

Problemas de estructuras de barras

50 Exercicios resoltos paso a paso

Manuais

Serie manuais didácticos

Autores

Manuel Cabaleiro Núñez
Borja Conde Carnero
José Carlos Caamaño Martínez
Belén Riveiro Rodríguez

Manuel Cabaleiro Núñez
Borja Conde Carnero
José Carlos Caamaño Martínez
Belén Riveiro Rodríguez

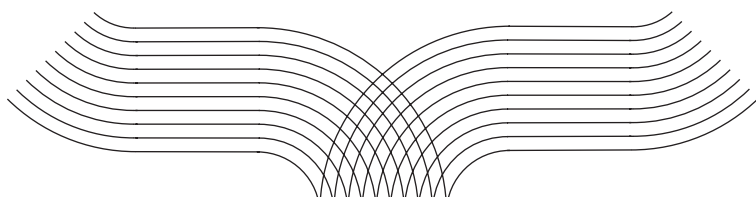


Os autores deste libro son profesores Titulares de Universidade na Escola de Enxeñería Industrial da Universidade de Vigo, na área de coñecemento de Mecánica dos Medios Continuos e Teoría de Estruturas, sendo docentes na materia de Teoría de Estruturas e Construcións Industriais. Todos os autores contan con mais de 10 anos de experiencia como docentes en materias relacionadas co cálculo de estruturas. Manuel Cabaleiro e J. Carlos Caamaño teñen mais de 10 anos de experiencia previa como profesionais na industria deseñando e calculando estruturas. Ademais, todos os autores forman parte do

grupo de investigación de Xeotecnoloxías Aplicadas da UVigo, onde traballan no ámbito do mantemento de infraestruturas do transporte terrestre e construcións históricas. Neste eido, desenvolven liñas de investigación centradas na avaliación de estruturas existentes e na monitorización da saúde estrutural de activos críticos como son as pontes. Froito desas investigacións, financiadas mediante proxectos competitivos nacionais e internacionais, estes autores contan con máis de 150 publicacións en revistas de prestixio internacional e participación en máis de 50 congresos internacionais.

Servizo de Publicacións

Universidade de Vigo



Manuais

Serie de manuais didácticos

n.º 086

Edición

Universidade de Vigo
Servizo de Publicacións
Rúa de Leonardo da Vinci, s/n
36310 Vigo

Deseño da portada

Tania Sueiro Graña
Área de Imaxe
Vicerreitoría de Comunicacións e Relacións Institucionais

Maquetación

Tórculo Comunicación Gráfica, S. A.

Fotografía da portada

Universidade de Vigo

Impresión

Tórculo Comunicación Gráfica, S. A.

ISBN (Libro impreso)

978-84-1188-008-4

Depósito legal

VG 143-2024

© Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo, 2024

© Manuel Cabaleiro Núñez, Borja Conde Carnero, José Carlos Caamaño Martínez e Belén Riveiro Rodríguez

Sen o permiso escrito do Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo, queda prohibida a reprodución ou a transmisión total e parcial deste libro a través de ningún procedemento electrónico ou mecánico, incluídos a fotocopia, a gravación magnética ou calquera almacenamento de información e sistema de recuperación.

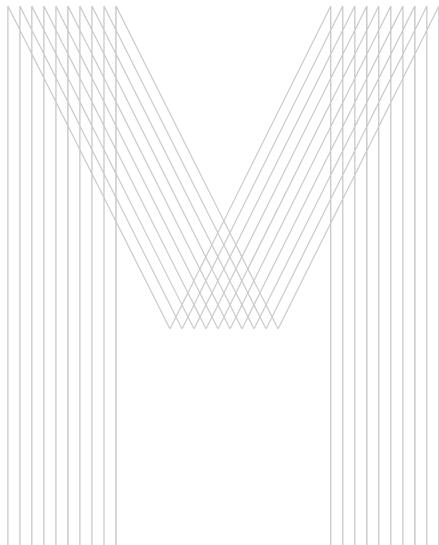
Ao ser esta editorial membro da **une**, garántense a difusión e a comercialización das súas publicacións no ámbito nacional e internacional.

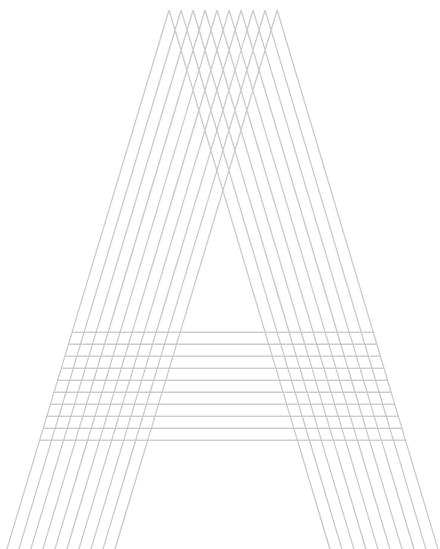
Servizo de Publicacións

Universidade de Vigo



HR EXCELLENCE IN RESEARCH





Este volume publícase
co financiamento da



**XUNTA
DE GALICIA**

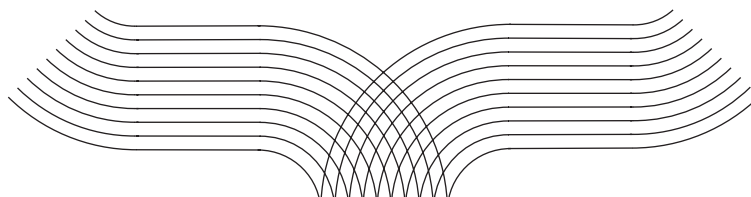
Problemas de estruturas de barras

50 Exercicios resoltos paso a paso

Autores

Manuel Cabaleiro Núñez
Borja Conde Carnero
José Carlos Caamaño Martínez
Belén Riveiro Rodríguez

1.1	Conceptos teóricos	11
1.1.1	Método dos nodos	12
1.1.2	Método das seccións	13
1.1.1	Cálculo de desprazamentos polo método dos traballos virtuais	14
1.1.1	Cálculo de estruturas hiperestáticas de grado 1	14
1.2	Problemas de estruturas articuladas	18
1.2.1	Exercicio A-1. Celosía simple de cuberta	18
1.2.2	Exercicio A-2. Celosía triangular invertida	24
1.2.3	Exercicio A-3. Torre eléctrica. Cargas verticais	28
1.2.4	Exercicio A-4. Torre eléctrica. Carga horizontal	31
1.2.5	Exercicio A-5. Torre eléctrica. Cargas parciais	37
1.2.6	Exercicio A-6. Celosía triangular con ángulos de 60° e 30°	40
1.2.7	Exercicio A-7. Estruturas articuladas. Grúa en ménsula	44
1.2.8	Exercicio A-8. Celosía plana tipo Pratt	49
1.2.9	Exercicio A-9. Celosía plana tipo Howe	56
1.2.10	Exercicio A-10. Celosía plana tipo Warren	61
1.2.11	Exercicio A-11. Grúa de porto	64
1.2.12	Exercicio A-12. Celosía triangular tipo Pratt	70
1.2.13	Exercicio A-13 Celosía con arriostramento en V	73
1.2.14	Exercicio A-14. Celosía plana tipo Warren de tres barras inferiores	78
1.2.15	Exercicio A-15. Celosía plana tipo Warren de dos barras inferiores	81
1.2.16	Exercicio A-16. Marco cadrado con unha diagonal	84
1.2.17	Exercicio A-17. Marco cadrado hiperestático con dúas diagonais	88
1.2.18	Exercicio A-18. Marco cadrado hiperestático en apoios	93
1.2.19	Exercicio A-19. Celosía invertida	98
1.2.20	Exercicio A-20. Celosía invertida con cargas superiores	107
1.3	Bibliografía capítulo 1. Estruturas de barras articuladas	110



2.1	Conceptos teóricos	111
2.1.1	Determinación de Momentos Flexores (M) e cortantes (V) en barras de pórticos	112
2.1.2	Criterio de signos de M	113
2.1.3	Coeficiente de transmisión t_{AB}	113
2.1.4	Rixidez ó xiro (K_{AB}): caso de extremo B perfectamente encastado	115
2.1.5	Rixidez ó xiro (K'_{AB}): caso de extremo B articulado	117
2.1.6	Rixidez ó xiro (K''_{AB}): caso de barra en ménsula	118
2.1.7	Equilibrio e xiro nun nodo ríxido, sen translación	119
2.1.8	Estruturas translacionais. Estados paramétricos. Orde de Translacionalidade (OT)	121
2.2	Problemas de estruturas de nodos ríxidos	122
2.2.1	Exercicio R-1. Pórtico de 3 alturas. Cálculo orde de translacionalidade	122
2.2.2	Exercicio R-2. Pórtico de 2 alturas, dúas plantas. Cálculo orde de translacionalidade	125
2.2.3	Exercicio R-3. Pórtico de 2 vanos, diferentes alturas. Cálculo orde de translacionalidade	128
2.2.4	Exercicio R-4. Estrutura de 1 nodo ríxido	131
2.2.5	Exercicio R-5. Pórtico de 3 barras	134
2.2.6	Exercicio R-6. Pórtico de 3 barras. Incremento de inercia no lintel	148
2.2.7	Exercicio R-7. Pórtico de 3 barras. Incremento de inercia nos pilares	152
2.2.8	Exercicio R-8. Pórtico de 3 barras con bases articuladas	156
2.2.9	Exercicio R-9. Pórtico de 3 barras con ménsula	159
2.2.10	Exercicio R-10. Viga continua	166
2.2.11	Exercicio R-11. Pórtico de dous vans e dúas alturas	174
2.2.12	Exercicio R-12. Pórtico continuo con piar e barra suspendida	181
2.2.13	Exercicio R-13. Pórtico de galería	185
2.2.14	Exercicio R-14. Pórtico de 6 barras con ménsula	190
2.2.15	Exercicio R-15. Pórtico simétrico de 3 piares e 2 vans	195
2.2.16	Exercicio R-16. Pórtico de 3 pilares e 2 vans. Con articulación	201

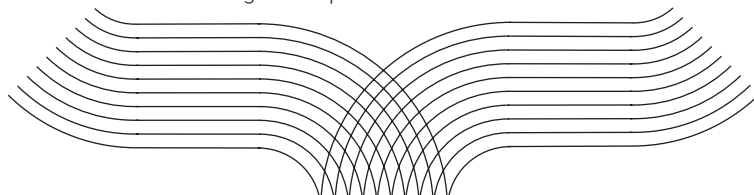
2.2.17	Exercicio R-17. Pórtico de 3 piares e 2 vans con carga asimétrica	205
2.2.18	Exercicio R-18. Pórtico de 3 barras. Desprazamento lateral por unha forza horizontal	208
2.3	Táboas de momentos de encastamento perfecto	215
2.3.1	Barras perfectamente encastadas en ambos extremos	215
2.3.2	Barras articuladas nun extremo e perfectamente encastadas no outro	217
2.4	Bibliografía capítulo 2, método de Cross	219

03

Cálculo matricial de estruturas de barras

221

3.1	Conceptos teóricos	221
3.1.1	Matriz de rixidez de barra de pórtico plano	221
3.1.2	Matriz de rixidez de barra de celosía plana	224
3.1.3	Outras matrices de rixidez	225
3.1.4	Táboas de forzas e momentos de empotramento perfecto	228
3.2	Problemas de calculo matricial de estruturas de barras	230
3.2.1	Exercicio M-1. Celosía triangular con carga puntual vertical	230
3.2.2	Exercicio M-2. Pórtico con carga puntual nun dos nós	244
3.2.3	Exercicio M-3. Celosía triangular con cargas puntuais vertical e horizontal	248
3.2.4	Exercicio M-4. Celosía triangular con carga uniformemente distribuída nunha das barras	252
3.2.5	Exercicio M-5. Pórtico con carga distribuída triangular	262
3.2.6	Exercicio M-6. Pórtico con carga puntual nunha das barras	267
3.2.7	Exercicio M-7. Viga continua con carga distribuída e puntual	272
3.2.8	Exercicio M-8. Viga continua con rótula na sección central e carga distribuída e puntual	277
3.2.9	Exercicio M-9. Viga continua con asento nun dos apoios. Resolución polo método directo	283
3.2.10	Exercicio M-10. Viga continua con asento nun dos apoios. Resolución polo método indirecto	288
3.2.11	Exercicio M-11. Estrutura de nós ríxidos con carga térmica e uniformemente distribuída	293
3.2.12	Exercicio M-12. Estrutura de nós articulados con carga puntual e apoio elástico	298
3.2.13	Exercicio M-13. Estrutura de nós articulados con carga distribuída, térmica e apoio elástico	301
3.3	Bibliografía capítulo 3.	306



1. Estruturas de barras articuladas

1.1 Conceptos teóricos

- **Estruturas reticulares de barras articuladas** son estruturas formadas por barras onde os nodos están articulados, permitindo o xiro das barras. Polo tanto, nos nodos non se pode transmitir momentos e as barras traballan so a tracción ou compresión.

- **Suposto para cálculo das estruturas articuladas**, vamos supor sempre que:

- Os nodos son totalmente articulados.
- As barras son sempre rectas .
- As cargas están sempre nos nodos.
- As barras traballan so a tracción ou compresión.

11

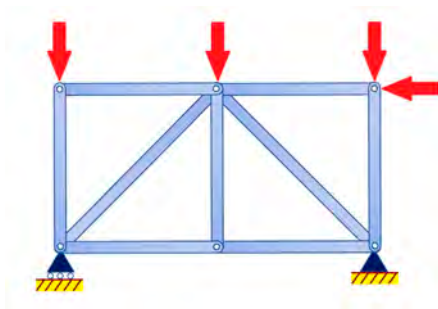
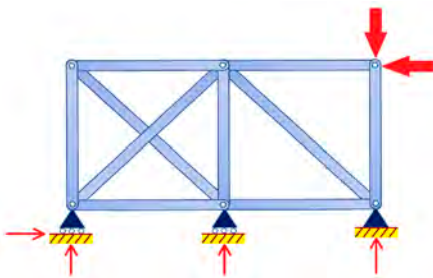


Figura 1.1 Exemplo de estrutura reticulada de barras articuladas con múltiples cargas.

-**Grado hiperestaticidade total (GHT)** e a diferencia entre nº ecuacións de equilibrio dispoñibles para resolver a estrutura e o número de incógnitas (esforzos en barras + reaccións en apoios)

-**Grado de hiperestaticidade total (GHT)** e igual a suma do numero de barras (B) da estrutura mais o numero de reaccións (R) menos o dobre do numero de nodos (N) de la estrutura.

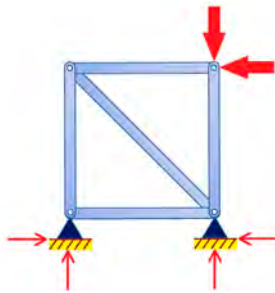


$$\text{GHT} = (B + R) - 2N$$

Figura 1.2 Exemplo de estrutura reticulada de barras articuladas hiperestática.

Grado de hiperestaticidade externo (GHE) e a diferenca entre o número de reaccións (R) nos apoios e o numero de ecuacións de equilibrio externo da estrutura completa, normalmente 3.

12



Exemplo: $GHE=R-3= 4-1=1$

$$GHE=R-3$$

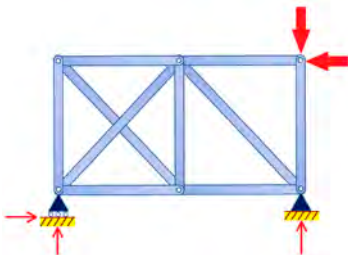
Figura 1.3 Exemplo de estrutura a de barras articuladas hiperestatica externamente de grado 1.

A estrutura da figura 1.3 e hiperestática externamente, porque ten una reacción mais das que son necesarias

- **Grado hiperestaticidade interno (GHI)** e o número de barras que ten de mais a estrutura para ser estable e polo lo tanto isostática internamente. E igual a diferenca entre o grado de hiperestaticidade total e o externo

$$GHi = GHT - GHE$$

Exemplo:



$$GHT=(10+2)-2*6= 1$$

$$GHE=3-3=0$$

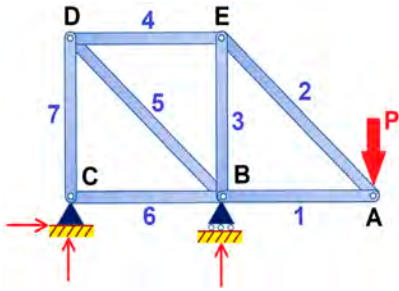
$$GHi= 1-0=1$$

Figura 1.4 Exemplo de estrutura a de barras articuladas hiperestatica internamente de grado 1.

A estrutura da figura 1.4 ten una barra mais das necesarias para que a estrutura sexa estable. Sobra una das barras que se cruzan no marco da esquerda

1.1.1 Método dos nodos

O método dos nodos empregase para determinar os esforzos nas barras nas estruturas articuladas isostáticas. Neste método comezase por un nodo onde se teña como máximo dúas incógnitas (valor dos esforzos nas barras ou reaccións) e se coñeza como mínimo unha forza ou barra. As forzas de cada barra débúxanse como vectores na dirección da barra e saíndo do nodo, e dicir supoñendo (R.A.G) sempre que a barra traballa a tracción (se despois dá negativo quere dicir que esta realmente a compresión). Ó diagrama de forzas do nodo se lle aplica equilibrio estático mediante as ecuacións de sumatório de forzas en X igual a 0, e sumatório de forzas en Y igual a 0. Despois continuamos polo seguinte nodo que teña máximo dúas incógnitas



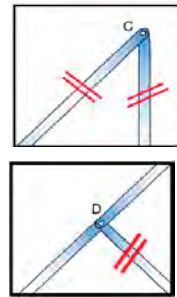
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & -N1 - N2 \cos 45^\circ &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & N2 \sin 45^\circ - P &= 0 \end{aligned}$$

13

Figura 1.5 Exemplo de estrutura a de barras articuladas isostatica con carga nun nodo.

Simplificacións:

- Nodo sen carga e con só 2 barras: ningunha das 2 barras traballa
- Nodo sen carga, con 2 barras aliñadas e unha terceira formando ángulo coas anteriores, o axial da terceira barra e nulo



1.1.2 Método das seccións

O método das seccións consiste en dividir a celosía en dúas partes mediante unha liña que corte máximo tres barras. Nos puntos de corte das barras pónselle a forza equivalente da barra. Despois Quedarnosvos co lado que teña máximo tres incógnitas. Finalmente aplicamos as tres ecuacións de equilibrio da estática: forzas en X igual a cero, forzas en Y igual cero, momentos respecto un punto igual a cero.

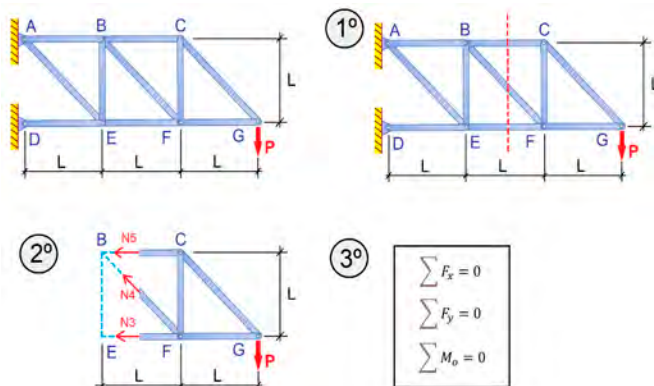


Figura 1.6 Exemplo de calculo polo método das seccións.

1.1.1 Cálculo de desprazamentos polo método dos traballos virtuais

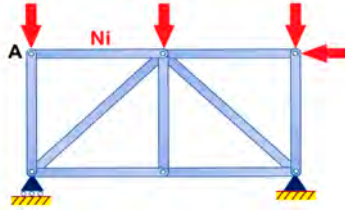


Figura 1.7 Exemplo de estrutura de barras articuladas isostática na que se vai calcular o desprazamento horizontal no nodo A.

Os pasos a seguir no cálculo dos desprazamentos polo método dos traballos virtuais son:

- 1º Calcular os esforzos (N_i) en cada unha das barras debido as cargas externas.
- 2º Sobre a estrutura sen cargas externas, situar una carga de valor 1, no nodo e dirección onde se quere calcular o desprazamento. Calcular o valor dos esforzos (n_i) virtuais debido a carga de valor 1 en cada una das barras

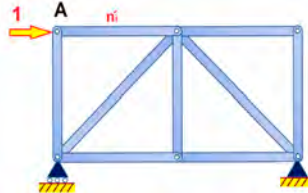


Figura 1.8 Exemplo de estrutura de barras articuladas isostática na que se situou unha carga horizontal de valor 1 no nodo A, para así calcular o desprazamento horizontal do nodo A.

- 3º Aplicar a expresión baseada no principio dos traballos virtuais para o calculo de desprazamento en celosías.

$$\delta_j = \sum \frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} n_i$$

De forma xenérica, cando tamén hai cambios de temperatura ou erros na lonxitude das barras pódese empregar a expresión:

$$\delta_j = \sum \left(\frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} + \alpha_i \cdot L_i \cdot \Delta t + e_i \right) n_i$$

1.1.1 Cálculo de estruturas hiperestáticas de grado 1.

Os pasos a seguir para calcular estruturas hiperestáticas de grado 1 son:

- 1º Identificar o elemento ou apoio que produce a hiperestaticidade.

Hiperestaticidade por apoios

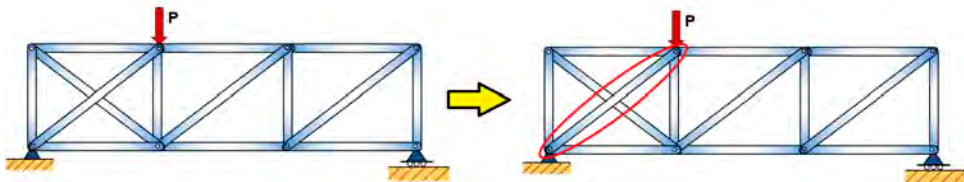


Figura 1.9 Exemplo de estrutura hiperestática por barras

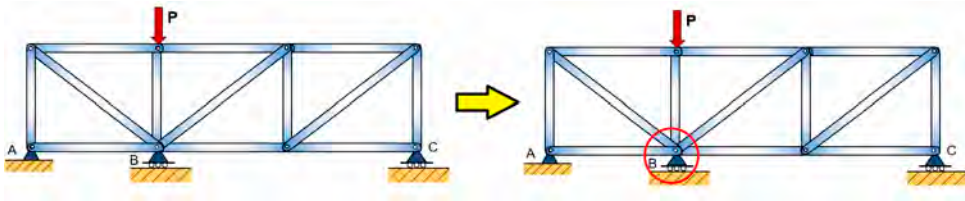


Figura 1.10 Exemplo de estrutura hiperestática por apoios .

2º Xerar a isostática fundamental da estrutura.

No caso de hiperestaticidade por apoios, temos que substituír un dos apoios redundantes por unha forza equivalente á reacción X que se produce en dito apoio. Despois debemos empregar a ecuación de compatibilidade da deformación no apoio substituído, como ecuación adicional para resolver a hiperestaticidade.

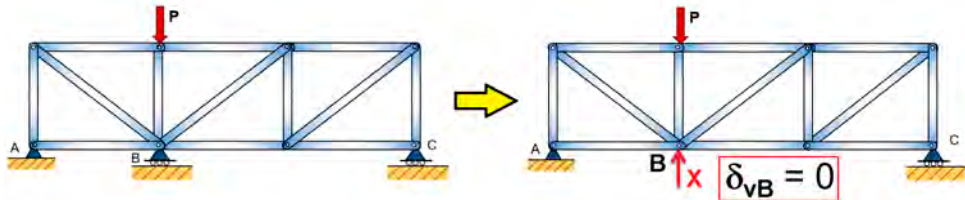


Figura 1.11 Exemplo isostática fundamental de estrutura hiperestática por apoios .

No caso de hiperestaticidade por barras, temos que cortar unha das barras redundantes e manter o axial que soportaba dita barra mediante unhas forzas X equivalentes a o axial nos extremos do corte. Despois debemos empregar a ecuación de compatibilidade da deformación no punto de corte de dita barra, como ecuación adicional para resolver a hiperestaticidade. (Ver figura 1.11, por ser o punto a e a' o mesmo punto, a deformación relativa entre ambos é cero)

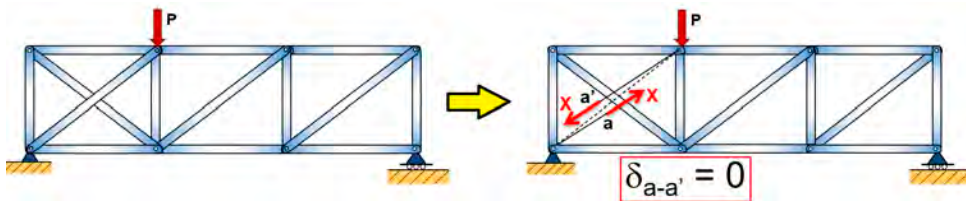


Figura 1.12 Exemplo isostática fundamental de estrutura hiperestática por barras .

3º Descompor a isostática fundamental da estrutura.

3.1 Para o caso de hiperestaticidade por barras:

a) Primeiro, cálculo do valor dos axiais da estrutura sen a barra que sobra e cas cargas externas.

b) Segundo, cálculo do valor dos axiais da estrutura sen cargas externas pero co axial X da barra que eliminamos no paso anterior. Pero para simplificar os cálculos vamos substituír o axial X , por unha carga de valor 1, e os resultados obtidos serán multiplicados pola constante de valor X .

16

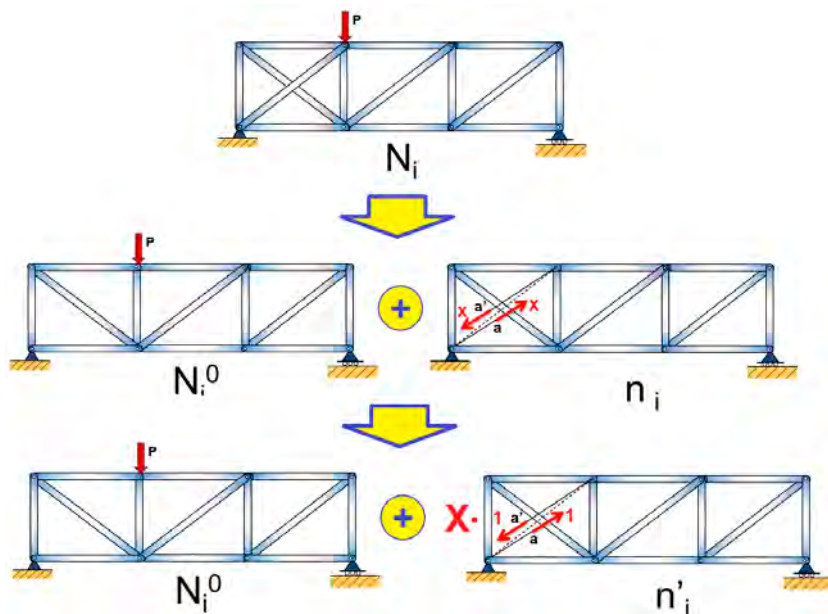


Figura 1.13 Exemplo de descomposición da isostática fundamental dunha estrutura hiperestática por barras .

3.1 Para o caso de hiperestaticidade por apoios:

a) Primeiro, cálculo do valor dos axiais da estrutura sen o apoio que sobra e cas cargas externas.

b) Segundo, calculo do valor dos axiais da estrutura sen cargas externas pero coa reacción X do apoio que eliminamos no paso anterior. Pero para simplificar os cálculos vamos substituír a reacción X , por unha carga de valor 1, e os resultados obtidos serán multiplicados pola constante de valor X

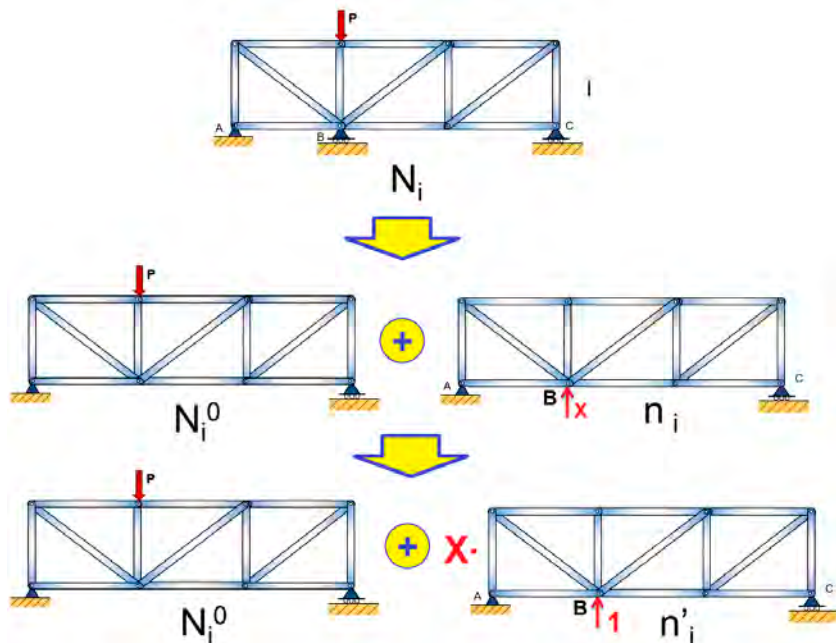


Figura 1.14 Exemplo de descomposición da isostática fundamental dunha estrutura hiperestática por apoios

4º Cálculo do valor de X. Aplicar a expresión inferior, baseada no principio dos traballos virtuais e a ecuación da compatibilidade da deformación, para o cálculo do valor de X, e polo tanto do axial á reacción da estrutura hiperestática

$$\sum \frac{N_i^0 \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} n'_i + X \cdot \sum \frac{n_i^2 \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} = 0$$

No caso de que exista cambio de temperatura ou error xeométrico

$$\sum \left(\frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} + \alpha_i \cdot L_i \cdot \Delta t + e_i \right) n'_i + X \cdot \sum \frac{n_i^2 \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} = 0$$

5º Cálculo dos axiais e reaccións da estrutura hiperestática.

$$N_i = N_i^0 + X \cdot n'_i$$

$$R_i = R_i^0 + X \cdot r'_i$$

Para información mais detallada sobre a teoría de estruturas de barras articuladas pódese consultar as referencias bibliográficas: Beer & Johnston (1987), Argüelles, R. (1986), Vázquez, M. (1991).

1.2 Problemas de estruturas articuladas

1.2.1 Exercício A-1. Celosía simple de cuberta

Na celosía de barras articuladas das figuras calcular:

- Grado de hiperestaticidade da celosía "a"
- Esforço en cada unha das barras para a carga P de 1kN e $L = 0.5\text{m}$ da celosía "a"
- Calcular a sección de redondo macizo de aceiro (S235) necesario para fabricar a celosía "a". Empregar un coeficiente de seguridade de 1.5. Optimizar ó máximo o gasto de aceiro, empregando como máximo dúas seccións diferentes.
- Calcular o desprazamento vertical do nodo C para a situación de carga e sección de barras anterior.
- Esforço en cada unha das barras para da celosía "b" onde as cargas están nas barras superiores e se eliminou a barra 3.

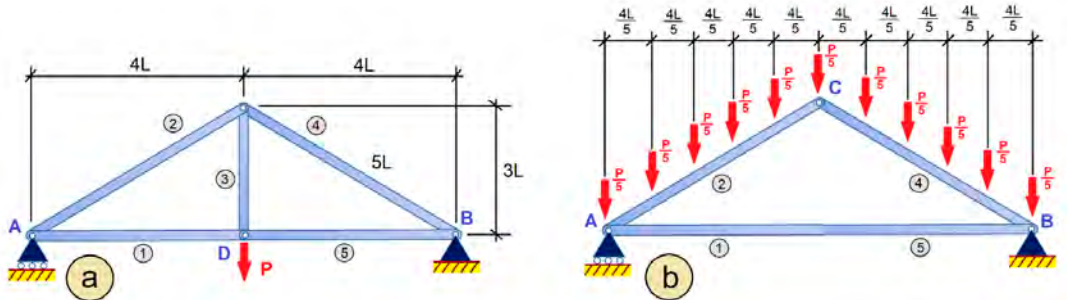


Figura A.1.1 Celosías simples de cuberta. a) Con barra vertical central e carga puntual. b) Sen barra central e con varias cargas nas barras superiores.



Figura A-1.2 Exemplo de celosía simple de cuberta.

Solución caso "a".

1º Calculamos o grado de hiperestaticidade

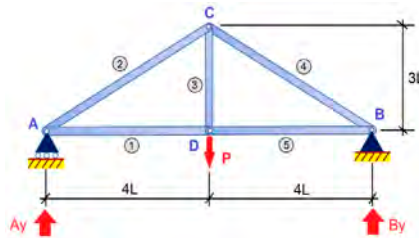
$$\begin{aligned} GHT &= (B+R) - 2N \\ GHE &= R - 3 \\ GHi &= GHT - GHE \end{aligned}$$

$$GHT = 5 + 3 - 2 \cdot 4 = 0$$

$$GHE = 3 - 3 = 0$$

$$GHi = 0 - 0 = 0$$

Esta celosía é isostática tanto internamente como externamente



2º Calculo das reacción nos apoios

$$\sum F_x = 0 \quad Bx = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad By \cdot 8L - P \cdot 4L = 0 \quad Cy = \frac{1}{2}P$$

$$\sum F_y = 0 \quad Ay + By - P = 0 \quad Ay = \frac{1}{2}P$$

3º Calculo dos esforzos en cada barra polo método dos nodos

Nodo A

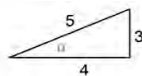


$$\sum F_x = 0 \quad N2 \cos \alpha + N1 = 0; \quad N2 \frac{4}{5} + N1 = 0$$

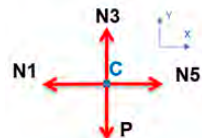
$$\sum F_y = 0 \quad N2 \sin \alpha + Ay = 0; \quad N2 \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = 0$$

$$N1 = \frac{2}{3}P \quad N2 = -\frac{5}{6}P$$

O seno e coseno quitámoslos por trigonometría



Nodo C



$$\sum F_x = 0 \quad N5 - N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N3 - P = 0$$

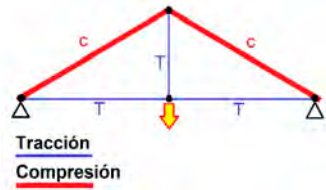
$$N3 = +P \quad N5 = \frac{2}{3}P$$

Por simetría sabemos que:

$$N2 = N4 = -\frac{5}{6}P$$

Resumen valores das barras:

Barra	Li	Ni	Ni (N)	
1	4L	2/3 P	667	T
2	5L	-5/6 P	-834	C
3	3L	P	1000	T
4	5L	-5/6 P	-834	C
5	4L	2/3 P	667	T



20 4º Cálculo das seccións necesarias. Claramente hai dous tipos de barras, as que traballan a tracción e con un cable e suficiente, e as que traballan a compresión as cales deben ser calculadas a pandeo e a sección ten que ser suficiente para non pandear.

Cálculo barra a tracción, collemos a barra con máxima tracción:

$$\sigma = \frac{F \cdot C_s}{A} = \frac{1000N \cdot 1.5}{\pi \frac{D^2}{4}} = 235 \frac{N}{mm^2} \quad D = 2.85mm \approx 3mm$$

Para o cálculo da barra a compresión, colleremos a barra con máxima compresión e calculáremola empregando a ecuación de Euler

$$P_C \cdot C_s = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_p^2}$$
$$834 \cdot 1.5 = \frac{\pi^2 \cdot \frac{200000N}{mm^2} \cdot \frac{\pi D^4}{64}}{(2500mm)^2} \quad D = 16,9 \approx 20 mm$$

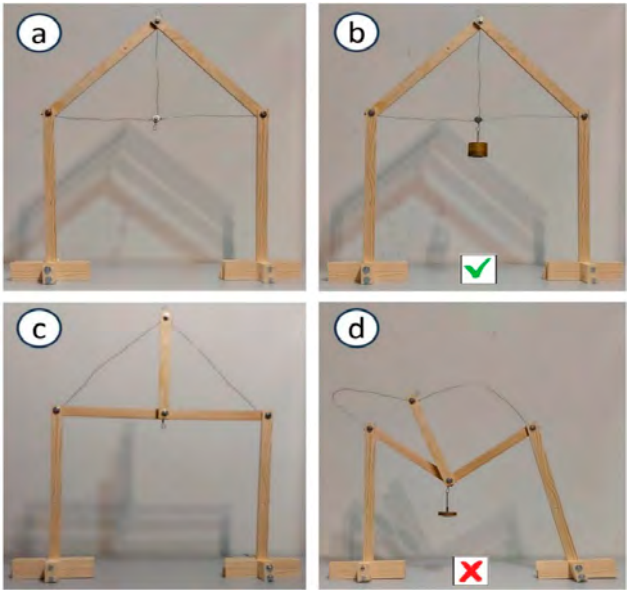
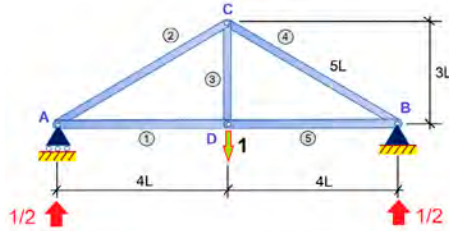


Figura A-1.3. Nesta figura podemos observar como na montaxe (a), que sería coas barras de tracción con cables e as de compresión con barras de madeira, ó aplicarlle a carga (figura b) a celosía traballa correctamente. Mentres que na montaxe (c), onde as barras a compresión teñen cables e as de tracción barras de madeira, cando se lle aplica carga, a celosía colapsa (figura d).

5º Cálculo do desprazamento vertical no nodo D, para elo seguiremos os seguintes pasos:

5.1 Cálculo dos axiais debidos a unha carga virtual no nodo onde se quere calcular o desprazamento

Debido á simetría da celosía e á simetría da carga os valores pódense quitar de forma directa



21

$$n_1' = \frac{2}{3}; \quad n_2' = -\frac{5}{6}; \quad n_3' = P; \quad n_4' = -\frac{5}{6}; \quad n_5' = \frac{2}{3}$$

5.2 Cálculo dos desprazamentos mediante a ecuación de traballos virtuais, segundo a carga de valor 1 colocada en dirección vertical no nodo D. Valores postos na táboa inferior.

$$\delta_{vD} = \sum \frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} n_i'$$

Táboa A-1.1. Táboa co resumo de valores das barras e valor de deformación total:

Barra	Ni (N)	Li (mm)	ni	Ai (mm)	Ni Li ni / A E	ΔvD (mm)
1	2/3 P	4L	2/3	7,1	(16/9)PL/(Ai*E)	0,628
2	-5/6 P	5L	-5/6	314,2	(125/36)PL/(Ai*E)	0,028
3	P	3L	1	7,1	(3)PL/(Ai*E)	1,060
4	-5/6 P	5L	-5/6	314,2	(125/36)PL/(Ai*E)	0,028
5	2/3 P	4L	2/3	7,1	(16/9)PL/(Ai*E)	0,628
						2,372

$$\delta_{vC} = 2,37 \text{ mm}$$

Solución caso “b”

1º Pasamos as cargas ós nodos (nota: as cargas que van directamente ós apoios (A, B) xa non as consideramos no calculo por nodos). No nodo C súmanse os 2P/5 de cada barra mais a propia carga P/5 que xa esta directamente no nodo, dando un total no nodo C de valor P.

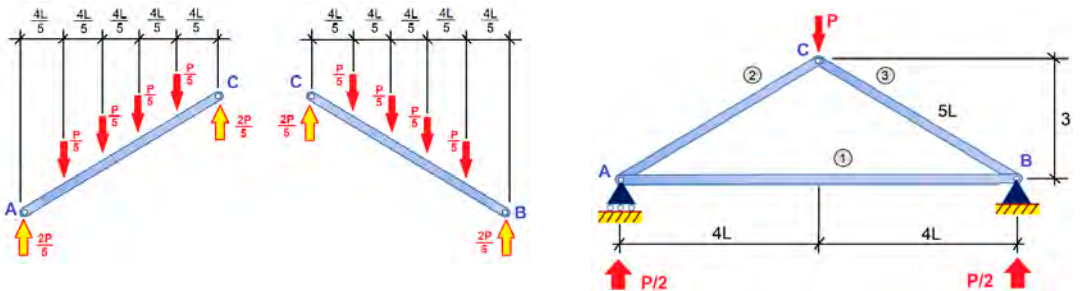
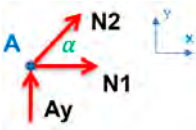


Figura A-1.3. Paso das cargas nas barras ós nodos.

E facemos o calculo das reaccións nos apoios. Neste caso por ser a celosía simétrica e a carga e apoios tamén, o valor das reaccións serán $P/2$.

2º Calculo dos esforzos en cada barra polo método dos nodos

Nodo D



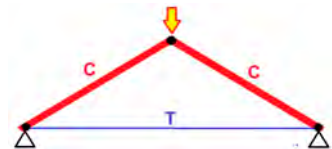
$$\sum F_x = 0 \quad N2 \cos \alpha + N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{P}{2} + N2 \sin \alpha = 0$$

$$N2 = -\frac{5}{6}P \quad N1 = +\frac{2}{3}P$$

Táboa A-1.2 Táboa cos axiais das barras e esquema de barras a tracción e compresión

Barra	Li	Ni	Ni (N)	
1	8L	2/3 P	667	T
2	5L	-5/6 P	-834	C
3	5L	-5/6 P	-834	C



Como podemos observar para a barra 1 por estar a tracción, con un cable é suficiente. Para a barra 2 e 3 por estar a compresión, hai que calculalas a pandeo.

Este tipo de celosía é moi utilizado en construcións rurais (ver figura A-1.4), onde as barras superiores dan pendente á cuberta, permitindo luces mais amplas que con unha viga simple. Por outro lado o tirante horizontal faise con unha viga de madeira, xa que o tirante de aceiro é un material máis complicado de obter no rural. O tirante é o que absorbe os esforzos horizontais e evita que estes esforzos os teñan que absorber as paredes ou piares de pedra, os cales non están preparados para estes esforzos.

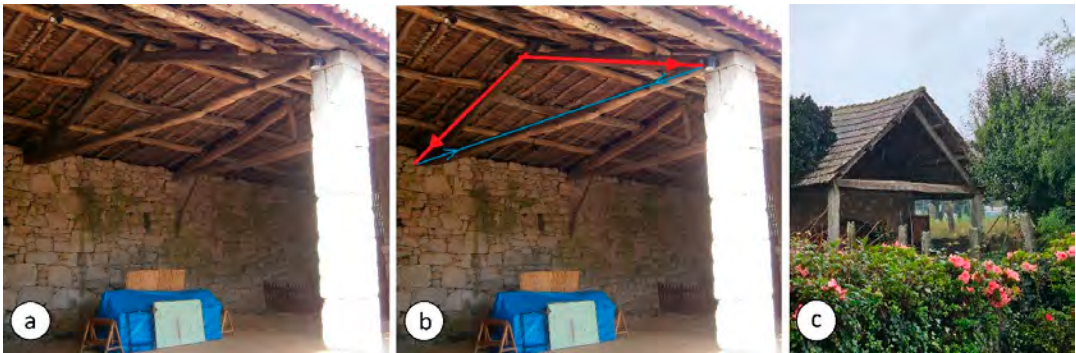


Figura A-1.4. Clásicas celosías rurais onde, coma no exercicio anterior, se empregan tres barras, onde na figura (b) se esquematiza as que traballan a compresión (vermello) e a que traballa a tracción.

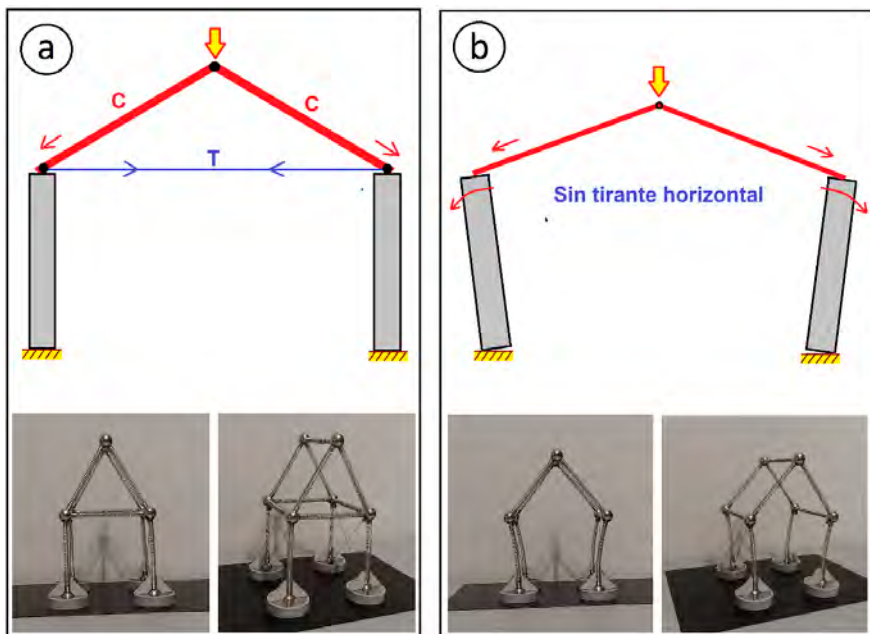


Figura A-1.5. Na parte superior da figura (a) móstrase o esquema do correcto funcionamento da celosía e paredes, cando temos o tirante horizontal. Pero cando non temos este tirante (figura (b)), entón as paredes estarían sometidas a esforzos laterais na súa parte superior e estas poderían colapsar. Nas figuras superiores podemos ver unhas montaxes con cable horizontal e sen él, e como se deforman os piares cando non hai cable horizontal.

Ademais debemos ter en conta que as barras inclinadas 2 e 3, ademais de calculalas a compresión, hai que calculalas a flexión coas 4 cargas puntuais que tiña cada unha delas

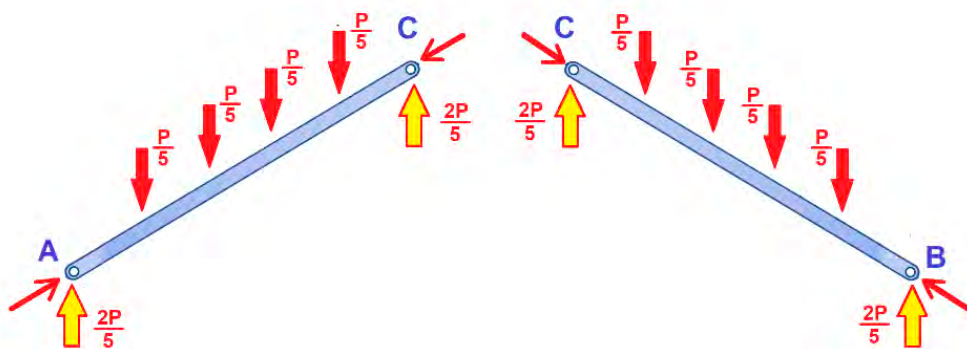


Figura A-1.5. Esquema das barras superiores con todas as cargas ás que están sometidas.

