro de 1654*

Monsieur,

A súa última carta satisfíxome plenamente. Admiro o seu método para os repartimentos, tanto máis porque o entendo moi ben; é completamente seu, e non ten nada en común co meu, e chega ao mesmo resultado doadamente. Velaquí o noso entendemento restablecido.

Pero, Monsieur, se eu concordei con vostede nisto, busque noutro lugar quen lle siga nos seus descubrimentos numéricos, dos cales fíxome a honra de enviarme os enunciados. Para min, confésolle que isto me queda moi lonxe; unicamente son capaz de admiralos, e suplícolle moi humildemente que ocupe o seu primeiro momento libre en finalizalos. Todos os nosos Messieurs víronos o pasado sábado e apreciáronos de

*Pascal responde á anterior carta de Fermat, aproveitando para despedirse. Atendendo á data do texto, é probable que o autor estivese a atravesar un proceso depresivo. De feito, un mes despois desta carta, o 23 de novembro de 1654, e tras un accidente cun coche de cabalos onde entendeu que salvara a vida por unha directa intervención divina, Pascal viviu unha experiencia mística trala que decidiu deixar as Matemáticas e dedicar o resto da súa vida ao servizo de Xesucristo. Viviu como un asceta, e visitou frecuentemente o mosteiro xansenista de Port-Royal des Champs, a 30 quilómetros de París. Os seus pensamentos filosóficos deron lugar a destacadas obras como *Les Lettres Provinciales*, en 1656, ou *Pensées*, publicada postumamente en 1670.

En 1658, para aliviar unha forte dor de moas concentrouse en resolver un problema relativo á cicloide, a curva descrita por un punto dunha circunferencia cando esta roda, sen esvarar, sobre unha recta. Esqueceu a dor. Interpretou o feito como un sinal de que ao Todopoderoso non lle incomodaba que reflexionase sobre esa curva. Ofreceu, baixo o pseudónimo Amos Dettonville, dous premios para aqueles xeómetras que resolvesen varios problemas relacionados coa cicloide. El mesmo publicou os seus resultados nas *Lettres à Carcavi*. Foi a súa última incursión nas Matemáticas.

todo corazón:[68] non se pode con frecuencia aturar a espera por cousas tan fermosas e tan desexables. Pense niso, se lle prace, e teña por seguro que son etc.

PASCAL

París, 27 de outubro de 1654.

[68]Naquela época era corrente que os científicos afeccionados se reunisen periodicamente para comunicarse os seus descubrimentos e intercambiar ideas. Estes grupos, chamados academias ou círculos, eran apoiados por un mecenas aristócrata e adoitaban xirar arredor dun personaxe principal. No caso de Pascal comezou sendo o monxe Marin Mersenne, e probablemente por mediación de Pierre de Carcavi comezou Fermat a manter contacto coa academia a partir de 1636. Morto Mersenne en 1648, e tras un breve período baixo a dirección de Carcavi, a responsabilidade de continuar o traballo recaeu en Jacques Le Pailleur. Como cada academia tiña o seu día da semana para celebrar as reunións e Pascal alude na súa carta ao sábado, non hai dúbida de que se refire á xuntanza convocada por Le Pailleur, á cal ademais do anfitrión e de Pascal asistían científicos como Pierre Gassendi, Ismaël Bouillaud, Giles de Roberval, Girard Desargues ou Pierre de Carcavi.

Sétima carta

Fermat a Pascal

Domingo 25 de xullo 1660*

Monsieur,

En canto souben que estamos máis preto o un do outro do que nunca antes o estivemos, non me puiden resistir a un plan para reanudar a nosa amizade do que roguei a M. de Carcavi ser o mediador: nunha palabra, pretendo abrazalo e conversar algúns días con vostede; pero, como a miña saúde non é moito mellor que a vosa, ouso esperar que por esta consideración me faredes a graza da metade do camiño, e que me compraceredes ao indicar un lugar entre Clermont e Toulouse,[69] onde non deixarei de ir cara a finais de setembro ou principios de outubro.

Se non toma vostede este repartimento[70] correrá o risco de verme na súa casa e de ter alí dous enfermos ao mesmo tempo. Espero con impaciencia noticias súas e son de todo o meu corazón,

Todo seu,

FERMAT

Toulouse, 25 de xullo de 1660.

*O 25 de xullo de 1660, Fermat escribiu desde Toulouse a Pascal, que se recuperaba dun grave empeoramento da súa saúde nunha propiedade do seu irmán maior preto de Clermont-Ferrand.