Figura A-2.2 Exemplo de celosía invertida.

a) Solución ó calculo dos esforzos en cada barra.

1º Pásase as cargas das barras ós nodos. E seguidamente faise o cálculo das reaccións que producen as cargas das barras en cada nodo, calculando por equilibrio estático (sumatorio de forzas verticais e de momentos respecto a un punto igual a cero). Neste caso obtemos que as reaccións que producen as tres cargas de cada barra nos seus respectivos extremos é de valor $P/2$.

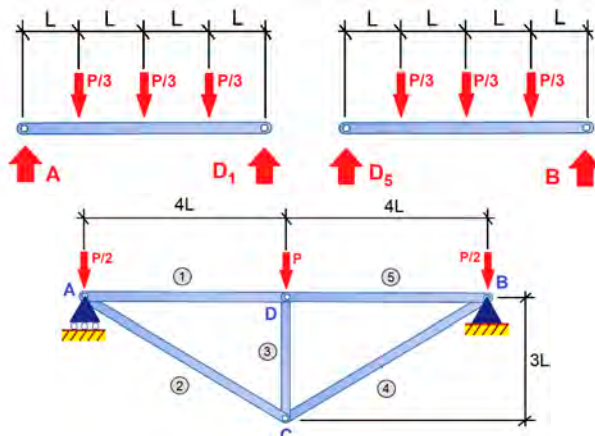
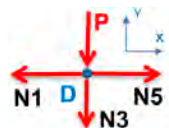


Figura A-2.3 Esquema do paso das cargas das barras ós nodos e numeración das barras.

2º Calculo dos esforzos en cada barra polo método dos nodos

Nodo D



$$\sum F_x = 0 \quad N5 - N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -P - N3 = 0$$

$$N3 = -P \quad N5 = N1$$

Nodo E



$$\sum F_x = 0 \quad N4 \cos \alpha - N2 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N2 \sin \alpha + N4 \sin \alpha + N3 = 0$$

$$N2 = +\frac{5}{6}P \quad N4 = +\frac{5}{6}P$$

Nodo A



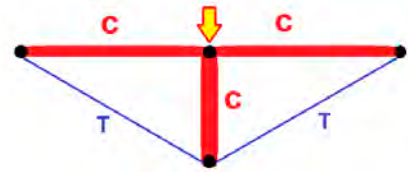
$$\sum F_x = 0 \quad N1 + N2 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad Ay - N2 \sin \alpha = 0$$

$$N1 = -\frac{2}{3}P \quad Ay = +\frac{1}{2}P$$

Táboa A-2.1 Táboa cos axiais das barras e esquema de barras a tracción e compresión

Barra	Li	Ni	Ni (N)	
1	4L	- 2/3 P	-667	C
2	5L	+5/6 P	834	T
3	3L	-P	-1000	C
4	5L	+5/6 P	834	T
5	4L	- 2/3 P	-667	C



Como podemos observar para as barras 2 e 4, por estar a tracción, con un cable e suficiente. Isto pódese apreciar na estrutura da figura A-2.5. As barras a compresión hai que calculalas a pandeo. Pero ademais debemos ter en conta que as barras 1 e 5 ademais de calculalas a compresión hai que calculalas a flexión cas 3 cargas puntuais que tiña cada unha delas

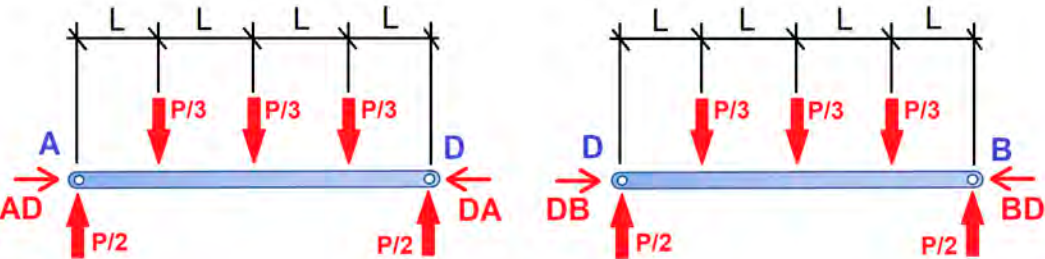


Figura A-2.4. Esquema das barras superiores con todas as cargas as que están sometida

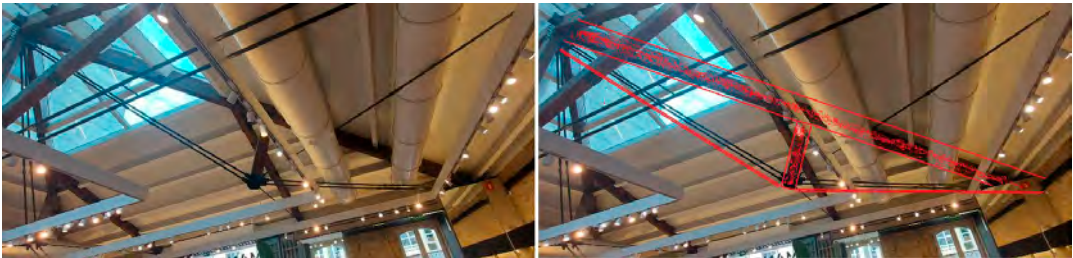


Figura A-2.5. Exemplo de celosía real onde podemos observar como na montaxe as barras de tracción son cables e as de compresión son barras de madeira.

b) Comparación cos resultados obtidos do exercicio anterior que era invertida respecto a esta

Como se pode observar nos resultados as barras traballan xusto o revés do que pasaba no caso “a” do exercicio anterior.

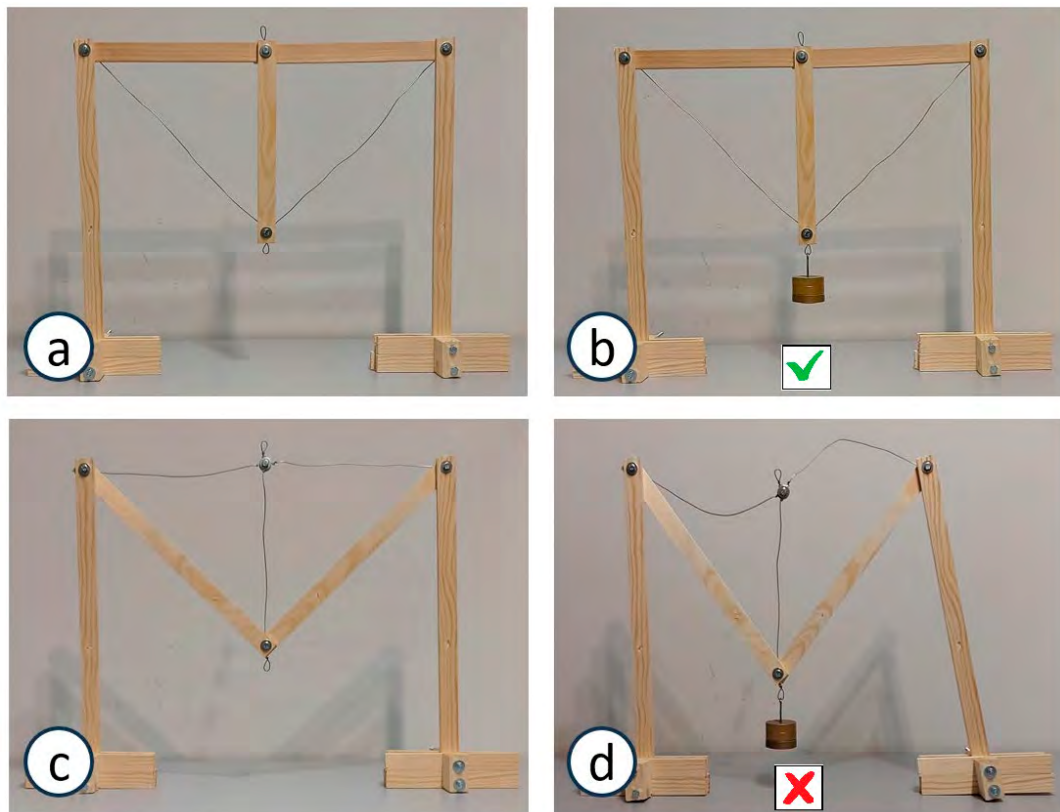


Figura A-2.6. Nesta figura podemos observar como na montaxe (a) que sería coas barras de tracción con cables e as de compresión con barras de madeira, ó aplicarlle a carga, figura (b) a celosía traballa correctamente. Mentres que na montaxe (c) onde as barras a compresión teñen cables e as de tracción barras de madeira, cando se lle aplica carga, a celosía colapsa, figura (d).

1.2.3 Exercício A-3. Torre eléctrica. Cargas verticais

Na celosía de barras articuladas da figura, calcular:

- Esfuerzo en cada unha das barras para unha carga $P=10 \text{ kN}$
- Qué tipo de esforzo ten cada barra (tracción, compresión)? As que non traballan teñen algunha finalidade, ou poderían eliminarse da estrutura real?

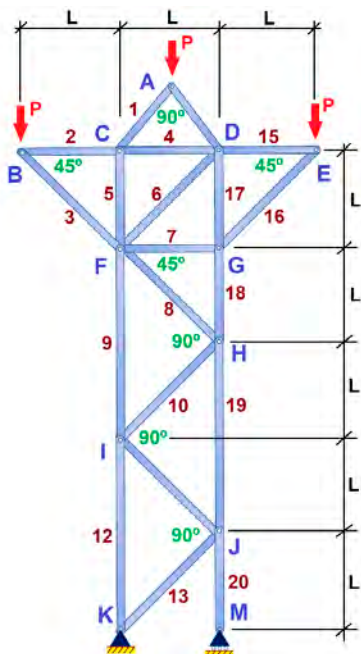
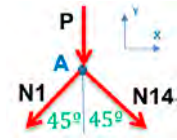


Figura A-3.1 Celosía de torre eléctrica con tres cargas verticais. Foto de dunha torre eléctrica

a) Solución ó cálculo dos esforzos en cada barra.

1º Cálculo dos esforzos en cada barra polo método dos nodos. Neste caso non é necesario calcular as reaccións nos apoios, xa que os nodos A,B,E nos permiten comezar a resolver o exercicio sen coñecer as reaccións nos apoios.

Nodo A



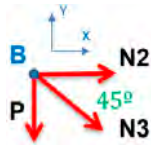
$$\sum F_x = 0 \quad N14 \sin 45^\circ - N1 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N14 \cos 45^\circ + N1 \cos 45^\circ + P = 0$$

$$N1 = -\frac{P}{\sqrt{2}} \quad N14 = -\frac{P}{\sqrt{2}}$$

29

Nodo B

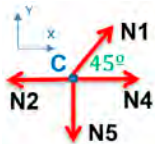


$$\sum F_x = 0 \quad N2 + N3 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -P - N3 \sin 45^\circ = 0$$

$$N2 = P \quad N3 = -\frac{2P}{\sqrt{2}}$$

Nodo C



$$\sum F_x = 0 \quad N4 + N1 \cos 45^\circ - N2 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N1 \sin 45^\circ - N5 = 0$$

$$N4 = +\frac{3}{2}P \quad N5 = -\frac{P}{2}$$

Nodo E



$$\sum F_x = 0 \quad -N15 - N16 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -P - N16 \sin 45^\circ = 0$$

$$N15 = +P \quad N16 = -\frac{2}{\sqrt{2}}P$$

Nodo D



$$\sum F_x = 0 \quad N15 - N4 - N14 \cos 45^\circ - N6 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N14 \sin 45^\circ - N6 \sin 45^\circ - N17 = 0$$

$$N6 = 0 \quad N17 = -\frac{P}{2}$$

Nodo G

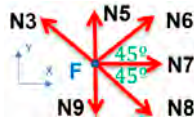


$$\sum F_x = 0 \quad N7 - N16 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N17 - N6 \cos 45^\circ - N18 = 0$$

$$N7 = -P \quad N18 = -\frac{3}{2}P$$

Nodo F



$$\sum F_x = 0 \quad N7 + N6 \cos 45^\circ + N8 \cos 45^\circ - N3 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N5 + N6 \sin 45^\circ + N3 \sin 45^\circ + N8 \sin 45^\circ - N9 = 0$$

$$N8 = 0 \quad N9 = -\frac{3}{2}P$$

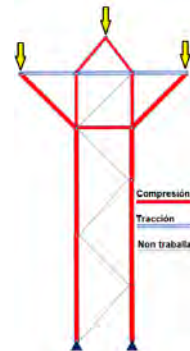
A partir deste nó da se sabe que as diagonais non traballan polo que os valores do resto das barras son:

$$N12 = N9 ; N19 = N18 = N120$$

Táboa A-3.1 Táboa cos axiais das barras e esquema de barras a tracción e compresión

Barra	Ni	Ni (kN)	
1	$-P/\sqrt{2}$	-7,07	C
2	$+P$	10	T
3	$-2P/\sqrt{2}$	-14,14	C
4	$+3P/2$	15	T
5	$-P/2$	-5	C
6	0	0	
7	$-P$	-10	C
8	0	0	
9	$-3P/2$	-15	C
10	0	0	C

Barra	Ni	Ni (kN)	
11	0	0	
12	$-3P/2$	-15	C
13	0	0	
14	$-P/\sqrt{2}$	-7,07	C
15	$+P$	10	T
16	$-2P/\sqrt{2}$	-14,14	C
17	$-P/2$	-5	C
18	$-3P/2$	-15	C
19	$-3P/2$	-15	C
20	$-3P/2$	-15	C



b) Análisis dos esforzos en cada barra

Como podemos ver nos resultados acadados e no esquema superior, os cordóns verticais traballan a compresión e con valores iguais nas barras simétricas respecto o eixo vertical, xa que a estrutura é simétrica e con cargas simétricas. No caso das barras horizontais superiores (cor azul) traballan a tracción, como un cable que evita que os nós B e E se movan distanciándose un do outro polo efecto das cargas que soportan. Respecto ás diagonais neste caso non traballan, pero na realidade teñen como mínimo dúas función. A primeira acortar as lonxitudes de pandeo das barras verticais, por exemplo, se a barra vertical esquerda fose directamente do nó F ó K, por pandeo sería necesario unha barra con moito mais momento de inercia na sección. Segundo, é posible que as diagonais traballen e absorban esforzos cando hai cargas horizontais como pode ser o vento (ver o seguinte exercicio)

1.2.4 Exercício A-4. Torre eléctrica. Carga horizontal

Na celosía de barras articuladas da figura calcular:

- Esforzo en cada unha das barras para a unha carga $P=10$ kN.
- Que tipo de esforzo e funcionalidade ten cada barra (tracción, compresión).
- Cálculo do desprazamento do nodo B, sabendo que $L=1$ m, $A=5$ cm², $E=200$ MPa

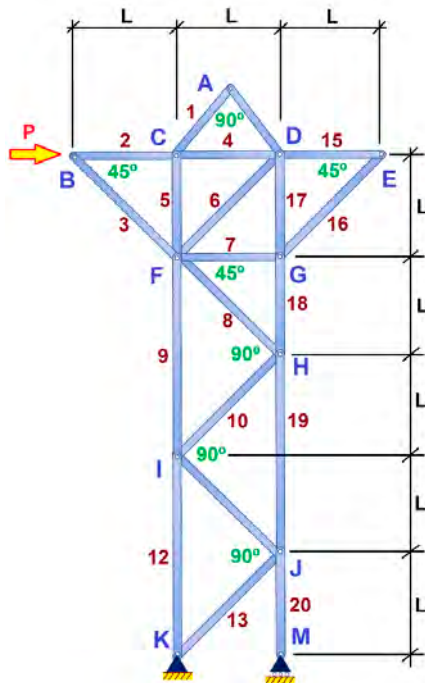


Figura A-4.1 Celosía de torre eléctrica con unha carga horizontal. Foto dunha torre eléctrica

a) Solución ó calculo dos esforzos en cada barra.

1º Calculo dos esforzos en cada barra polo método dos nodos. Para elo veremos qué barras non traballan

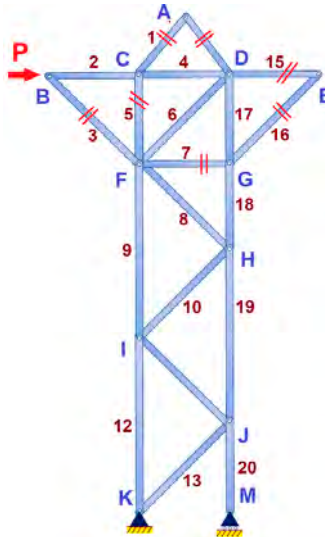


Figura A-4.2 Celosía de torre eléctrica coas barras que non traballan eliminadas.

Neste caso non é necesario calcular as reaccións nos apoios, xa que o nodo D nos permiten comezar a resolver o exercicio sen coñecer as reaccións nos apoios.

Nodo D

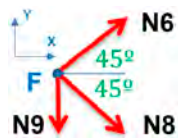


$$\sum F_x = 0 \quad N4 - N6 \cos 45^\circ = 0; \quad N4 = N2 = P$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N17 - N6 \sin 45^\circ = 0$$

$$N6 = \frac{2P}{\sqrt{2}} \quad N17 = -P = N18$$

Nodo F

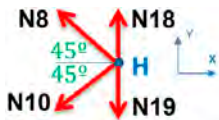


$$\sum F_x = 0 \quad N6 \cos 45^\circ + N8 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N6 \sin 45^\circ + N8 \sin 45^\circ - N9 = 0$$

$$N8 = -\frac{2P}{\sqrt{2}} \quad N9 = +2P$$

Nodo H



$$\sum F_x = 0 \quad -N8 \sin 45^\circ - N10 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N18 + N8 \cos 45^\circ - N10 \cos 45^\circ - N19 = 0$$

$$N10 = \frac{2P}{\sqrt{2}} \quad N19 = -3P$$

Nodo I



$$\sum F_x = 0 \quad N10 \cos 45^\circ + N11 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N9 + N10 \sin 45^\circ - N11 \sin 45^\circ - N12 = 0$$

$$N11 = -\frac{2P}{\sqrt{2}} \quad N12 = +4P$$

Nodo J



$$\sum F_x = 0 \quad -N11 \cos 45^\circ - N13 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N19 + N11 \sin 45^\circ - N13 \sin 45^\circ - N20 = 0$$

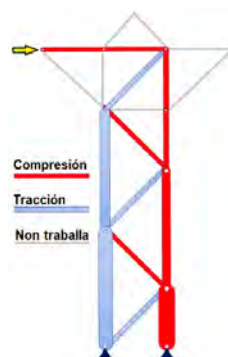
$$N13 = +\frac{2P}{\sqrt{2}} \quad N20 = -5P$$

33

Táboa A-4.1 Táboa cos axiais das barras e esquema de barras a tracción e compresión

Barra	Ni	Ni (kN)	
1	0		
2	P	-10	C
3	0		
4	-P	-10	C
5	0		
6	$2P/\sqrt{2}$	14,14	T
7	0		
8	$-2P/\sqrt{2}$	-14,14	C
9	2P	20	C
10	$2P/\sqrt{2}$	14,14	T

Barra	Ni	Ni (kN)	
11	$-2P/\sqrt{2}$	-14,14	C
12	+4P	40	C
13	$2P/\sqrt{2}$	14,14	T
14	0		
15	0		
16	0		
17	-P	-10	C
18	-P	-10	C
19	-3P	-30	C
20	-5P	-50	c



b) Tipo de esforzo e funcionalidade que ten cada barra.

Neste caso podemos ver como o cordón vertical esquerdo traballa a tracción e o dereito a compresión para así compensar o momento que produce a carga vertical respecto ó chan. Por outro lado podemos tamén ver como as diagonais agora sí traballan para absorber os esforzos. Se a torre eléctrica fose unha viga única, os esforzos cortantes serían soportados polas diagonais, mentres que o momento flexor sería absorbido polos cordóns verticais (o cordón esquerdo os esforzos de tracción e o cordón dereito os de compresión)

c) Cálculo do desprazamento horizontal do nodo B.

Para o cálculo do desprazamento horizontal do nodo B, poremos unha carga virtual horizontal de valor 1 no nodo B

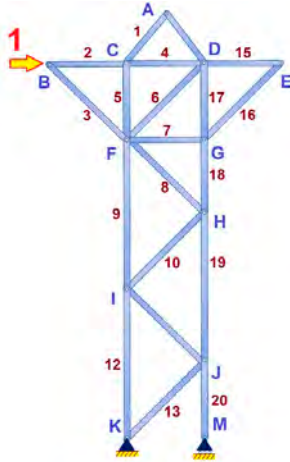


Figura A-4.3 Celosía de torre eléctrica coa carga unitaria horizontal no nodo B .

Neste caso o cálculo dos esforzos nas barras coa carga de valor 1, e moi sinxela xa que serán os mesmos valores que para o caso anterior con carga P de valor 1. Aplicamos despois a expresión:

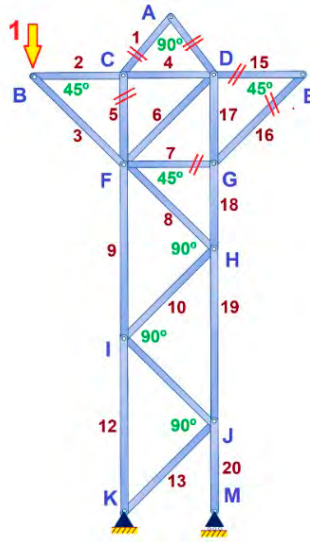
$$\delta_{hB} = \sum \frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} n_i$$

Táboa A-4.1 Táboa cos axiais das barras e calculo do desprazamento

Barra	Ni	ni	Li	Ni ni Li
1	0	0	L/√2	0
2	P	1	L	1
3	0	0	√2L	0
4	-P	-1	L	1
5	0	0	L	0
6	-2P/√2	-2/√2	√2L	4/√2
7	0	0	L	0
8	-2P/√2	-2/√2	√2L	1/√2
9	2P	2	2L	8
10	2P/√2	2/√2	√2L	4/√2
11	-2P/√2	-2/√2	√2L	4PL/√2
12	+4P	4	2L	32PL
13	2P/√2	2/√2	√2L	4PL/√2
14	0	0	L/√2	0
15	0	0	L	0
16	0	0	√2L	0
17	-P	-1	L	-PL
18	-P	-1	L	-PL
19	-3P	-3	2L	18PL
20	-5P	-5	L	25PL
				(-17/√2+87)PL

$$\delta_{hB} = \frac{\left(\frac{-17}{\sqrt{2}} + 87\right) \cdot P \cdot L}{A \cdot E} = 9,9 \text{ mm}$$

Para o cálculo do desprazamento do nodo B, poremos tamén unha carga virtual vertical de valor 1 no nodo B



35

Figura A-4.4 Celosía de torre eléctrica coa carga unitaria vertical no nodo B .

Nodo B

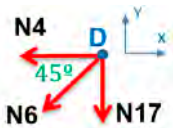


$$\sum F_x = 0 \quad n2 + n3 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -1 - n3 \sin 45^\circ = 0$$

$$n2 = 1 \quad n3 = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Nodo D

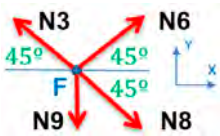


$$\sum F_x = 0 \quad n4 + n6 \cos 45^\circ = 0 ; n4 = n2$$

$$\sum F_y = 0 \quad -n17 - n6 \sin 45^\circ = 0$$

$$n6 = -\frac{2}{\sqrt{2}} \quad n17 = +1 = n18$$

Nodo F



$$\sum F_x = 0 \quad n6 \cos 45^\circ + n8 \cos 45^\circ - n3 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -n9 + n3 \sin 45^\circ + n6 \sin 45^\circ = 0$$

$$n8 = 0 \quad n9 = -2$$

Aplicamos despois a expresión:

$$\delta_{vB} = \sum \frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} n_i$$

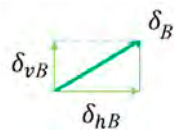
Táboa A-4.2 Táboa cos axiais das barras e cálculo do desprazamento

Barra	Ni	ni	Li	Ni ni Li
1	0	0	L/√2	0
2	P	1	L	1PL
3	0	-2/√2	√2L	0
4	-P	1	L	-1PL
5	0	0	L	0
6	-2P/√2	-2/√2	√2L	2√2PL
7	0	0	L	0
8	-2P/√2	0	√2L	0
9	2P	-2	2L	-8PL
10	2P/√2	0	√2L	0

Barra	Ni	ni	Li	Ni ni Li
11	-2P/√2	0	√2L	0
12	+4P	-2	2L	-16PL
13	2P/√2	0	√2L	0
14	0	0	L/√2	0
15	0	0	L	0
16	0	0	√2L	0
17	-P	1	L	-PL
18	-P	1	L	-PL
19	-3P	1	2L	-6PL
20	-5P	1	L	-5PL
				(2√2-37)PL

$$\delta_{vB} = \frac{(2\sqrt{2} - 37) \cdot P \cdot L}{A \cdot E} = -4,5 \text{ mm}$$

O valor negativo significa que o desprazamento é contrario ó vector de valor 1 colocado, e dicir, o desprazamento é para arriba. Polo que o desprazamento do nodo D ten dúas compoñentes, unha horizontal e unha vertical, nos que os valores son os calculados e que nos levan a un desprazamento total de:



$$\delta_c = \sqrt{\delta_{hc}^2 + \delta_{vc}^2} = \sqrt{9,9^2 + (-4,5)^2} = 10,88 \text{ mm}$$

e o ángulo sería igual a 26 °

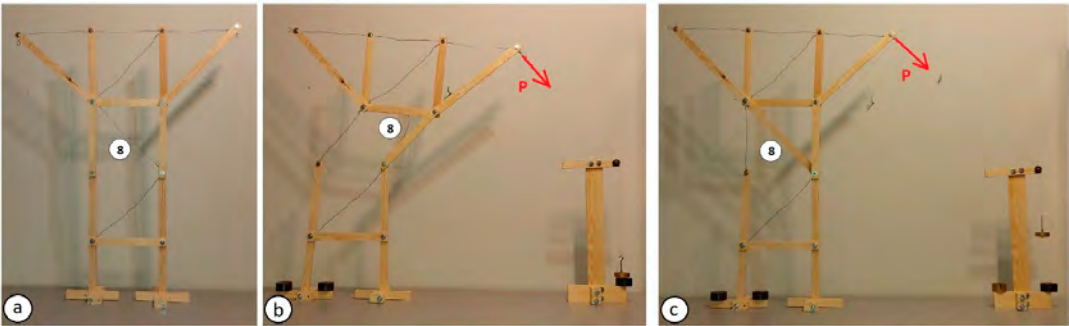


Figura A-4.4. Nesta figura podemos observar como na montaxe (a), que sería coas barras de tracción con cables e as de compresión con barras de madeira. O aplicarlle a carga horizontal, figura (b), a celosía traballa incorrectamente, pasando a traballar a compresión a barra 8 a cal pandea. Mentres que na montaxe (c), a barra 8 feita dunha barra ríxida traballa correctamente a compresión.

1.2.5 Exercício A-5. Torre eléctrica. Cargas parciais

Para a celosía de barras articuladas da figura (tanto para o caso “a” como o caso “b” da figura) calcular pelo método das secções o esforço em cada unha das barras inferiores para a unha carga $P=10\text{ kN}$.

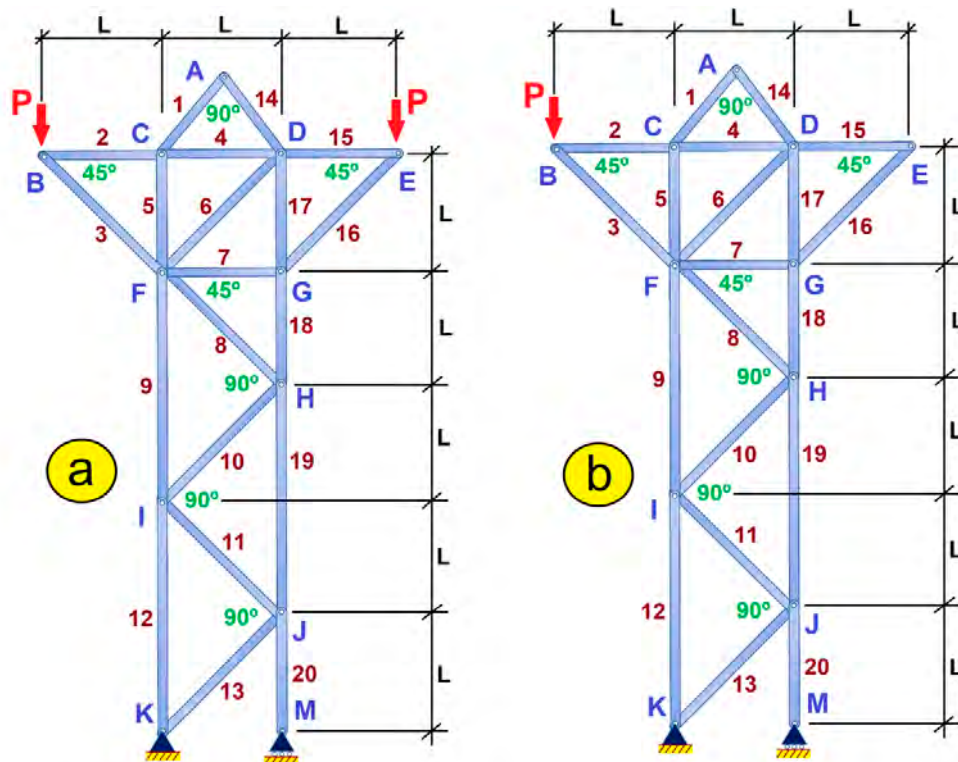


Figura A-5.1 a) Celosía de torre eléctrica con dúas cargas verticais simétricas. b) Celosía de torre eléctrica con unha carga vertical nun extremo.

Solución:

Aplicamos o método das seccións e calculamos os axiais das barras 12, 13, 20

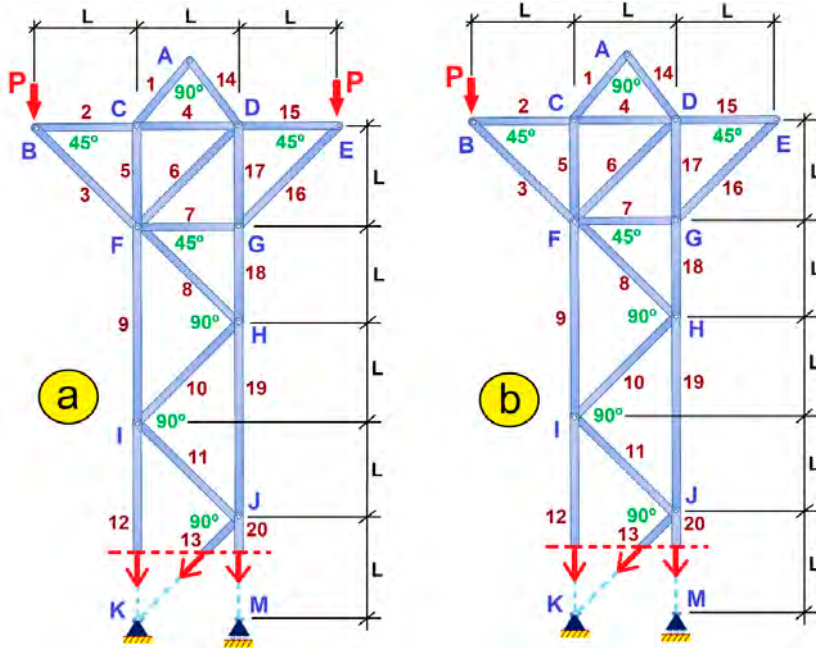


Figura A-5.2 Esquemas do calculo polo método das seccións da celosía de torre eléctrica .

Caso a.

$$\sum M_k = 0 \quad PL - N_{20} L - P2L = 0$$

$$\sum M_j = 0 \quad P2L + N_{12} L - PL = 0$$

$$N_{12} = -P \quad N_{20} = -P \quad N_{13} = 0$$

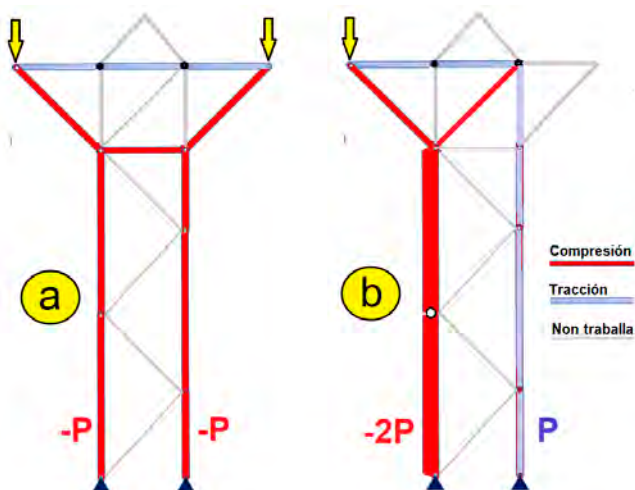
Caso b.

$$\sum M_k = 0 \quad PL - N_{20} L = 0$$

$$\sum M_j = 0 \quad P2L + N_{12} L = 0$$

$$N_{12} = -2P \quad N_{20} = +P \quad N_{13} = 0$$

Como podemos ver nos resultados no caso das dúas cargas, estas son simétricas e producen unha compresión en ambos cordóns verticais de valor P . Pero resulta que o caso de ter unha única carga P nun dos lados, produce un asimetría de cargas. Esta asimetría produce unha compresión no cordón esquerdo de valor $2P$ (o dobre do caso anterior), mentres que no caso do cordón dereito o esforzo é de tracción de valor P . Polo tanto, o segundo caso, aínda tendo a estrutura só unha carga de valor P , é o caso máis desfavorable dos dous estudados.



39

Figura A-5.3 Esquemas de barras a tracción e compresión da celosía da torre eléctrica tanto para as cargas verticais simétricas como por unha soa carga vertical nun extremo.

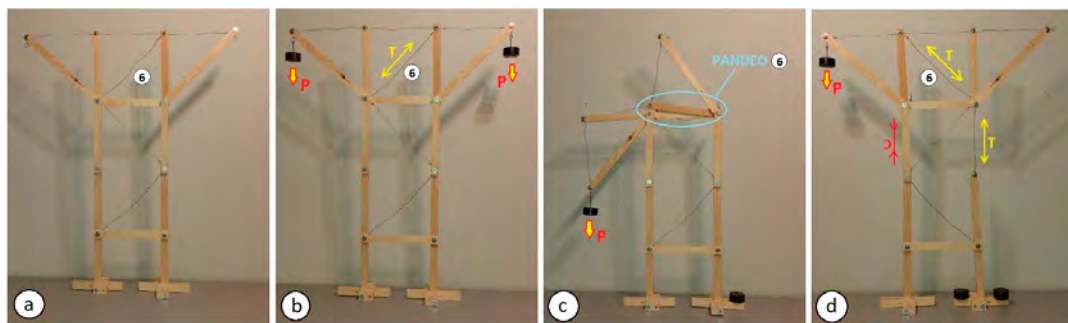


Figura A-5.4. Nesta figura (a) podemos observar a montaxe da torre eléctrica, na figura (b) cando pomos as cargas P nos extremos da torre as barras traballan correctamente, especialmente a barra (6) que traballa a tracción. Na figura (c) cando pomos só a carga P no lado esquerdo, a barra (6) pasa a traballar a compresión e a estrutura colapsa. Se cambiamos a posición da diagonal (6) para que traballe a tracción, xa a torre traballaría correctamente con unha soa carga P nun extremo.

1.2.6 Exercício A-6. Celosía triangular con ángulos de 60° e 30°

Na celosía de barras articuladas da figura calcular:

- Esforzo en cada unha das barras para a carga P de 20 kN
- Calcular o desprazamento vertical do nodo E para a situación de carga anterior (sabendo que todas as barras teñen o mesmo módulo de elasticidade E e tamén a mesma sección transversal A)

40

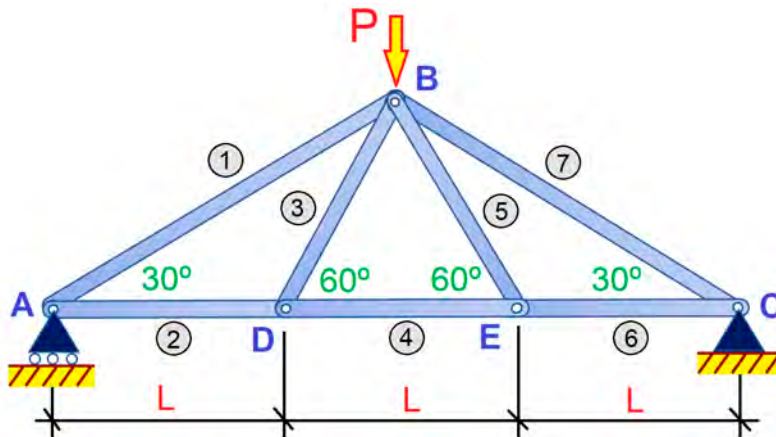


Figura A-6.1 Celosía triangular con ángulos de 60° e 30°

a) Solución ó cálculo dos esforzos en cada barra.

1º Calculamos o grado de hiperastiticidade

$$\begin{aligned} GHT &= (B+R)-2N \\ GHE &= R-3 \\ GHi &= GHT - GHE \end{aligned}$$

$$GHT = 7 + 3 - 2 \cdot 5 = 0$$

$$GHE = 3 - 3 = 0$$

$$GHi = 0 - 0 = 0$$

Esta celosía é isostática tanto internamente como externamente

2º Calculo das reacción nos apoios

41

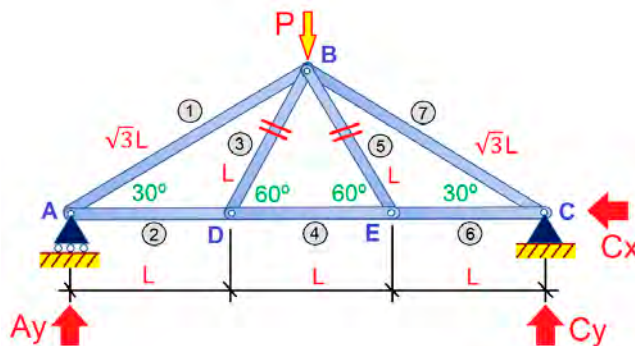


Figura A-6.2 Celosía triangular con ángulos de 60° e 30°, cas barras que non traballan eliminadas e cas reaccións nos apoios.

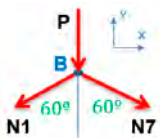
$$\sum F_x = 0 \quad Ax = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad Ay + Cy - P = 0 \quad Ay = \frac{1}{2}P$$

$$\sum M_A = 0 \quad Cy \cdot 3L - P \cdot 1,5L = 0 \quad Cy = \frac{1}{2}P$$

3º Cálculo dos esforzos en cada barra polo método dos nodos. Temos xa en conta que as barras 3 e 5 non traballan.

Nodo B



$$\sum F_x = 0 \quad N1 \sen 60^\circ + N7 \sen 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -P - N1 \cos 60^\circ - N7 \cos 60^\circ = 0$$

$$N1 = -P$$

$$N7 = -P$$

Nodo A



$$\sum F_x = 0 \quad N1 \sen 60^\circ + N2 = 0$$

$$N2 = +\frac{P}{2}$$

Tamén:

$$N2 = N4 = N6 = +\frac{P}{2}$$

Táboa A-6.1 Táboa cos axiais das barras

Barra	Li	Ni	Ni (kN)	
1	$\sqrt{3}L$	-P	-20	Compresión
2	L	+ P/2	10	Tracción
3	L	0	0	
4	L	+ P/2	10	Tracción
5	L	0	0	0
6	L	+ P/2	10	Tracción
7	$\sqrt{3}L$	-P	-20	Compresión

42

b) Calculo do desprazamento vertical no nodo E.

1º Calculo dos axiais debidos a cunha carga virtual no nodo onde se quere calcular o desprazamento

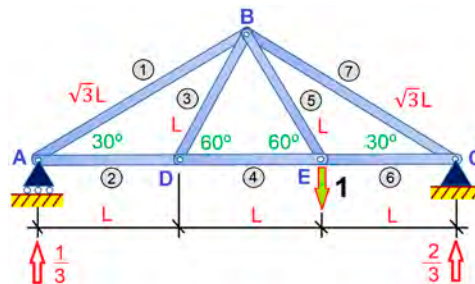
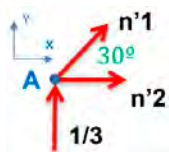


Figura A-6.3 Celosía triangular coa carga unitaria vertical no nodo E.

Nodo A



$$\sum F_x = 0 \quad n'2 + n'1 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{1}{3} + n'1 \sin 30^\circ = 0$$

$$n'1 = -\frac{2}{3} \quad n'2 = +\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Nodo D

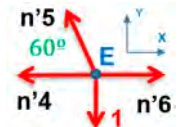


$$\sum F_x = 0 \quad n'4 + n'3 \cos 60^\circ - n'2 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad n'3 \sin 60^\circ = 0$$

$$n'4 = +\frac{\sqrt{3}}{3} \quad n'3 = 0$$

Nodo E

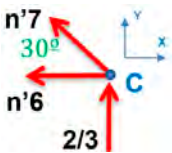


$$\sum F_x = 0 \quad n'6 - n'5 \cos 60^\circ - n'4 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad n'5 \sin 60^\circ - 1 = 0$$

$$n'5 = +\frac{2}{\sqrt{3}} \quad n'6 = +\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Nodo C



$$\sum F_x = 0 \quad - n'6 - n'7 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad n'7 \sin 30^\circ + \frac{2}{3} = 0$$

$$n'7 = -\frac{4}{3}$$

b) Calculo dos desprazamento mediante a ecuación de traballos virtuais, segundo a carga de valor 1 colocado en dirección vertical no nodo D. Valores postos na táboa inferior.

43

$$\delta_{vD} = \sum \frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} n_i$$

Táboa A-6.2 Táboa cos axiais das barras e calculo do desprazamento

Barra	Li	Ni	ni	Ni Li ni
1	$\sqrt{3}L$	-P	-2/3	$2\sqrt{3}PL/3$
2	L	+ P/2	$+\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}PL/6$
3	L	0	0	0
4	L	+ P/2	$+\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}PL/6$
5	L	0	$+2/\sqrt{3}$	0
6	L	+ P/2	$+2/\sqrt{3}$	$PL/\sqrt{3}$
7	$\sqrt{3}L$	-P	-4/3	$4\sqrt{3}PL/3$
				$8\sqrt{3}PL/3$

$$\delta_{vD} = \frac{8\sqrt{3} \cdot P \cdot L}{3 \cdot A \cdot E}$$

1.2.7 Exercício A-7. Estruturas articuladas. Grúa en ménsula

A grúa en ménsula da figura está formada por unha celosía de barras cos nodos articulados, e amarrada a un poste ríxido mediante dous apoios articulados. A celosía esta sometida a unha carga de 10 kN no nodo que se indica na figura. Todas as barras son de aceiro e teñen o mesmo módulo de elasticidade E , tamén todas as barras teñen a mesma sección A . Desprezando o peso propio das barras e a deformación do poste, xa que é ríxido, calcular o desprazamento do nodo C.

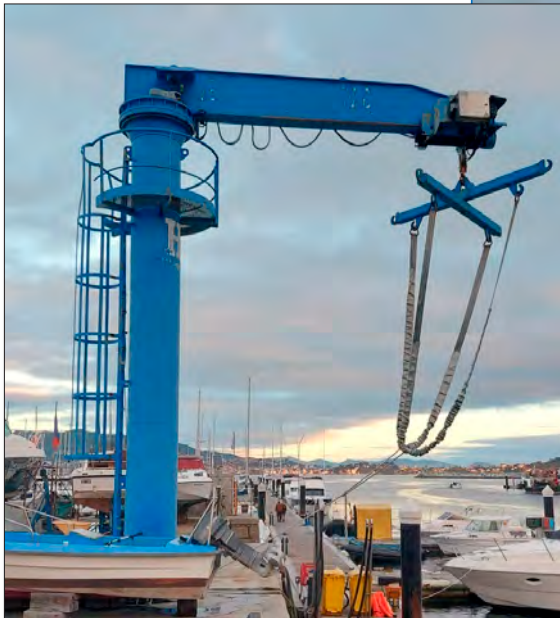
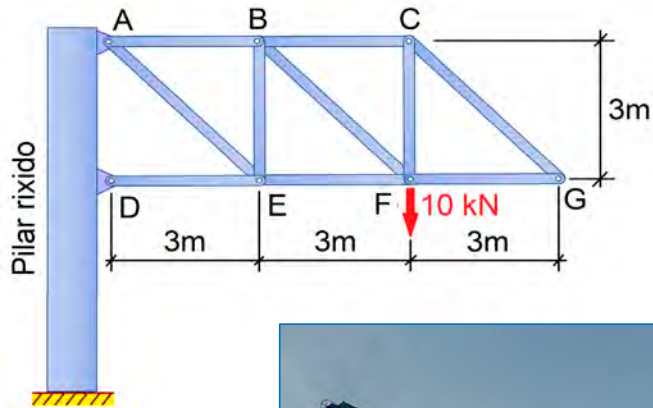
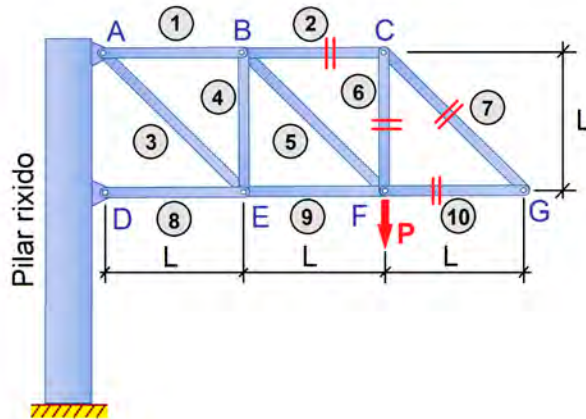


Figura A-7.1 Esquema da estrutura articulada da grúa en ménsula. Foto de grúa torre de construción feita en celosía. Grúa en ménsula de porto.

Solución:

1º Debido a que non necesitamos calcular as reaccións nos apoios para resolver o exercicio, comezaremos por calcular os esforzos nas barras debido ás cargas externas. Comezamos por eliminar as barras que debido a que non teñen cargas nos nodos e a súa disposición xeométrica, xa sabemos de antemán que non traballa. Neste caso non traballan as barras 7,10,6,2



45

Figura A-7.2 Estructura articulada da grúa en ménsula con carga vertical P , coas barras que non traballan eliminadas.

2º Cálculo dos esforzos en cada barra polo método dos nodos

Nodo F

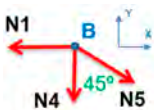


$$\sum F_x = 0 \quad -N5 \cos 45^\circ - N9 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N5 \sin 45^\circ - P = 0$$

$$N9 = -P \quad N5 = \frac{2}{\sqrt{2}}P$$

Nodo B

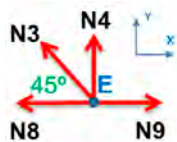


$$\sum F_x = 0 \quad N5 \sin 45^\circ - N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N5 \cos 45^\circ - N4 = 0$$

$$N4 = -P \quad N1 = P$$

Nodo E



$$\sum F_x = 0 \quad N9 - N3 \cos 45^\circ - N8 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N3 \sin 45^\circ + N4 = 0$$

$$N3 = \frac{2}{\sqrt{2}}P \quad N8 = -2P$$

3º Cálculo do desprazamento vertical no nodo C, para elo seguiremos os seguintes pasos:

3.1 Cálculo dos axiais debidos a unha carga virtual no nodo C onde se quere calcular o desprazamento. Comezamos por eliminar as barras que debido a que non teñen cargas nos nodos e a súa disposición xeométrica xa sabemos de antemán que non traballan. Neste caso non traballan as barras 7,10,2

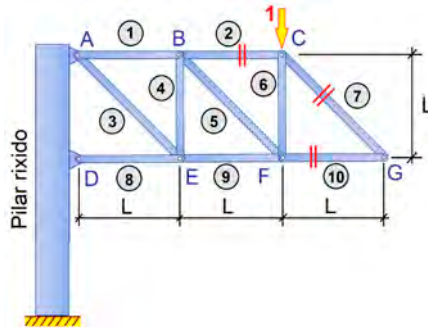
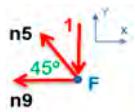


Figura A-7.3 Estrutura articulada da grúa en ménsula con carga vertical unitaria no nodo C, coas barras que non traballan eliminadas.

Nodo F

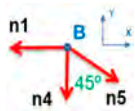


$$\sum F_x = 0 \quad -n5 \cos 45^\circ - n9 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad n5 \sin 45^\circ - 1 = 0$$

$$n9 = -1 \quad n5 = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Nodo B

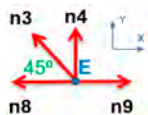


$$\sum F_x = 0 \quad n5 \sin 45^\circ - n1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -n5 \cos 45^\circ - n4 = 0$$

$$n4 = -1 \quad n1 = 1$$

Nodo E



$$\sum F_x = 0 \quad n9 - n3 \cos 45^\circ - n8 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad n3 \sin 45^\circ + n4 = 0$$

$$n8 = -2 \quad n3 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Inda que realmente poderíamos ter evitado facer os cálculos anteriores, se tiveramos en conta que a carga de 1 pasa o nodo F, e polo tanto o esforzo das barras son iguais que no primeiro cálculo, pero substituíndo P por o valor 1.

3.2 Cálculo dos desprazamento mediante a ecuación de traballos virtuais, segundo a carga de valor 1 colocada en dirección vertical no nodo D. Valores postos na táboa inferior.

$$\delta_{vC} = \sum \frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} n_i$$

Táboa A-7.1 Táboa cos axiais das barras e calculo do desprazamento

Barra	Li	Ni	ni	Ni Li ni
1	L	P	1	P L
2	L	0	0	0
3	$\sqrt{2}L$	$+2/\sqrt{2}P$	$+2/\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}PL$
4	L	-P	-1	PL
5	$\sqrt{2}L$	$+2/\sqrt{2}P$	$+2/\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}PL$
6	L	0	-1	0
7	$\sqrt{2}L$	0	0	0
5	L	-2P	-2	4PL
6	L	-P	-1	PL
7	L	0	0	0
				$(4\sqrt{2}+7)PL$

47

$$\delta_{vC} = \frac{(4\sqrt{2}+7)PL}{A \cdot E} = 18,984 \text{ mm}$$

4º Calculo do desprazamento horizontal no nodo C:

4.1 Como se pide o desprazamento do nodo F, non só se ten que calcular o desprazamento vertical, senón tamén o desprazamento horizontal, para o cal se colocara unha carga virtual de valor 1 en dirección horizontal no nodo F. Despois se calcularan os esforzos en cada barra. Se comezará por eliminar as barras que debido a que non teñen cargas nos nodos e a súa disposición xeométrica xa se sabe de antemán que non traballa. Neste caso so traballan as barras 1 e 2. Segundo a distribución das barras da figura os valores dos axiais sería

$$n'_1 = 1; \quad n'_2 = 1;$$

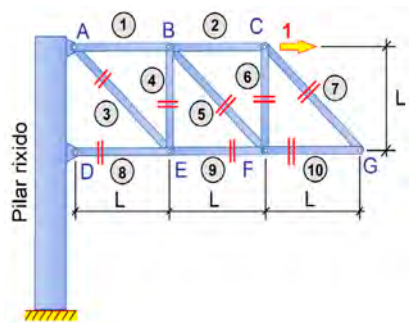


Figura A-7.4 Estructura articulada da grúa en ménsula con carga horizontal unitaria no nodo C, coas barras que non traballan eliminadas

4.2 Cálculo dos desprazamento mediante a ecuación de traballos virtuais, segundo a carga de valor 1 colocada en dirección vertical no nodo D. Valores postos na táboa inferior.

$$\delta_{vD} = \sum \frac{Ni \cdot Li}{Ai \cdot Ei} n'_i$$

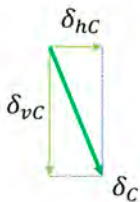
Táboa A-7.2 Táboa cos axiais das barras e calculo do desprazamento

Barra	Li	Ni	ni	Ni Li ni
1	L	P	1	P L
2	L	0	1	0
3	$\sqrt{2}L$	$+2/\sqrt{2}P$	0	0
4	L	-P	0	0
5	$\sqrt{2}L$	$+2/\sqrt{2}P$	0	0
6	L	0	0	0
7	$\sqrt{2}L$	0	0	0
5	L	-2P	0	0
6	L	-P	0	0
7	L	0	0	0
				PL

Como se pode observar na táboa anterior, só a barra 1 contribúe ó desprazamento do nodo C. Segundo a carga virtual horizontal en C, só contribuirían as barras 1 e 2, pero só a 1 ten na realidade axial, polo tanto so esta barra contribúe ó desprazamento horizontal.

$$\delta_{hc} = \frac{PL}{A \cdot E} = 1,5 \text{ mm}$$

Finalmente o desprazamento do nodo C ten dúas compoñentes, unha horizontal e unha vertical, nas que os valores son os calculados, e que nos levan a un desprazamento total de



$$\delta_c = \sqrt{\delta_{hc}^2 + \delta_{vc}^2} = \sqrt{18,984^2 + 1,5^2} = 19,00 \text{ mm}$$

e o ángulo sería igual a 0.08°

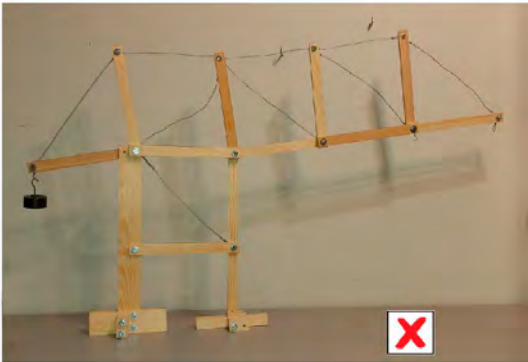
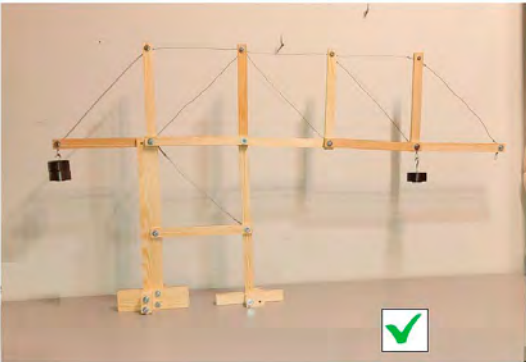


Figura A-7.5. Nesta figura se pode observar como na montaxe (a), que sería con carga na grúa, as barras a tracción están con cables, e as de compresión con barras de madeira. No caso de quitar a carga, figura (b), a celosía traballa incorrectamente onde hai barras que traballan a compresión sendo cables.

1.2.8 Exercício A-8. Celosía plana tipo Pratt.

Na celosía plana tipo Pratt de barras articuladas da figura calcular:

- Esforço em cada unha das barras para a carga $P=10\text{ kN}$ e $L=4\text{ m}$ para o caso "a".
- Esforço em cada unha das barras para a carga $P=10\text{ kN}$ e $H=L/2=2\text{ m}$ para o caso "b".
- Analisar o comportamento respecto ó diagrama de momentos e cortantes se fose unha viga maciza. Tamén analizar as diferencias entre o caso "a" e o caso "b"

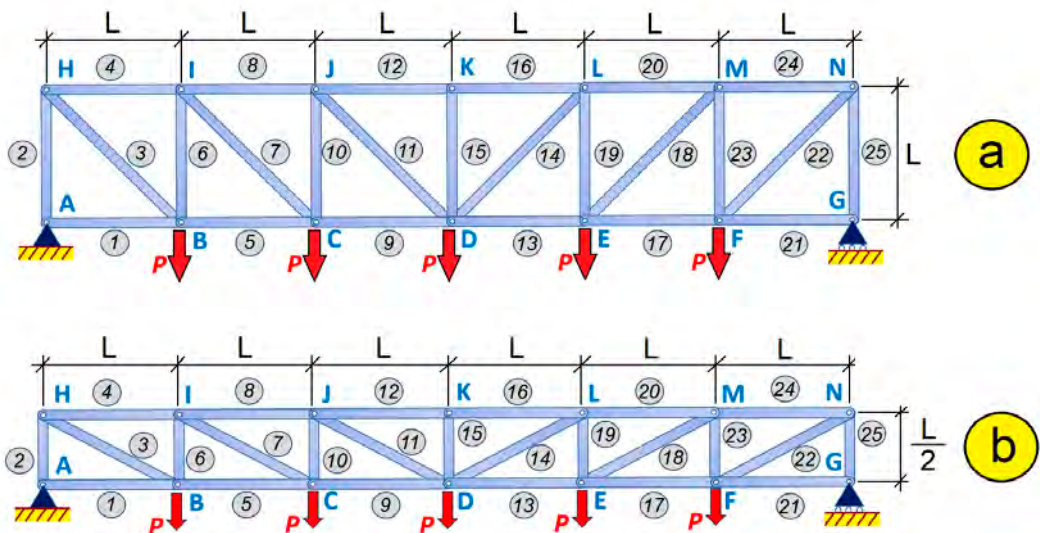


Figura A-8.1 a) Esquema da celosía plana tipo Pratt de altura L . b) Esquema da celosía tipo Pratt de altura $L/2$. c) Foto de celosía Pratt de unha ponte férrea.

Solución caso "a"

1º Cálculo das reacción nos apoios

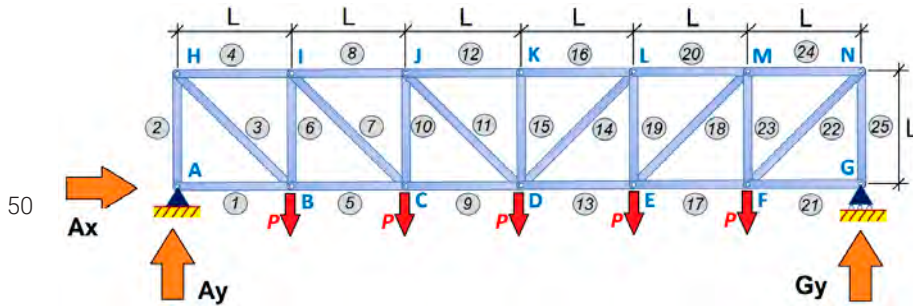


Figura A-8.2 Esquema da celosía tipo Pratt de altura L coas reaccións nos apoios.

$$\sum F_y = 0 \quad Ay + Gy - 5P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad Gy \cdot 6L - P \cdot 5L - P \cdot 4L - P \cdot 3L - P \cdot 2L - P \cdot L = 0$$

$$Ay = \frac{5}{2}P \quad Gy = \frac{5}{2}P$$

2º Cálculo dos axiais polo método dos nodos

Nodo A



$$\sum F_x = 0 \quad N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad Ay + N2 = 0$$

$$N2 = -\frac{5}{2}P \quad N1 = 0$$

Nodo H

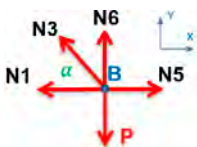


$$\sum F_x = 0 \quad N4 + N3 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N3 + N2 \sin \alpha = 0$$

$$N3 = +\frac{5}{\sqrt{2}}P \quad N4 = -\frac{5}{2}P$$

Nodo B



$$\sum F_x = 0 \quad N5 - N3 \cos \alpha - N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N6 + N3 \sin \alpha - P = 0$$

$$N5 = +\frac{5}{2}P \quad N6 = -\frac{3}{2}P$$

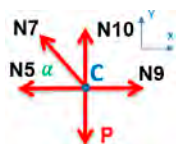
Nodo I



$$\sum F_x = 0 \quad N8 + N7 \cos \alpha - N4 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N2 - N3 \sin \alpha = 0$$

$$N7 = +\frac{3}{\sqrt{2}}P \quad N8 = -4P$$



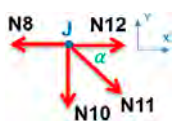
Nodo C

$$\sum F_x = 0 \quad N9 - N5 - N7 \cos\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N10 + N7 \sin\alpha - P = 0$$

$$N9 = +4P \quad N10 = -\frac{1}{2}P$$

51



Nodo J

$$\sum F_x = 0 \quad N12 + N11 \cos\alpha - N8 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N10 - N11 \sin\alpha = 0$$

$$N11 = +\frac{1}{\sqrt{2}}P \quad N12 = -\frac{9}{2}P$$

O resto dos nodos xa se quitan por simetría

Táboa A-8.1 Táboa cos axiais das barras do caso "a"

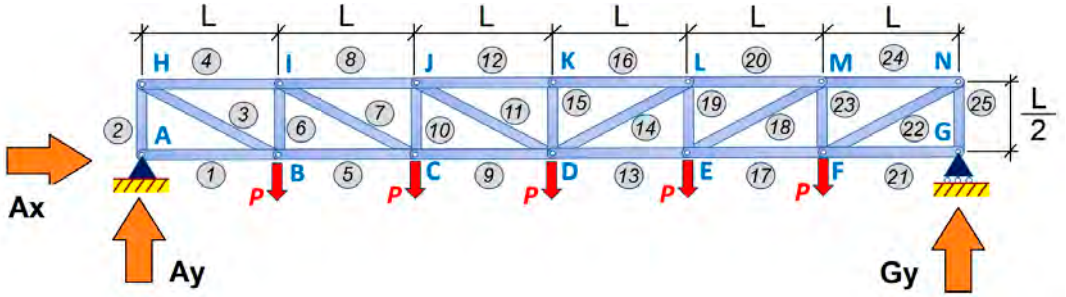
Barra	Ni	Ni (kN)	
1	0	0	
2	-5P/2	-25	C
3	5P/√2	35,4	T
4	-5P/2	-25	C
5	5P/2	25	T
6	-3P/2	-15	C
7	3P/√2	21,2	T
8	-4P	-40	C
9	4P	40	T
10	-P/2	-5	C
11	P/√2	7,1	T
12	-9P/2	-45	C
13	4P	40	T

Barra	Ni	Ni (kN)	
14	P/√2	7,1	T
15	0	0	C
16	-9P/2	-45	C
17	5P/2	25	T
18	3P/√2	21,2	T
19	-P/2	-5	C
20	-4P	-40	C
21	0	0	
22	5P/√2	35,4	T
23	-3P/2	-15	C
24	-5P/2	-25	C
25	-5P/2	-25	C

Solución caso "b"

1º Cálculo das reaccions nos apoios

Figura A-8.3 Esquema da celosia tipo Pratt de altura $L/2$ coas reaccions nos



52

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + G_y - 5P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad G_y \cdot 6L - P \cdot 5L - P \cdot 4L - P \cdot 3L - P \cdot 2L - P \cdot L = 0$$

$$A_y = \frac{5}{2}P \quad G_y = \frac{5}{2}P$$

2º Cálculo dos axiais polo método dos nodos

Nodo A



$$\sum F_x = 0 \quad N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + N2 = 0$$

$$N2 = -\frac{5}{2}P \quad N1 = 0$$

Nodo H

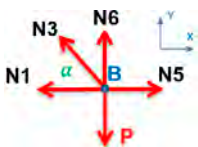


$$\sum F_x = 0 \quad N4 + N3 \cos \alpha = 0 \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sum F_y = 0 \quad N3 + N2 \sin \alpha = 0 \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$N3 = +\frac{5\sqrt{5}}{2}P \quad N4 = -5P$$

Nodo B

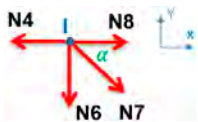


$$\sum F_x = 0 \quad N5 - N3 \cos \alpha - N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N6 + N3 \sin \alpha - P = 0$$

$$N5 = +5P \quad N6 = -\frac{3}{2}P$$

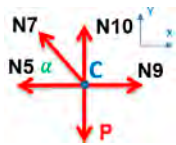
Nodo I



$$\sum F_x = 0 \quad N8 + N7 \cos \alpha - N4 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N6 - N7 \sin \alpha = 0$$

$$N7 = +\frac{3\sqrt{5}}{2}P \quad N8 = -8P$$



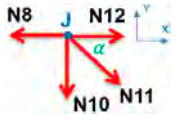
Nodo C

$$\sum F_x = 0 \quad N9 - N5 - N7 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N10 + N7 \sin \alpha - P = 0$$

$$N9 = +8P \quad N10 = -\frac{1}{2}P$$

Nodo J



$$\sum F_x = 0 \quad N12 + N11 \cos \alpha - N8 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N10 - N11 \sin \alpha = 0$$

$$N11 = +\frac{\sqrt{5}}{2}P \quad N12 = -9P$$

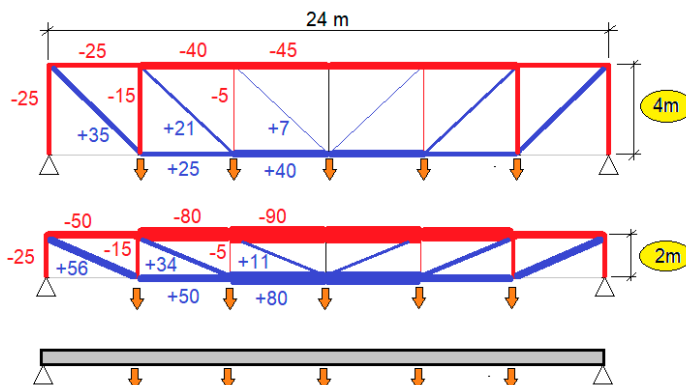
53

Táboa A-6.2 Táboa cos axiais das barras do caso "b"

Barra	Ni	Ni (kN)	
1	0	0	
2	-5P/2	-25	C
3	5√5P/2	55,9	T
4	-5P	-50	C
5	5P	50	T
6	-3P/2	-15	C
7	3√5P/2	33,5	T
8	-8P	-80	C
9	8P	80	T
10	-P/2	-5	C
11	√5P/2	11,2	T
12	-9P	-90	C
13	8P	80	T

Barra	Ni	Ni (kN)	
14	√5P/2	11,2	T
15	0	0	C
16	-9P	-90	C
17	5P	50	T
18	3P/√2	21,2	T
19	3√5P/2	33,5	T
20	-8P	-80	C
21	0	0	
22	5√5P/2	55,9	T
23	-3P/2	-15	C
24	-5P	-50	C
25	-5P/2	-25	C

Se facemos unha análise do comportamento das celosías respecto ó diagrama de momentos e cortantes (se esta fose unha viga maciza) podemos observar como nos extremos da viga onde o momento é menor, os esforzos nos cordóns (superior e inferior) son tamén menores, mentres que a medida que nos achegamos o centro, onde o momento flexor é maior, os axiais dos cordóns aumentan considerablemente. Isto é lóxico xa que entre o axiais do cordón inferior e o do superior teñen que equilibrar o momento correspondente segundo o diagrama de momentos. Ista tamén é a razón pola que no caso da viga coa metade de altura (L/2) os esforzos nos cordóns son o dobre, xa que para conseguir o mesmo momento flexor, se temos a metade de distancia entre os cordóns, necesitamos o dobre de forza. Respecto ó cortante tamén podemos ver como os valores nas diagonais e montantes van descendendo cara o centro da viga, ó igual que o fai o cortante no diagrama de cortantes



54



Figura A-8.5. Figura onde se pode observar unha celosía dunha ponte ferroviaria ca mesma disposición ca calculada.



Figura A-8.6. Figura onde se pode observar unha celosía dunha nave industrial coa mesma disposición que a calculada neste exercicio

De feito para o emprego de vigas, segundo aumenta a distancia entre apoios, temos que aumentar o canto da mesma, para o cal se pasa de empregar vigas tipo I, a vigas alveoladas e por ultimo se soe recorrer a vigas en celosía.

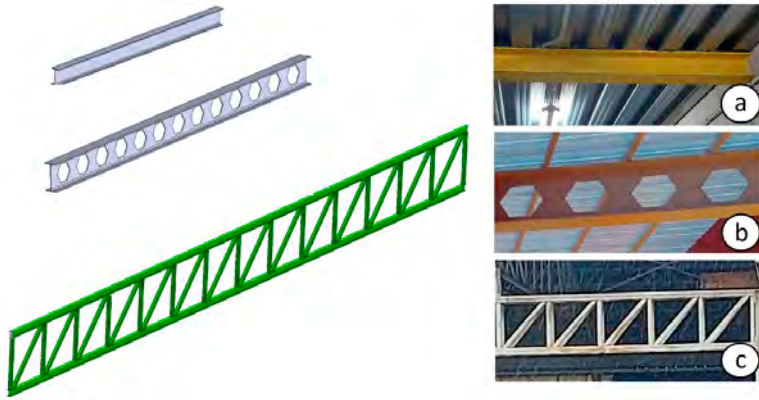


Figura A-8.7. a) Viga en I. b) Viga alveolada. c) Viga en celosía.

1.2.9 Exercício A-9. Celosía plana tipo Howe.

Na celosía plana tipo Howe de barras articuladas da figura calcular:

- Esforço en cada unha das barras para a carga $P=100\text{ kN}$ e $L=4\text{ m}$.
- Calcular o desprazamento vertical do nodo G para a situación de carga anterior e supondo que todas as barras son de tubo cadrado TC 90.90.5 (sección 1727 mm^2), de aceiro S235JR ($E=210\text{ GPa}$).

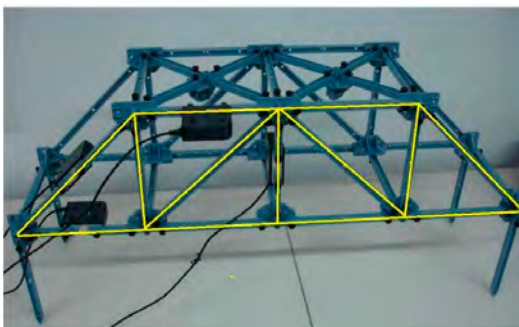
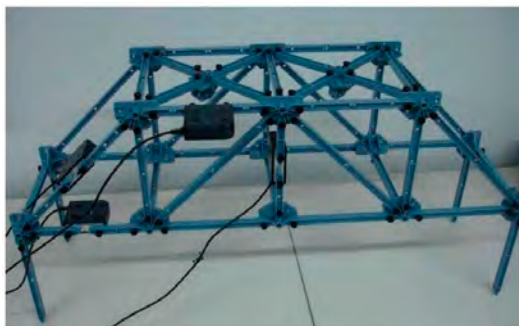
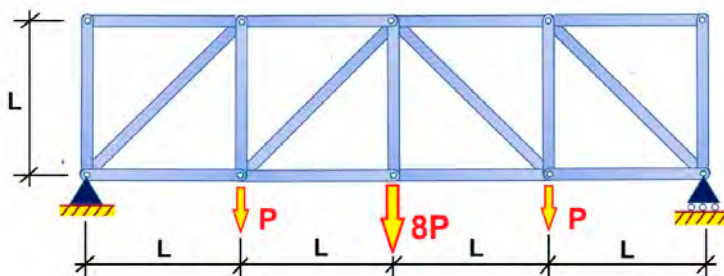


Figura A-9.1 a) Esquema da celosía plana tipo Howe. Foto de celosía Pratt de unha maqueta de ensaios.

a) Solución ó calculo dos esforzos en cada barra.

1º Eliminación das barras que non traballan

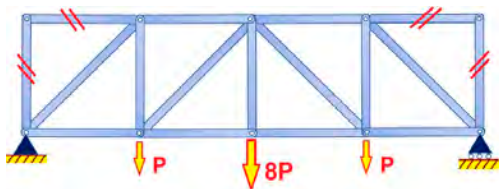


Figura A-9.2 Esquema da celosía tipo Howe coas barras que non traballan eliminadas.

57

2º Cálculo das reaccións nos apoios

Vamos a numerar as barras

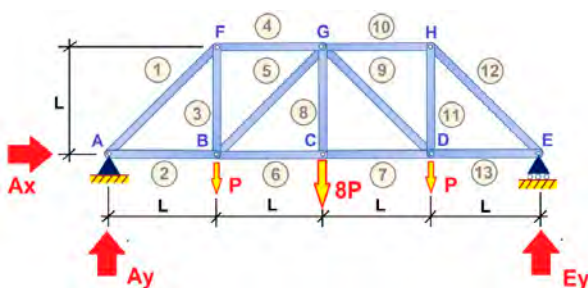


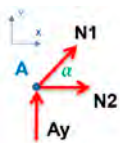
Figura A-9.3 Esquema da celosía tipo Howe coas reaccións nos apoios e as barras numeradas.

$$\sum F_y = 0 \quad Ay + Ey - 10P = 0$$

$$\sum M_E = 0 \quad Ey \cdot 4L - P \cdot 3L - 8P \cdot 2L - P \cdot L = 0$$

$$Ay = 5P \quad Ey = 5P$$

Nodo A

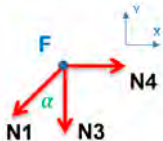


$$\sum F_x = 0 \quad N2 + N1 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad Ay + N1 \sin 45^\circ = 0$$

$$N1 = -\frac{10}{\sqrt{2}}P \quad N2 = +5P$$

Nodo F

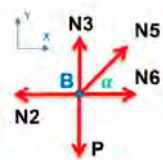


$$\sum F_x = 0 \quad N4 - N1 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N3 - N1 \cos 45^\circ = 0$$

$$N4 = -5P \quad N3 = +5P$$

Nodo B



$$\sum F_x = 0 \quad N6 - N2 + N5 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N3 + N5 \sin 45^\circ - P = 0$$

$$N5 = -\frac{8P}{\sqrt{2}} \quad N6 = +9P$$

Nodo C

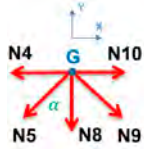


$$\sum F_x = 0 \quad N7 - N6 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N8 - 8P = 0$$

$$N7 = +9P \quad N8 = +8P$$

Nodo G



$$\sum F_x = 0 \quad N10 + N9 \cos 45^\circ - N4 - N5 \cos 45^\circ = 0$$

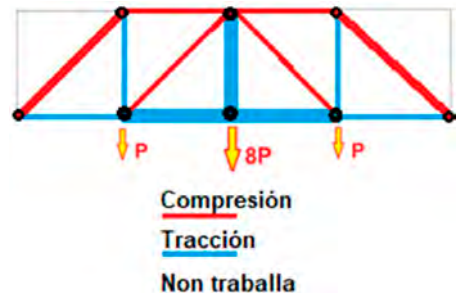
$$\sum F_y = 0 \quad -N8 - N5 \sin 45^\circ - N9 \sin 45^\circ = 0$$

$$N9 = -\frac{8P}{\sqrt{2}} \quad N10 = -5P$$

Os axiais do resto das barras se poden quitar por simetría, xa que tanto a estrutura, apoios e as cargas aplicadas son simétricas

Táboa A-8.1 Táboa cos axiais das barras e esquema de barras a tracción e compresión

Barra	Li	Ni	Ni (kN)	
1	$\sqrt{2}/L$	$-10P/\sqrt{2}$	-354	Compresión
2	L	+5P	250	Tracción
3	L	+5P	250	Tracción
4	L	-5P	-250	Compresión
5	$\sqrt{2}/L$	$-8P/\sqrt{2}$	-283	Compresión
6	L	+9P	450	Tracción
7	L	+9P	450	Tracción
8	L	+8P	800	Tracción
9	$\sqrt{2}/L$	$-8P/\sqrt{2}$	-283	Compresión
10	L	-5P	-250	Compresión
11	L	+5P	250	Tracción
12	$\sqrt{2}/L$	$-10P/\sqrt{2}$	-354	Compresión
13	L	+5P	250	Tracción



Como se pode ver no esquema, as diagonais traballan a compresión, mentres que os montantes traballan a tracción. Se quixésemos un óptimo traballo debería ser ó revés, para o cal as diagonais deberían estar colocadas no sentido contrario, como no exercicio anterior.

b) Calculo do desprazamento vertical no nodo G, para elo seguiremos os seguintes pasos:

1º Calculo dos axiais debidos a cunha carga virtual no nodo G onde se quere calcular o desprazamento. Comezamos por eliminar as barras que debido a que non teñen cargas nos nodos e a súa disposición xeométrica xa sabemos de antemán que non traballan. Neste caso non traballa a barra 8

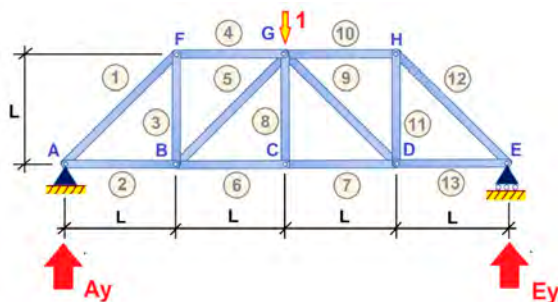
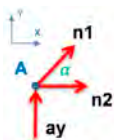


Figura A-9.4 Esquema da celosia tipo Howe com carga vertical unitaria no nodo C

As reacciones nos apoios serán de valor $\frac{1}{2}$, xa que a estrutura e apoios son simétricos.

Nodo A



$$\sum F_x = 0 \quad n2 + n1 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad ay + n1 \sin 45^\circ = 0$$

$$n1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad n2 = \frac{1}{2}$$

Nodo F

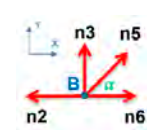


$$\sum F_x = 0 \quad n4 - n1 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -n3 - n1 \cos 45^\circ = 0$$

$$n4 = -\frac{1}{2} \quad n3 = \frac{1}{2}$$

Nodo B

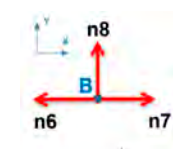


$$\sum F_x = 0 \quad n6 - n2 + n5 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad n3 + n5 \sin 45^\circ = 0$$

$$n5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad n6 = +1$$

Nodo C

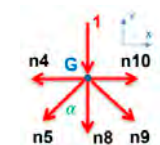


$$\sum F_x = 0 \quad n7 - n6 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad n8 = 0$$

$$n7 = 1 \quad n8 = 0$$

Nodo G



$$\sum F_x = 0 \quad n10 + n9 \cos 45^\circ - n4 - n5 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -n8 - n5 \sin 45^\circ - n9 \sin 45^\circ - 1 = 0$$

$$n10 = -\frac{1}{2} \quad n9 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Os axiais do resto das barras se poden quitar por simetría.

2º Calculo dos desprazamento mediante a ecuación de traballos virtuais, segundo a carga de valor 1 colocado en dirección vertical no nodo G. Valores postos na táboa inferior.

$$\delta_{vC} = \sum \frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} n_i$$

Táboa A-9.1 Táboa cos axiais das barras e calculo do desprazamento

Barra	Li	Ni	ni	Ni Li ni
1	$\sqrt{2}L$	$-10P/\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$+5\sqrt{2}PL$
2	L	+5P	1/2	$+5PL/2$
3	L	+5P	1/2	$+5PL/2$
4	L	-5P	-1/2	$+5PL/2$
5	$\sqrt{2}L$	$-8P/\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$+4\sqrt{2}PL$
6	L	+9P	1	$+9LP$
7	L	+9P	1	$+9LP$
8	L	+8P	0	0
9	$\sqrt{2}L$	$-8P/\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$+4\sqrt{2}PL$
10	L	-5P	-1/2	$+5PL/2$
11	L	+5P	1/2	$+5PL/2$
12	$\sqrt{2}L$	$-10P/\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$+5PL/2$
13	L	+5P	1/2	$+5PL/2$
				$(71+26\sqrt{2})PL/2$

$$\delta_{vG} = \frac{(71+26\sqrt{2})PL}{2 \cdot A \cdot E} = 59,43 \text{ mm}$$

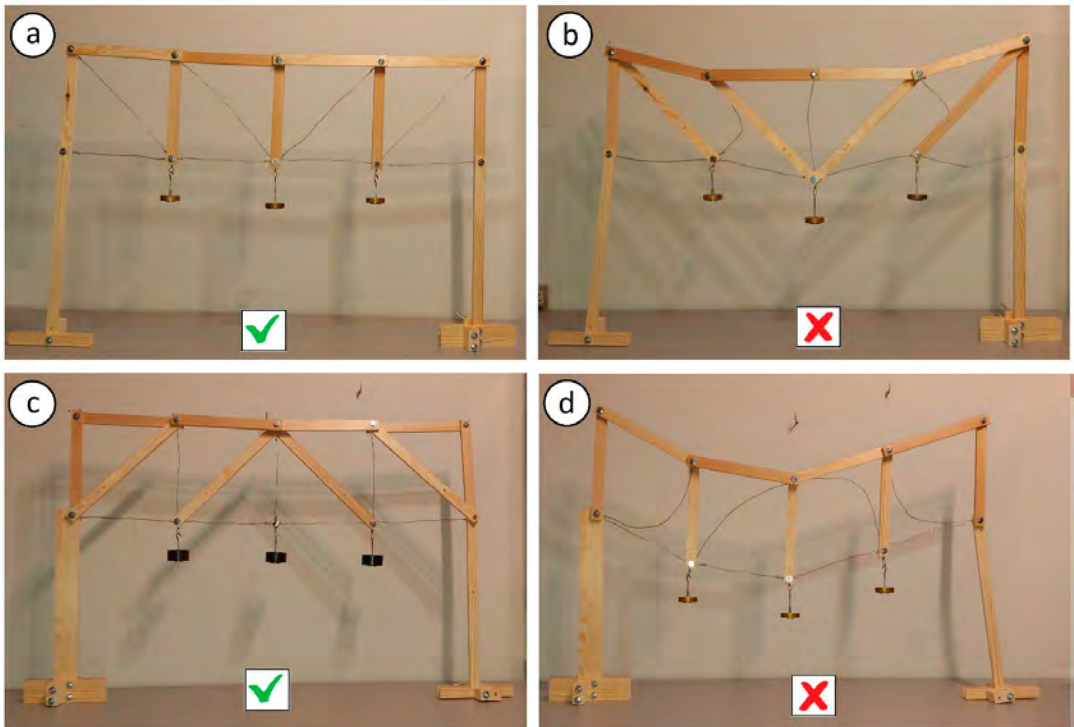


Figura A-9.5. a) Maqueta de celosía Pratt montadas correctamente as diagonais e montantes con cables e barras de madeira. b) Maqueta de celosía Pratt montadas incorrectamente as diagonais e montantes con cables e barras de madeira. c) Maqueta de celosía Howe montadas correctamente as diagonais e montantes con cables e barras de madeira. d) Maqueta de celosía Howe montadas incorrectamente as diagonais e montantes con cables e barras de madeira.

1.2.10 Exercício A-10. Celosía plana tipo Warren

Na celosía plana tipo Warren de barras articuladas da figura calcular o esforço em cada unha das barras para a carga $P=10\text{ kN}$ e $L=1.5\text{ m}$

61

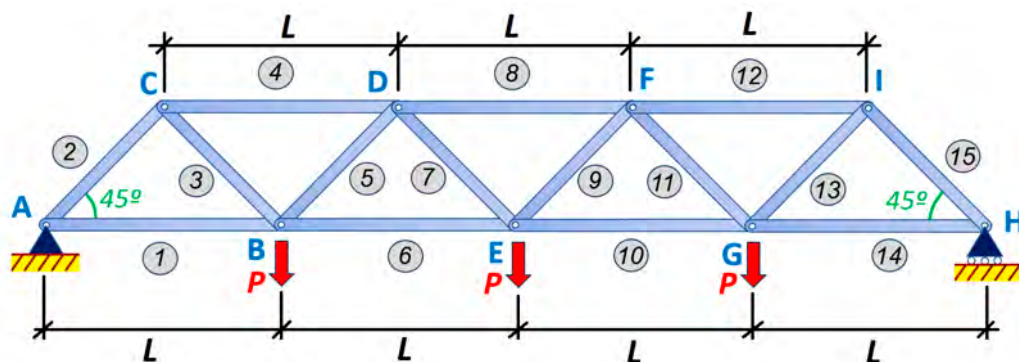


Figura A-9.1 a) Esquema da celosía plana tipo Warren. b) Foto de celosía Warren de unha pasarela de porto deportivo.

Solución:

1º Cálculo das reacción nos apoios

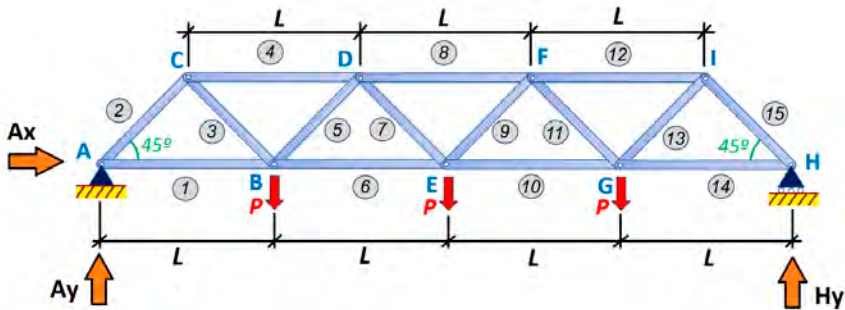


Figura A-10.2 Esquema da celosía tipo Warren coas reaccións nos apoios e as barras numeradas.

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + H_y - 3P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad H_y \cdot 4L - P \cdot 3L - P \cdot 2L - P \cdot L = 0$$

$$A_y = \frac{3}{2}P \quad H_y = \frac{3}{2}P$$

2º Cálculo dos axiais por método dos nodos

Nodo A

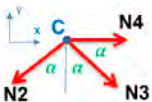


$$\sum F_x = 0 \quad N2 \cos \alpha + N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{3}{2}P + N2 \sin \alpha = 0$$

$$N1 = +\frac{3}{2}P \quad N2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}P$$

Nodo C

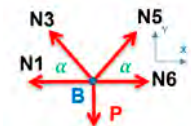


$$\sum F_x = 0 \quad N4 + N3 \cos \alpha - N2 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N2 \sin \alpha + N3 \sin \alpha = 0$$

$$N3 = +\frac{3}{\sqrt{2}}P \quad N4 = -3P$$

Nodo B

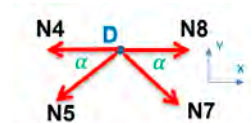


$$\sum F_x = 0 \quad N6 + N5 \cos \alpha - N1 - N3 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N3 \sin \alpha + N5 \sin \alpha - P = 0$$

$$N5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}P \quad N6 = +\frac{7}{2}P$$

Nodo D



$$\sum F_x = 0 \quad N8 + N7 \cos \alpha - N4 - N5 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N5 \sin \alpha - N7 \sin \alpha = 0$$

$$N7 = +\frac{1}{\sqrt{2}}P \quad N8 = -4P$$

O resto dos nodos xa se quitan por simetría

Táboa A-9.1 Táboa cos axiais das barras e esquema de barras a tracción e compresión

Barra	Ni	Ni (kN)	
1	$3P/2$	15	T
2	$-3P/\sqrt{2}$	-21,4	C
3	$3P/\sqrt{2}$	21,4	T
4	$-3P$	-30	C
5	$-P/\sqrt{2}$	-7,1	C
6	$7P/2$	35	T
7	$P/\sqrt{2}$	7,1	T
8	$-4P$	-40	C

Barra	Ni	Ni (kN)	
9	$P/\sqrt{2}$	7,1	T
10	$7P/2$	35	T
11	$-P/\sqrt{2}$	-7,1	C
12	$-3P$	-30	C
13	$3P/\sqrt{2}$	21,4	T
14	$3P/2$	15	T
15	$-3P/\sqrt{2}$	-21,4	C

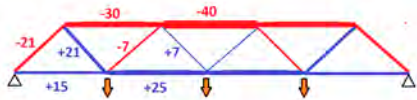


Figura A-10.3 Foto da celosía tipo Warren, non plana na parte superior, para cuberta de parking.

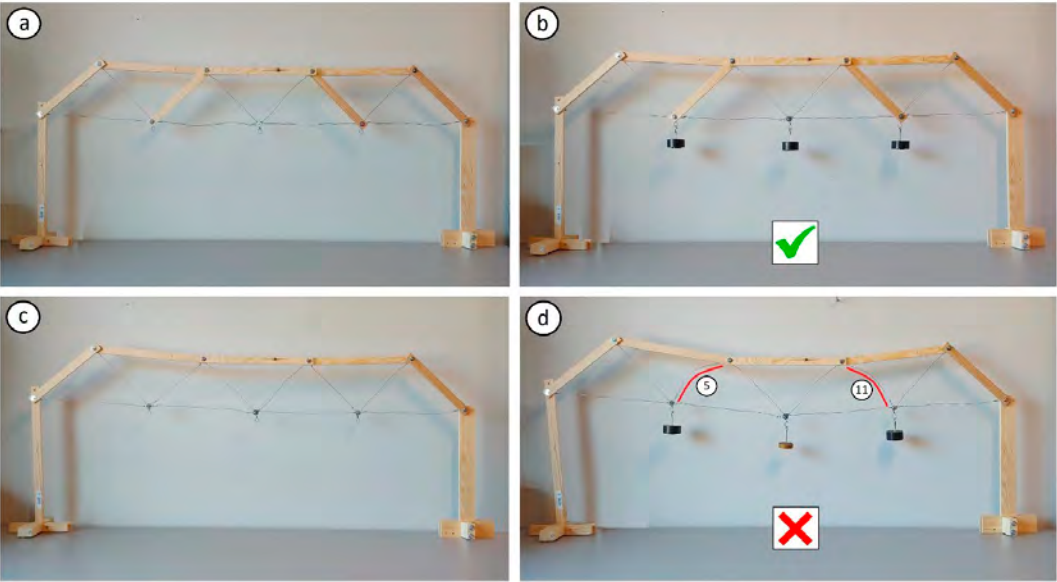


Figura A-10.4. Nesta figura dunha maqueta de estrutura de barras podemos observar como na montaxe (a), que sería coas diagonais traballando a tracción con cables e as diagonais traballando a compresión con barras de madeira, traballa correctamente (b), mentres que na figura (c) que é con todas as diagonais con cables traballa incorrectamente, porque as diagonais 5 e 11 traballan a compresión (d).

1.2.11 Exercício A-11. Grúa de porto

Na celosía de barras articuladas da figura calcular:

- Esforzo en cada unha das barras para a unha carga $P=100$ kN.
- Calcular o desprazamento vertical da carga P para a situación de carga anterior e supondo que todas as barras son de tubo IPE200 (sección 2850 mm^2), de aceiro S235JR ($E=200\text{GPa}$).
- Calcular o desprazamento horizontal da carga P para a situación de carga anterior e supondo que todas as barras son de tubo IPE200 (sección 2850 mm^2), de aceiro S235JR ($E=200\text{GPa}$).

64

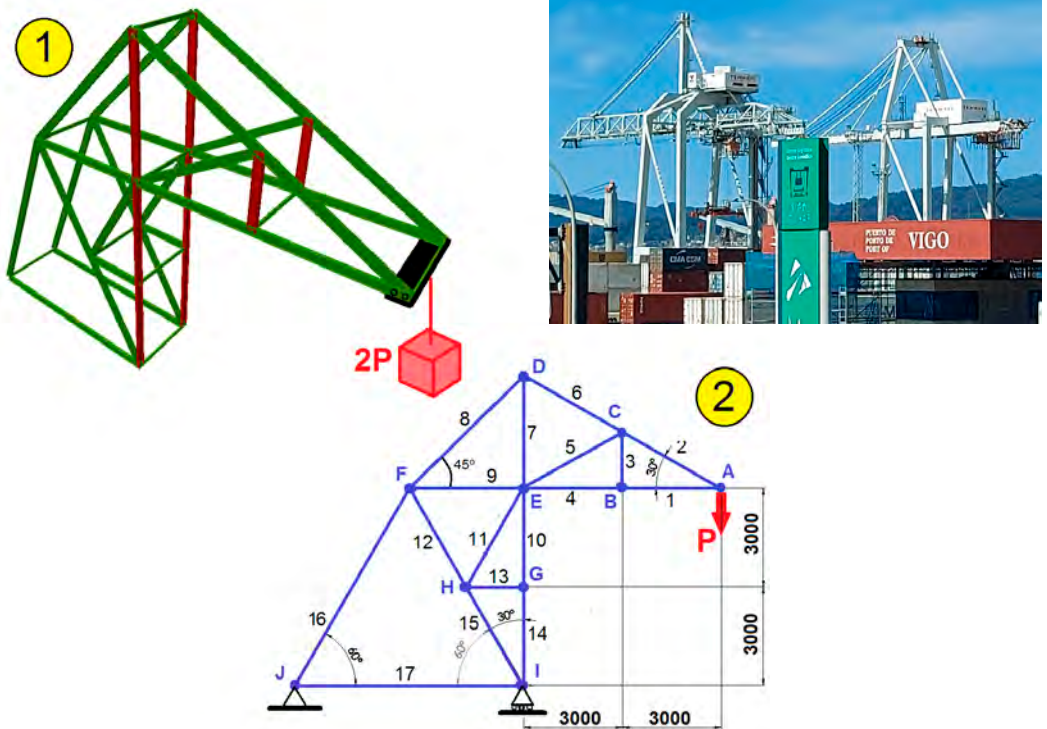


Figura A-11.1 a) Esquema 3D da de grúa de porto. b) Esquema da celosía de grúa de porto acotada e cas barras numeradas. b) Foto de grúa de porto de carga e descarga de mercancías.

a) Esforzos en cada barra da estrutura.