[69] A distancia en liña recta entre as dúas cidades é duns 275 quilómetros. A distancia de Toulouse a París e duns 590 quilómetros.

[70] Se ben é evidente que Fermat se refire a acordo, a palabra que usa é *parti*, que traducimos por repartimento, entendendo que está a facer un xogo de palabras aludindo ao contido da correspondencia que os autores intercambiaron no ano 1654. De feito, o ton xeral deste parágrafo resulta moito máis agarimoso, mesmo choqueiro, do acostumado.

Oitava carta

Pascal a Fermat

Martes 10 de agosto 1660*

Monsieur,

É vostede o home máis galante do mundo e eu son certamente un dos que mellor saben recoñecer esas calidades e admiralas infinitamente, sobre todo cando se unen aos talentos que singularmente se atopan en vostede. Todo isto obrígame a testemuñarlle da miña man o meu recoñecemento polo ofrecemento que me fai, aínda que me custa escribir e mesmo ler; pero a honra que me fai éme tan querida que non me podo apresurar demasiado en responderlle.

Direille pois, Monsieur, que se estivese con saúde, voaría a Toulouse e non permitiría que un home coma vostede dese un paso por un home coma min. Direille tamén que, aínda que vostede é de toda Europa aquel a quen considero o máis grande dos xeómetras, non sería esa a calidade que me atraería, senón que imaxino tanto enxeño e tanta honestidade na súa conversa que por iso o buscaría.

Pois, para falar francamente da Xeometría, paréceme o exercicio máis elevado da mente: pero ao mesmo tempo téñoa por tan inútil que fago pouca diferenza entre un home que só é xeómetra e un habelencioso artesán. Tamén a chamo o oficio máis fermoso do mundo, pero ao cabo tan só é un oficio, e dixen a miúdo que é boa para facer probas, pero non para o emprego da nosa forza.

De maneira que non daría dous pasos pola Xeometría e estou seguro de que vostede é da miña opinión. Pero agora hai algo máis en min, que estou en estudos tan afastados dese espírito que case nin lembro que existise. Metérame aí, hai un

*Esta carta é a resposta negativa de Pascal á proposta de Fermat de verse. Non se volveron escribir e nunca se encontraron. Pascal faleceu en 1662 e Fermat en 1665.

ano ou dous, por unha razón totalmente singular, e satisfeita, estou en risco de non volver pensar niso.

Ademais de que a miña saúde aínda non é o bastante forte, pois estou tan feble que non podo andar sen un caxato nin sosterme a cabalo, nin sequera podo facer máis de tres ou catro leguas en carruaxe.[71] De xeito que vin de París ata aquí en vinte e dous días. Os médicos prescríbenme as augas de Bourbon para o mes de setembro, e estou comprometido, na medida do posible, desde hai dous meses a ir de alí a Poitou por auga ata Saumur, para quedarme ata o Nadal co duque de Roannès,[72] gobernador de Poitou, que ten por min sentimentos que non merezo. Pero, como pasarei por Orléans indo para Saumur polo río, se a miña saúde non me permite pasar máis lonxe, irei de alí a París.

Velaquí, Monsieur, o estado da miña vida actual, do que estou obrigado a informalo para lle asegurar a imposibilidade na que estou de recibir a honra que se digna a ofrecerme e que desexo de todo corazón poder un día recoñecer, ou a vostede, ou aos señores seus fillos, aos que estou totalmente abnegado, tendo unha particular veneración polos que levan o nome do primeiro home do mundo.

Son etc.

PASCAL

De Bienassis, 10 de agosto de 1660.

[71] A legua medía a distancia que unha persoa percorría a pé nunha hora. Xa que logo, variaba en función dos diferentes países. No caso da legua francesa, equivalía a 4,44 quilómetros. Se como di Pascal facía tres ou catro cada xornada, a distancia andaría entre 13 e 18 quilómetros, claramente por debaixo do que unha carruaxe podía percorrer nun día.

[72] Artus Gouffien (1627-1696), duque de Roannez, íntimo amigo de Pascal e xansenista como el.

Bibliografía

Basulto Santos, J. e Camúñez Ruiz, J. A. (2007). El problema de los dados del caballero de Méré: soluciones publicadas en el siglo XVII. *SUMA*, 56:43–54.

Basulto Santos, J. e Camúñez Ruiz, J. A. (2007). *La geometría del azar*. Editorial Nivola.