1º Debido a que non necesitamos calcular as reaccións nos apoios para resolver o exercicio, comezaremos por calcular os esforzos nas barras debido ás cargas externas. Comezamos por eliminar as barras que debido a que non teñen cargas nos nodos e a súa disposición xeométrica xa sabemos de antemán que non traballan. Neste caso non traballan as barras 3,5,11,13

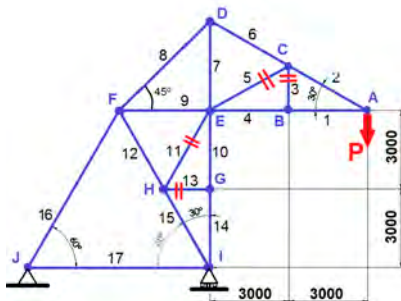
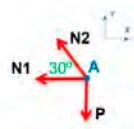


Figura A-11.2 Esquema da celosía de grúa de porto coas barras que non traballan eliminadas . 2º

Cálculo dos esforzos en cada barra polo método dos nodos

Nodo A



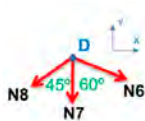
$$\sum F_x = 0 \quad -N2 \cos 30^\circ - N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N2 \sin 30^\circ - P = 0$$

$$N2 = 2P \quad ; \quad N6 = N2$$

$$N1 = -\sqrt{3}P \quad ; \quad N4 = N1$$

Nodo D



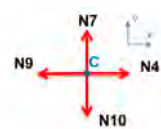
$$\sum F_x = 0 \quad N6 \sin 60^\circ - N8 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N6 \cos 60^\circ - N8 \cos 45^\circ - N7 = 0$$

$$N8 = \sqrt{2} \sqrt{3} P$$

$$N7 = -P(1 + \sqrt{3})$$

Nodo E



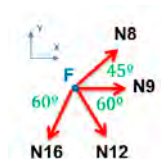
$$\sum F_x = 0 \quad N9 - N4 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N7 - N10 = 0$$

$$N9 = -\sqrt{3}P$$

$$N10 = -P(1 + \sqrt{3})$$

Nodo F



$$\sum F_x = 0 \quad N8 \cos 45^\circ + N9 + N12 \cos 60^\circ - N16 \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N8 \sin 45^\circ - N12 \sin 60^\circ - N16 \sin 60^\circ = 0$$

$$N12 = P$$

$$N16 = P$$

Nodo J



$$\sum F_x = 0 \quad N16 \cos 60^\circ + N17 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N16 \sin 60^\circ + Rj = 0$$

$$N17 = \frac{P}{2}$$

Táboa A-11.1 Táboa cos axiais das barras

Barra	Li (mm)	Ni	Ni (kN)	
1	3000	$-\sqrt{3}P$	-173,2	Compresión
2	3464	$+2P$	200	Tracción
3	1732	0	0	
4	3000	$-\sqrt{3}P$	-173,2	Compresión
5	3464	0	0	
6	3464	$+2P$	200	Tracción
7	3464	$-P(1+\sqrt{3})$	-273,2	Compresión
8	4899	$\sqrt{2}\sqrt{3}P$	245	Tracción
9	3464	$-\sqrt{3}P$	-173,2	Compresión
10	3000	$-P(1+\sqrt{3})$	-273,2	Compresión
11	3464	0	0	
12	3464	$+P$	100	Tracción
13	1732	0	0	
14	3000	$-P(1+\sqrt{3})$	-273,2	Compresión
15	3464	$+P$	100	Tracción
16	6928	$+P$	100	Tracción
17	6928	$P/2$	50	Tracción

b) Cálculo do desprazamento vertical no nodo A, para elo seguiremos os seguintes pasos:

1º Calculo dos axiais debidos a unha carga virtual vertical no nodo A, onde se quere calcular o desprazamento. Comezamos por eliminar as barras que debido a que non teñen cargas nos nodos e a súa disposición xeométrica xa sabemos de antemán que non traballan. Neste caso non traballan as barras 3,5,11,13. Debido a que a carga virtual esta situada no mesmo nodo e dirección que a carga P, os resultados serán os mesmos pero con $P=1$

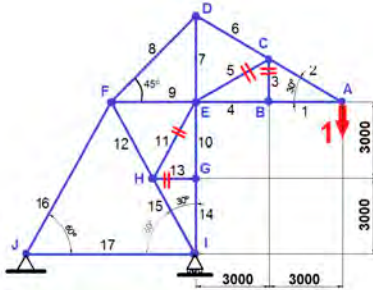


Figura A-11.3 Esquema da celosía de grúa de porto con carga unitaria vertical no nodo A e coas barras que non traballan eliminadas.

Cálculo do desprazamento mediante a ecuación de traballos virtuais, segundo a carga de valor 1 colocada en dirección vertical no nodo A. Valores postos na táboa inferior.

$$\delta_{vA} = \sum \frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} n_i$$

Táboa A-11.1 Táboa cos axiais das barras para carga unitaria vertical e calculo do desprazamento

Barra	Li (mm)	Ni	ni	Ni Li ni
1	3000	$-\sqrt{3}P$	$-\sqrt{3}$	8999,47
2	3464	$+2P$	$+2$	13856,00
3	1732	0	0	0,00
4	3000	$-\sqrt{3}P$	$-\sqrt{3}$	8999,47
5	3464	0	0	0,00
6	3464	$+2P$	$+2$	13856,00
7	3464	$-P(1+\sqrt{3})$	$-(1+\sqrt{3})$	25854,69
8	4899	$\sqrt{2}\sqrt{3}P$	$\sqrt{2}\sqrt{3}$	29406,25
9	3464	$-\sqrt{3}P$	$-\sqrt{3}$	10391,34
10	3000	$-P(1+\sqrt{3})$	$-(1+\sqrt{3})$	22391,47
11	3464	0	0	0,00
12	3464	$+P$	$+$	3464,00
13	1732	0	0	0,00
14	3000	$-P(1+\sqrt{3})$	$-(1+\sqrt{3})$	22391,47
15	3464	$+P$	$+1$	3464,00
16	6928	$+P$	$+1$	6928,00
17	6928	$P/2$	$1/2$	1732,00
				171734P

67

$$\delta_{vA} = \frac{171734 P}{A \cdot E} = 30,1288 \text{ mm}$$

b) Cálculo do desprazamento horizontal do nodo A.

Para elo poremos unha carga virtual horizontal de valor 1 no nodo A. Eliminaremos todas aquelas barras que non traballen.

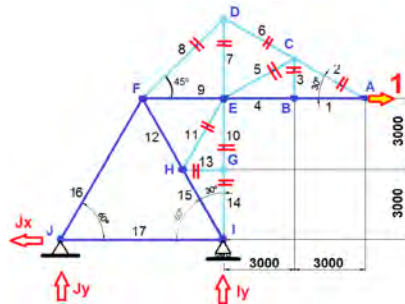


Figura A-11.3 Esquema da celosía de grúa de porto con carga unitaria horizontal no nodo A e cas barras que non traballan eliminadas .

Como se pode observar as barras 1, 4 e 9 o seu axial é igual a 1

$$n_1 = 1; n_4 = 1; n_9 = 1$$

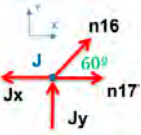
Procedemos a calcular o resto dos nodos

Nodo F



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \quad n9 + n12 \cos 60^\circ - n16 \cos 60^\circ = 0 \\ \sum F_y &= 0 \quad -n12 \sin 60^\circ - n16 \sin 60^\circ = 0 \\ n12 &= -1 \quad n16 = 1\end{aligned}$$

Nodo J



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \quad n16 \cos 60^\circ + n17 - Jx = 0 \\ \sum F_y &= 0 \quad n16 \sin 60^\circ + Jy = 0 \\ n17 &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

68

Táboa A-11.2 Táboa cos axiais das barras para carga unitaria horizontal e calculo do desprazamento

Barra	Li (mm)	Ni	n'i	Ni Li n'i
1	3000	$-\sqrt{3}P$	1	-5196,00
2	3464	$+2P$	0	0,00
3	1732	0	0	0,00
4	3000	$-\sqrt{3}P$	1	-5196,00
5	3464	0	0	0,00
6	3464	$+2P$	0	0,00
7	3464	$-P(1+\sqrt{3})$	0	0,00
8	4899	$\sqrt{2}\sqrt{3}P$	0	0,00
9	3464	$-\sqrt{3}P$	1	-5999,65
10	3000	$-P(1+\sqrt{3})$	0	0,00
11	3464	0	0	0,00
12	3464	$+P$	-1	-3464,00
13	1732	0	0	0,00
14	3000	$-P(1+\sqrt{3})$	0	0,00
15	3464	$+P$	-1	-3464,00
16	6928	$+P$	1	6928,00
17	6928	$P/2$	0,5	-1732,00
				18124P

$$\delta_{HA} = \frac{-18124 P}{A \cdot E} = -3,18 \text{ mm}$$

No cálculo do desprazamento horizontal do nodo A podemos ver na táboa inferior A-11.2 como na expresión (Ni Li ni), a carga virtual (cor amarelo) indica que barras son as que participan na desprazamento horizontal de A e en que proporción, mentres que a carga P danos a deformación que se produce en cada barra debido o esforzos que soporta debido á carga P.

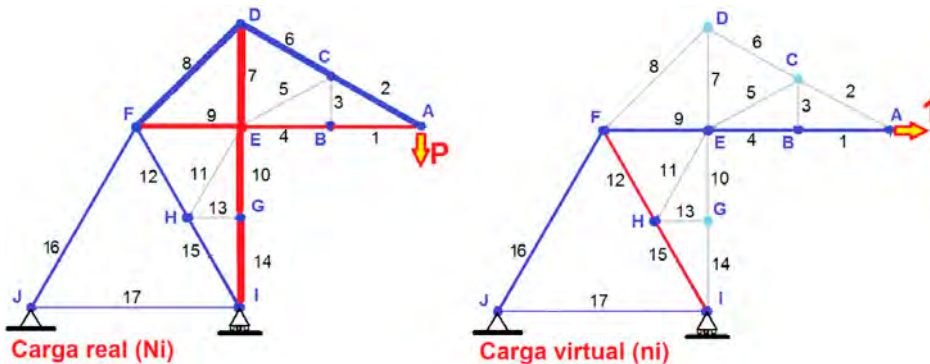


Figura A-11.4 Comparativa dos esquema da celosía de grúa de porto con carga P e tamen con unitaria horizontal no nodo A.

Táboa A-11.2 Táboa cos axiais das barras para carga unitaria horizontal e calculo do desprazamento, onde están identificados en cor amarelo as barras que contribúen o desprazamento horizontal do nodo A

Barra	Li (mm)	Ni	n'i	Ni Li n'i
1	3000	-√3P	1	-5196,00
2	3464	+2P	0	0,00
3	1732	0	0	0,00
4	3000	-√3P	1	-5196,00
5	3464	0	0	0,00
6	3464	+2P	0	0,00
7	3464	-P(1+√3)	0	0,00
8	4899	√2√3P	0	0,00
9	3464	-√3P	1	-5999,65
10	3000	-P(1+√3)	0	0,00
11	3464	0	0	0,00
12	3464	+P	-1	-3464,00
13	1732	0	0	0,00
14	3000	-P(1+√3)	0	0,00
15	3464	+P	-1	-3464,00
16	6928	+P	1	6928,00
17	6928	P/2	0,5	-1732,00

69

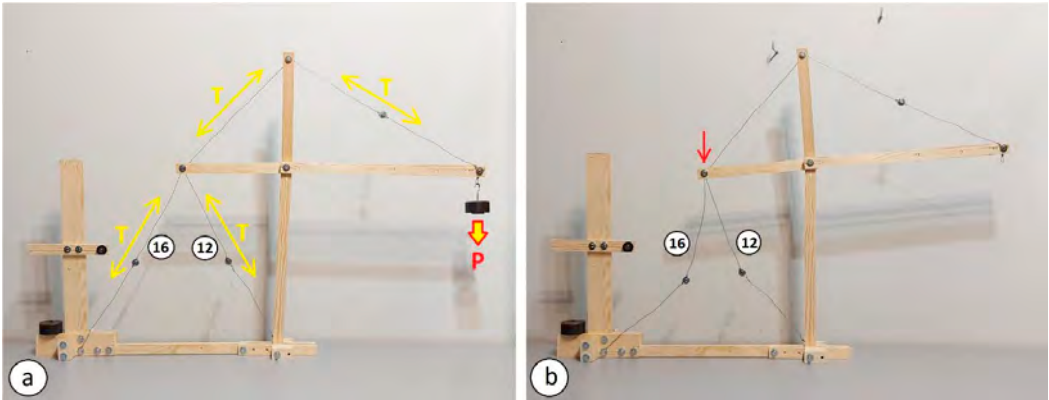


Figura A-11.5. Nesta figura (a) podemos observar o montaxe da grúa cando pomos a carga P no extremo e as barras traballan correctamente, especialmente as barras (16 e 12) que traballan a tracción. Na figura (b) cando quitamos a carga P, as barras (12 e 16) pasan a traballar a compresión e a estrutura colapsa.

1.2.12 Exercício A-12. Celosía triangular tipo Pratt.

Na celosía de barras articuladas da figura calcular:

- Esforço em cada unha das barras para a carga $P=10\text{ kN}$ e $L=4\text{ m}$
- Analisar o comportamento respecto o diagrama de momentos e cortantes e se fose unha viga maciza.

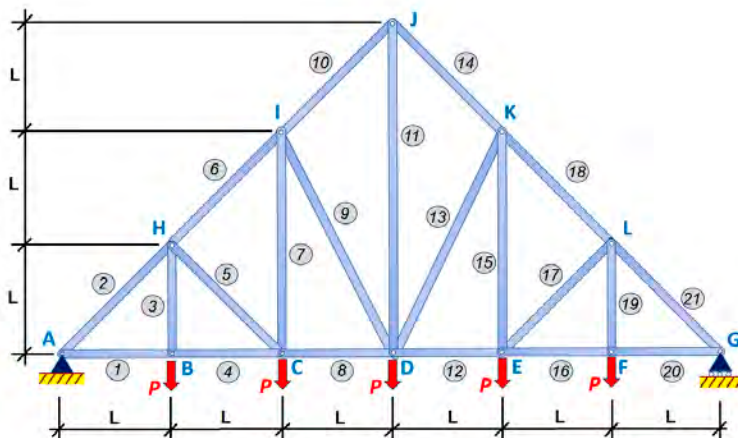
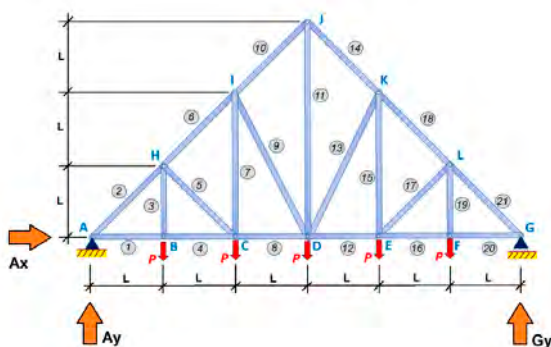


Figura A-12.1 a) Esquema da celosía triangular tipo Pratt de altura L . b) Foto de celosía Pratt de unha ponte de madeira.



71

Figura A-12.2 Esquema da celosia triangular tipo Pratt coas reaccions nos apoios e as barras numeradas.

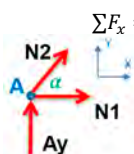
$$\sum F_y = 0 \quad Ay + Gy - 5P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad Gy \cdot 6L - P \cdot 5L - P \cdot 4L - P \cdot 3L - P \cdot 2L - P \cdot L = 0$$

$$Ay = \frac{5}{2}P \quad Gy = \frac{5}{2}P$$

2º Calculo dos axiais por método dos nodos

Nodo A

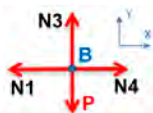


$$\sum F_x = 0 \quad N2 \cos \alpha + N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad Ay + N2 \sin \alpha = 0$$

$$N1 = \frac{5}{2}P \quad N2 = -\frac{5}{\sqrt{2}}P$$

Nodo B

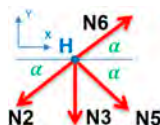


$$\sum F_x = 0 \quad N4 - N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N3 - P = 0$$

$$N3 = +P \quad N4 = +\frac{5}{2}P$$

Nodo H

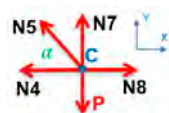


$$\sum F_x = 0 \quad N6 \cos \alpha + N5 \cos \alpha - N2 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N6 \sin \alpha - N5 \sin \alpha - N2 \sin \alpha - N3 = 0$$

$$N6 = -\frac{4}{\sqrt{2}}P \quad N5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}P$$

Nodo C

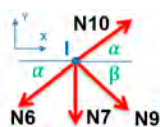


$$\sum F_x = 0 \quad N8 - N4 - N5 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N7 + N5 \sin \alpha - P = 0$$

$$N7 = +\frac{3}{2}P \quad N8 = +2P$$

Nodo I

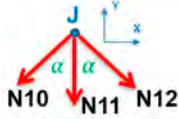


$$\sum F_x = 0 \quad N10 \cos \alpha + N9 \cos \beta - N6 \cos \alpha = 0 \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sum F_y = 0 \quad N10 \sin \alpha - N9 \sin \beta - N6 \sin \alpha - N7 = 0 \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$N9 = -\frac{3\sqrt{5}-4}{2}P \quad N10 = -\frac{3}{\sqrt{2}}P$$

Nodo J



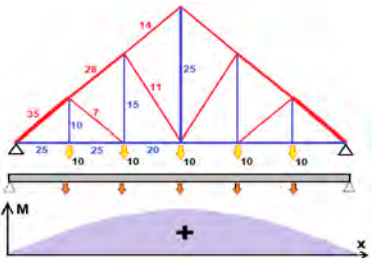
$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & N_{12}\text{sen}\alpha - N_{10}\text{sen}\alpha &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & -N_{10}\text{cos}\alpha - N_{12}\text{sen}\alpha - N_{11} &= 0 \\ N_{11} &= +3P\end{aligned}$$

Táboa A-11.1 Táboa cos axiais das barras e esquema de barras a tracción e compresión

72

Barra	Ni	Ni (kN)	
1	5P/2	25	T
2	-5P/√2	-35,4	C
3	P	10	T
4	5P/2	25	T
5	-P/√2	-7,1	C
6	-4P/√2	-28,4	C
7	3P/2	15	T
8	2P	20	T
9	-1,35P	-13,5	C
10	-3P/√2	-21	C
11	3P	30	T

Barra	Ni	Ni (kN)	
12	2P	20	T
13	-1,35P	-13,5	C
14	-3P/√2	-21	C
15	3P/2	15	T
16	5P/2	25	T
17	-P/√2	-7,1	C
18	-4P/√2	-28,4	C
19	P	10	T
20	5P/2	25	T
21	-5P/√2	-35,4	C



Se facemos unha análise do comportamento da celosía respecto ó diagrama de momentos (se esta fose unha viga maciza) podemos observar como neste deseño de celosía ó variar a altura do cordón superior topámonos que neste caso as tensión nos cordóns inferiores se manteñen case constantes a diferenza do que sucede nas celosías rectas coma as do exercicio 7. Este deseño de altura variable se emprega en estruturas coma as de pontes (como as da figuras) ou cubertas para así optimizar os perfíles da celosía, inda que isto complique a súa construción.

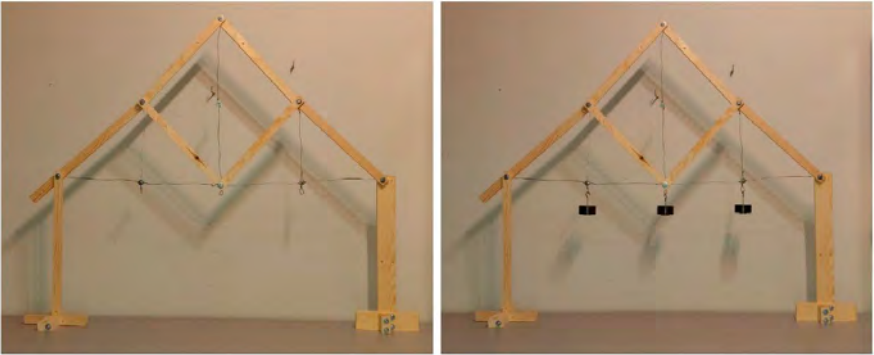


Figura A-12.3 Exemplos de aplicación de este modelo de celosía sobre unha maqueta, onde se ve os elementos que traballa a tracción, empregando cables.

1.2.13 Exercício A-13 Celosía con arriostramento en V

Na celosía de barras articuladas da figura calcular:

- Reaccións nos apoios
- Calcular os esforzos en cada barra
- Desprazamento vertical do nodo H se ademais das forzas anteriores tamén hai un incremento de temperatura ΔT
- Estudar o comportamento no caso de só carga horizontal no nodo G

73

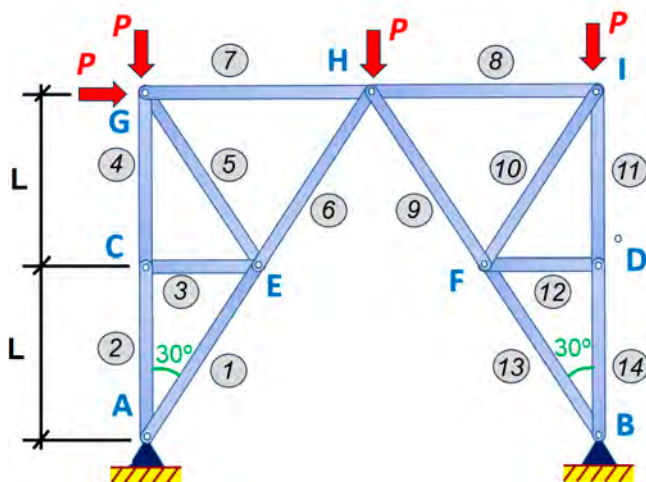


Figura A-13.1 Esquema da estrutura articulada de celosía con arriostramento en V. Foto de base de torre eléctrica con arriostramento en V. Plataformas de porto con arriostramento en V.

a) Cálculo de reaccións nos apoios.

Por ter dous apoios fixos articulados, esta estrutura ten catro reaccións, polo que son necesarias 4 ecuacións. Pero nesta estrutura debido a que está unida por un único nodo en H, respecto a este nodo se pode facer equilibrio de momentos do lado dereito da estrutura e equilibrio de momentos do lado esquerdo, que xunto con suma de forzas horizontais e suma de forzas verticais obtemos catro ecuacións.

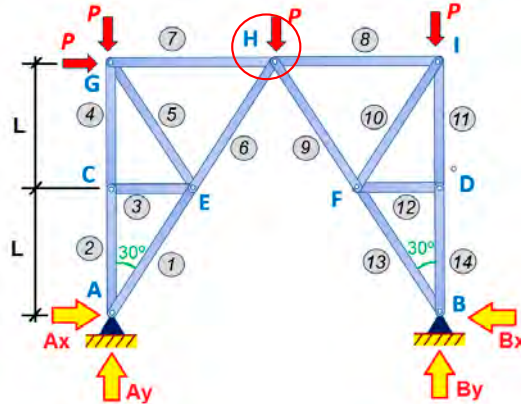


Figura A-13.2 Esquema da estrutura articulada de celosía con arriostramento en V coas reaccións nos apoios e as barras numeradas

$$\sum F_x = 0 \quad Ax - Bx + P = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad Ay + By - 3P = 0$$

$$\sum M_{H \text{ izq}} = 0 \quad Ax \cdot 2L - Ay \cdot 2L/\sqrt{3} + P \cdot 2L/\sqrt{3} = 0$$

$$\sum M_{H \text{ der}} = 0 \quad Bx \cdot 2L - By \cdot 2L/\sqrt{3} + P \cdot 2L/\sqrt{3} = 0$$

$$Ay = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} P \quad Ax = \frac{\sqrt{3} - 3}{6} P$$

$$By = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} P \quad Bx = \frac{\sqrt{3} + 3}{6} P$$

b) Calculo polo método dos nodos dos esforzos de cada barra

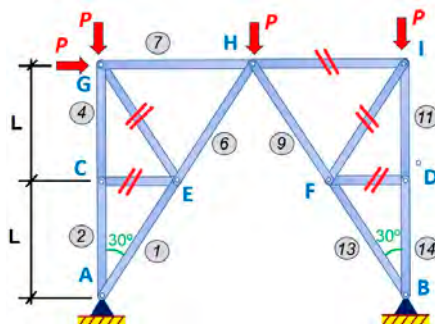
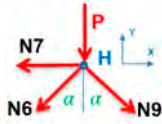


Figura A-13.3 Esquema da estrutura articulada de celosía con arriostramento en V coas barras que non traballan eliminadas.

Nodo G

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \quad P + N7 = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad P + N4 = 0 \\ N4 = -P & \quad N7 = -P\end{aligned}$$

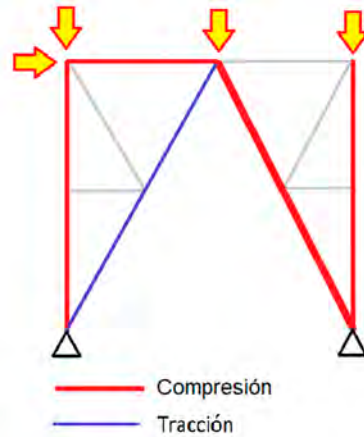

Nodo H

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \quad N9 \sin \alpha - N6 \sin \alpha - N7 = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad N6 \cos \alpha + N9 \cos \alpha + P = 0 \\ N6 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} P & \quad N9 = -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} P\end{aligned}$$


75

Táboa A-13.1 Táboa cos axiais das barras e esquema de barras a tracción e compresión

Barra	Ni	Ni (kN)	
1	$(\sqrt{3}-1)P/\sqrt{3}$	4,2	T
2	-P	-10	C
3	0	0	
4	-P	-10	C
5	0	0	
6	$(\sqrt{3}-1)P/\sqrt{3}$	4,2	T
7	-P	-10	C
8	0	0	
9	$-(\sqrt{3}+1)P/\sqrt{3}$	-15,8	C
10	0	0	
11	-P	-10	C
12	0	0	
13	$-(\sqrt{3}+1)P/\sqrt{3}$	-15,8	C
14	-P	-10	C



c) Calculo do desprazamento vertical do nodo H

Calculo para caga unitaria de valor 1 no nodo H

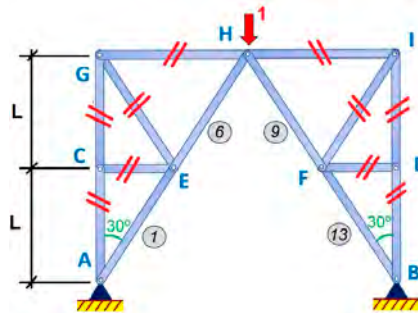
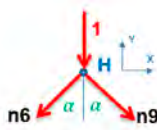


Figura A-13.4 Esquema da celosía con carga unitaria vertical no nodo H e cas barras que non traballan eliminada

Nodo H

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \quad n6 \sin \alpha - n9 \sin \alpha = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad n6 \cos \alpha + n9 \cos \alpha + 1 = 0 \\ n6 = -\frac{1}{\sqrt{3}} & \quad n9 = -\frac{1}{\sqrt{3}} P\end{aligned}$$


Cálculo dos desprazamento mediante a ecuación de traballos virtuais, segundo a carga de valor 1 colocada en dirección vertical no nodo H. Valores postos na táboa inferior.

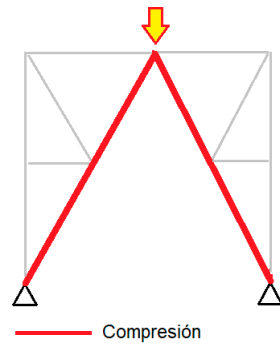
$$\delta_{vH} = \sum \frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} n_i$$

Calculo dos desprazamentos para o incremento de temperatura ΔT , aplicando a ecuación :

$$\delta_j = \sum (\alpha_i \cdot L_i \cdot \Delta T) n_i$$

Táboa A-13.2 Táboa cos axiais das barras para carga unitaria vertical e cálculo do desprazamento. Esquema das barras que traballan a compresión

Barra	n_i	N_i	L_i	$n_i N_i L_i$	$\alpha \Delta T L_i n_i$
1	$-1/\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}-1)P/\sqrt{3}$	$2L/\sqrt{3}$	$2(1-\sqrt{3})PL/3\sqrt{3}$	$\alpha \Delta T 2L/3$
2	0				
3	0				
4	0				
5	0				
6	$-1/\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}-1)P/\sqrt{3}$	$2L/\sqrt{3}$	$2(1-\sqrt{3})PL/3\sqrt{3}$	$\alpha \Delta T 2L/3$
7	0				
8	0				
9	$-1/\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}+1)P/\sqrt{3}$	$2L/\sqrt{3}$	$2(\sqrt{3}+1)PL/3\sqrt{3}$	$\alpha \Delta T 2L/3$
10	0				
11	0				
12	0				
13	$-1/\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}+1)P/\sqrt{3}$	$2L/\sqrt{3}$	$2(\sqrt{3}+1)PL/3\sqrt{3}$	$\alpha \Delta T 2L/3$
14	0				
				$8PL/3\sqrt{3}$	$\alpha \Delta T 8L/3$



$$\delta_{HH} = \frac{8 P L}{3\sqrt{3} \cdot A \cdot E} + \frac{8 L \alpha \Delta T}{3}$$

d) Comportamento no caso de só carga horizontal no nodo G

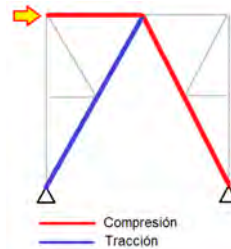
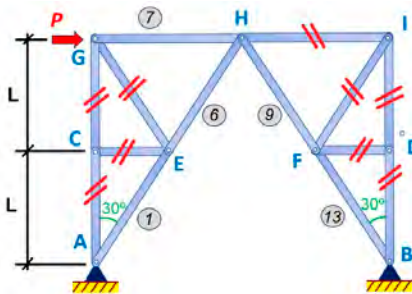


Figura A-13.5 Esquema da celosía con arriostramento en V con carga P no nodo H e cas barras que non traballan eliminada. Esquema de barras a tracción e compresión

Nodo H



$$\sum F_x = 0 \quad N_9 \sin \alpha - N_6 \sin \alpha - N_7 = 0 \quad N_7 = -P$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_6 \cos \alpha + N_9 \cos \alpha = 0$$

$$N_6 = +P \quad N_9 = -P$$

Como podemos ver na figura superior o arriostramento con barras en V e outro dos xeitos de arriostrar un pórtico. Isto tamén o podemos observar nas figuras inferiores



77

Figura A-13.6 Exemplos de aplicación de arriostramentos en V en dúas estruturas. O apoio dunha cinta transportadora. A base dun silo.

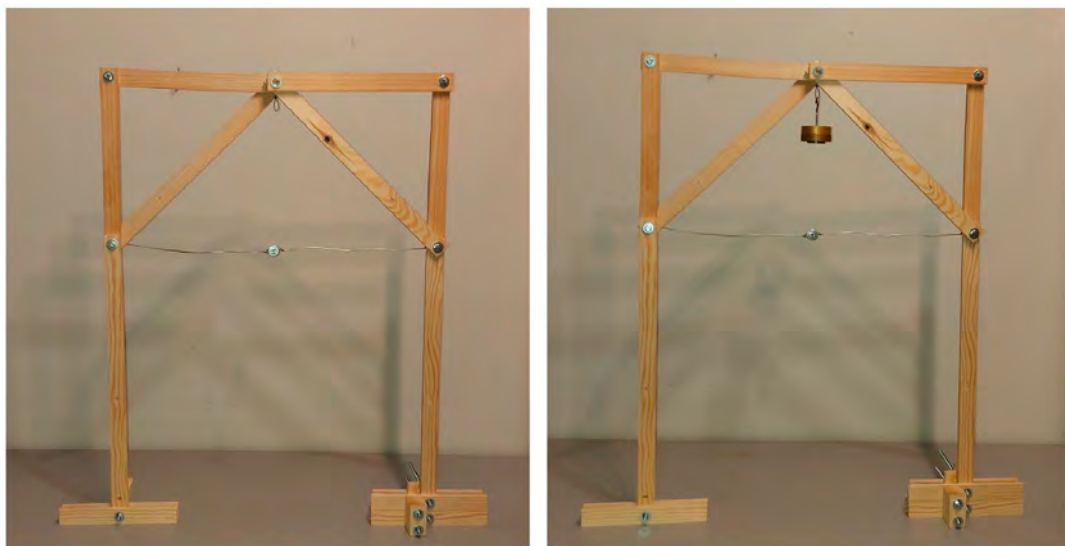


Figura A-13.7 Exemplos de aplicación de arriostramentos en V en maqueta, onde se emprega cables horizontais para facer que os nodos inferiores non teñan desprazamento horizontal.

1.2.14 Exercício A-14. Celosía plana tipo Warren de tres barras inferiores

Na celosía plana tipo Warren de barras articuladas (con tres barras no cordón inferior) da figura, calcular o esforzo en cada unha das barras para a carga $P=10\text{ kN}$ e $L=1.5\text{ m}$

78

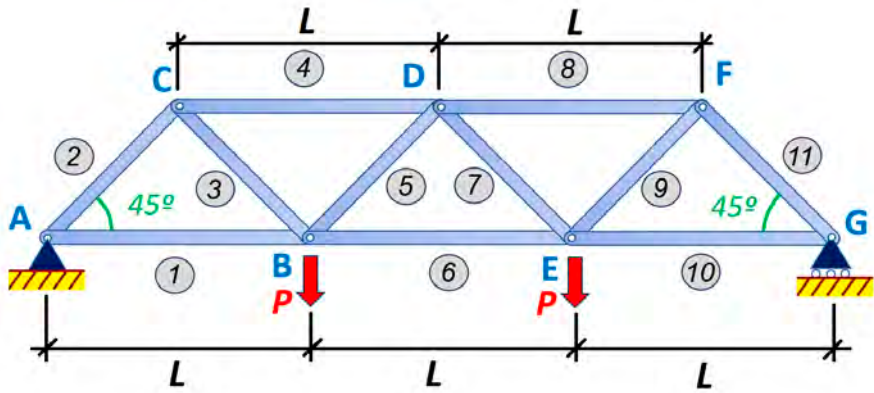
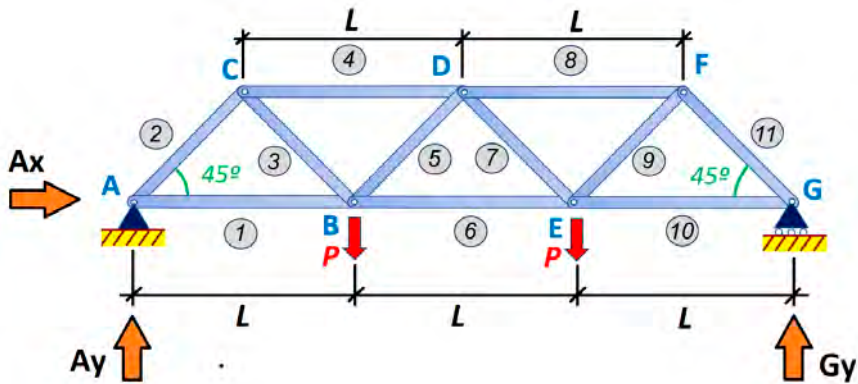


Figura A-14.1 Celosía plana tipo Warren de tres barras inferiores.

1º Cálculo das reaccións nos apoios



79

Figura A-14.2 Esquema da celosía tipo Warren de tres barras inferiores coas reaccións nos apoios e as barras numeradas.

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + G_y - 3P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad G_y \cdot 3L - P \cdot 2L - P \cdot L = 0$$

$$A_y = P \quad G_y = P$$

2º Calculo dos axiais por método dos nodos

Nodo A

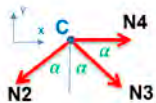


$$\sum F_x = 0 \quad N2 \cos \alpha + N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad P + N2 \sin \alpha = 0$$

$$N1 = +P \quad N2 = -\frac{2}{\sqrt{2}}P$$

Nodo C

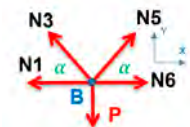


$$\sum F_x = 0 \quad N4 + N3 \cos \alpha - N2 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N2 \sin \alpha + N3 \sin \alpha = 0$$

$$N3 = +\frac{2}{\sqrt{2}}P \quad N4 = -2P$$

Nodo B



$$\sum F_x = 0 \quad N6 + N5 \cos \alpha - N1 - N3 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N3 \sin \alpha + N5 \sin \alpha - P = 0$$

$$N5 = 0 \quad N6 = +2P$$

O resto dos nodos xa se quitan por simetría

Táboa A-14.1 Táboa cos axiais das barras e esquema de barras a tracción e compresión. Esquema de barras a tracción e compresión

Barra	Ni	Ni (kN)	
1	+P	10	T
2	$-2P/\sqrt{2}$	-14,1	C
3	$+2P/\sqrt{2}$	14,1	T
4	-2P	-20	C
5	0	0	
6	+2P	20	T

Barra	Ni	Ni (kN)	
7	0	0	
8	-2P	-20	C
9	$+2P/\sqrt{2}$	14,1	T
10	+P	10	T
11	$-2P/\sqrt{2}$	-14,1	C

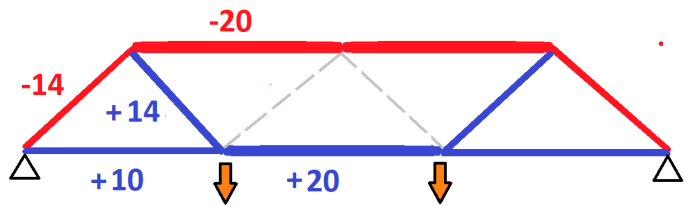
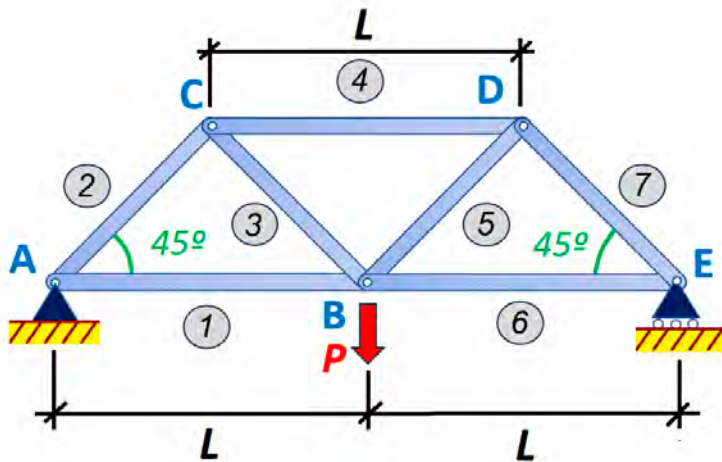


Figura A-14.3 Exemplos de maqueta de celosía de barras cas barras a compresión feitas en madeira e as de tracción con cables.

1.2.15 Exercício A-15. Celosía plana tipo Warren de duas barras inferiores

Na celosía plana tipo Warren de barras articuladas (com duas barras no cordão inferior) da figura, calcular o esforço em cada unha das barras para a carga $P=10\text{ kN}$ e $L=1.5\text{ m}$



81

Figura A-15.1 Celosía plana tipo Warren de duas barras inferiores.

1º Cálculo das reacción nos apoios

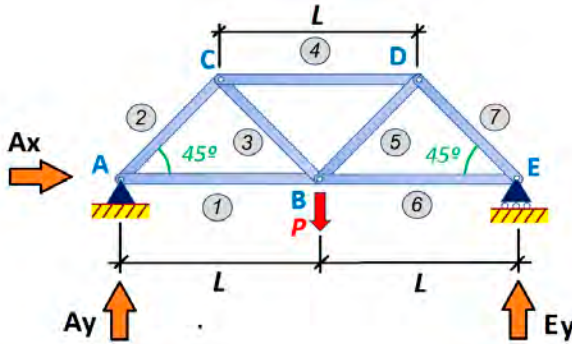


Figura A-15.2 Esquema da celosía tipo Warren de duas barras inferiores coas reaccións nos apoios e as barras numeradas.

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + E_y - 2P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad E_y \cdot 2L - P \cdot L = 0$$

$$A_y = \frac{P}{2} \quad E_y = \frac{P}{2}$$

2º Calculo dos axiais por método dos nodos

Nodo A

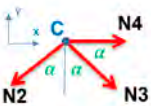


$$\sum F_x = 0 \quad N2 \cos \alpha + N1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \frac{P}{2} + N2 \sin \alpha = 0$$

$$N1 = +\frac{P}{2} \quad N2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}P$$

Nodo C



$$\sum F_x = 0 \quad N4 + N3 \cos \alpha - N2 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N2 \sin \alpha + N3 \sin \alpha = 0$$

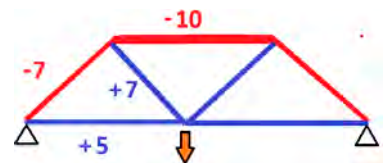
$$N3 = +\frac{1}{\sqrt{2}}P \quad N4 = -P$$

O resto dos nodos xa se quitan por simetría

Táboa A-15.1 Táboa cos axiais das barras e esquema de barras a tracción e compresión. Esquema de barras a tracción e compresión

Barra	Ni	Ni (kN)	
1	+P/2	5	T
2	-P/√2	-7	C
3	+P/√2	7	T
4	-P	-10	C

Barra	Ni	Ni (kN)	
5	+P/√2	7	T
6	+P/2	5	T
7	-P/√2	-7	C



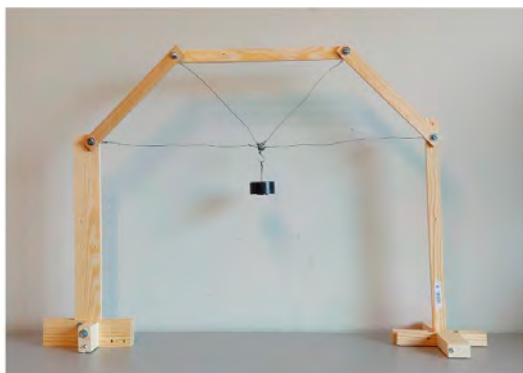


Figura A-15.3 Exemplos de maqueta da celosía de barras do exercicio, cas barras a compresión feitas en madeira e as de tracción con cables.

1.2.16 Exercício A-16. Marco cadrado con unha diagonal

Nas celosía de barras articuladas das figuras calcular:

- Esforzo en cada unha das barras para as cargas da figura para o caso "a", sendo todas as barras do mesmo material co mesmo modulo elástico E e a mesma sección A .
- Esforzo en cada unha das barras para as cargas da figura para o caso "b", sendo todas as barras do mesmo material co mesmo modulo elástico E e a mesma sección A .

84

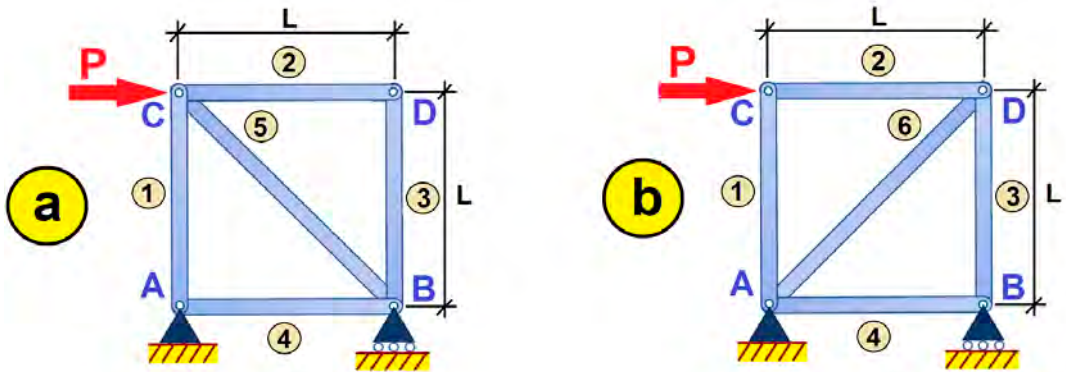
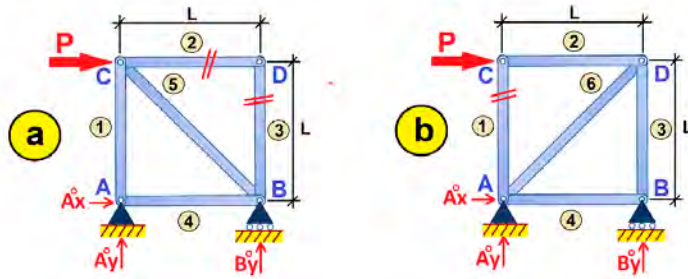


Figura A-16.1 a) Esquema de marco cadrado cun diagonal nodo C-B b) Esquema de marco cadrado cun diagonal nodo A-D

Calculo das reaccións nos apoios para ambos casos e barras que non traballan.



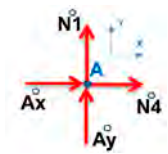
85

Figura A-16.2 Esquema das celosía coas reaccións nos apoios e as eliminadas as barras que non traballan.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & A_x^o + P &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & A_y^o + B_y^o &= 0 \\ \sum M_A &= 0 & B_y^o \cdot L - P \cdot L &= 0 \\ A_y^o &= -P & B_y^o &= P\end{aligned}$$

Calculo mediante o método dos nodos de cada un dos axiais para o caso "a"

Nodo A



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & N_1^o + A_y^o &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & N_4^o + A_x^o &= 0 \\ N_1^o &= P & N_4^o &= P\end{aligned}$$

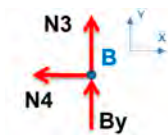
Nodo D



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & P + N_5^o \cos 45 &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & -N_1^o - N_4^o \sin 45 &= 0 \\ N_5^o &= -P\sqrt{2}\end{aligned}$$

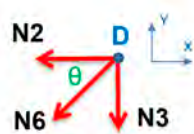
Calculo mediante o método dos nodos de cada un dos axiais para o caso "b"

Nodo B



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & N_4^o &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & N_3^o + B_y &= 0 \\ N_4^o &= 0 & N_3^o &= -P\end{aligned}$$

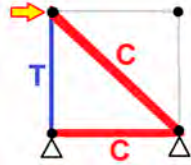
Nodo D



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & -N_2^o - N_6^o \cos 45 &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & -N_3^o - N_6^o \sin 45 &= 0 \\ N_6^o &= +P\sqrt{2} & N_2^o &= -P\end{aligned}$$

Táboa A-16.1 Táboa cos axiais das barras do caso "a" e esquema de barras a tracción e compresión

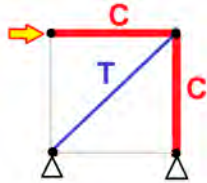
Barra	Li	Ni	Ni (kN)	
1	L	P	10	T
2	L	0	0	
3	L	0	0	
4	L	-P	-10	C
5	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}P$	-14,1	C



En esta celosía podemos ver como a diagonal (barra 5) traballa a compresión, igual que a barra 4, mentres que a barra vertical 1 traballa a tracción

Táboa A-16.2 Táboa cos axiais das barras do caso "b" e esquema de barras a tracción e compresión

Barra	Li	Ni	Ni (kN)	
1	L	0	0	
2	L	-P	-10	C
3	L	-P	-10	C
4	L	0	0	
6	$\sqrt{2}L$	$\sqrt{2}P$	14,1	T



En nesta celosía podemos ver como a diagonal (barra 5) traballa a tracción, mentres que a barra vertical 3 e horizontal 2 traballa a tracción. Esta ultima celosía ten a vantaxe de que a diagonal que e a barra mais longa traballa a tracción, polo que un cable sería suficiente.

Unha solución empregada habitualmente, é empregar dous cables (ou barras de baixa sección) en ambas diagonais de xeito que cando o esforzo e cara á dereita traballa o cable inclinado cara a dereita, e cando a forza vai cara a esquerda traballa o cable inclinado cara a esquerda

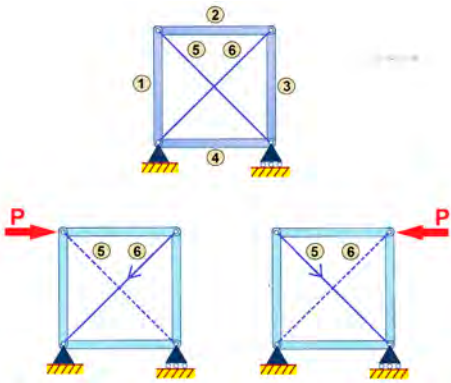
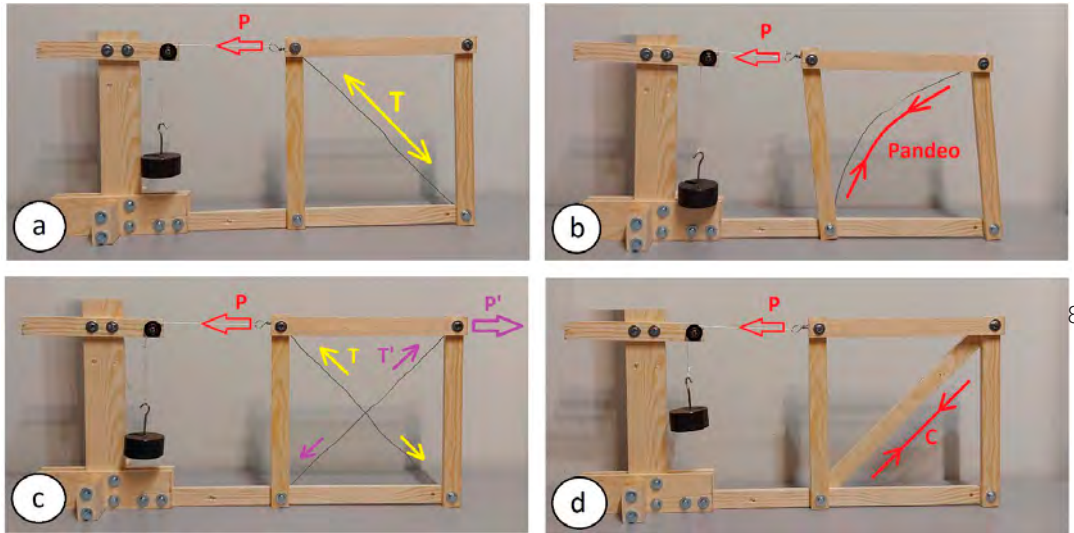


Figura A-16.3. Nesta figura podemos observar no lado esquerdo o esquema de funcionamento dos arriostramentos dos dous cabos, no lado dereito unha foto da aplicación desta solución entre os dous pilares nos pórticos de dunha carpa para así darlle estabilidade e rixidez no plano en que esta situados os cabos.



87

Figura A-16.4. a) Marco arriostrado con un cable traballando correctamente a tracción. b) Marco arriostrado incorrectamente, onde o cable traballa a compresión e polo tanto o pórtico transformase nun mecanismo. c) Pórtico arriostrado con dous cables en cruz, onde un cable entra en tracción cando o outro deixa de traballar impedindo o desprazamento do pórtico. d) Marco arriostrado con unha barra ríxida traballando a compresión.



Figura A-16.5. Exemplo de arriostramentos con dous cables na estrutura da cidade da cultura en Santiago de Compostela.

1.2.17 Exercício A-17. Marco cadrado hiperestático con dúas diagonais

Na celosía de barras articuladas da figura calcular:

- Grado de hiperestaticidade
- Esforzo en cada unha das barras para as cargas da figura, sendo todas as barras do mesmo material, co mesmo modulo elástico E

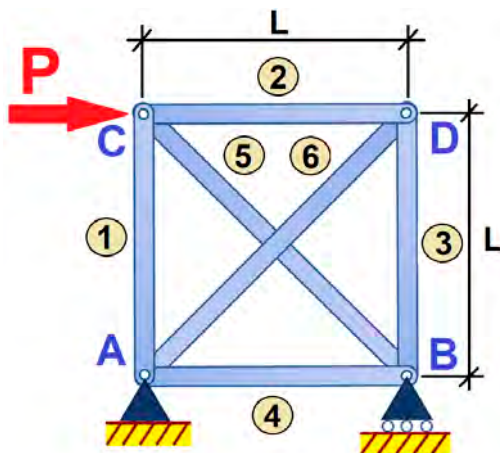


Figura A-17.1 Esquema do marco cadrado de barras con nodos articulados con dúas diagonais

a) Cálculo do grado de hiperastiticidade e identificación do elemento redundante.

$$\begin{aligned} GHT &= (B+R) - 2N \\ GHE &= R - 3 \\ GHi &= GHT - GHE \end{aligned}$$

$$GHT = 6 + 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

$$GHE = 3 - 3 = 0$$

$$GHi = 1 - 0 = 1$$

Esta celosía é isostática externamente, pero hiperestática de grado 1 internamente. As barras que son redundantes serían as diagonais centrais. Neste caso vamos a considerar unha delas como redundante.

b) Esfuerzo en cada unha das barras para a carga P

89

1º Definición da Isostática fundamental da estrutura. Substituíndo a barra redundante polo valor do seu axial X.

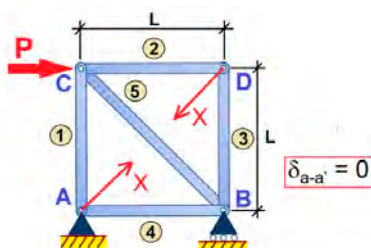


Figura A-17.2 Esquema da isostática fundamental do marco cadrado de barras con nodos articulados con dúas diagonais

2º Descomposición da isostática fundamental nas súas compoñentes

Calculo do valor dos axiais da estrutura sen a barra que sobra e coas cargas externas

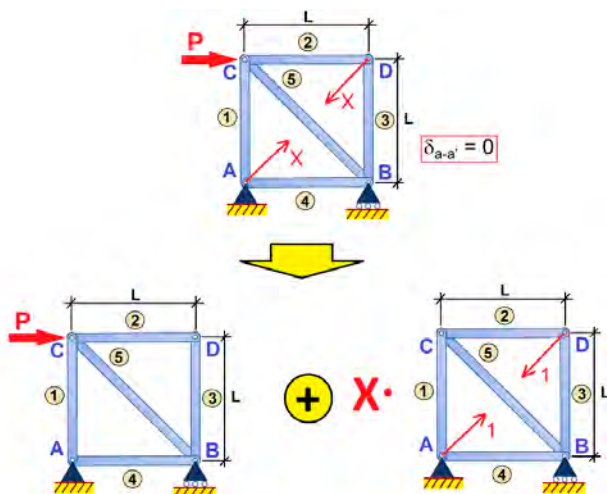
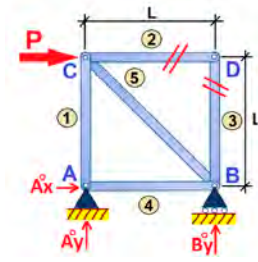


Figura A-17.3 Esquema da descomposición da isostática fundamental.

3º Calculo da estrutura isostática.

Cálculo das reaccións nos apoios



$$\sum F_x = 0 \quad A_x^o + P = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y^o + B_y^o = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad B_y^o \cdot L - P \cdot L = 0$$

$$A_y^o = -P \quad B_y^o = P$$

90 *Figura A-17.3 Esquema da celosía coas reaccións nos apoios e as barras que non traballan eliminadas.*

Cálculo mediante o método dos nodos de cada un dos axiais.

Nodo A



$$\sum F_x = 0 \quad N_1^o + A_x^o = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_4^o + A_y^o = 0$$

$$N_1^o = P \quad N_4^o = -P$$

Nodo D



$$\sum F_x = 0 \quad P + N_5^o \cos 45 = 0$$

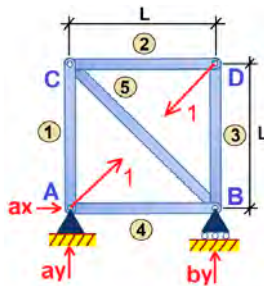
$$\sum F_y = 0 \quad -N_1^o - N_4^o \sin 45 = 0$$

$$N_5^o = -P\sqrt{2}$$

4º Cálculo do valor dos axiais da estrutura sen cargas externas pero co axial X da barra que eliminamos

Para simplificar os cálculos vamos substituír o axial X, por unha carga de valor 1, e os resultados obtidos serán multiplicados pola constante de valor X.

Cálculo das reaccións nos apoios. Neste caso as reacción dos apoios son cero, porque as forzas externas están na mesma dirección e son opostas

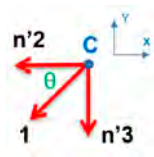


$$a'_x = 0 \quad ; \quad a'_y = 0 \quad ; \quad b'_y = 0;$$

Figura A-17.4 Esquema da celosía coas cargas unitarias onde se eliminou a barra redundante

Cálculo do esforço nas barras polo método dos nodos

Nodo C

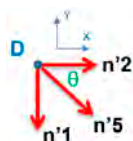


$$\sum F_x = 0 \quad -n'2 - 1 \cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -n'3 - 1 \sin\theta = 0$$

$$n'2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad n'3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nodo D

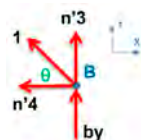


$$\sum F_x = 0 \quad n'2 + n'5 \cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -n'1 - n'5 \sin\theta = 0$$

$$n'5 = 1 \quad n'1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nodo B

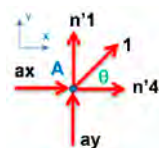


$$\sum F_x = 0 \quad -n'4 - 1 \cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad n'3 + 1 \sin\theta + by = 0$$

$$by = 0 \quad n'4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nodo A



$$\sum F_x = 0 \quad ax + n'4 + 1 \cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad n'1 + 1 \sin\theta + ay = 0$$

$$ax = 0 \quad ay = 0$$

5º Cálculo do valor de X.

Aplicar a expresión inferior, baseada no principio dos traballos virtuais e a ecuación de compatibilidade da deformación, para o cálculo do valor de X, e polo tanto do axial o reacción da estrutura hiperestática

$$\sum \frac{N_i^0 \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} n'_i + X \cdot \frac{n_i'^2 \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} = 0$$

Táboa A-17.1 Táboa cos axiais das barras para as cargas e calculo do valor de X

Barra	Li	Ni	n'i	Ni Li n'i	Li n'i ²
1	L	P	$-\sqrt{2}/2$	$-PL\sqrt{2}/2$	$1/2L$
2	L	0	$-\sqrt{2}/2$	0	$1/2L$
3	L	0	$-\sqrt{2}/2$	0	$1/2L$
4	L	P	$-\sqrt{2}/2$	$-PL\sqrt{2}/2$	$1/2L$
5	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}P$	1	$-2PL$	$\sqrt{2}L$
6	$\sqrt{2}L$	0	1	0	$\sqrt{2}L$
				$-PL(\sqrt{2}+2)$	$-2L(1+\sqrt{2})$

$$\frac{-PL(\sqrt{2}+2)}{AE} + X \frac{-2L(1+\sqrt{2})}{AE} = 0$$

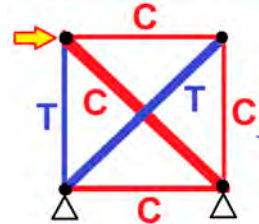
$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} P$$

6º Cálculo dos axiais da estrutura hiperestática.

$$N_i = N_i^o + X \cdot n_i$$

Táboa A-17.2 Táboa cos axiais das barras e esquema de barras a tracción e compresión

Barra	Ni	X	n'i	Nºi+X n'i (kN)	Ni(kN)
1	P	P/√2	-√2/2	P/2	5
2	0	P/√2	-√2/2	-P/2	-5
3	0	P/√2	-√2/2	-P/2	-5
4	P	P/√2	-√2/2	P/2	5
5	-√2P	P/√2	1	-P/√2	-7,07
6	0	P/√2	1	P/√2	7,07



Como podemos observar no caso hiperestático o esforzo nas barras e a metade que nos casos anteriores (do exercicio anterior) que eran isostáticos. Inda que no caso anterior podíamos facer unha estrutura resistente empregando dous simples cables nas diagonais, pero con unhas barras mais grosas verticais e horizontais. No caso hiperestático temos que meter unhas diagonais que teñen que traballar a compresión e polo tanto a pandeo, pero o resto das barras coa metade de grosor é suficiente. Ademais debemos de ter en conta que no caso das diagonais nas aplicacións reais pódese unir as barras onde se cruzan, polo que a distancia de pandeo redúcese a metade. Debido a isto, as solucións hiperestáticas son empregadas en moitas construcións como son as pontes como a da figura inferior.



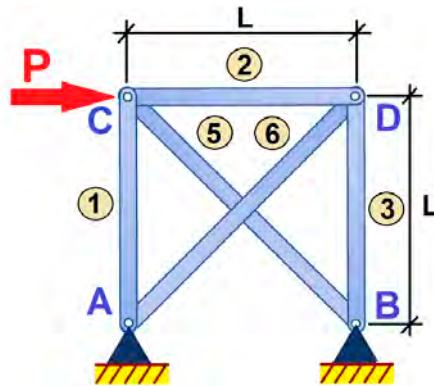
Figura A-17.6 a) Foto de celosía con ariostamentos hiperestáticos de unha ponte de aceiro.

1.2.18 Exercício A-18. Marco cadrado hiperestático en apoios

Na celosía de barras articuladas da figura calcular:

- Grado de hiperestaticidade
- Esforzo en cada unha das barras para unha carga $P=10\text{kN}$, sendo todas as barras do mesmo material, co mesmo modulo elástico E .
- Calculo da reacción horizontal en B debido a un aumento de temperatura de 50° nda que non actue ningunha carga externa . Perfiles da estrutura en IPE200 ($\alpha=0,000012$; $A=2850\text{mm}^2$; $E=210000\text{ N/mm}^2$; $L=3\text{m}$)

93



a) Cálculo do grado de hiperastiticidade e identificación do elemento redundante.

$$\begin{aligned} GHT &= (B+R) - 2N \\ GHE &= R - 3 \\ GHi &= GHT - GHE \end{aligned}$$

$$GHT = 5 + 4 - 2 \cdot 4 = 1$$

$$GHE = 4 - 3 = 1$$

$$GHi = 0 - 0 = 0$$

Esta celosía é isostática internamente, pero hiperestática de grado 1 externamente. Os apoios que son redundantes serían as reaccións verticais en A e B. Neste caso vamos a considerar unha delas como redundante.

b) Cálculo do esforzo en cada barra

- 94 1º Definición da isostática fundamental da estrutura. Substituíndo o apoio redundante polo valor da súa reacción, e sabendo que o desprazamento horizontal en B é 0.

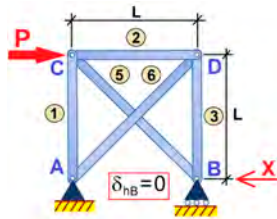


Figura A-18.2 Esquema da isostática fundamental da celosía de barras con nodos articulados con dúas diagonais

2º Descomposición da isostática fundamental nas súas compoñentes.

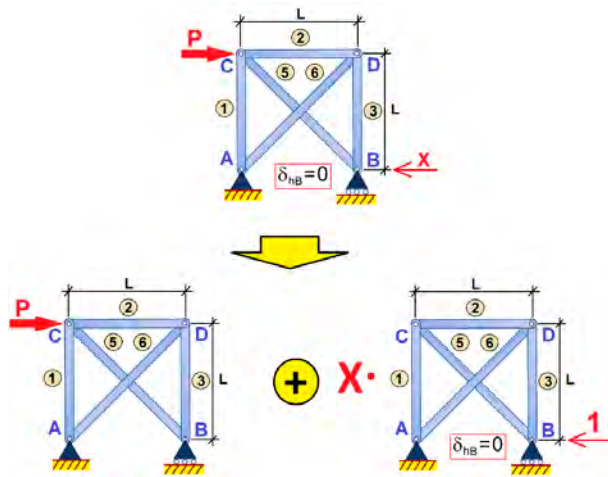
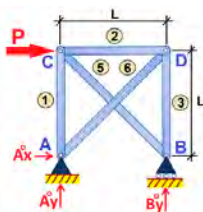


Figura A-18.3 Esquema da descomposición da isostática fundamental.

3º Cálculo do valor dos axiaiss da estrutura sen o apoio que sobra e cas cargas externas



Cálculo das reaccións nos apoios

$$\sum F_x = 0 \quad A_x^o + P = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y^o + B_y^o = 0$$

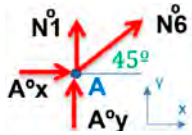
$$\sum M_A = 0 \quad B_y^o \cdot L - P \cdot L = 0$$

$$A_x^o = -P \quad A_y^o = -P \quad B_y^o = P$$

Figura A-18.4 Esquema da celosía coas reaccións nos apoios e as barras que non traballan eliminadas.

Cálculo mediante o método dos nodos de cada un dos axiais

Nodo A

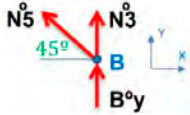


$$\sum F_x = 0 \quad N_6^\circ \cos 45^\circ + A_x^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_1^\circ + A_y^\circ = 0$$

$$N_1^\circ = P \quad N_6^\circ = +\frac{2P}{\sqrt{2}}$$

Nodo B



$$\sum F_x = 0 \quad N_5^\circ \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_3^\circ + N_5^\circ \sin 45^\circ + B_y^\circ = 0$$

$$N_5^\circ = 0 \quad N_3^\circ = -P$$

Nodo D



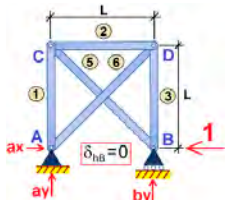
$$\sum F_x = 0 \quad -N_2^\circ - N_6^\circ \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N_3^\circ - N_6^\circ \sin 45^\circ = 0$$

$$N_2^\circ = -P \quad N_6^\circ = +\frac{2P}{\sqrt{2}}$$

4º Cálculo do valor dos axiais da estrutura sen cargas externas pero coa reacción X do apoio que eliminamos.

Para simplificar os cálculos vamos substituír a reacción X, por unha carga de valor 1, e os resultados obtidos serán multiplicados por a constante de valor X. Cálculo das reaccións nos apoios.



$$\sum F_x = 0 \quad a'_x - 1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad a'_y + b'_y = 0$$

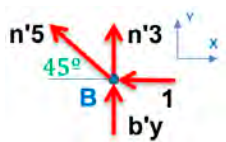
$$\sum M_A = 0 \quad b'_y \cdot L = 0$$

$$a'_x = 1 \quad a'_y = 0 \quad b'_y = 0$$

Figura A-18.5 Esquema da celosía ca carga unitaria onde se eliminou o apoio redundante.

Cálculo mediante o método dos nodos de cada un dos axiais

Nodo A

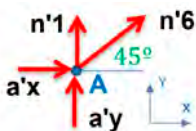


$$\sum F_x = 0 \quad -n'_5 \cos 45^\circ - 1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad n'_3 + b'_y + n'_5 \cos 45^\circ = 0$$

$$n'_3 = 1 \quad n'_5 = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Nodo B



$$\sum F_x = 0 \quad n'_6 \cos 45^\circ + a'_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad n'_1 + a'_y + n'_6 \sin 45^\circ = 0$$

$$n'_1 = 1 \quad n'_6 = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Nodo D



$$\sum F_x = 0 \quad -n'_2 - n'_6 \cos 45^\circ = 0$$
$$n'_2 = 1$$

5º Cálculo do valor de X. Aplicar a expresión inferior, baseada no principio dos traballos virtuais e a ecuación da compatibilidade da deformación, para o cálculo do valor de X, e polo tanto do axial o reacción da estrutura hiperestatica

96

$$\sum \frac{N_i^0 \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} n'_i + X \cdot \frac{n_i'^2 \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} = 0$$

Táboa A-18.1 Táboa cos axiais das barras para as cargas e calculo do valor de X

Barra	Li	Ni	n'i	Ni Li n'i	Li n'i2
1	L	P	1	LP	L
2	L	-P	1	-LP	L
3	L	-P	1	-LP	0
5	√2L	0	-2/√2	0	2√2L
6	√2L	2P/√2	-2/√2	-√2LP	2√2L
				-LP(1+2√2)	L(2+4√2)

$$\frac{-PL(1 + 2\sqrt{2})}{AE} + X \frac{-L2(1 + 2\sqrt{2})}{AE} = 0$$

$$X = -\frac{1}{2}P$$

6º Cálculo dos axiais da estrutura hiperestática.

$$N_i = N_i^0 + X \cdot n'_i$$

Táboa A-18.2 Táboa cos axiais das barras

Barra	Ni	X	n'i	Nºi+X n'i (kN)	Ni(kN)
1	P	P/2	1	3P/2	15
2	-P	P/2	1	-3P/2	-15
3	-P	P/2	1	-3P/2	-15
5	0	P/2	-2/√2	-P/√2	-7,07
6	2P/√2	P/2	-2/√2	P/√2	7,07

7º Cálculo das reaccións da estrutura hiperestática.

Táboa A-18.3 Táboa cos valores das reaccións

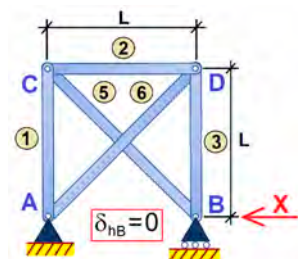
Reacción	Ni	X	n'i	Rºi+X r'i (kN)	Ri(kN)
Ax	-P	P/2	1	-P/2	-5
Bx	0	P/2	1	P/2	5
Ay	-P	P/2	0	-P	-10
By	P	P/2	0	P	10

c) Cálculo das reaccións debido a un cambio de temperatura

Calculo da reacción horizontal en B debido a un aumento de temperatura de 50°, e sen carga externa P.

Primeiro estableceremos a isostática fundamental. Por non haber carga externa queda só un estado da figura.

Para calcular o valor de X aplicaremos a ecuación:



$$\sum \left(\frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} + \alpha_i \cdot L_i \cdot \Delta T + e_i \right) n_i + X \cdot \sum \frac{n_i^2 \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} = 0$$

Onde neste caso o non haber forzas externas nin erros xeométricos

$$\sum (\alpha_i \cdot L_i \cdot \Delta T) n_i + X \cdot \sum \frac{n_i^2 \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} = 0$$

97

Neste caso os valores de n_i xa foron calculados no apartado anterior polo que termos segundo a seguinte táboa:

Táboa A-18.4 Táboa cos valores segundo cambio de temperatura e calculo de X

Barra	L_i	n_i	$\alpha_i \Delta T L_i n_i$	$L_i n_i^2 / AE$
1	L	1	L	L/AE
2	L	1	L	L/AE
3	L	1	L	L/AE
5	$\sqrt{2}L$	-√2	-2L	$2\sqrt{2}L/AE$
6	$\sqrt{2}L$	-√2	-2L	$2\sqrt{2}L/AE$
			$-\alpha \Delta T L$	$(3+4\sqrt{2})L/AE$

$$(-\alpha \cdot L \cdot \Delta T) + X \cdot \frac{(3 + 4\sqrt{2})L}{A \cdot E} = 0$$

$$X = \frac{\alpha \cdot L \cdot \Delta T \cdot A \cdot E}{(3 + 4\sqrt{2})} = 41,4 \text{ kN}$$

Como se pode observar o valor da reacción é de 41,4 kN, unha importante forza que nos fai ver a importancia dos cambios de temperatura nas estruturas con apoios hiperestáticos, e polo tanto a importancia de incorporar xuntas de dilatación nas estruturas para poder absorber as dilatacións por temperaturas.

Tamén o valor dos axiais nas barras serán:

Táboa A-18.5 Táboa cos axiais das barras

Barra	N_i	X	n_i	$N_i + X n_i$ (kN)
1	0	41,4	1	41,4
2	0	41,4	1	41,4
3	0	41,4	1	41,4
5	0	41,4	-√2	58,6
6	0	41,4	-√2	58,6

1.2.19 Exercício A-19. Celosía invertida

Nas celosías de barras articuladas das figuras calcular o grau de hiperestaticidade e o esforço em cada unha das barras para as cargas da figura e cada un dos casos mostrados, sendo todas as barras do mesmo material, co mesmo modulo elástico $E=200\text{MPa}$. $A=50\text{cm}^2$. $L=3000\text{ mm}$. $P=10\text{kN}$. $\theta=30^\circ$

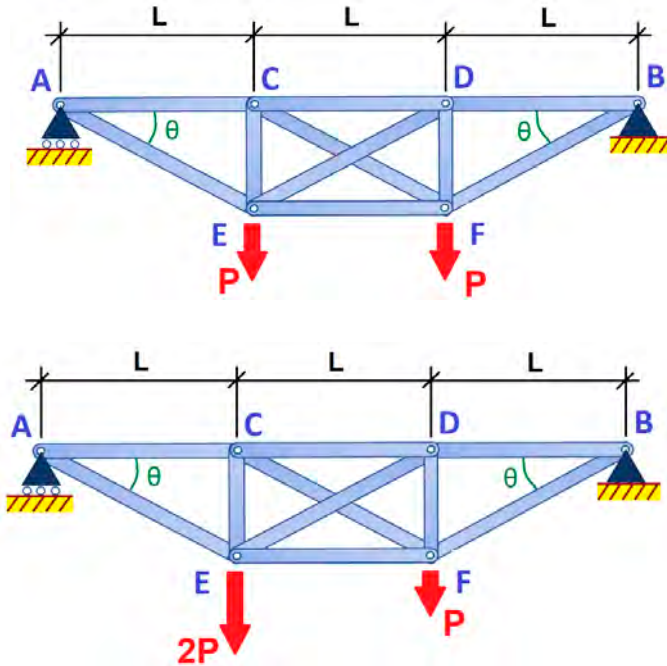


Figura A-19.1 a) Esquema da celosía invertida con dúas cargas P iguais b) Esquema da celosía invertida con unha carga P e outra $2P$.

Solución caso "a"

1º Cálculo do grado de hiperastiticidade e identificación do elemento redundante.

$$\begin{aligned} GHT &= (B+R) - 2N \\ GHE &= R - 3 \\ GHi &= GHT - GHE \end{aligned}$$

$$GHT = 10 + 3 - 2 \cdot 6 = 1$$

$$GHE = 3 - 3 = 0$$

$$GHi = 1 - 0 = 1$$

Esta celosía é isostática externamente, pero hiperestática de grado 1 internamente. As barras que son redundantes serían as diagonais centrais. Neste caso vamos a considerar das dúas, a indicada na figura como redundante.

99

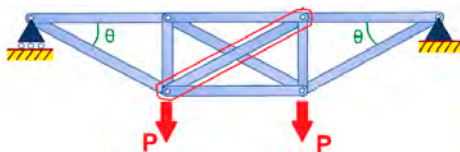


Figura A-19.1 Esquema da celosía da celosía invertida coa barra redundante marcada.

2º Definición da isostática fundamental da estrutura. Substituíndo a barra redundante polo valor do seu axial X , e considerando que o desprazamento relativo de a - a' no punto X é 0.

3º Descomposición da isostática fundamental nas súas compoñentes

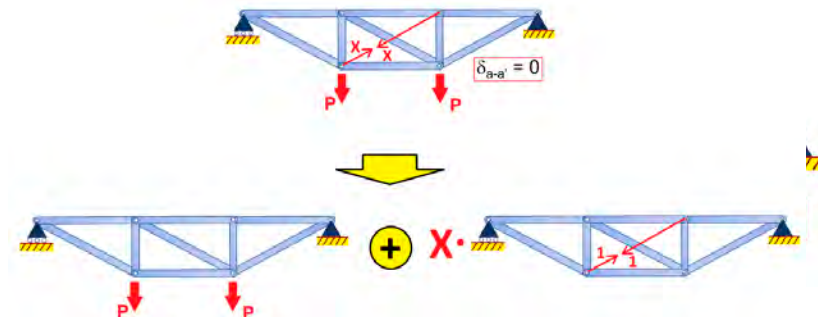
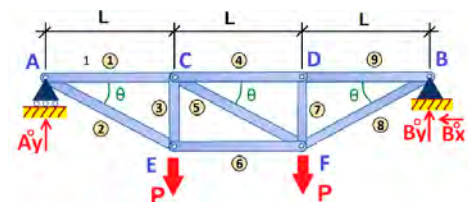


Figura A-19.3 Esquema da descomposición da isostática fundamental.

4º Cálculo do valor dos axiais da estrutura sen a barra que sobra e cas cargas externas

a) Cálculo das reaccións nos apoios



$$\sum F_x = 0 \quad Bx = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y^o + B_y^o - P - P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad P \cdot L + P \cdot 2L - B_y^o \cdot 3L = 0$$

$$A_y^o = P \quad B_y^o = P$$

Figura A-19.4 Esquema da celosía isostática coas reaccións nos apoios e as barras que non traballan eliminadas

b) Cálculo mediante o método dos nodos de cada un dos axiais

Nodo A



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & N_1^o + N_2^o \cos\theta &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & N_2^o \sin\theta - Ay &= 0 \\ N_1^o &= -\sqrt{3}P & N_2^o &= +2P\end{aligned}$$

Nodo E



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & N_6^o - N_2^o \cos\theta &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & N_3^o + N_2^o \sin\theta - P &= 0 \\ N_6^o &= +\sqrt{3}P & N_3^o &= 0\end{aligned}$$

Nodo C



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & N_4^o + N_5^o \cos\theta - N_1^o &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & -N_3^o - N_5^o \sin\theta &= 0 \\ N_5^o &= 0 & N_4^o &= -\sqrt{3}P\end{aligned}$$

Nodo D



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & N_9^o - N_4^o &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & N_7^o &= 0 \\ N_9^o &= -\sqrt{3}P \text{ kN}\end{aligned}$$

Nodo B



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & -N_9^o - N_8^o \cos\theta &= 0 \\ N_8^o &= +2P\end{aligned}$$

5º Cálculo do valor dos axiais da estrutura sen cargas externas pero co axial X da barra que eliminamos no paso anterior. Pero para simplificar os cálculos vamos substituír o axial X, por unha carga de valor 1, e os resultados obtidos serán multiplicados por a constante de valor X.

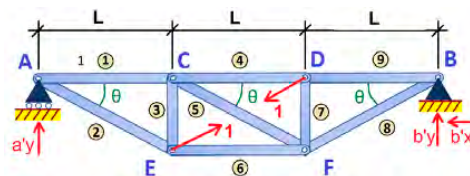


Figura A-19.5 Esquema da celosía coas cargas unitarias onde se eliminou a barra redundante e se puxo no seu sitio unha forza de valor $X \cdot 1$

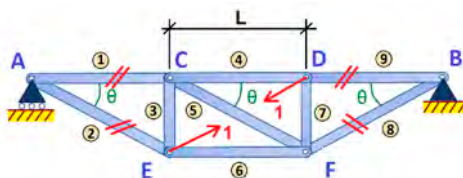


Figura A-19.6 Esquema da celosía cas cargas unitarias onde se eliminou a barra redundante e as que non traballan.

101

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \quad 1 \cdot \cos \theta - 1 \cdot \cos \theta - b'x = 0 & \quad b'x = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad a'_y + b'_y + 1 \cdot \sin \theta - 1 \cdot \sin \theta = 0 \\ \sum M_A = 0 & \quad 1 \cdot \sin \theta \cdot L + 1 \cdot \cos \theta \cdot L \cdot \tan \theta - 1 \cdot \sin \theta \cdot 2L + b'_y \cdot 3L = 0 \\ & \quad a'_y = 0 \quad b'_y = 0\end{aligned}$$

Eliminación de las barras que non traballan e calculo dos axiais polo método dos nodos

Nodo E



$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \quad n'6 + 1 \cos \theta = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad n'3 + 1 \sin \theta = 0 \\ n'3 = -\frac{1}{2} & \quad n'6 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Nodo C



$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \quad n'4 + n'5 \cos \theta = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad n'3 + n'5 \sin \theta = 0 \\ n'4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \quad n'5 = 1\end{aligned}$$

Nodo D



$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \quad -n'4 - 1 \cos \theta = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad -n'7 + 1 \sin \theta = 0 \\ n'7 = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

5º Calculo do valor de X. Aplicamos a expresión inferior, baseada no principio dos traballos virtuais e a ecuación da compatibilidade da deformación, para o calculo do valor de X, e polo tanto do axial e a reacción da estrutura hiperestática

$$\sum \frac{N_i^0 \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} n'_i + X \cdot \frac{n_i'^2 \cdot L_i}{A_i \cdot E_i} = 0$$

Táboa A-19.1 Táboa cos axiais das barras para as cargas e calculo do valor de X

Barra	Li (mm)	Ni (kN)	n'i	Ni Li n'i	Li n'i2
1	L	$-\sqrt{3}P$	0	0	0
2	$2L/\sqrt{3}$	2P	0	0	0
3	$L/\sqrt{3}$	0	-1/2	$3PL/2$	$L/4\sqrt{3}$
4	L	$-\sqrt{3}P$	$-\sqrt{3}/2$	0	$3L/4$
5	$2L/\sqrt{3}$	0	1	0	$2L/\sqrt{3}$

6	L	$\sqrt{3}P$	$-\sqrt{3}/2$	$-3PL/2$	$3L/4$
7	$L/\sqrt{3}$	0	$-1/2$	0	$L/4\sqrt{3}$
8	$2L/\sqrt{3}$	$2P$	0	0	0
9	L	$-\sqrt{3}P$	0	0	0
5'	$2L/\sqrt{3}$	0	1	0	$2L/\sqrt{3}$
				0	$18(1+\sqrt{3})L/12$

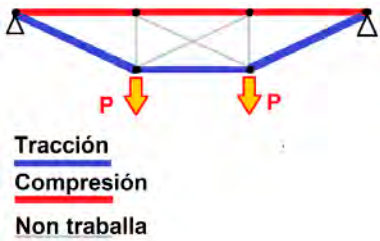
$$-0 + X \frac{18(1 + \sqrt{3})L}{12} = 0$$
$$X = 0$$

6º Cálculo dos axiais da estrutura hiperestatica.

$$N_i = N_i^o + X \cdot n_i$$

Táboa A-19.2 Táboa cos axiais das barras e esquema de barras a tracción e compresión

Barra	Ni (kN)	n'i	X (kN)	Ni+X n'i (kN)
1	-17,3	0	0	-17,3
2	20	0	0	20,0
3	0	$3PL/2$	0	0,0
4	-17,3	0	0	-17,3
5	0	0	0	0,0
6	17,3	0	0	17,3
7	0	$3PL/2$	0	0,0
8	20	0	0	20,0
9	-17,3	0	0	-17,3
5'	0	1	0	0,0



Nota: En este caso as cargas verticais e a forma da celosía, coincide coa forma de una catenaria con cargas puntuais (figura A-19.7), polo que teoricamente as barras verticais e as diagonais non traballan, aínda que como vamos poder ver no caso "b" a non simetría nas cargas xa produce que os montantes diagonais traballen, xa que senón non se mantén a horizontalidade do cordón horizontal inferior, como podemos ver na figura inferior A-19.7.b

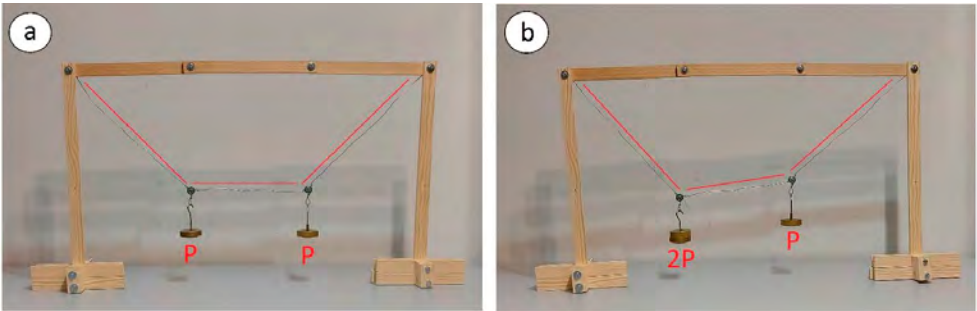


Figura A-19.7. a) imaxe onde se pode ver que a forma da celosía se mantén, inda que non poñamos as montantes e diagonais, porque a forma que tiña e a que ten un catenaria con cargas iguais. b) Neste caso podemos observar como

cando as cargas non son iguais o cabo central xa non mantén a posición horizontal. O único xeito de manter esa posición é empregar montantes e diagonais.

103

Solución caso "b"

1º Definición da isostática fundamental da estrutura. Substituíndo a barra redundante por o valor do seu axial X .

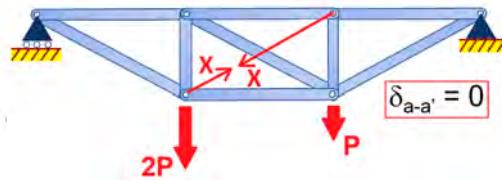


Figura A-19.8 Esquema da isostática fundamental

2º Descomposición da isostática fundamental nas súas compoñentes

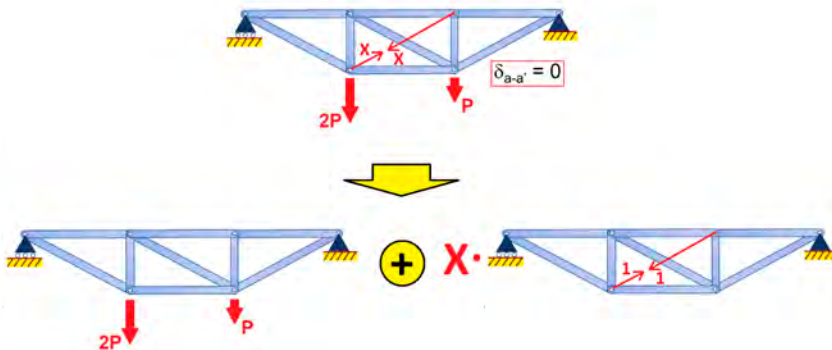


Figura A-19.8 Esquema da descomposición da isostática fundamental.

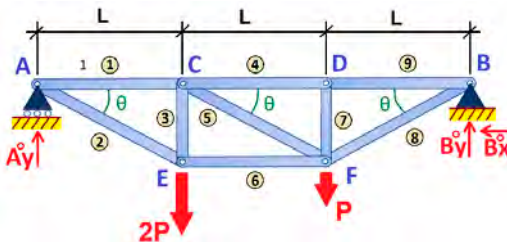


Figura A-19.9 Esquema da celosía isostática cas reaccións nos apoios.

3º Calculo do valor dos axiais da estrutura sen a barra que sobra e cas cargas externas

Calculo das reaccións nos apoios

$$\sum F_x = 0 \quad Bx = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y^o + B_y^o - 2P - P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad 2P \cdot L + P \cdot 2L - B_y^o \cdot 3L = 0$$

$$A_y^o = \frac{5}{3}P \quad B_y^o = \frac{4}{3}P$$

Cálculo mediante o método dos nodos de cada un dos axiais

Nodo A

104



$$\sum F_x = 0 \quad N_1^o + N_2^o \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N_2^o \sin \theta + A_y = 0$$

$$N_2^o = \frac{10}{3}P \quad N_1^o = -\frac{5\sqrt{3}}{3}P$$

Nodo E



$$\sum F_x = 0 \quad N_6^o - N_2^o \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_3^o + N_2^o \sin \theta - 2P = 0$$

$$N_3^o = \frac{1}{3}P \quad N_6^o = +\frac{5\sqrt{3}}{3}P$$

Nodo C



$$\sum F_x = 0 \quad N_4^o + N_5^o \cos \theta - N_1^o = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -N_3^o - N_5^o \sin \theta = 0$$

$$N_5^o = -\frac{2}{3}P \quad N_4^o = -\frac{4\sqrt{3}}{3}P$$

Nodo D



$$\sum F_x = 0 \quad N_9^o - N_4^o = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_7^o = 0$$

$$N_7^o = 0 \quad N_9^o = -\frac{4\sqrt{3}}{3}P$$

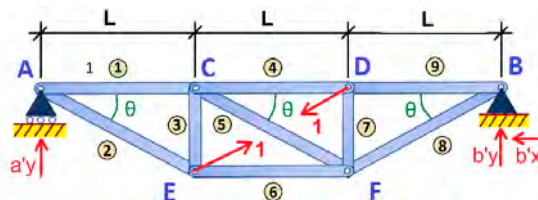
Nodo B



$$\sum F_x = 0 \quad -N_9^o - N_8^o \cos \theta = 0$$

$$N_8^o = +\frac{8}{3}P$$

4º Cálculo do valor dos axiais da estrutura sen cargas externas pero co axial X da barra que eliminamos no paso anterior. Pero para simplificar os cálculos vamos substituír o axial X, por unha carga de valor 1, e os resultados obtidos serán multiplicados por a constante de valor X. O cálculo de estes valores serán iguais a do exercicio anterior.



Como podemos ver neste caso as diagonais e montantes si que xa traballan, inda que o seu esforzo non é moi elevado, manténdose así a horizontalidade do cordón horizontal inferior da celosía. Na figura inferior (A-19.10) podemos ver o montaxe dunha maqueta seguindo os resultados de barras a tracción e compresión, e se ve como o cable inferior se mantén horizontal inda que as cargas non son iguais.

106

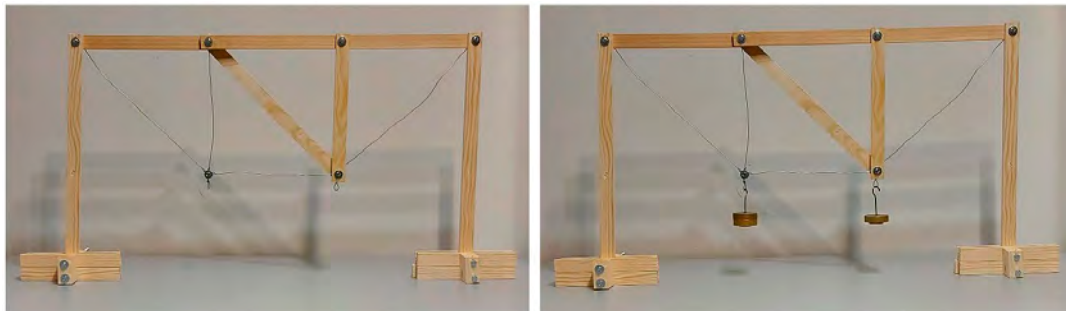
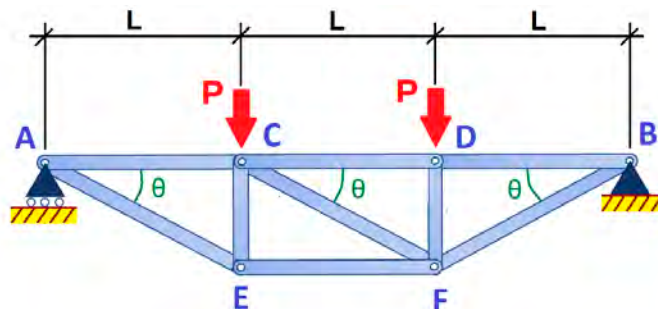


Figura A-19.10 Exemplo de maqueta de celosía isostática invertida de barras, coas barras a compresión feitas en madeira e as de tracción con cables.

1.2.20 Exercício A-20. Celosía invertida con cargas superiores

Na celosía de barras articuladas da figura calcular:

Esforço en cada unha das barras para as cargas da figura, sendo todas as barras do mesmo material, co mesmo modulo elástico $E=200\text{MPa}$. $A=50\text{cm}^2$. $L=3000\text{ mm}$. $P=10\text{kN}$. $\theta=30^\circ$

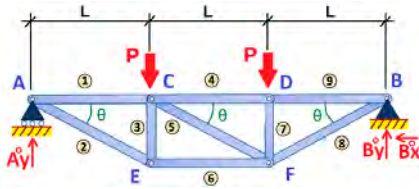


107

Figura A-20.1 Esquema da celosía invertida con cargas nos nodos superiores

Solución:

1º Cálculo das reaccións nos apoios



$$\sum F_x = 0 \quad B_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + B_y - P - P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad P \cdot L + P \cdot 2L - B_y \cdot 3L = 0$$

$$A_y = P \quad B_y = P$$

Figura A-20.2 Esquema da celosía cas reaccións nos apoios

2º Cálculo mediante o método dos nodos de cada un dos axiais

Nodo B



$$\sum F_x = 0 \quad -N_9 - N_8 \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_8 \sin \theta - B_y = 0$$

$$N_8 = +2P \quad N_9 = -\sqrt{3}P$$

Nodo D

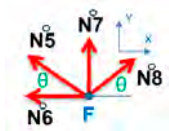


$$\sum F_x = 0 \quad N_9 - N_4 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_7 - P = 0$$

$$N_4 = -\sqrt{3}P \quad N_7 = -P$$

Nodo F



$$\sum F_x = 0 \quad N_8 \cos \theta - N_6 - N_5 \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_7 + N_8 \sin \theta + N_5 \sin \theta = 0$$

$$N_6 = +\sqrt{3}P \quad N_5 = 0$$

Nodo E

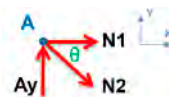


$$\sum F_x = 0 \quad N_6 - N_2 \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_3 + N_2 \sin \theta - P = 0$$

$$N_2 = +2P \quad N_3 = -P$$

Nodo A



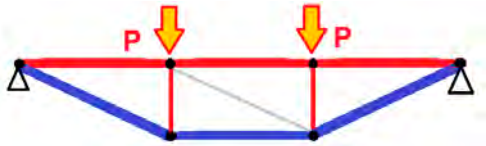
$$\sum F_x = 0 \quad N_1 + N_2 \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_2 \sin \theta - A_y = 0$$

$$N_1 = -\sqrt{3}P \quad N_2 = +2P$$

Táboa A-20.1 Táboa cos axiais das barras e esquema de barras a tracción e compresión

Barra	Li (mm)	Ni (kN)	Ni (kN)	
1	L	$-\sqrt{3}P$	-17	C
2	$2L/\sqrt{3}$	$2P$	20	T
3	$L/\sqrt{3}$	$-P$	-10	C
4	L	$-\sqrt{3}P$	-17	C
5	$2L/\sqrt{3}$	0	0	
6	L	$\sqrt{3}P$	17	T
7	$L/\sqrt{3}$	$-P$	-10	C
8	$2L/\sqrt{3}$	$2P$	20	T
9	L	$-\sqrt{3}P$	-17	C



En este caso, como tamén se pode ver na figura inferior (A-20.3), os cordóns superiores traballan a compresión, mentres que los inferiores traballan a tracción. As montantes traballan a compresión e a diagonal non traballa.