David, F. N. (1962). *Games, gods and gambling: A history of probability and statistical ideas*. Hafner Publishing Company, New York.

Devlin, K. (2008). *The unfinished game: Pascal, Fermat, and the seventeenth-century letter that made the world modern*. Basic Books.

Diaconis, P. e Skyrms, B. (2018). *Ten great ideas about chance*. Princeton University Press.

Gorroochurn, P. (2014). Thirteen correct solutions to the "problem of points" and their histories. *The Mathematical Intelligencer*, 36:56–64.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability. A philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference*. Cambridge University Press.

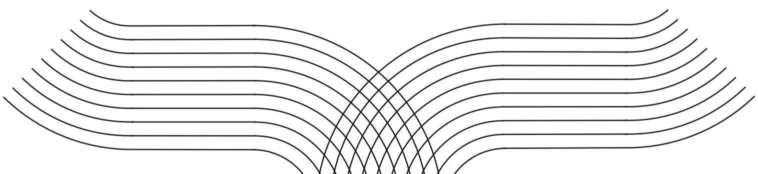
Rényi, A. (2022). *Cartas sobre probabilidad*. Soutiño Editora.

Rueda, R. (2018). Blaise Pascal y Pierre de Fermat ¿Los fundadores de la probabilidad? *Miscelánea Matemática*, 65:55–68.

Sandford, V. e Merrington, M. (1998). Fermat and Pascal on probability. https://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/pascal.pdf.

Tannery, P. e Henry, C., editores (1894). *Oeuvres de Fermat. Tome deuxième. Correspondance*. Gauthiers-Villars et fils.

Todhunter, I. (1865). *A history of the mathematical theory of probability. From the time of Pascal to that of Laplace*. Macmillan and Co.



Monografías

Serie Científico-Tecnolóxica

Últimas publicacións na colección

O libro que ninguén puido ler: Sobre as revolucións dos orbes celestes (2021)
José Nicanor Alonso Álvarez, Raúl Gómez Pato e Miguel Ángel Mirás Calvo

A rama atmosférica do ciclo hidrolóxico. Dende a evaporación oceánica ate a precipitación nos continentes (2021)
Marta Vázquez, Iago Algarra, Jorge Eiras-Barca e Rogert Sorí

Turbomáquinas hidráulicas (2019)
Concepción Paz Penín, Eduardo Suárez Porto, Miguel Concheiro Castiñeira e Marcos Conde Fontenla

A lista de Hilbert (2018)
José Nicanor Alonso Álvarez

El cobre en suelos de viñedo del noroeste de la Península Ibérica (2018)
David Fernández Calviño, Juan Carlos Novoa Muñoz e Manuel Arias Estévez

9 7 8 8 4 1 1 8 8 0 0 0 8

Correspondencia entre Fermat e Pascal

Tradución comentada

Esta historia comeza arredor dunha mesa de xogo, na Francia de mediados do século XVII. A mesa na que Antoine Gombaud gasta o tempo xogando aos dados. Adoita apostar a conseguir un dobre seis en 25 oportunidades, pois de tantas partidas sabe que é unha aposta gañadora en máis da metade dos casos. Curiosamente, para obter un seis cun único dado abonda con catro lanzamentos para ter vantaxe, feito inexplicable considerando as proporcións entre un caso e o outro. Por que 25 e non 24?

Un día, coincide nunha viaxe cun afamado científico, Blaise Pascal, preguntándolle a razón dese fallo na Aritmética. E o aludido comunícalle o asunto a un colega, tamén afeccionado ás matemáticas: Pierre de Fermat.

Ambos resolven o problema independentemente, compartindo os seus descubrimentos por carta. E o que comezou como curiosidade dun xogador impenitente acaba sendo o xerme dunha nova ciencia: a teoría da probabilidade. A explicación do azar mediante as matemáticas. E Pascal, entendendo o alcance do traballo desenvolvido, define este novo saber como a matemática do azar.

Neste texto presentamos a tradución ao galego das cartas conservadas, xunto coas explicacións matemáticas do seu contido. Veremos o carácter e as relacións entre os autores, xunto coas situacións vitais que van atravesando, pois as misivas adoitan conter referencias persoais e históricas. Saberemos as fórmulas de cortesía de uso obrigado entre autores de ciencia, traballo daquela a cargo maioritariamente de afeccionados. Os xigantes a cuxos ombros se subirían despois Newton e outros para ver máis lonxe.

Servizo de Publicacións
Universidade de Vigo