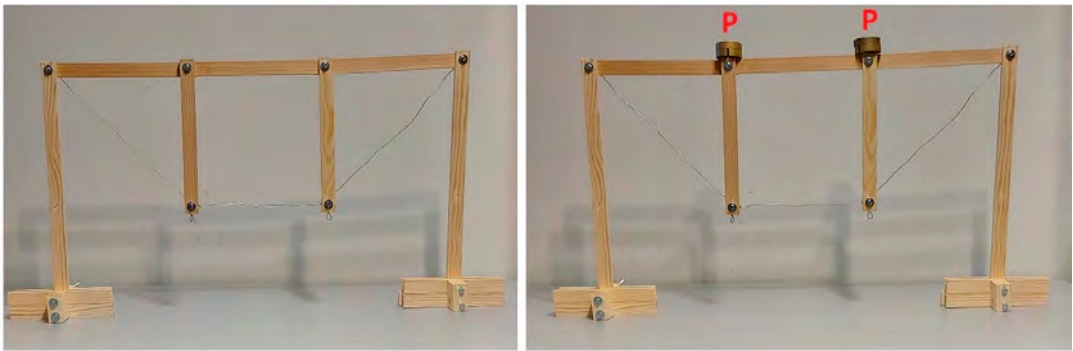


Figura A-20.3 Exemplo de maqueta de celosía isostática invertida de barras con cargas nos nodos superiores, coas barras a compresión feitas en madeira e as de tracción con cables.

Esta disposición de montaxe e una forma de reforzar e aumentar a resistencia duna viga xa existente, mediante a incorporación duns montantes e un tirante inferior, transformándoa deste xeito nunha celosía como a de este exercicio.

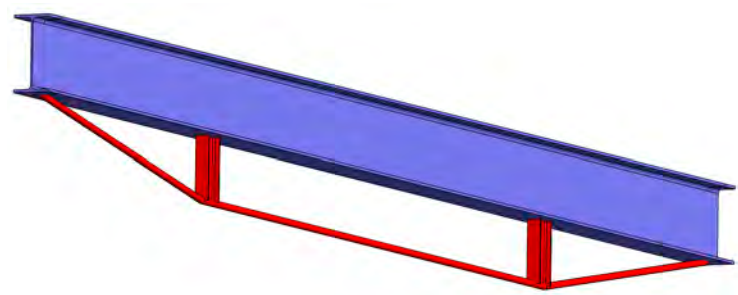


Figura A-20.4 Exemplo de viga reforzada.

1.3 Bibliografía capítulo 1. Estructuras de barras articuladas

Beer, F. P., Johnston, E. R. (1987). Mecánica vectorial para ingenieros, Estatica. McGraw-Hill

Argüelles Álvarez, R. (1986). Cálculo de estructuras. Madrid: Univ. Politécnica de Madrid. ETS Ingenieros de Montes. Sección de publicaciones.

Vázquez, M. (1991). Resistencia de materiales. Madrid: Noela

2. Estruturas de nodos ríxidos. Método de Cross

2.1 Conceptos teóricos

Chamaremos estruturas reticulares continuas ás formadas por:

- Elementos tipo barra
- Barras conectadas entre si mediante unións capaces de transmitir momentos flexores, amais de cortantes e axiais.
- Tamén poden existir puntualmente nodos articulados.
- Nos nodos con capacidade de transmitir momentos, as barras que concorren xiran todas o mesmo ángulo. Nese caso o nodo considérase ríxido. A Figura 2-1 representa unha estrutura reticular continua plana, na que, por exemplo, os nodos A e B son ríxidos. Tamén son ríxidos os C, E e F. O nodo D é articulado.

111

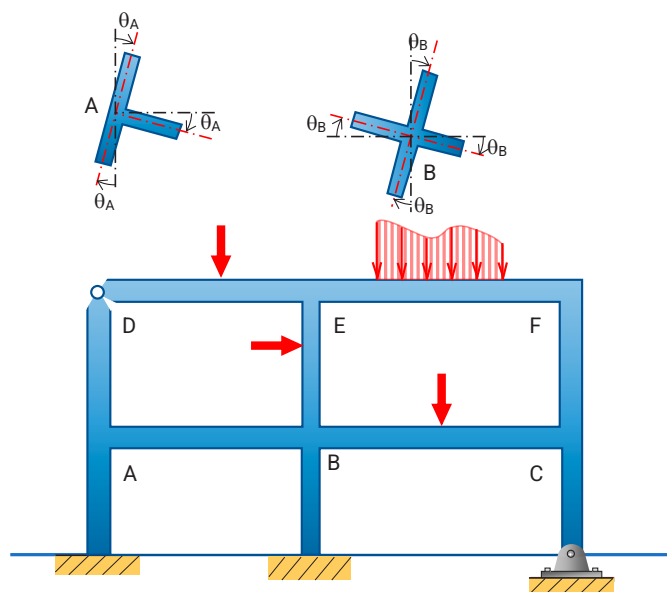


Figura 2-1. Exemplo de pórtico con nodos ríxidos (A, B,...) no que todas as barras xiran o mesmo ángulo. O nodo D é articulado neste exemplo

Para o cálculo das estruturas reticulares continuas suporemos rixidez lonxitudinal infinita das barras, é dicir, desbotamos as deformacións por **N** (ΔL) fronte ás debidas a **M** (**f**). É dicir, consideraremos que $f \gg \Delta L \cong 0$.

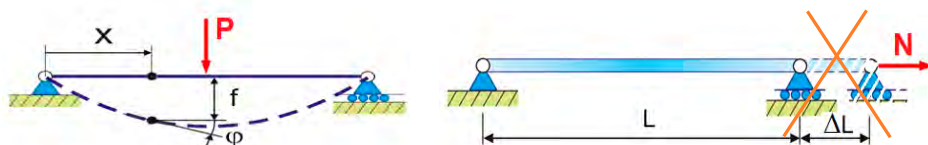


Figura 2-2. Hipótese de rixidez infinita das barras fronte a Axial ($\Delta L \cong 0$) no método de Cross (figura da dereita)

Traballaremos así mesmo con estruturas planas, nas que exista un plano de simetría que contén os eixos de tódalas barras e as resultantes de tódalas cargas aplicadas. Nas estruturas planas, a súa deformada está contida neste mesmo plano de simetría. Neste tipo de estruturas, non se producen torsións nas barras.

Unha estrutura tridimensional pode estar formada por varias estruturas planas deste tipo, que chamaremos **pórticos**, e que se entrecruzan en distintas direccións, habitualmente ortogonais entre si.

112



Figura 2-3. Exemplo de estrutura de nodos ríxidos, formada por dous pórticos principais, con forxado entrambos

2.1.1 Determinación de Momentos Flexores (M) e cortantes (V) en barras de pórticos

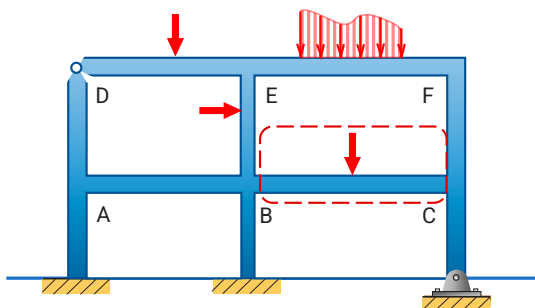


Figura 2-4. Illar barras despois do cálculo de esforzos nos nodos (exemplo BC na figura)

aplicando o principio de superposición:

Para poder determinar os diagramas de momentos flexores e esforzos cortantes nas barras dun pórtico sometido a unhas cargas dadas, é suficiente illar as barras e coñecer os momentos flexores nas súas seccións extremas.

Os esforzos axiais obterémolos formulando o equilibrio dos nodos.

Por exemplo, illando a barra BC do pórtico da Figura 2-4, podemos coñecer os diagramas de M e V facendo a seguinte descomposición, e

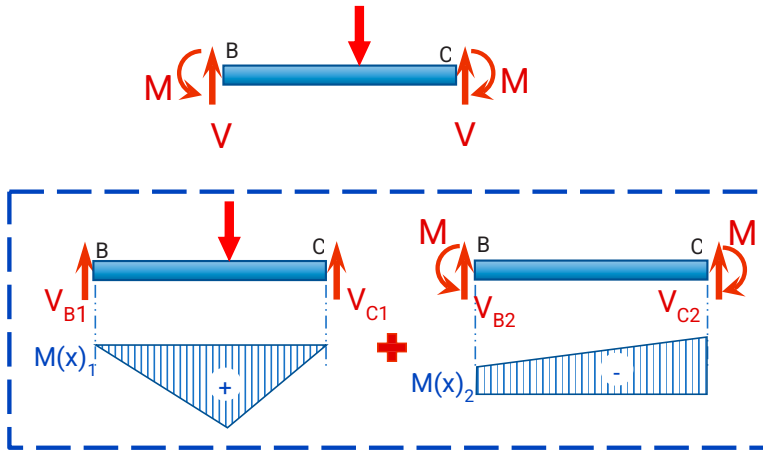


Figura 2-5. Aplicación do principio de superposición: barra cargada suposta biapoiada (esquerda) + efecto dos momentos adicionais nos extremos da barra (dereita)

2.1.2 Criterio de signos de M

Sobre **NODOS**: sentido horario +

Sobre **BARRAS**: sentido antihorario +

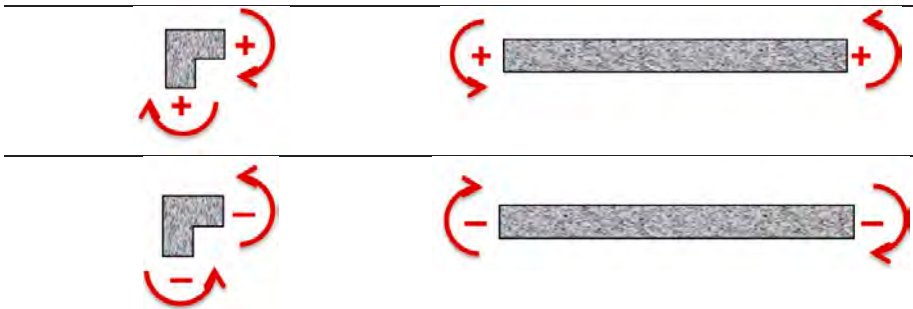


Figura 2-6. O criterio de signos no método de Cross indica sentido de xiro (horario ou antihorario). Mantense o signo entre acción e reacción (ambas +, ou ambas -), na sección de encontro entre a barra e o nodo

Nótese que o criterio de signos definido para Cross, denota o sentido de xiro (horario ou anti-horario), polo que difire do criterio de signos empregado en Resistencia de materiais, que denota a localización das traccións e compresións nas fibras.

2.1.3 Coeficiente de transmisión t_{AB}

Definimos o coeficiente de transmisión t_{AB} dunha barra AB, que unicamente ten permitido o xiro na sección inicial A, e restrinxidos os desprazamentos tanto en A coma en B, así coma o xiro en B, como:

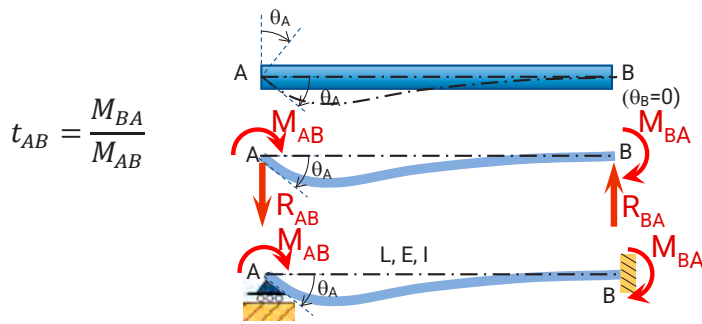


Figura 2-7. Definición de t_{AB} : 'coeficiente de transmisión' de A a B

Viga isostática fundamental. Por equilibrio:

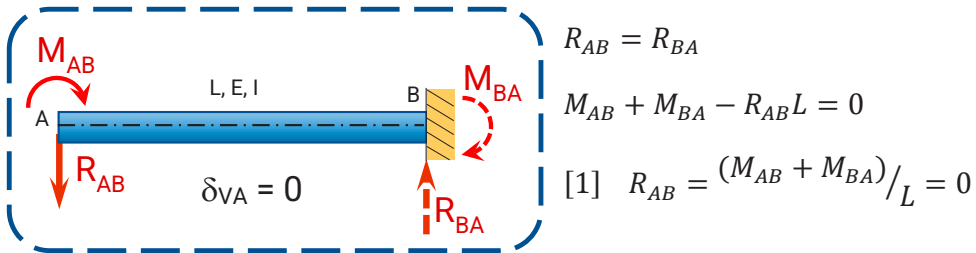


Figura 2-8. Isostática fundamental asociada, coa ecuación de compatibilidade $\delta_{vA}=0$, para o cálculo da barra hiperestática

Aplicando superposición:

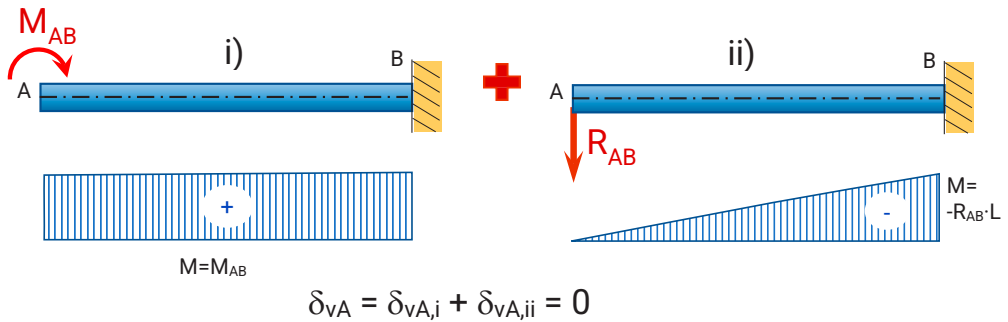


Figura 2-9. Descomposición de accións na isostática fundamental e aplicación de superposición

Calculamos $\delta_{vA,i}$ utilizando o 2º teorema de Mohr (supoñemos $E \cdot I = \text{cte}$).

Caso i):

$$\delta_{vA,i} = \delta_{A,tgB} = \int_{x_A=0}^{x_B=L} \frac{-M_{AB}x}{EI} dx = \frac{-1}{EI} \left[\frac{M_{AB}x^2}{2} \right]_0^L = -\frac{M_{AB}L^2}{2EI}$$

Caso ii):

$$\delta_{vA,ii} = \delta_{A,tgB} = \int_{x_A=0}^{x_B=L} \frac{V_{AB} x \cdot x}{EI} dx = \frac{V_{AB}}{EI} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{V_{AB} L^3}{3EI}$$

Por tanto:

$$\delta_{vA} = -\frac{M_{AB} L^2}{2EI} + \frac{V_{AB} L^3}{3EI} = 0 \Rightarrow \frac{V_{AB} L}{3} = \frac{M_{AB}}{2} \Rightarrow V_{AB} = \frac{3 M_{AB}}{2 L}$$

Igualando coa expresión [1]:

$$R_{AB} = V_{AB} = \frac{3 M_{AB}}{2 L} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} \Rightarrow M_{AB} + M_{BA} = \frac{3 M_{AB}}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{2} \right) M_{AB} = M_{BA} \Rightarrow M_{BA} = \frac{1}{2} M_{AB} \Rightarrow \frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{1}{2}$$

Á relación M_{BA} / M_{AB} denomínaselle ‘coeficiente de transmisión de A a B’, e por tanto, para seccións de E·I constante, o seu valor é:

$$t_{AB} = \frac{M_{BA}}{M_{AB}} = \frac{1}{2}$$

2.1.4 Rixidez ó xiro (K_{AB}): caso de extremo B perfectamente encastado

Definimos rixidez ó xiro (K_{AB}) da barra AB da Figura 2-10, como:

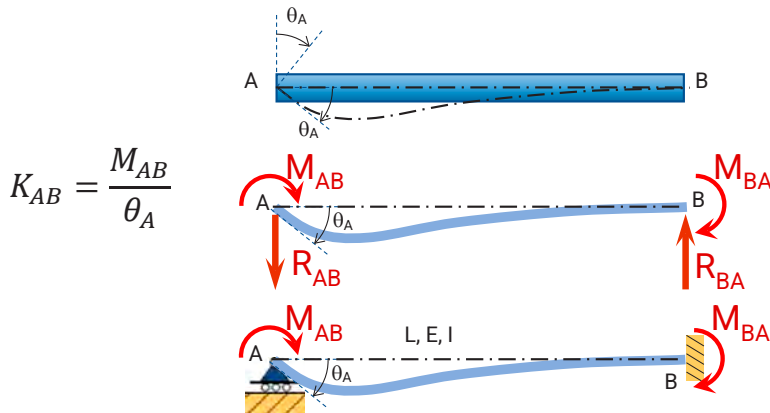


Figura 2-10. Definición de rixidez ó xiro dunha barra que só pode xirar no extremo A (resto de deformacións de A e de B restrinxido)

En barras de E · I constante:

$$K_{AB} = \frac{4EI}{L}$$

Demostación. Utilizando o 1º teorema de Mohr:

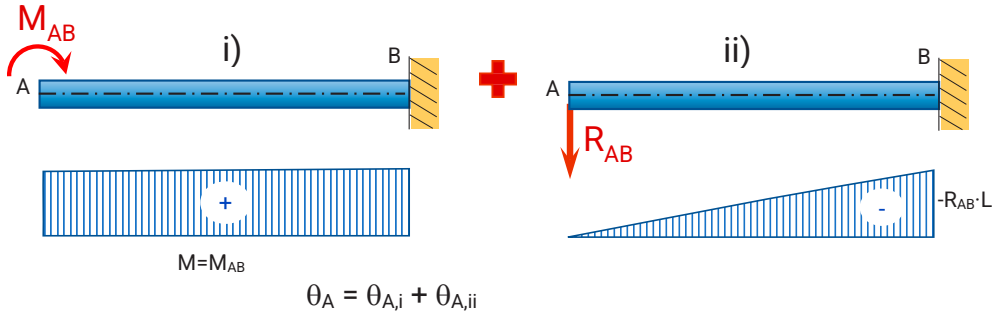


Figura 2-11. Descomposición do cálculo do xiro en A aplicando superposición

$$\theta_{A,i} = \frac{M_{AB}L}{EI}; \quad \theta_{A,ii} = \frac{-V_{AB} \cdot L \cdot L}{2EI}$$

Por tanto:

$$\theta_A = \frac{M_{AB}L}{EI} - \frac{V_{AB}L^2}{2EI} = \frac{L}{EI} \left(M_{AB} - \frac{L}{2} \left(\frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} \right) \right)$$

$$\text{Como: } M_{BA} = t_{AB} \cdot M_{AB} = \frac{M_{AB}}{2}$$

$$\theta_A = \frac{L}{EI} \left(M_{AB} - \left(\frac{\frac{2M_{AB}}{2} + \frac{M_{AB}}{2}}{2} \right) \right) = \frac{L}{EI} \left(M_{AB} - \frac{3M_{AB}}{4} \right)$$

$$\theta_A = \frac{L}{EI} \frac{M_{AB}}{4}$$

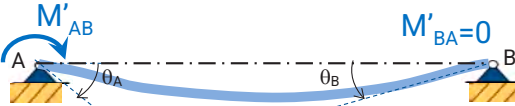
Substituíndo na definición de K_{AB} :

$$K_{AB} = \frac{M_{AB}}{\theta_A} = \frac{M_{AB}}{\frac{L}{EI} \frac{M_{AB}}{4}} = \frac{4EI}{L}; \text{ de onde, para } E \cdot I = \text{cte:}$$

$$K_{AB} = \frac{4EI}{L}$$

2.1.5 Rixidez ó xiro (K'_{AB}): caso de extremo B articulado

A rixidez ó xiro (K'_{AB}) do extremo A dunha barra AB, articulada en B, defínese como:

$$K'_{AB} = \frac{M'_{AB}}{\theta_A}$$


(0)

Figura 2-12. Definición de rixidez ó xiro en A (K'_{AB}), cando B pode xirar

117

Onde M'_{AB} é o momento que hai que aplicar na sección A para que xire un ángulo θ_A mentres B xira libremente.

$\theta_A = \theta_{AB}$ é o ángulo [radiáns] que xira o extremo A da barra AB baixo a acción de M'_{AB} ($\theta_B \neq 0$).

Vexamos que relación hai entre K_{AB} y K'_{AB} :

$$K'_{AB} = K_{AB} \cdot (1 - t_{AB} \cdot t_{BA})$$

Demostración:

Para que a viga (0) da Figura 2-12, sexa igual á suma das vigas (1) e (2) da Figura 2-13, aplicando superposición:



Figura 2-13. Descomposición en (1) e (2) de (0) en aplicación do principio de superposición

$$[1] \quad M'_{AB} = M_{AB1} + M_{AB2}$$

$$[2] \quad M_{BA} = 0 \rightarrow M_{BA1} + M_{BA2} = 0 \rightarrow M_{BA2} = -M_{BA1}$$

Polo tanto, de [1]:

$$M'_{AB} = M_{AB1} - t_{BA} \cdot t_{AB} \cdot M_{BA1}$$

Dividindo todo por θ_A :

$$\frac{M'_{AB}}{\theta_A} = \frac{M_{AB1}}{\theta_A} - t_{AB} \cdot t_{BA} \frac{M_{AB1}}{\theta_A}$$

Por tanto:

$$K'_{AB} = K_{AB} \cdot (1 - t_{AB} \cdot t_{BA})$$

Si se tratara dunha barra de $E \cdot I$ constante, verifícase que:

$$1. \quad t_{AB} = t_{BA} = \frac{1}{2}$$

118

$$2. \quad K_{AB} = \frac{4EI}{L}$$

Polo tanto, neste caso: $K'_{AB} = \frac{4EI}{L} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$

É dicir, si $E \cdot I$ é constante:

$$K'_{AB} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L}$$

2.1.6 Rixidez ó xiro (K''_{AB}): caso de barra en ménsula

Neste caso, o extremo B está libre, mentres se aplica en A o flexor M_{AB} que fai que esta sección xire. A rixidez ó xiro do extremo A defínese da mesma forma que nos casos anteriores:

$$K''_{AB} = \frac{M_{AB}}{\theta_{AB}}$$

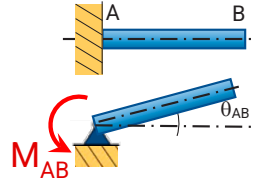


Figura 2-14. Definición de rixidez ó xiro na sección de arranque A dunha ménsula

Como se trata dunha ménsula, o extremo B, ó estar libre, non opón resistencia ó xiro, e a barra permanecería xirando recta, sen estar equilibrada, un ángulo θ_{AB} que tendería a infinito. Polo tanto, neste caso:

$$K''_{AB} = \frac{M_{AB}}{\infty} = 0$$

2.1.7 Equilibrio e xiro nun nodo ríxido, sen translación

Un pórtico plano atópase en '**Estado Fundamental**' cando os seus nodos non sofren desprazamentos lineais, senón unicamente xiros. Dise neste caso que a estrutura é **Intranslacional**. As estruturas coas que traballaremos nos exemplos que se desenvolverán máis adiante, en principio serán deste tipo.

Neste sentido é preciso lembrar que partimos da hipótese de que as barras non varían de lonxitude ($\Delta L = 0$) polo esforzo axial. É dicir, consideraremos solo a deformación transversal da barra por flexión, e non a do seu axial.

Consideremos a estrutura da Figura 2-15, formada en xeral por N barras, todas concorrentes no nodo ríxido A, que está sometido a un momento externo M_A . 119

Desbotando as deformacións lonxitudinais das barras debidas ós axiais, fronte ás de flexión, pódese admitir que o nodo A non experimenta translación, senón só xiro, baixo a acción de M_A .

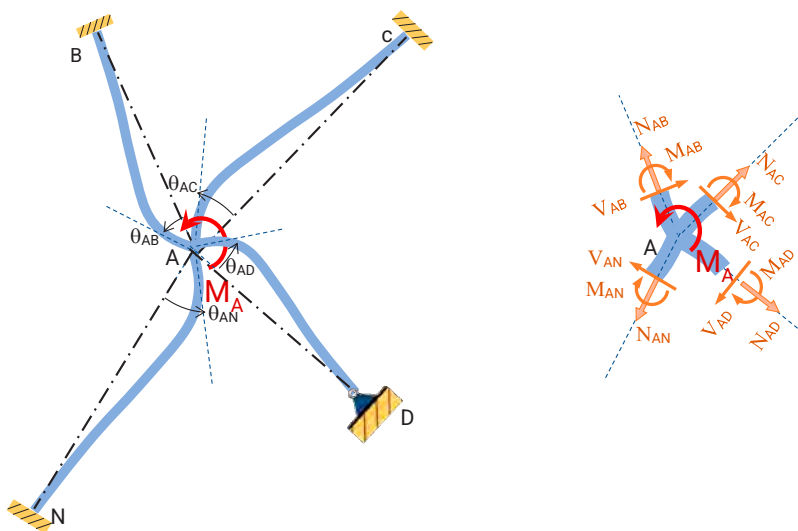


Figura 2-15. Nodo ríxido A sometido a un flexor externo M_A

Tras actuar M_A , as barras defórmanse ata acadar de novo o equilibrio. Illamos o nodo A (Figura 2-15) e establecemos o seu equilibrio de momentos.

Tomando equilibrio de momentos dende o nodo A, tendo en conta que os axiais N_{Ai} son concorrentes en A, e que a distancia entre os cortantes V_{Ai} e o nodo A son infinitesimais, resulta que os momentos de ambas solicitacións son nulos ou depreciábeis, e polo tanto no equilibrio só interveñen os momentos:

$$M_A = M_{AB} + M_{AC} + \dots + M_{AN}$$

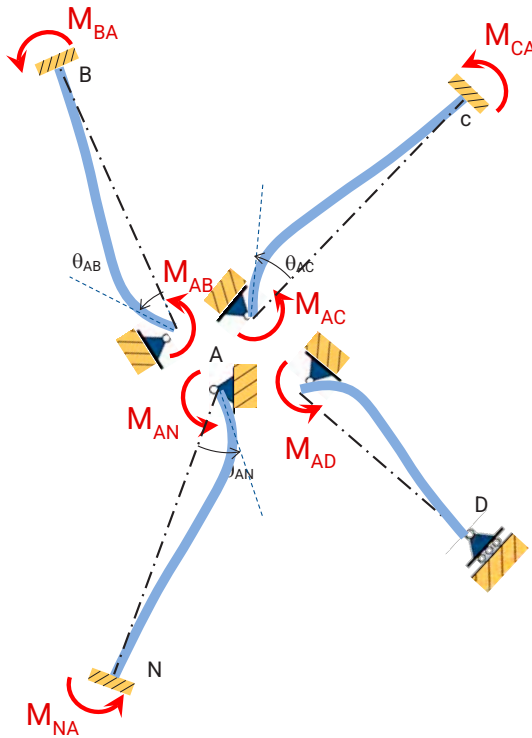
$$M_A = \sum_{i=B} M_{Ai}$$

O valor dos momentos de extremo das barras no nodo A, M_{Ai} , calculase resolvendo o seguinte sistema de ecuacións:

- Por ser A un nodo ríxido: $\theta_{AB} = \theta_{AC} = \dots = \theta_{AN}$
- Por equilibrio do nodo A:

$$M_A = \sum_{i=B} M_{Ai}$$

120



$$\theta_{Ai} = \frac{M_{AB}}{K_{AB}} = \frac{M_{AC}}{K_{AC}} = \dots = \frac{M_{AN}}{K_{AN}}$$

Por tanto:

$$\theta_{Ai} = \frac{M_{AB} + M_{AC} + \dots + M_{AN}}{K_{AB} + K_{AC} + \dots + K_{AN}}$$

$$\theta_{Ai} = \frac{M_A}{\sum_{i=B}^N K_{Ai}}$$

$$M_{Ai} = \frac{K_{Ai}}{\sum_{i=B}^N K_{Ai}} \cdot M_A$$

Chamando: $r_{Ai} = \frac{K_{Ai}}{\sum_{i=B}^N K_{Ai}}$

Temos que: $M_{Ai} = r_{Ai} \cdot M_A$

Figura 2-16. Illamos do nodo A as barras concorrentes neste nodo

Onde a r_{Ai} denominaselle 'coeficiente de reparto' da barra Ai no nodo A.

Notación:

M_{Ai} : momentos repartidos

r_{Ai} representa a proporción do momento M_A aplicado ó nodo que se distribúe entre as seccións extremas de cada barra, a carón do nodo.

Así mesmo:

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} &= M_{AB} \cdot t_{AB} = r_{AB} \cdot M_A \cdot t_{AB} \\ M_{CA} &= M_{AC} \cdot t_{AC} = r_{AC} \cdot M_A \cdot t_{AC} \\ \dots M_{NA} &= r_{AZ} \cdot M_A \cdot t_{AN} \end{aligned} \right\} M_{iA} : \text{momentos transmitidos}$$

2.1.8 Estruturas translacionais. Estados paramétricos. Orde de Translacionalidade (OT)

Como se indicou anteriormente, nos exemplos que se desenvolven nos seguintes apartados deste capítulo, dedicado ó método de Cross, traballaremos en xeral con estruturas intranslacionais. Lémbrese que este tipo de estruturas caracterízanse porque os seus nodos só poden xirar, pero non desprazarse linealmente (translación). O método de resolución de este tipo de estruturas intranslacionais é o que corresponde ó denominado estado fundamental, no que interveñen os xiros dos nodos.

Para considerar os efectos das translacións, sería preciso considerar os denominados estados paramétricos (a diferenza do estado fundamental, pode haber varios estados paramétricos). O número de estados paramétricos ven dado pola Orde de Translacionalidade (OT) do pórtico. O estado real será a suma (superposición) do estado fundamental máis todos os estados paramétricos.

Para o cálculo da orde de translacionalidade podemos empregar a seguinte ecuación:

$$OT = 3b - v - \sum N(n-1) - \sum \text{Coaccións externas}$$

b = nº total de barras de la estrutura

v = nº de ménsulas da estrutura

N : nº de nodos en los que concorren "n" barras

n : nº de barras que concorren no nodo

Coaccións externas (á translación, sen contar xiros):

Para que unha estrutura sexa intranslacional unha condición necesaria é que a súa orde de translacionalidade, calculada pola fórmula anterior, sexa cero. Non obstante esta condición pode non ser suficiente en moitos casos. Para que sexa intranslacional debemos asegurarnos de que todos os desprazamentos lineais (translacións) dos seus nodos están impedidos, si desbotamos as variacións de lonxitude das barras.

2.2 Problemas de estruturas de nodos ríxidos

2.2.1 Exercício R-1. Pórtico de 3 alturas. Cálculo orde de translacionalidade

No pórtico de nodos ríxidos da Figura 2-17, calcular o orde de translacionalidade e engadir os apoios necesarios para que deixe de ser translacional.

122

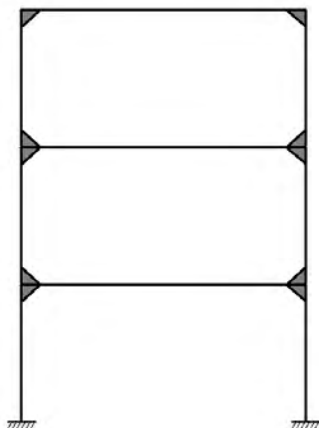


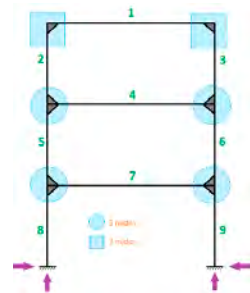
Figura 2-17. Pórtico de 3 alturas: modelo (esquerda) e maqueta (direita)

Solución:

Para o cálculo da orde de translacionalidade empregamos a ecuación explicada na introdución:

$$OT = 3 \cdot b - v - \sum N \cdot (n - 1) \cdot 2 - \sum \text{Coaccións externas}$$

$$OT = 3 \cdot 0 - 0 - \sum 4 \cdot (3 - 1) \cdot 2 - \sum 2 \cdot (2 - 1) \cdot 2 - \sum 4 = 3$$



123

Figura 2-18. Identificación do nº de barras concorrentes en cada nodo

Imos analizar e bloquear cada unha das posibles translacións do pórtico

1) Segundo podemos ver na Figura 2-19 (a), a primeira translación prodúcese no primeiro nivel do pórtico. Para bloqueala poremos un apoio articulado, desprazable no sentido vertical, como se ve na Figura 2-19 (b). No caso da maqueta poremos un arriostramento con cables para impedir o desprazamento horizontal do primeiro nivel do pórtico.

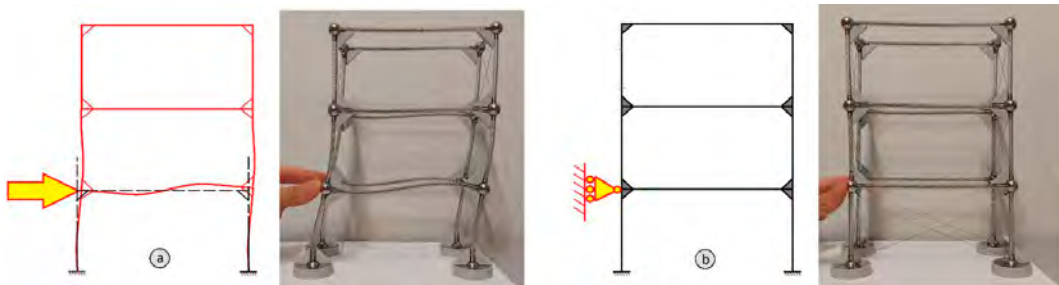


Figura 2-19. Estrutura translacional de orde 3: 1ª translación (a) permitida, (b) impedida

2) Segundo podemos ver na Figura 2-20 (a), o segunda translación prodúcese no segundo nivel do pórtico. Para evitala poremos, como se ve na Figura 2-20 (b), un apoio articulado fixo só no sentido horizontal nese nivel. No caso da maqueta engadiremos un arriostramento con cables para impedir o desprazamento horizontal do segundo nivel do pórtico.

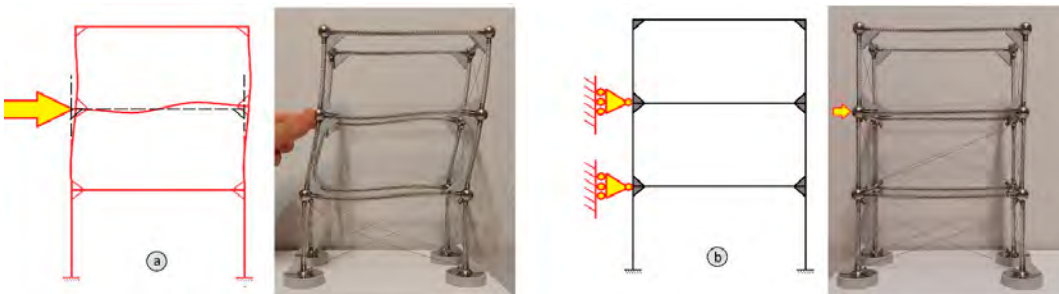


Figura 2-20. Estrutura translacional de orde 3: (a) 2ª translación permitida, (b) 1ª e 2ª translacións impedidas

3) Segundo podemos ver na Figura 2-21 inferior (a), a terceira translacionalidade prodúcese no terceiro nivel do pórtico. Para impedila poremos, como se ve na Figura 2-21 (b), un apoio articulado fixo no sentido horizontal nese nivel. No caso da maqueta poremos un arriostramento con cables para impedir o desprazamento horizontal da terceiro nivel do pórtico.

124

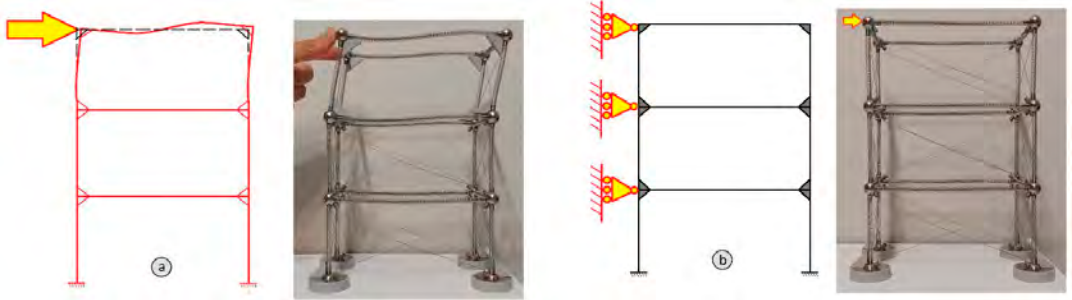


Figura 2-21. Estrutura translacional de orde 3: (a) 3ª translación permitida, (b) 1ª, 2ª e 3ª translacións impedidas

2.2.2 Exercício R-2. Pórtico de 2 alturas, duas plantas. Cálculo orde de translacionalidade

No pórtico de nodos ríxidos da Figura 2-22, calcular a orde de translacionalidade e engadir os apoios necesarios para que deixe de ser translacional.

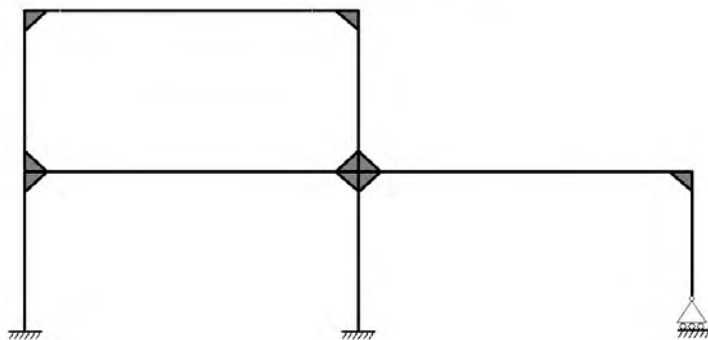
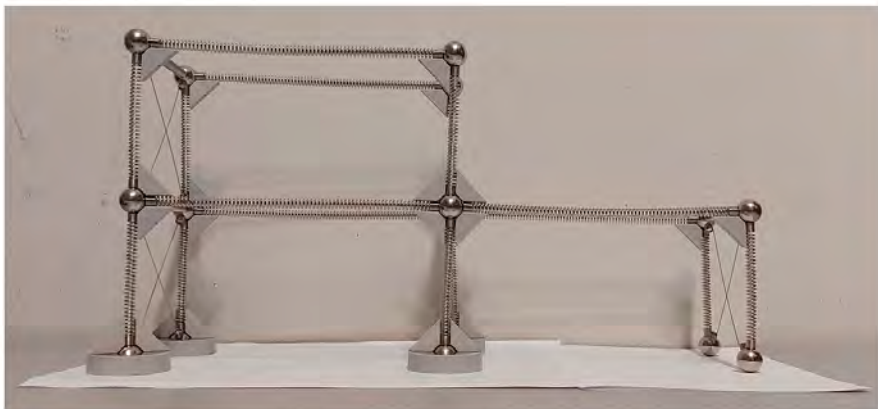


Figura 2-22. Pórtico de 2 alturas e dúas plantas: maqueta (superior) e modelo (inferior)

Solución:

Para o calculo da orde de translacionalidade empregamos a ecuación explicada na introdución:

$$OT = 3 \cdot b - v - \sum N \cdot (n - 1) \cdot 2 - \sum \text{Coacción externas}$$

$$OT = 3 \cdot 0 - 0 - \sum 3 \cdot (3 - 1) \cdot 2 - \sum 1 \cdot (2 - 1) \cdot 2 - \sum 1 \cdot (4 - 1) \cdot 2 - \sum 5 = 3$$

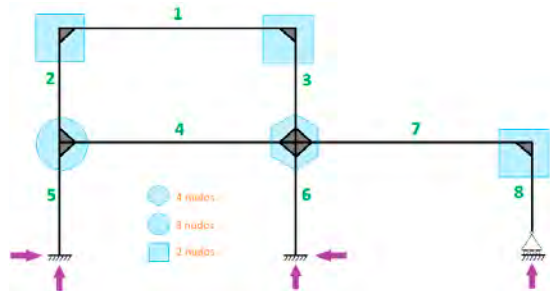


Figura 2-23. Identificación do nº de barras concorrentes en cada nodo

Imos analizar e bloquear cada un dos posibles desprazamentos lineais dos nodos do pórtico

1) Segundo podemos ver na Figura 2-24 (a), o primeira posibilidade de desprazamento lineal dos nodos, prodúcese no primeiro nivel do pórtico. Para bloquealo poremos, como se ve na Figura 2-24 (b), un apoio articulado desprazable no sentido vertical. No caso da maqueta poremos un arriostramento con cables para impedir o desprazamento horizontal da primeiro nivel do pórtico.

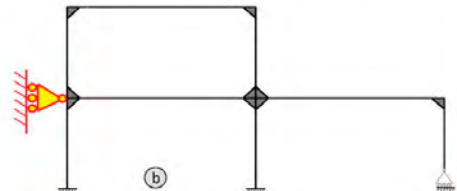
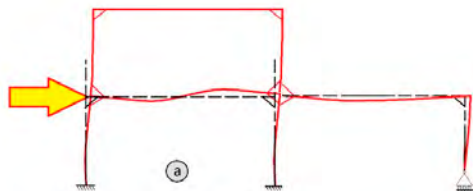
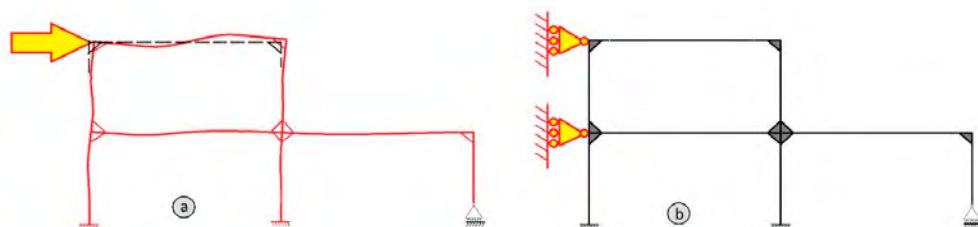


Figura 2-24. Estrutura translacional de orde 3: 1ª translación (a) permitida, (b) impedida

2) Segundo podemos ver na Figura 2-25 (a), a segunda translacionalidade prodúcese no segundo nivel do pórtico. Para evitalo poremos un apoio articulado desprazable no sentido vertical nese nivel, como se ve na Figura 2-25

(b). No caso da maqueta poremos un arriostramento con cables para impedir o desprazamento horizontal do segundo nivel do pórtico.



127

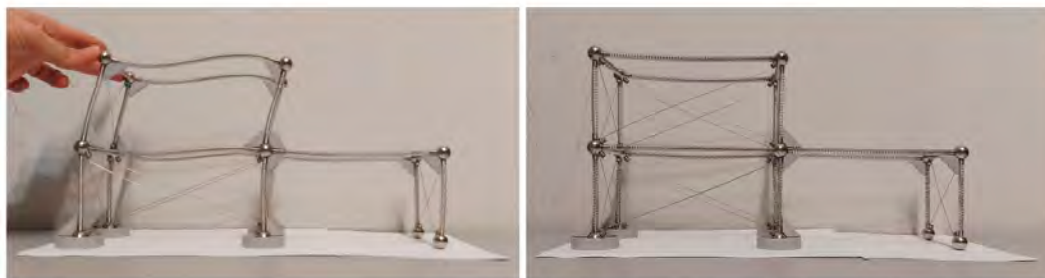


Figura 2-25. Estructura translacional de orde 3: (a) 2ª translación permitida, (b) 1ª e 2ª translacións impedidas

3) Na Figura 2-26 (a), podemos ver a terceira posible translación dos nodos do pórtico, que se produce nos nodos do nivel superior. Para evitar este desprazamento poremos un apoio articulado desprazable no sentido vertical nese apoio, como se ve na Figura 2-26 (b). No caso da maqueta poremos un apoio fixo articulado para impedir o desprazamento horizontal dos nodos superiores.

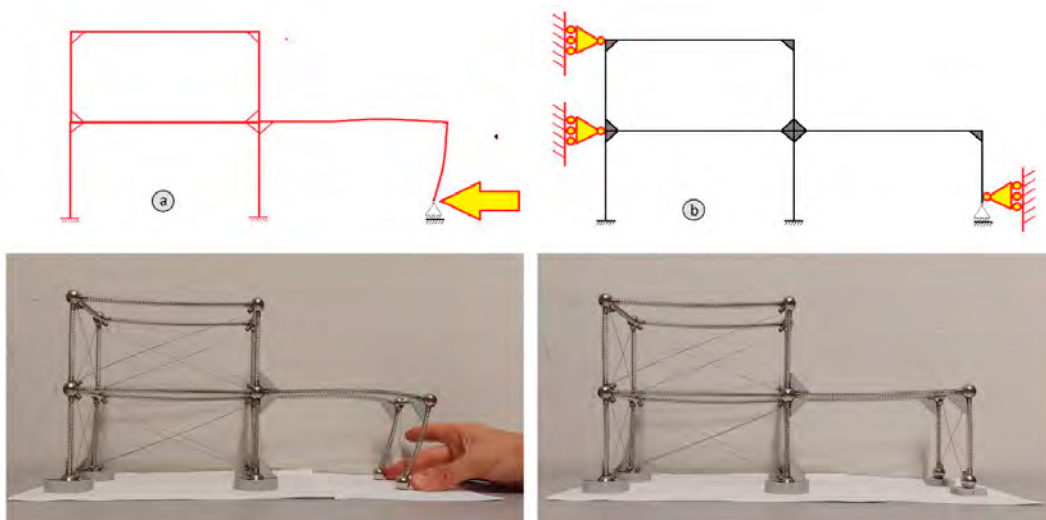


Figura 2-26. Estructura translacional de orde 3: (a) 3ª translación permitida, (b) 1ª, 2ª e 3ª translacións impedidas

2.2.3 Exercício R-3. Pórtico de 2 vanos, diferentes alturas. Cálculo orde de translacionalidade

No pórtico da Figura 2-27, calcular a orde de translacionalidade e engadir os apoios necesarios para que deixe de ser translacional.

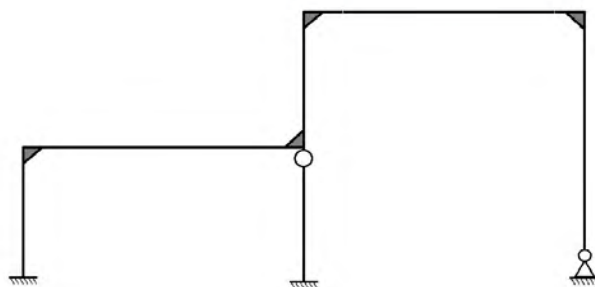
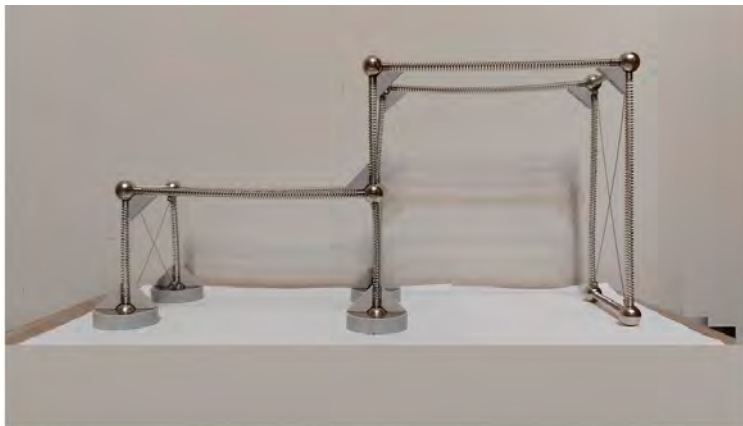


Figura 2-27. Pórtico de 2 vanos e diferentes alturas: maquete (superior) e modelo (inferior)

Solución:

Para o calculo da orde de translacionalidade, empregamos a ecuación explicada na introdución:

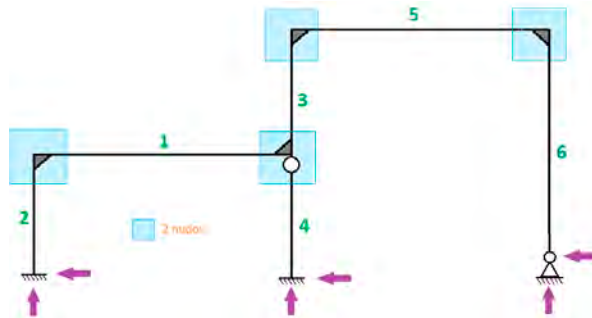


Figura 2-28. Identificación do nº de barras concorrentes en cada nodo

$$OT = 3 \cdot b - v - \sum N \cdot (n - 1) \cdot 2 - \sum \text{Coacción externas}$$

$$OT = 3 \cdot 6 - 0 - \sum 1 \cdot (3 - 1) \cdot 2 - \sum 3 \cdot (2 - 1) \cdot 2 - \sum 6 = 2$$

Imos analizar e impedir cada unha das posibles translacións dos nodos do pórtico

1) Segundo podemos ver na Figura 2-29 (a), o primeira posible translación prodúcese no primeiro nivel do pórtico. Para impedi-lo poremos un apoio articulado desprazable no sentido vertical, como se ve na Figura 2-29 (b, dereita). No caso da maqueta poremos un arriostramento con cables para impedir o desprazamento horizontal do primeiro nivel do pórtico.

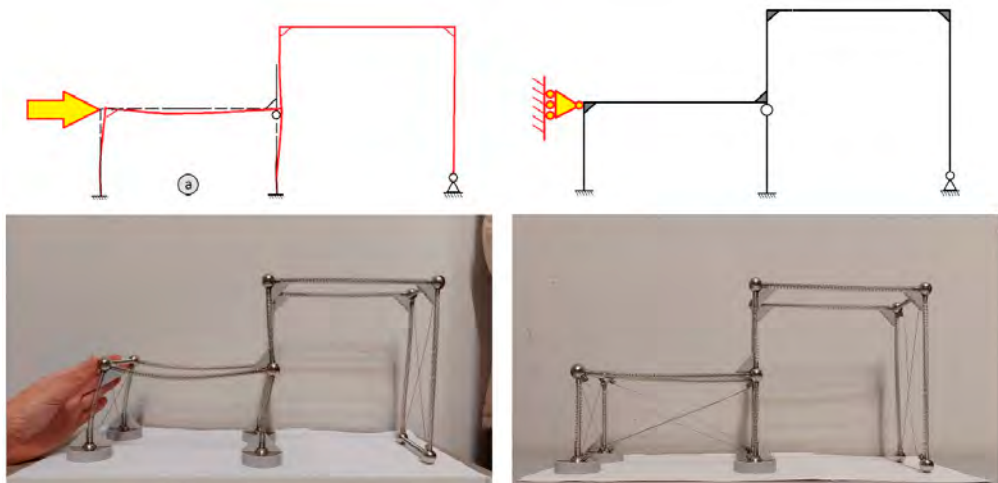


Figura 2-29. Estructura translacional de orde 2: 1ª translación (a-esquerda) permitida, (dereita) impedida

2) A segunda posibilidade de translación dos nodos, prodúcese no segundo nivel do pórtico, como podemos ver na figura inferior (a). Para impedi-la debemos poñer nese nivel, un apoio articulado, desprazable no sentido

vertical, como se ve na figura (b). No caso da maqueta poremos un arriostramento con cables para impedir o desprazamento horizontal do segundo nivel do pórtico.

130

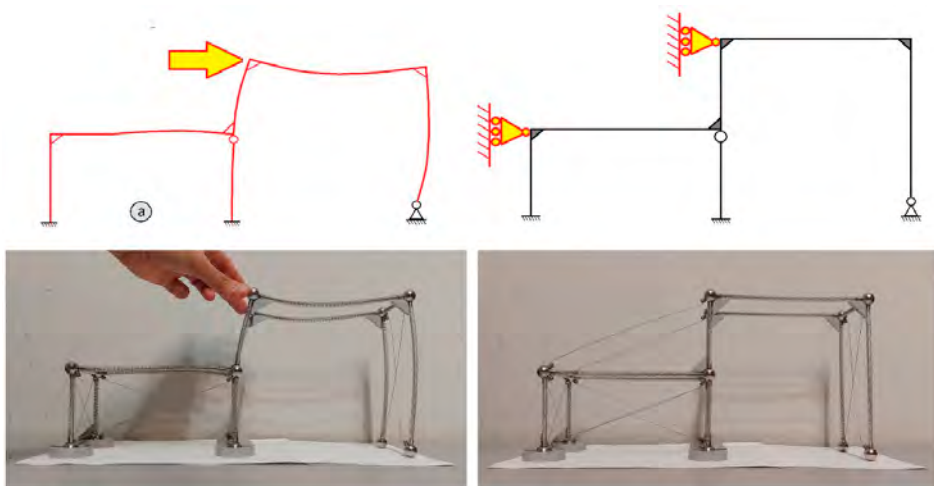


Figura 2-30. Estrutura translacional de orde 2: (a) 2ª translación permitida, (b-dereita) 1ª e 2ª translacións impeditas

Nota: compárese este modelo co do exercicio 2.2.11

2.2.4 Exercício R-4. Estrutura de 1 nodo ríxido

No nodo A da estrutura inferior actúa un momento externo M_A que desequilibra o nodo e o fai xirar, deformando as barras. Pídesse calcular os momentos flexores das seccións das barras no nodo A debidos a M_A .

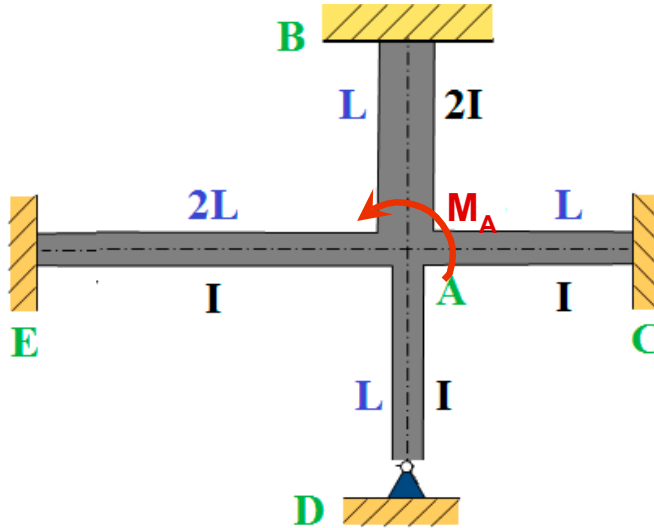


Figura 2-31. Estrutura de 1 nodo ríxido (A)

Solución. Calculamos rixideces ó xiro e coeficientes de reparto no nodo A:

Nodo A	
Rixideces ó xiro (K)	Coeficientes de reparto (r)
$K_{AB} = \frac{4EI}{L}$	$r_{AB} = \frac{\frac{4EI}{L}}{\frac{17EI}{L}} = \frac{4}{17} = 0,2353$
$K_{AC} = \frac{4EI}{L}$	$r_{AC} = \frac{\frac{4EI}{L}}{\frac{17EI}{L}} = \frac{4}{17} = 0,2353$
$K_{AD} = \frac{3EI}{L}$	$r_{AD} = \frac{\frac{3EI}{L}}{\frac{17EI}{L}} = \frac{3}{17} = 0,1765$
$K_{AE} = \frac{4EI}{2L}$	$r_{AE} = \frac{\frac{4EI}{2L}}{\frac{17EI}{L}} = \frac{2}{17} = 0,1176$
$K_C = \frac{17EI}{L}$	$r_{AB} + r_{AC} + r_{AD} + r_{AE} = 1,0000$

Illando o nodo das barras, nas seccións de unión aparecerán momentos de acción e reacción (M_{Ax}), que virán dados polos coeficientes de reparto no nodo A:

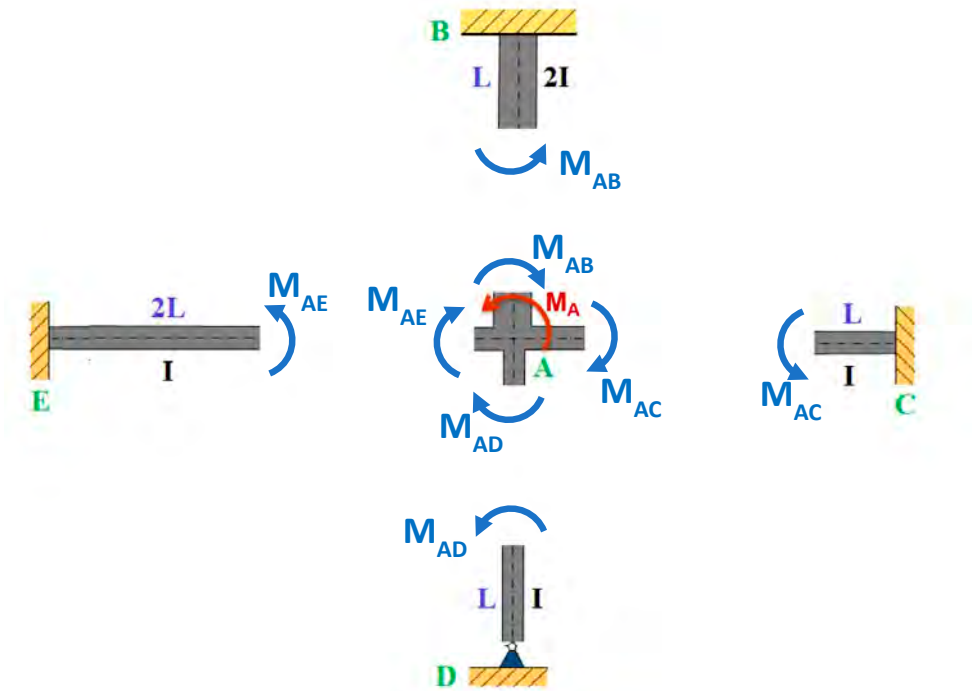


Figura 2-32. Nodo A illado das barras nas sección de encontro entre barras e nodo. Momentos acción-reacción

Momentos M_{AX}	Momentos transmitidos
$M_{AB} = -0,4706M_A$	$M_{BA} = -0,2353M_A$
$M_{AC} = -0,2353M_A$	$M_{CA} = -0,1176M_A$
$M_{AD} = -0,1765M_A$	$M_{DA} = 0$
$M_{AE} = -0,1176M_A$	$M_{EA} = -0,0588M_A$
$\sum M_{AX} = -1'0000 \cdot M_A$	-----

133

Neste exercicio, podemos observar como a barra mais ríxida AB ó final e a que mais momento absorbe, mentres que a menos ríxida AE, é a que menos momento absorbe. Como vemos a rixidez ó xiro no nodo de cada barra depende da súa lonxitude, inercia, material e tipo de apoio no lado contrario o nodo.

2.2.5 Exercício R-5. Pórtico de 3 barras

Para o pórtico de uniões ríxidas nos nodos da Figura 2-33, que tem em todos os perfis a mesma secção de 15x4 mm, em aço S235 e para uma carga $P=30\text{N}$ situada a uma distância $d=100\text{ mm}$ da união C, calcule:

- Orde de translacionalidade do pórtico. Indicar que ocorreria de não existir o apoio externo na união B.
- Valor dos momentos nos extremos das barras para o pórtico
- Calcular o valor da reacção no apoio B
- Calcular o diagrama de momentos das barras do pórtico, atopando o valor do momento máximo de cada barra.

134

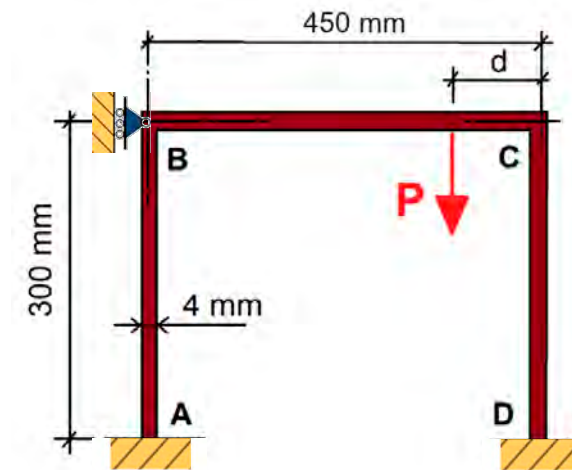


Figura 2-33. Pórtico de 3 barras



Figura 2-34. Exemplo real de pórtico de 3 barras

Solución:

a) Segundo o explicado en teoría, para o cálculo da orde de translacionalidade imos empregar a seguinte ecuación:

$$OT = 3b - v - \sum N(n-1) - \sum \text{Coaccións externas}$$

Sendo:

b = nº total de barras da estrutura

v = nº de ménsulas da estrutura

N : nº de nodos en los que concorren "n" barras

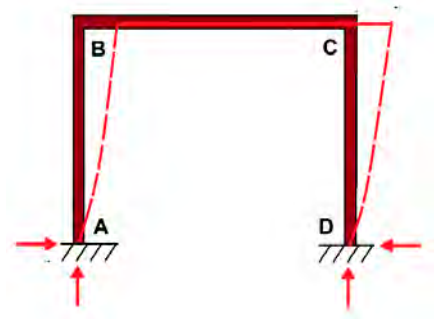
n : nº de barras que concorren no nodo

Coaccións externas (á translación, sen contar xiros):

Para este caso: $OT = 3 \cdot 3 - 0 - 2_{B,C}(2-1) - 5 = 0$

Este pórtico será intraslacional, posto que a súa orde de translacionalidade é cero, e todos os desprazamentos lineais dos seus nodos están impedidos, desbotando as variacións de lonxitude das barras.

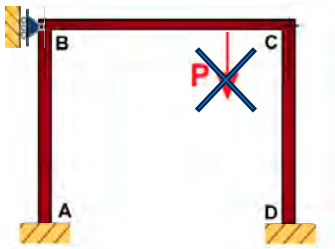
De non existir o apoio B, a orde de translacionalidade sería de 1, xa que na fórmula anterior habería 4 coaccións externas en lugar de 5. Nese caso, a posible translación do pórtico sería a seguinte:



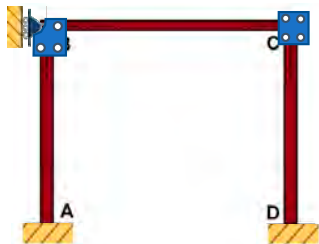
Asumindo que as barras son invariábeis en lonxitude, os desprazamentos horizontais dos nodos B e C serían sempre iguais.

b) As etapas do cálculo polo método de Cross, son as seguintes:

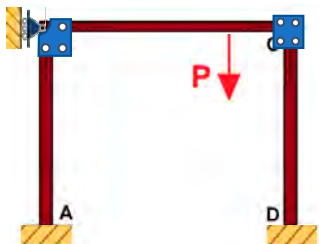
I. Descargamos a estrutura



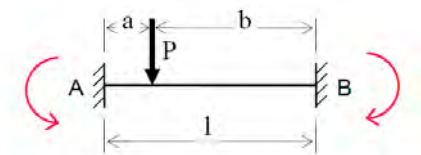
- II. Bloqueamos o xiro en tódalas unións que sexan ríxidas (ás articulacións non lles bloqueamos o xiro). Na figura inferior represéntanse simbolicamente as seccións bloqueadas dos nodos como se estiveran fixadas mediante unha placa.



- III. Cargamos a estrutura



- IV. Calculamos os momentos flexores que aparecen nos extremos das barras cos xiros bloqueados nas unións ríxidas. Estes flexores chámanse Momentos de Encastamento Perfecto (ver táboa ó final deste capítulo). A única barra cargada é a BC. Nesta barra:



$$M_{AB} = +\frac{Pab^2}{l^2}$$

$$M_{BA} = -\frac{Pba^2}{l^2}$$

$$M_{BC}^0 = +\frac{Pab^2}{L^2} = +\frac{30 \cdot 350 \cdot 100^2}{450^2} = +519 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{CD}^0 = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{30 \cdot 100 \cdot 350^2}{450^2} = -1815 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

- V. Equilibrado dos nodos.

Equilibraremos os nodos de un en un, procedendo a liberar o xiro. Cando un nodo estea liberado, os demais permanecen co bloqueo que tiñan, para manter as condicións iniciais de cálculo das rixideces. Nesta etapa necesitaremos tamén os coeficientes de transmisión. Coas primeiras obtemos os coeficientes de reparto:

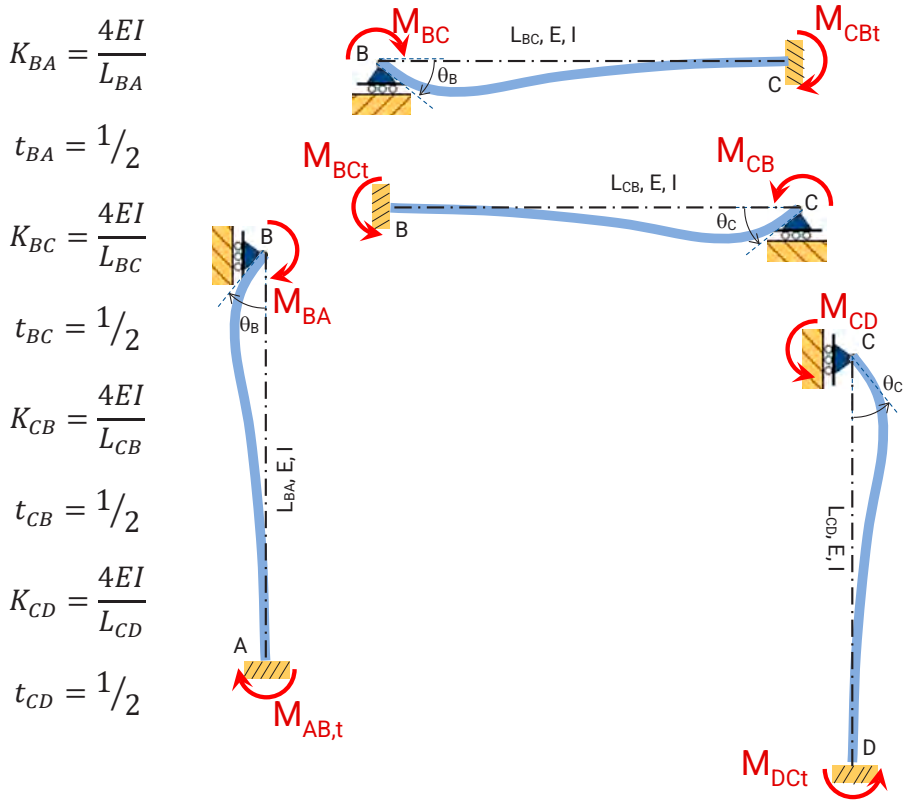


Figura 2-35. Descomposición do pórtico en barras para cálculo de Kij e tij

Resumido na seguinte táboa, temos os valores de rixidez ó xiro:

Nodo B		
Barra BA	$K_{BA} = \frac{4EI}{300}$	$r_{BA} = \frac{\frac{4EI}{300}}{\frac{10EI}{450}} = \frac{3}{5} = 0,6000$
Barra BC	$K_{BC} = \frac{4EI}{450}$	$r_{BC} = \frac{\frac{4EI}{450}}{\frac{10EI}{450}} = \frac{2}{5} = 0,4000$
Sumas Nodo B	$K_C = \frac{10EI}{450}$	$r_{BA} + r_{BC} = 0,6 + 0,4 = 1,0$

Nodo C		
Barra CB	$K_{CB} = \frac{4EI}{450}$	$r_{CB} = \frac{\frac{4EI}{450}}{\frac{10EI}{450}} = \frac{2}{5} = 0,4000$
Barra CD	$K_{CD} = \frac{4EI}{300}$	$r_{CD} = \frac{\frac{4EI}{300}}{\frac{10EI}{450}} = \frac{3}{5} = 0,6000$
Sumas Nodo B	$K_C = \frac{10EI}{450}$	$r_{CB} + r_{CD} = 0,4 + 0,6 = 1,0$

138 Unha vez calculados os coeficientes de reparto e os momentos de encastamento perfecto, anotámolos a carón de cada sección extrema das barras, sobre o esquema da estrutura de partida, antes de comezar co equilibrado de nodos en sucesivas iteracións.

Para o equilibrado de nodos, seguimos os seguintes pasos:

- I. Para establecer a secuencia de equilibrado, escolleremos en cada iteración o nodo co maior valor absoluto do sumatorio de momentos actuantes. Nese nodo, e unicamente nel, permitiremos o xiro.

Neste caso o nodo mais desequilibrado é o C. Os momentos de encastamento perfecto sobre as seccións extremas das barras xeran, por acción e reacción, un momento igual e de sentido contrario nas mesmas seccións dos nodos. Ambos momentos terán o mesmo signo tendo en conta o criterio do método que temos definido.



Figura 2-36. Sentido positivo dos momentos flexores en nodos (esquerda) en barras (dereita) segundo criterio do método de Cross

Separando as barras do nodo, e tendo en conta que os momentos de encastamento perfecto refírense ás barras, o ΣM que desequilibra o nodo C será: **-1815** kN·m, negativo, por tanto sentido horario sobre a barra e antihorario sobre o nodo, ambos co mesmo signo de Cross.

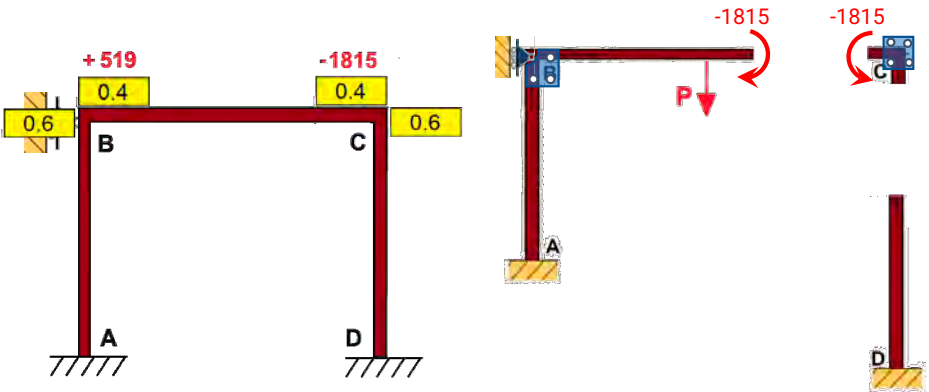
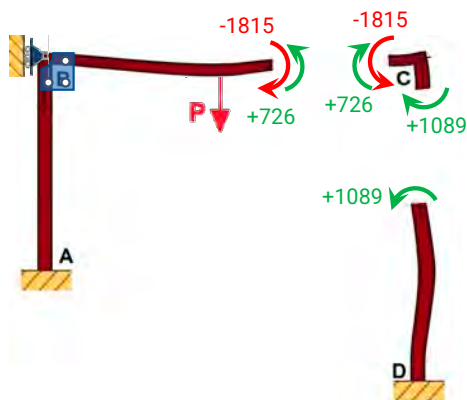


Figura 2-37. Momentos iniciais no extremo das barras cos xiros bloqueados

Ó permitir o xiro no nodo, deformaranse as barras, deixando de ser rectas. Ó deformarse o material (alargarse nunhas zonas e acurtarse noutras) aparecen tensións nas seccións. Estas tensións dan como resultante un momento (repartido) por cada barra que acomete ó nodo, e que contrarresta o momento anterior, equilibrando o nodo, ata que $\sum M_{C,nodo}=0$



Para o equilibrio (nodo C), aplicamos o concepto de coeficiente de reparto:

$$M_{CB} = -r_{CB} \cdot (-1815) = -0.4 \cdot (-1815) = +726 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{CD} = -r_{CD} \cdot (-1815) = -0.6 \cdot (-1815) = +1089 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

139

É preciso ter en conta que os momentos equilibrantes sempre se opoñen ó xiro, e por tanto cambian de signo.

Figura 2-38. Equilibrado do nodo C ($\sum M_C=0$)

Para os momento equilibrantes (ou repartidos), no esquema empregaremos unha cor propia (negro neste caso) e marcarémolos cun punto (ver Figura 2-39). Unha vez que se equilibra o nodo, detense o seu xiro, e procederemos a bloquealo de novo nesta posición.

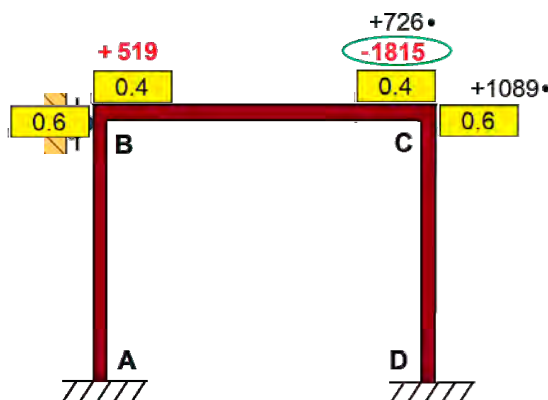


Figura 2-39. Momentos repartidos en C tras equilibralo

- II. Para que os coeficientes de reparto anteriores (0.4 e 0.6) sexan válidos, os vínculos nos extremos opostos das barras deben corresponderse cos supostos para o cálculo das rixideces no nodo C. Por iso deixamos o nodo B bloqueado ó xiro mentres equilibramos C. O nodo D está encastado co exterior e non vai xirar en ningún instante. Como se mencionou antes, este é o motivo polo que, para poder usar os coeficientes de reparto calculados, só podemos desbloquear o nodo que estamos equilibrando, mentres o resto permanece cos bloqueos iniciais.

Desta maneira, despois de equilibrar C, nos extremos opostos B e D das barras conectadas, aparecen momentos que impiden o xiro (momentos transmitidos). Eses momentos poden obterse mediante o concepto de coeficiente de transmisión. Se o extremo oposto ten o xiro impedido, recordemos que se transmitirá ó longo da barra a metade do momento ($t=1/2$) en barras de E-I constante, e co mesmo signo por ser t sempre positivo. Se o lado contrario está articulado non se transmitirá ningún momento

Para que B non xire mentres o fai C, aparecerá por tanto en B o seguinte flexor:

$$M_{BC} = t_{CB} \cdot (+726) = 0'5 \cdot (+726) = +363 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Do mesmo modo, para que D non xire canda C, ten que aparecer en D un momento que se obtén mediante o coeficiente de transmisión $t_{CD} = 1/2$

$$M_{DC} = t_{CD} \cdot (+1089) = 0'5 \cdot (+1089) = +545 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Para os momento transmitidos empregaremos unha cor propia (azul neste caso) e marcaremoslos con dous puntos (...).

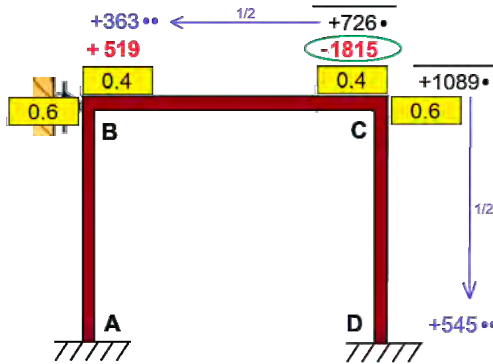


Figura 2-40. Momentos transmitidos polo equilibrado de C

Cada vez que o nodo estea equilibrado, pasarémoslle unha liña recta en cada sección, indicando que todos os momentos existentes ata esa liña, suman cero.

Agora o nodo C quedou equilibrado, e deberemos pasar a equilibrar o seguinte nodo, escollendo de novo o que teña o maior momento total pendente de repartir, en valor absoluto.

Neste caso, o seguinte nodo sería o B, no que o flexor pendente é de $+519+363=+882$.

Procedemos a repartilo entre as dúas barras que o forman, segundo os coeficientes de reparto correspondentes. Temos de novo en conta que os momentos equilibrantes terán sempre signo contrario ó flexor desequilibrado.

A continuación, transmitiranse os momentos correspondentes ata o extremo oposto das barras. De novo recordamos que si o extremo oposto está bloqueado (ou é un engaste externo) o coeficiente de transmisión é $1/2$ neste caso de E-I constante, e sempre conservando o mesmo signo. Si o lado contrario é articulado, non se transmitirá nada.

Agora o nodo B quedou equilibrado, o que indicamos cunha raia despois de cada flexor que pecha o equilibrio.

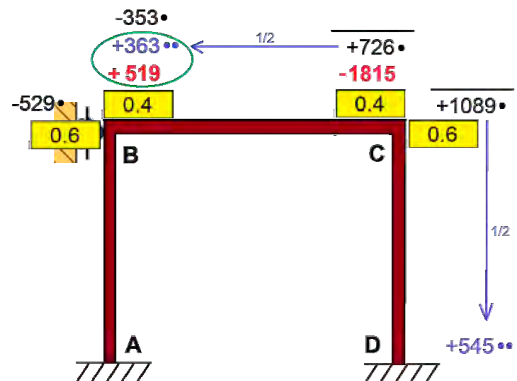


Figura 2-41. Equilibrado do nodo B ($\sum M_B = 0$)

Esta nomenclatura de un ou dous puntos, e de raías, permite repasar facilmente os cálculos en caso necesario, identificando a que corresponde cada valor.

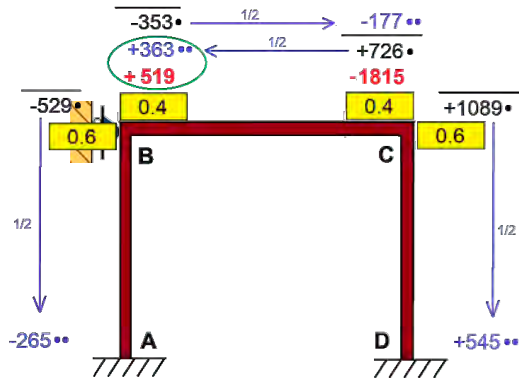


Figura 2-42. Momentos transmitidos ó equilibrar B

Para a seguinte iteración, escolleremos de novo o nodo con maior momento total pendente de equilibrar (repartir), é dicir o nodo C, con -177, que volveremos a desbloquear ó xiro, para proceder a equilibralo. Os nodos A e D non van poder xirar nunca, por seren vínculos externos que sempre van estar encastados

A orde de equilibrado de nodos ó xiro desde que comezamos o proceso, é a seguinte:

ORDEN: C-B-C-B-C-B...

O método de Cross é aproximativo mediante iteracións sucesivas, no que os momentos que desequilibran os nodos son cada vez mais pequenos. Estes momentos poden ser tan pequenos como se desexe, polo que se podería seguir o equilibrado ata o infinito. O limite de iteracións será posto dunha forma razoable. Neste caso partimos de momentos con valores enteiros, e adoptamos o criterio de realizar as iteracións de Cross sen decimais. No instante no que os flexores desequilibrantes (a repartir) xa non fosen un número enteiro, deteremos o proceso. Non realizaremos a transmisión dos últimos

momentos repartidos, para non deixar desequilibrado ningún nodo. Isto sucede no nodo B, polo que unha vez realizado este último equilibrado, xa non transmitimos máis momento a través das barras, e detemos as iteracións.

traballáramos por exemplo con 1 decimal, o limite podería ser cando comeceamos a traballar só co segundo decimal. Isto dependerá da orde de magnitude dos valores dos momentos.

Unha vez detido o proceso de equilibrado sucesivo, haberá que sumar todos os valores

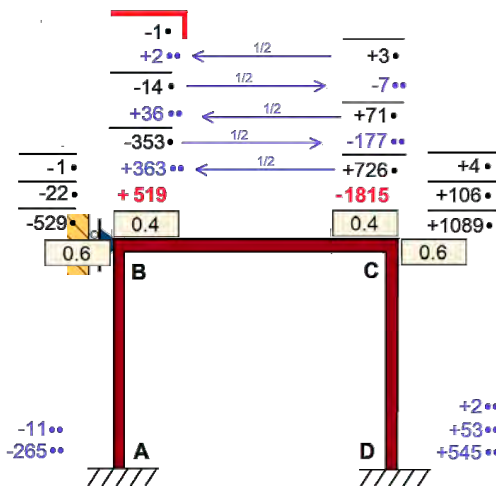


Figura 2-43. Secuencia completa de equilibrado de nodos

(incluído o momento inicial, si é que o había) de cada columna.

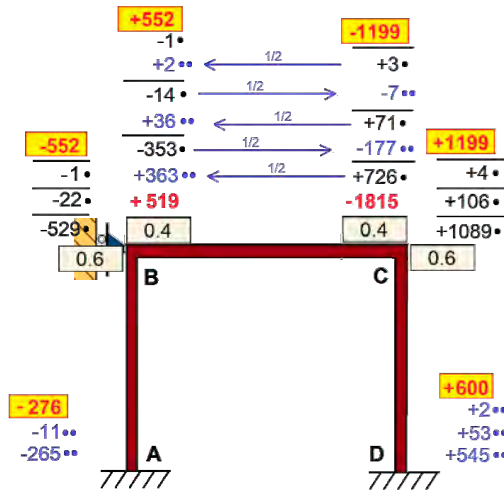


Figura 2-44. Resultado final do proceso de equilibrio de nodos

Co resultado obtido e seguindo o convenio de signos adoptado, podemos debuxar cada barra co valor e sentido de xiro dos momentos nos extremos. O sentido dos momentos dánolo o seu signo de Cross:

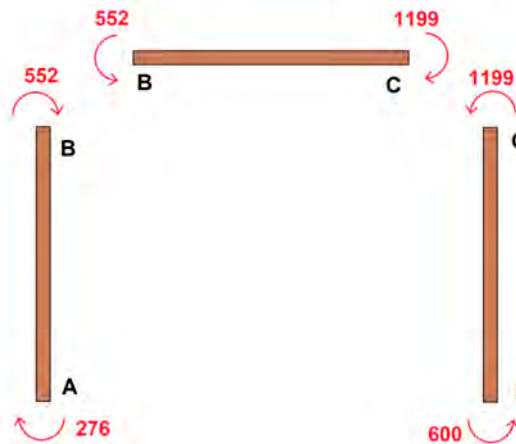


Figura 2-45. Flexores nas seccións extremas das barras, indicando o sentido de xiro a partires do signo de Cross

c) Calcular o valor da reacción no apoio B

Amáis do momento calculado por Cross, todas as barras teñen o seu cortante e esforzo axial correspondente.

Por equilibrio de forzas verticais nos nodos, por exemplo o B, o cortante V_{BC} do nodo B da barra BC é igual ó esforzo axial N_{BA} do nodo B de la barra BA (ambos esforzos son verticais), e así o mesmo co resto de cortantes e axiais de cada nodo.

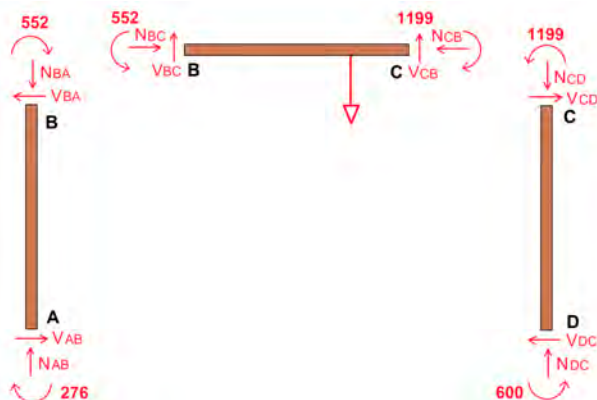


Figura 2-46. Diagrama de sólido libre das barras para obter os axiais e cortantes a partir do equilibrio das barras

Si realizamos unha análise do equilibrio do nodo B (na Figura 2-47 representase illado, con fondo amarelo), teríamos que a reacción R_B , debería estar en equilibrio co axial N_{BC} e o Cortante V_{BA} (por equilibrio de forzas horizontais no nodo). Para obter R_B , imos calcular o valor de N_{BC} e V_{BA} .

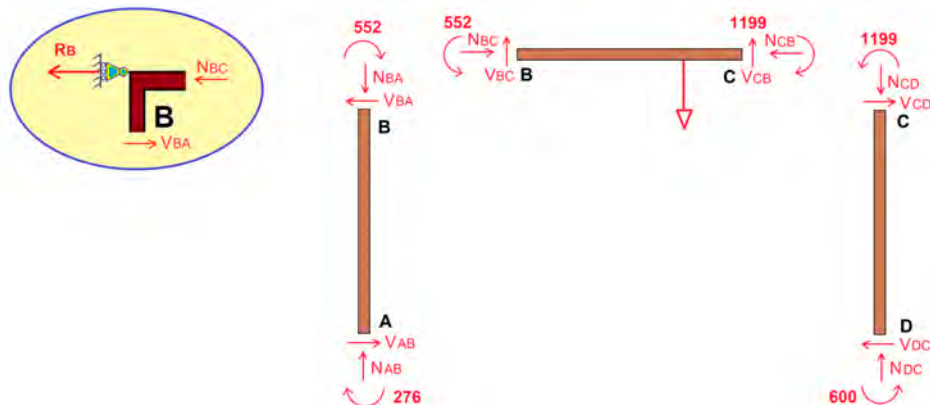


Figura 2-47. Obtención da reacción R_B por equilibrio do nodo B

Na barra BA tomamos momentos respecto de A, e así obtemos o valor de V_{BA}

$$\sum M_A = 0 = 552 + 276 - V_{BA} \cdot 300$$

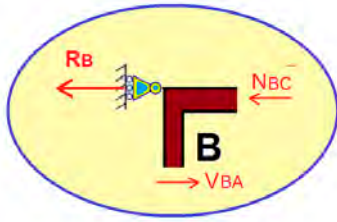
$$V_{BA} = 2,8N$$

Na barra BC, por equilibrio de forzas horizontais, o axial N_{BC} debe ser igual en módulo ó N_{CB} . Pero amais o axial N_{BC} é igual ó cortante V_{CD} , por equilibrio de forzas horizontais no nodo C. Para calcular o valor de V_{CD} , imos facer sumatorio de momentos da barra CD respecto ó nodo D:

$$\sum M_D = 0 = 1199 + 600 - V_{CD} \cdot 300$$

$$V_{CD} = N_{BC} = 6,0 N$$

Facendo equilibrio das forzas horizontais no nodo B, temos que o valor da reacción R_B será:



$$R_B = V_{BA} - N_{BC}$$

$$R_B = 2,8 - 6,0 = -3,2$$

O signo negativo no resultado, indica que, realmente a reacción sobre o apoio externo vai en sentido contrario ó suposto (iría en realidade cara á dereita na figura Figura 2-48).

144

Figura 2-48. Detalle do equilibrio do nodo B

d) Calcular o diagrama de momentos do pórtico, achando o valor do momento máximo en cada barra.

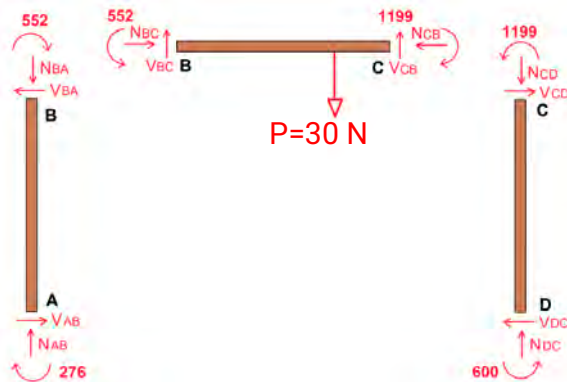


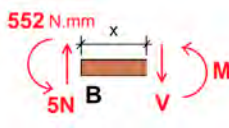
Figura 2-49. Diagrama de sólido libre para obtención dos cortantes nos extremos, por equilibrio das barras

Primeiro calculamos o valor dos cortantes na barra BC. Para elo faremos equilibrio de momentos desta barra, respecto primeiro a B e despois respecto a C.

$$V_{BC} = \frac{552 - 1199 + 30 \cdot 100}{450} = 5,23 \text{ N}$$

$$V_{CB} = 30 - 5,23 = 24,77 \text{ N}$$

Unha vez temos o valor dos cortantes e dos momentos da barra BC, xa podemos calcular, por resistencia de materiais, o diagrama de momentos desta barra. O diagrama das barras AB e CD ó non ter forzas externas aplicadas ó longo delas, o diagrama é lineal entre os valores de momentos extremos.



$$M(x) = -552 + 5,23x; \text{ para } x=350 \text{ mm} \rightarrow M=1278 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

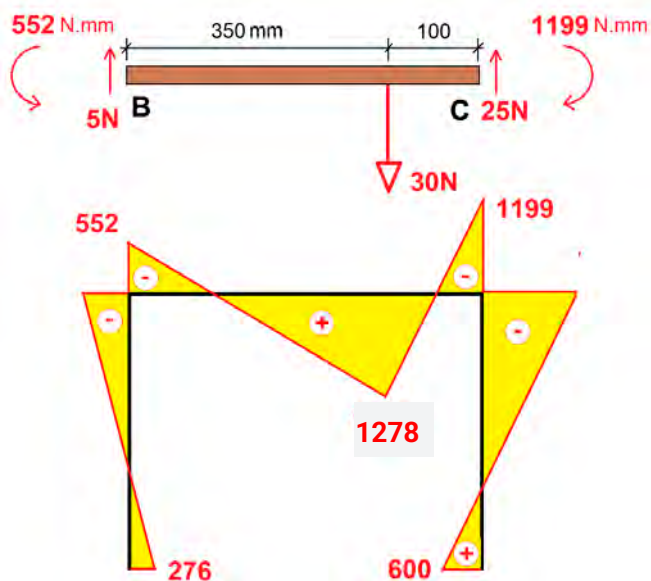


Figura 2-50. Diagrama de flexores do pórtico (o diagrama está debuxado do lado no que se atopa a tracción)

Momento máximo BC (centro): 1278 N.mm

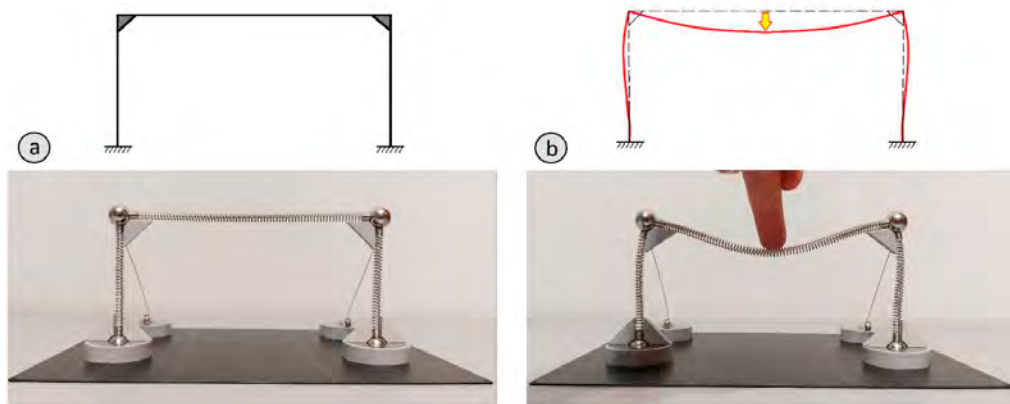


Figura 2-51. a) Pórtico cos nodos ríxidos e bases encastadas, sen carga aplicada. b) Deformación do pórtico cando se lle aplica unha carga vertical na viga horizontal do pórtico

Vexamos agora que sucedería se as barras que acometen ós nodos B e C estivesen articuladas.

Neste caso nos extremos B e C os momentos son nulos. Polo tanto a obtención do diagrama de momentos desta barra (a única que ten carga en toda a estrutura) é inmediato ó tratarse dunha viga biapoada:

$$V_{BC} = \frac{30 \cdot 100}{450} = 6'67 \text{ N}$$

$$V_{CB} = 30 - 6'67 = 23'33 \text{ N}$$

$$M_{\text{máx}} = 6'67 \cdot 350 = +2333 \text{ N} \cdot \text{mm} = M_{\text{TOTAL}}$$

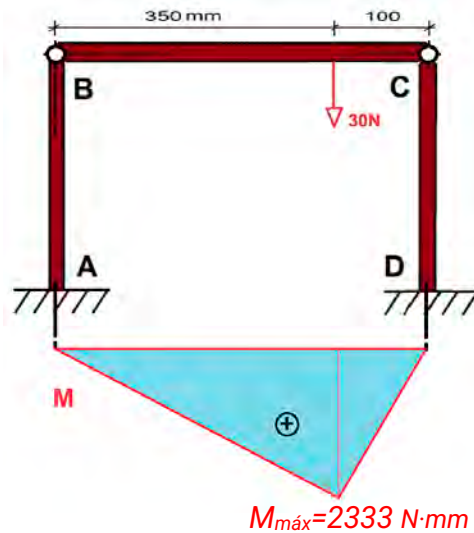


Figura 2-52. Diagrama de flexores da barra BC biarticulada

Si no diagrama anterior descontamos os momentos nas seccións dos nodos B e C, cando son ríxidos no enunciado inicial, e movemos a orixe de coordenadas do diagrama de momentos á recta que une a base destes flexores, os diagramas nos dous casos resolto tamén se poderían representar así:

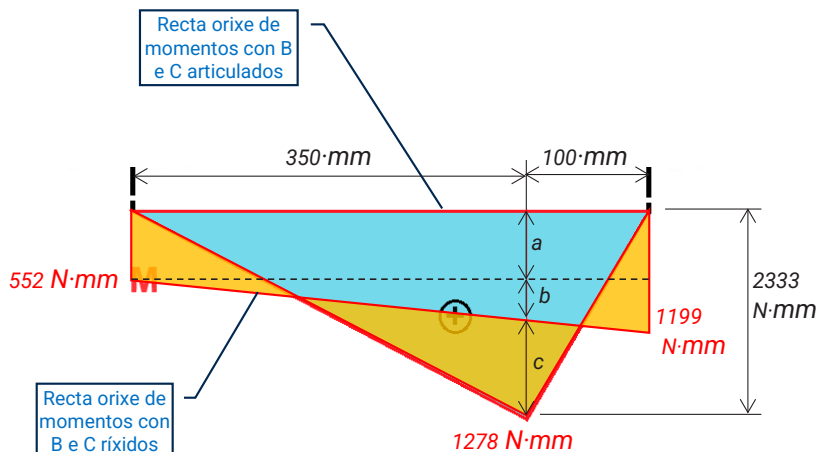


Figura 2-53. Comparación da redistribución do diagrama de flexores ó articular B e C

Ó pasar de nodos ríxidos a articulados, prodúcese unha 'redistribución' do diagrama de momentos flexores, pero a altura total do diagrama non varía:

$$a = 552 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$b = \frac{1199 - 552}{350 + 100} 350 = 503 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$c = 1278 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{\text{total}} = a + b + c = 552 + 503 + 1278 = 2333 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

147

M_{total} é igual ó momento máximo isostático (biapoiado).

Como podemos observar, no caso de ser os nodos extremos articulados, a viga horizontal ten que soportar un momento flexor de 2333 N·m, sendo ela sola que ten que facerse cargo dos esforzos flexores debidos a carga P. Pola contra no caso do pórtico con nodos ríxidos, os momentos debidos a carga P son soportados polas tres barras que forman o pórtico, e polo tanto o momento máximo que debe resistir a viga horizontal, é de 1278 N·m, sendo necesario unha viga horizontal moito mais pequeno e sendo un pórtico cos esforzos mellor repartidos.

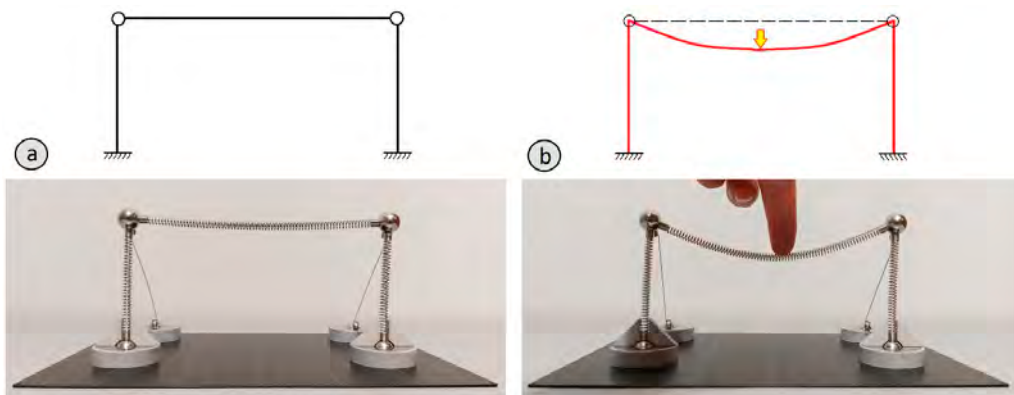


Figura 2-54. a) Pórtico cos nodos articulados e bases encastadas, sen carga aplicada. b) Deformación do pórtico cando se lle aplica unha carga vertical na barra horizontal superior

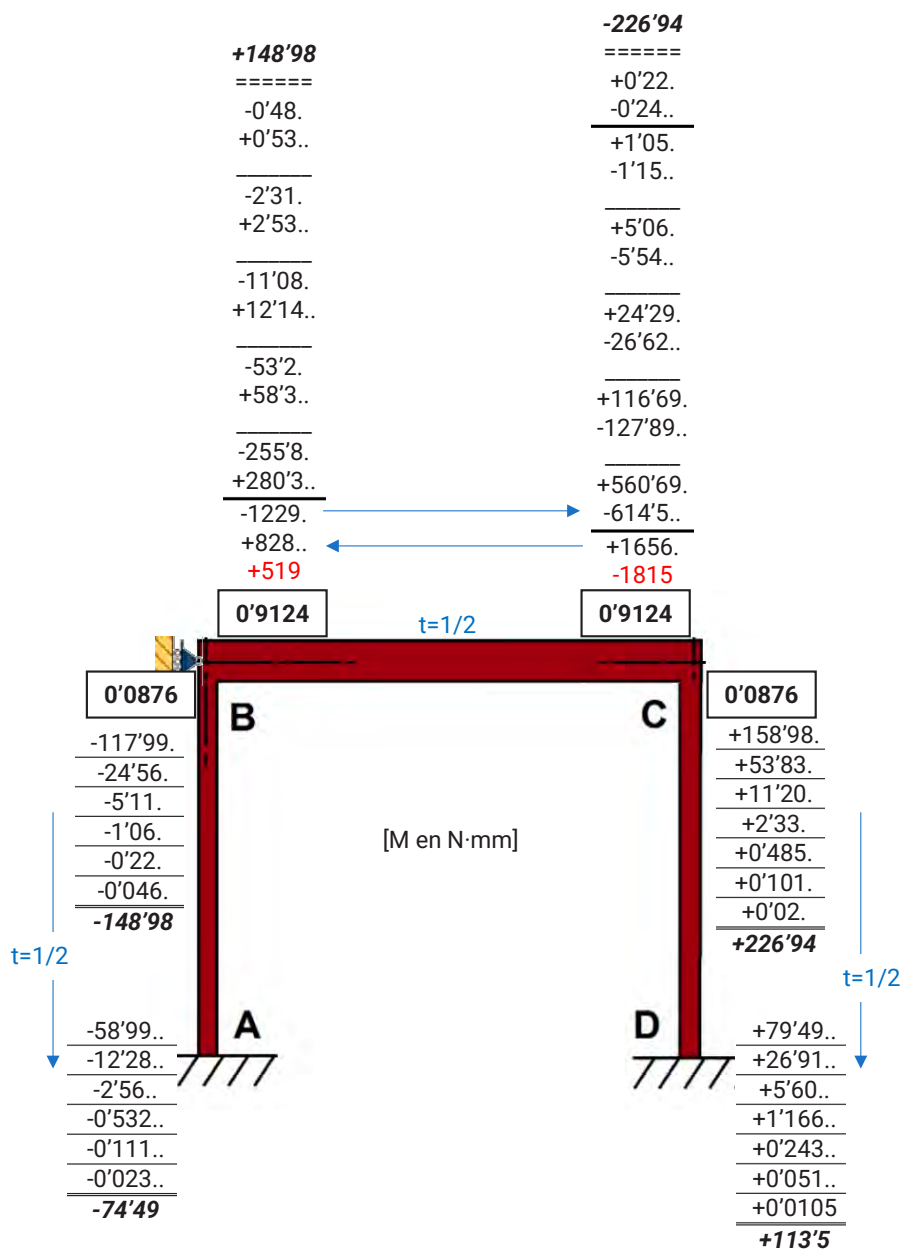


Figura 2-56. Secuencia completa de equilibrado de nodos

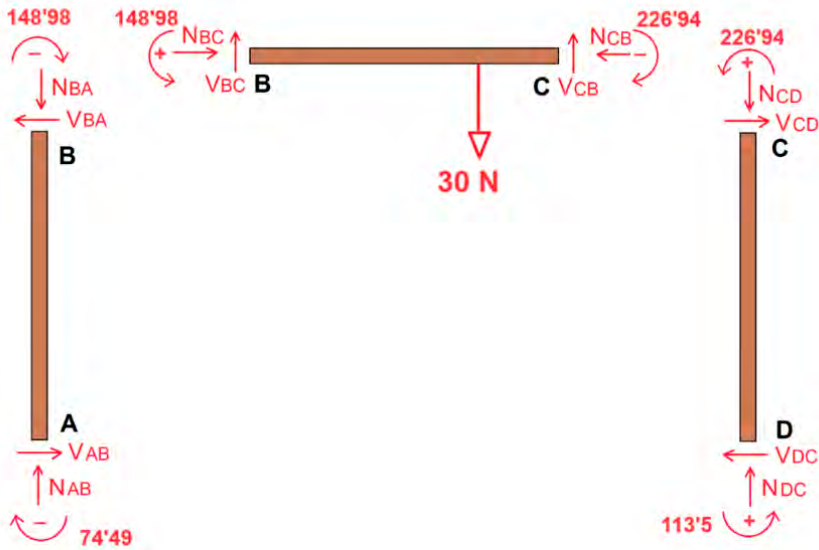


Figura 2-57. Diagrama de sólido libre das barras, para obtención dos cortantes

$$V_{BC} = \frac{148'98 - 226'94 + 30 \cdot 100}{450} = 6'493 \text{ N}$$
$$V_{CB} = 30 - 6'493 = 23'507 \text{ N}$$
$$M_{m\acute{a}x} = 6'493 \cdot 350 - 148'98 = 2123'57 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

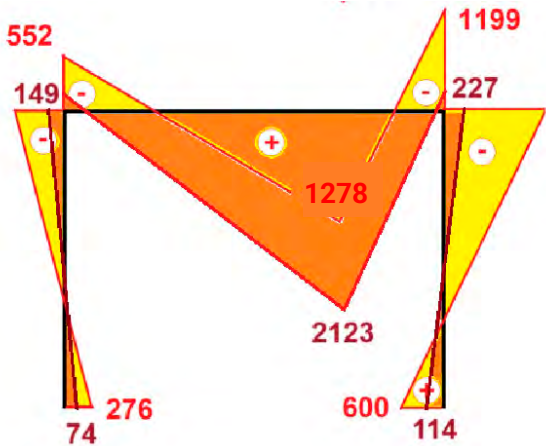


Figura 2-58. Comparación entre os diagramas de flexores do problema anterior (amarelo) e o actual (laranxa)

Momento máximo BC (centro): 2123 N.mm

O Diagrama redistribuído de momentos na barra BC queda neste caso:

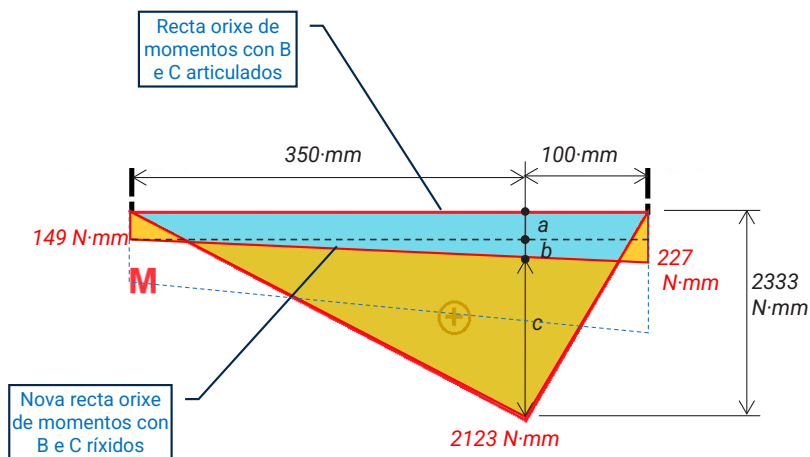


Figura 2-59. Comparación da redistribución do diagrama de flexores ó aumentar a inercia do lintel BC

Ó pasar de nodos ríxidos a articulados, prodúcese unha 'redistribución' do diagrama de momentos flexores, pero a altura total do diagrama non varía:

$$a = 149 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$b = \frac{227 - 149}{350 + 100} 350 = 61 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$c = 2123 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{total} = a + b + c = 149 + 61 + 2123 = 2333 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Este valor de 2333 N·mm coincide coa altura total do diagrama isostático, biarticulado en B e C.

Neste caso, empregar unha barra horizontal moito mais ríxida que nos exercicios anteriores, fai que esta viga absorba moito mais momento que os pilares, o que con leva a que o seu comportamento se asemelle a dun pórtico con viga horizontal biarticulada. Polo tanto, o deseño do pórtico deste exercicio no e tan óptimo con o que tiña nodos ríxidos cunha inercia similar en todas as barras.

2.2.7 Exercício R-7. Pórtico de 3 barras. Incremento de inercia nos pilares

Vexamos agora que sucede no exercicio anterior si agora os dous pilares verticais teñen de canto 7 mm, mentres a barra horizontal conserva o canto orixinal de 4 mm, mantendo tamén o resto de parámetros de cálculo e as cargas que antes. 'b' é o ancho da sección (común a tódalas barras).

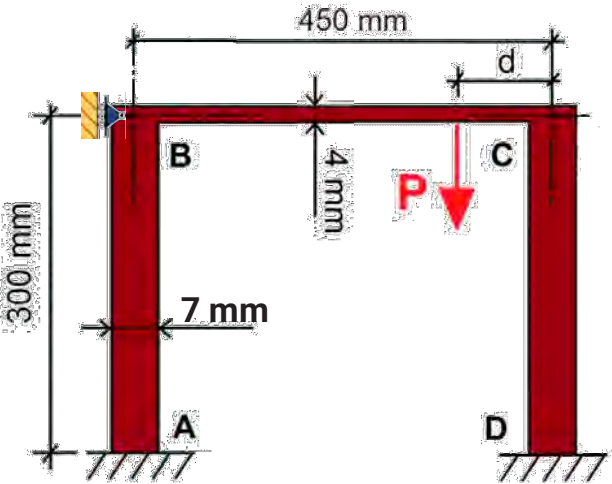


Figura 2-60. Esquema do pórtico

No exemplo anterior tomouse $b=15$ mm, pero como se verá a continuación, este parámetro non inflúe, sempre que tódalas barras teñan o mesmo b .

Calculamos en primeiro lugar os coeficientes de reparto:

Nodos B y C		
Inercia BA = Inercia CD	$I_{BA} = \frac{b \cdot 7^3}{12} = I_{CD}$	
Inercia BC = Inercia CB	$I_{BC} = \frac{b \cdot 4^3}{12} = I_{CB}$	
Barra BA = Barra CD	$K_{BA} = \frac{4E \cdot b \cdot 7^3}{300 \cdot 12} = K_{CD}$	$r_{BA} = \frac{\frac{7^3}{300}}{\frac{7^3}{300} + \frac{4^3}{450}} = 0,8894 = r_{CD}$
Barra BC = Barra CB	$K_{BC} = \frac{4E \cdot b \cdot 4^3}{450 \cdot 12} = K_{CB}$	$r_{BC} = \frac{\frac{4^3}{450}}{\frac{7^3}{300} + \frac{4^3}{450}} = 0,1106 = r_{CB}$

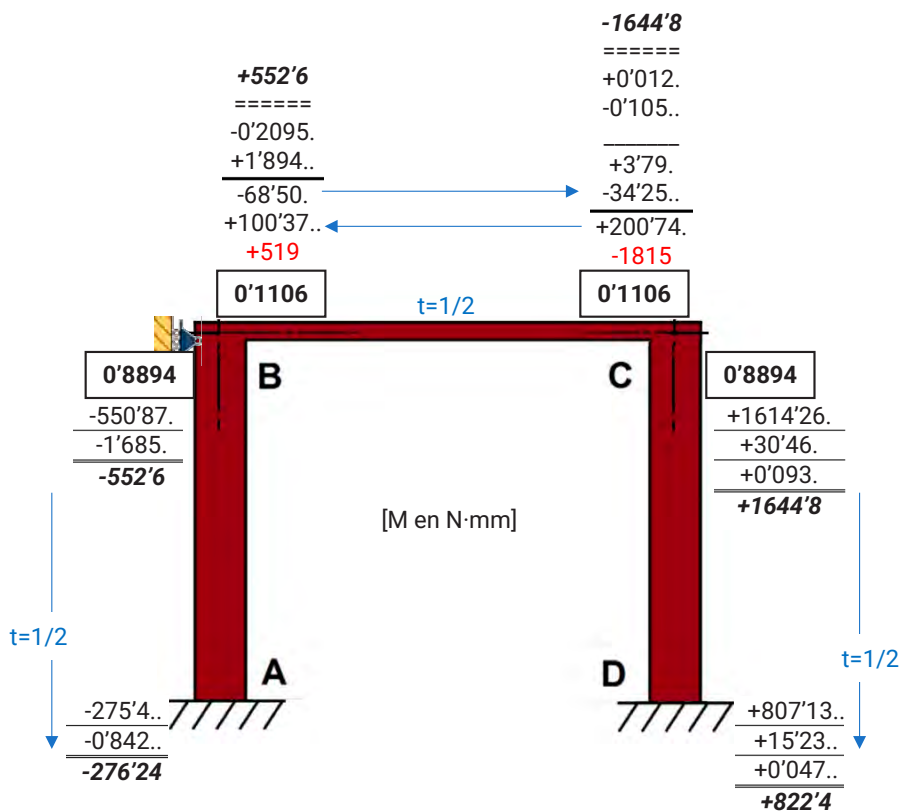


Figura 2-61. Sequencia de equilibrado de nodos

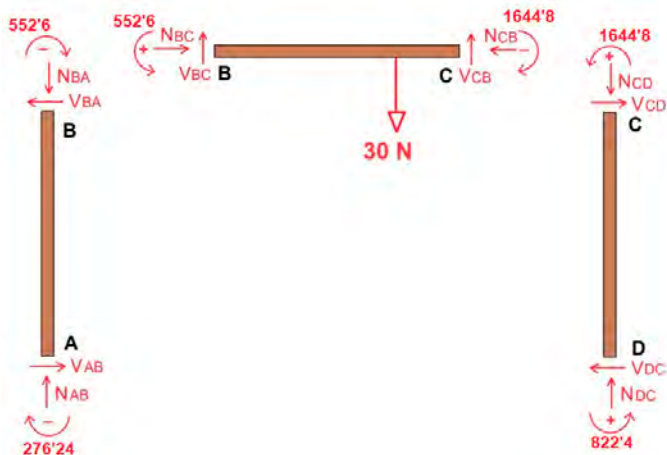


Figura 2-62. Diagrama de sólido livre das barras para obter os cortantes nos extremos

$$V_{BC} = \frac{552'6 - 1644'8 + 30 \cdot 100}{450} = 4'24 \text{ N}$$

$$V_{CB} = 30 - 4'24 = 25'76 \text{ N}$$

$$M_{\text{máx}} = 4'24 \cdot 350 - 552'6 = +931'4 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

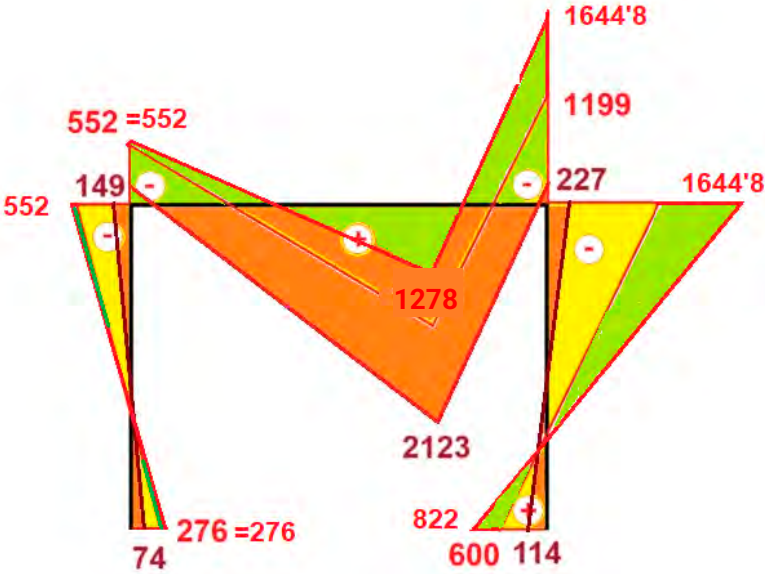


Figura 2-63. Comparación entre os diagramas de flexores dos problemas anteriores (amarelo e laranxa) e o actual (verde)

Momento máximo BC (nodo C): 1644'8 N.mm

O Diagrama redistribuido de momentos na barra BC queda neste caso:

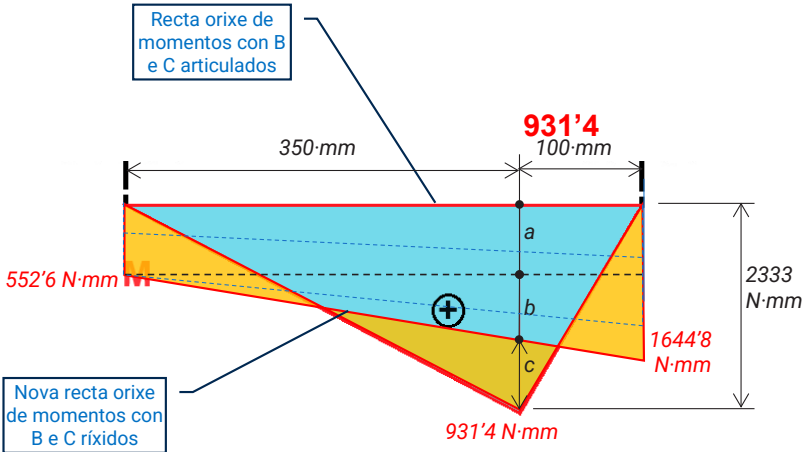


Figura 2-64. Redistribución producida do diagrama de flexores ó variar a inercia dos piares

Ó pasar de nodos ríxidos a articulados, prodúcese unha 'redistribución' do diagrama de momentos flexores, pero a altura total do diagrama non varía:

$$a = 552'6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$b = \frac{1644'8 - 552'6}{350 + 100} 350 = 849'5 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$c = 931'4 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{total} = a + b + c = 552'6 + 849'5 + 931'4 = 2333 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Este valor de 2333 N·mm coincide coa altura total do diagrama isostático, biarticulado en B e C.

Neste caso de perfil horizontal con pouca rixidez en relación ós piares, vemos como aumentan moito os momentos nos nodos, especialmente o que está máis preto da carga. Temos que ter en conta que este momento no nodo ten que ser soportado polas dúas barras que o compoñen, e se a barra horizontal ten pouca inercia, non vai ser posible, polo que este deseño non vai se adecuado. 155

En resumo, vemos que ó variar á rixidez relativa entre as barras a altura total do diagrama permanece constante, e o que varía é o reparto entre os positivos e os negativos (redistribución de momentos). O diagrama acada valores máximos de flexores e seccións diferentes en cada caso. A situación na que os flexores nas diferentes seccións da viga son o mais reducidos posible, dáse cando o diagrama ten parte positiva e negativa, resultando un reparto do diagrama total isostático o máis equilibrado posible entre ambas partes. Para elo, o ideal é que da rixidez relativa entre pilares e a viga non resulten uns coeficientes de reparto moi diferentes.

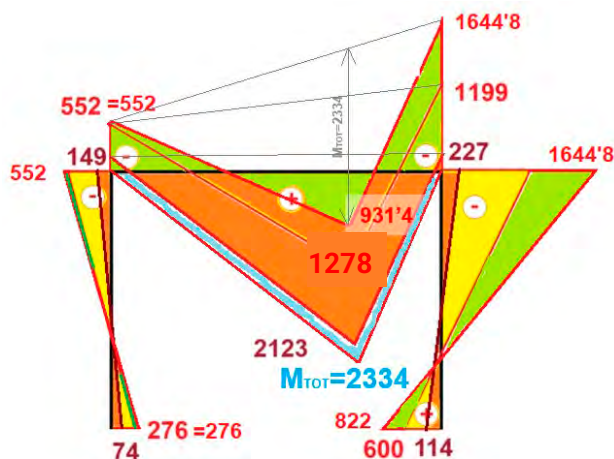


Figura 2-65. Variacións producidas nos diagramas de flexores ó variar as características do pórtico entre exercicios

2.2.8 Exercício R-8. Pórtico de 3 barras con bases articuladas

Vexamos agora que sucede no enunciado inicial si agora as bases dos dous piares verticais están articuladas á cimentación, mantendo o resto de parámetros de cálculo (todas as barras $E \cdot I$), igual que a carga $P=30 \text{ N}$. Calculamos de novo os momentos nos extremos das barras, e a partir deles os diagramas de flexores para todas as seccións das mesmas.

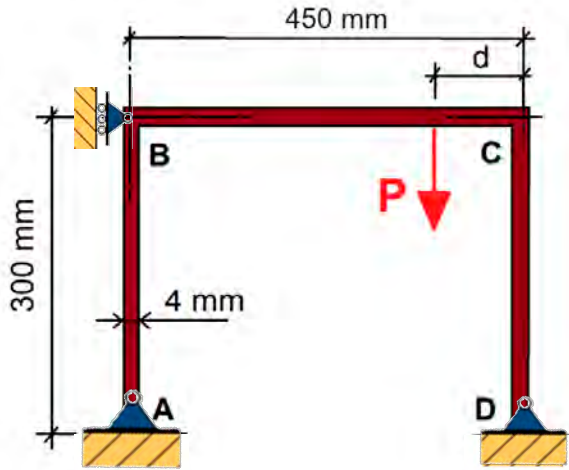


Figura 2-66. Esquema do pórtico biarticulado na cimentación

Solución:

Posto que partimos dos mesmos parámetros que o enunciado inicial, os momentos de encastamento perfecto da barra BC serán os mesmos, xa que esta non varía. Tampouco varía o coeficiente de transmisión $t_{BC} = t_{CB} = \frac{1}{2}$. Polo contrario os coeficientes de transmisión t_{BA} e t_{CD} serán nulos, posto que A e D son articulacións.

$$M_{BC}^0 = + \frac{Pab^2}{L^2} = + \frac{30 \cdot 350 \cdot 100^2}{450^2} = +519 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{CD}^0 = - \frac{Pab^2}{L^2} = - \frac{30 \cdot 100 \cdot 350^2}{450^2} = -1815 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Nodo B		
Barra BA	$K_{BA} = \frac{3EI}{300}$	$r_{BA} = \frac{\frac{3EI}{300}}{\frac{17EI}{900}} = \frac{3 \cdot 900}{17 \cdot 300} = 0,5294$
Barra BC	$K_{BC} = \frac{4EI}{450}$	$r_{BC} = \frac{\frac{4EI}{450}}{\frac{17EI}{900}} = \frac{4 \cdot 900}{17 \cdot 450} = 0,4706$
Sumas Nodo B	$K_C = \frac{17EI}{900}$	$r_{BA} + r_{BC} = 0,5294 + 0,4706 = 1,0$

Nodo C		
Barra CB	$K_{CB} = \frac{4EI}{450}$	$r_{CB} = \frac{\frac{4EI}{450}}{\frac{17EI}{900}} = \frac{4 \cdot 900}{17 \cdot 450} = 0,4706$
Barra CD	$K_{CD} = \frac{3EI}{300}$	$r_{BC} = \frac{\frac{3EI}{300}}{\frac{17EI}{900}} = \frac{3 \cdot 900}{17 \cdot 300} = 0,5294$
Sumas Nodo B	$K_C = \frac{17EI}{900}$	$r_{BA} + r_{BC} = 0,4706 + 0,5294 = 1,0$

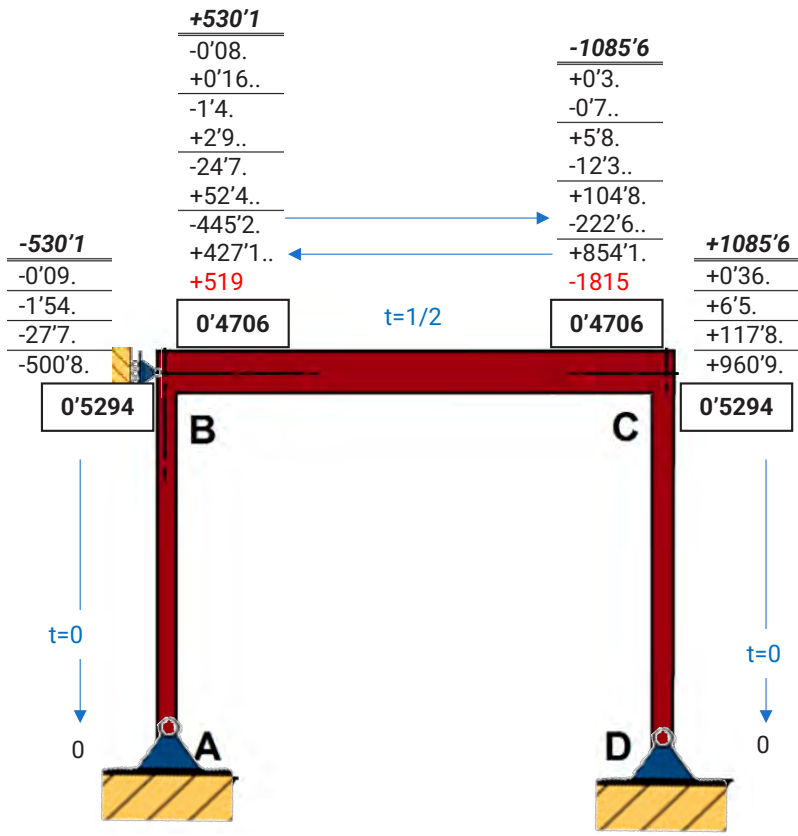


Figura 2-67. Secuencia de equilibrado de nodos

$$V_{BC} = \frac{530'1 - 1085'6 + 30 \cdot 100}{450} = 5'43 \text{ N}; \quad V_{CB} = 30 - 5'43 = 24'57 \text{ N}$$
$$M_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = 5'43 \cdot 350 - 530'1 = 1370'4 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

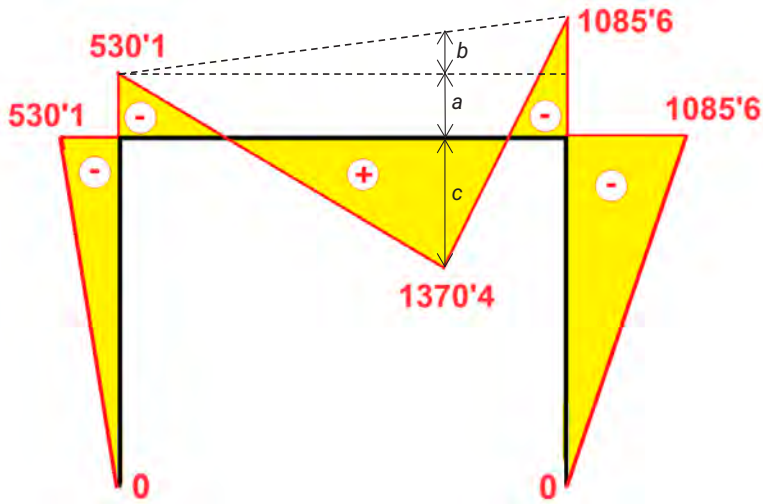


Figura 2-68. Diagrama de momentos flexores das barras do pórtico

Onde:

$$a = 530'1 \, N \cdot mm$$

$$b = \frac{1085'6 - 530'1}{350 + 100} 350 = 432'1 \, N \cdot mm$$

$$c = 1370'4 \, N \cdot mm$$

$$M_{total} = a + b + c = 530'1 + 432'1 + 1370'4 = 2333 \, N \cdot mm$$

Vemos neste caso como o momento máximo que soporta a viga horizontal é maior, sendo de 1370'4 N·m, fronte ó valor de 1278 N·m do pórtico com barras da mesma inercia e apoios encastados. Pola contra, o momento no nodo C baixa de 1119 N·m os actuais 1086 N·m. Pero este pórtico ten a vantaxe de que non transmite momentos ás bases de cimentación.

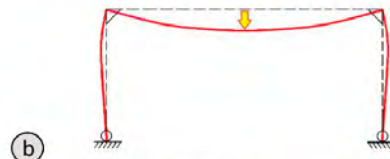


Figura 2-69. a) Pórtico cos nodos ríxidos e bases articuladas, sen carga aplicada. b) Deformación do pórtico cando se lle aplica unha carga vertical na viga horizontal

2.2.9 Exercício R-9. Pórtico de 3 barras con ménsula

Para as cargas indicadas na estrutura de nodos ríxidos da Figura 2-70, pídesse:

- Calcular o valor dos momentos nos extremos de cada barra
- Existe algunha reacción no apoio C? Se non houberse apoio, que pasaría?

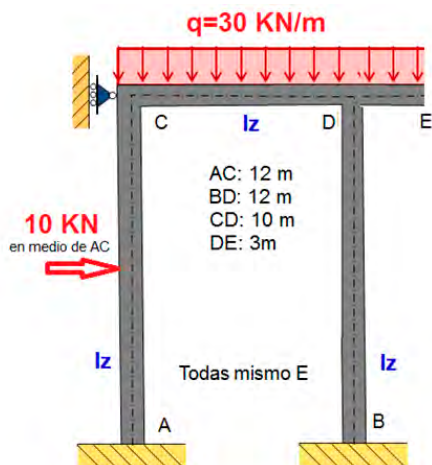


Figura 2-70. Esquema do pórtico a calcular

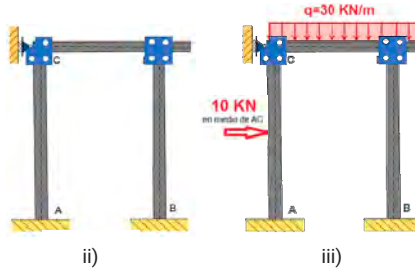


Figura 2-71. Exemplo de pórtico real con configuración similar

Solución:

As etapas do cálculo polo método de Cross, son as seguintes:

- i) Descargamos a estrutura
- ii) Bloqueamos o xiro en tódalas unións que sexan ríxidas (ás articulacións non lles bloqueamos o xiro).
- iii) Cargamos a estrutura



- iv) Calculamos os momentos flexores de Encastamento Perfecto (ver táboa).

	$M_{AB} = +\frac{ql^2}{12}$	$M_{BA} = -\frac{ql^2}{12}$
	$M_{AB} = +\frac{Pl}{8}$	$M_{BA} = -\frac{Pl}{8}$

Para calcular os momentos de encastamento perfecto:

Barra CD:

$$M_{CD}^0 = +\frac{qL^2}{12} = +\frac{30 \cdot 10^2}{12} = +250 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

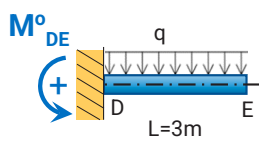
$$M_{DC}^0 = -\frac{qL^2}{12} = -\frac{30 \cdot 10^2}{12} = -250 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Barra CA:

$$M_{CA}^0 = -\frac{PL}{8} = -\frac{10 \cdot 12}{8} = -15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{AC}^0 = +\frac{PL}{8} = +\frac{10 \cdot 12}{8} = +15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

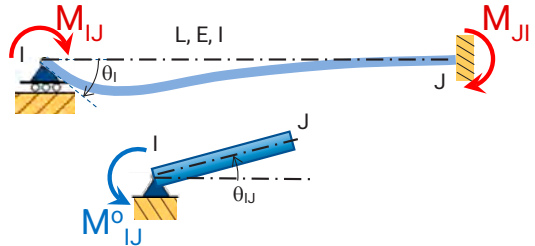
Barra en ménsula DE:



$$M_{DE}^0 = +\frac{qLL}{2} = +\frac{30 \cdot 3^2}{2} = +135 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para a o 'Equilibrado de nodos', necesitamos calcular os coeficientes de reparto de cada barra, e para elo necesitamos as rixideces ó xiro en cada unha. Sendo IJ unha barra xenérica, lembramos que:

161

$$K_{IJ} = \frac{4EI}{L}$$


$$K''_{IJ} = \frac{M_{IJ}}{\infty} = 0$$

Nodo C		
Barra CA	$K_{CA} = \frac{4EI}{12}$	$r_{CA} = \frac{4/12}{0,7333} = 0,4545$
Barra CD	$K_{CD} = \frac{4EI}{10}$	$r_{CD} = \frac{4/10}{0,7333} = 0,5455$
Sumas Nodo C	$K_C = \frac{4}{12} + \frac{4}{10} = 0,7333$	$r_{CA} + r_{CD} = 0,4545 + 0,5455 = 1$

Nodo D		
Barra DC	$K_{DC} = \frac{4EI}{10}$	$r_{DC} = \frac{4/10}{0,7333} = 0,5455$
Barra DB	$K_{DB} = \frac{4EI}{12}$	$r_{DB} = \frac{4/12}{0,7333} = 0,4545$
Barra DE	$K_{DE} = 0$	$r_{DE} = 0$
Sumas Nodo D	$K_D = \frac{4}{10} + \frac{4}{12} = 0,7333$	$r_{DC} + r_{DB} + 0 = 0,5455 + 0,4545 = 1$

v) Equilibrado dos nodos.

Sobre un esquema do pórtico anotamos os valores dos coeficientes de reparto en cada nodo. Sobre os coeficientes de reparto anotamos os momentos de encastamento perfecto sobre as seccións extremas das barras.

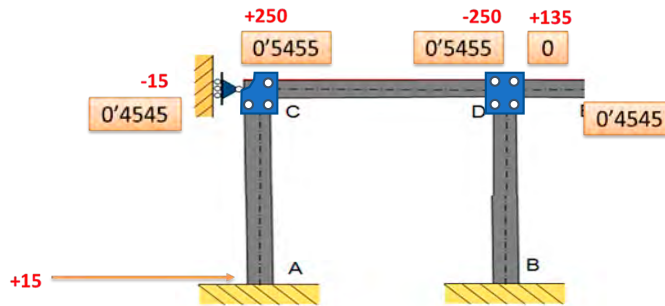


Figura 2-72. Coeficientes de reparto nos nodos e momentos de encastamento perfecto

Para o equilibrado de nodos, temos que ter en conta o seguinte:

- I. Liberamos o xiro do nodo mais desequilibrado. Con elo equilibramos ese nodo a partir dos coeficientes de reparto, de modo que $\sum M_{\text{nodo}} = 0$

Neste caso o nodo mais desequilibrado é o C.

Tendo en conta que os momentos de encastamento perfecto refírense ás barras, o $\sum M$ que desequilibran o nodo C será: $+250 - 15 = +235 \text{ kN}\cdot\text{m}$ (positivo, por tanto sentido horario sobre o nodo)

Para que o nodo C deixe de xirar ó alzar o equilibrio: $\sum M_C = 0$. Polo tanto teñen que actuar: $M_{CD} = -r_{CD} \cdot 235 = -0'5455 \cdot 235 = -128'19 \text{ kN}\cdot\text{m}$, e $M_{CA} = -r_{CA} \cdot 235 = -0'4545 \cdot 235 = -106'81 \text{ kN}\cdot\text{m}$

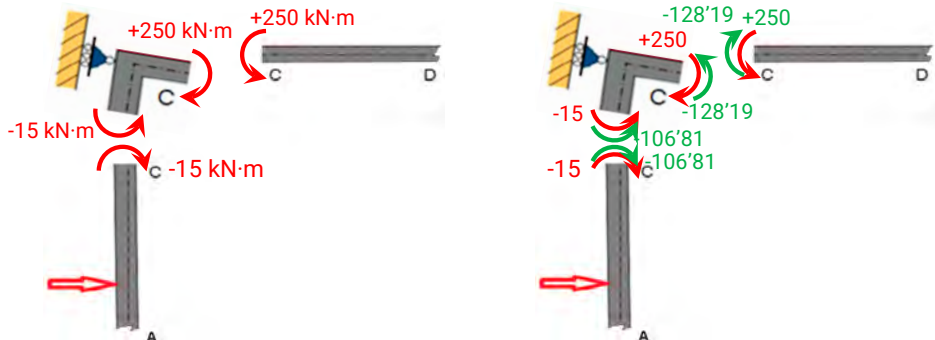


Figura 2-73. Ó liberar o nodo C xira no sentido do flexor desequilibrado (esquerda). Ó xiro deterase cando os momentos xerados ó deformarse ás barras (momentos repartidos) equilibren ó anterior (dereita)

- II. Para que os coeficientes de reparto anteriores (0'5455 e 0'4545) sexan válidos, só podemos desbloquear o nodo que estamos equilibrando, mentres o resto permanece igual que antes.

Para que D non xire mentres o fai C, ten que aparecer en D un momento que se obtén mediante o coeficiente de transmisión $t_{CD} = \frac{1}{2}$

$$M_{DC} = t_{CD} \cdot (-128'19) = 0'5 \cdot (-128'19) = -64'10 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Do mesmo modo, para que A non xire canda C, ten que aparecer en A un momento que se obtén mediante o coeficiente de transmisión $t_{CA} = \frac{1}{2}$

$$M_{AC} = t_{CA} \cdot (-106'81) = 0'5 \cdot (-106'81) = -53'40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

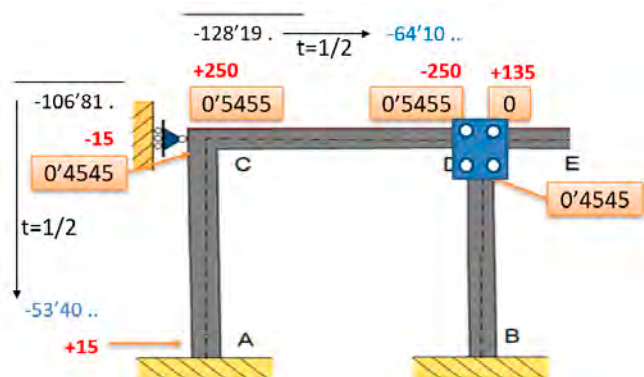


Figura 2-74. Equilibrado do nodo e momentos transmitidos por C

- III. Despois de equilibrar un nodo, antes de desbloquear o seguinte para equilibralo, deixamos bloqueado o nodo anterior. Neste caso bloqueamos de novo o nodo C.
- IV. Pasamos a equilibrar o nodo co maior flexor desequilibrado. Neste exemplo só temos o nodo D. Para equilibralo desbloqueámolo ó xiro.

$$\Sigma \text{Momentos que desequilibran o nodo D: } -250 + 135 - 64'10 = -179'1 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\text{Para que } \Sigma M_D = 0 \text{ teñen que actuar: } M_{DC} = -r_{DC} \cdot (-179'1) = -0'5455 \cdot (-179'1) = +97'70 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DB} = -0'4545 \cdot (-179'1) = +81'40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{DE} = 0 \cdot (-179'1) = 0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

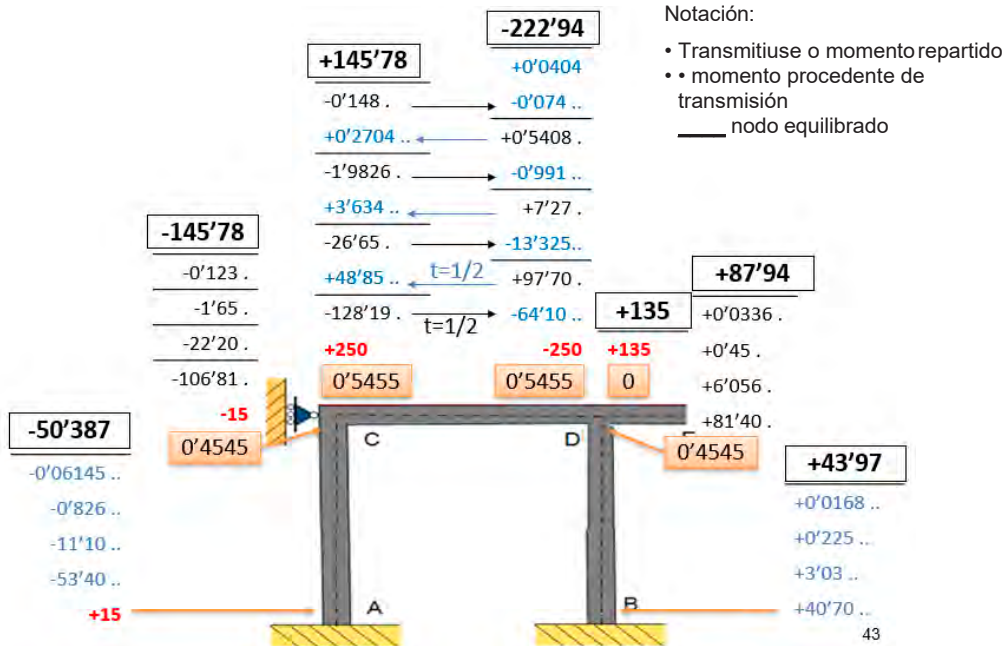


Figura 2-75. Secuencia completa de equilibrado de nodos

Para o cálculo dos cortantes establecemos o equilibrio das barras:

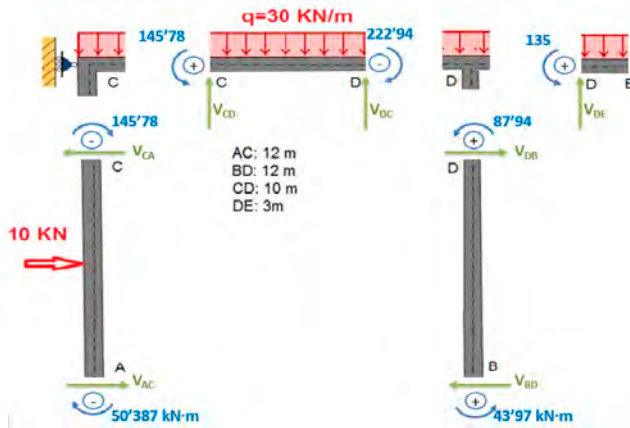


Figura 2-76. Diagrama de sólido libre das barras para o cálculo de cortantes

$$V_{CA} = \frac{145,78 + 50,387 + 10 \cdot 6}{12} = 21,35 \text{ kN}$$

$$V_{DB} = \frac{87,94 + 43,97}{12} = 10,993 \text{ kN}$$

A partir de o equilibrio en cada barra, establecemos o equilibrio dos nodos, tendo en conta os cortantes e os axiais. Deste xeito obtemos tamén a reacción horizontal no apoio C:

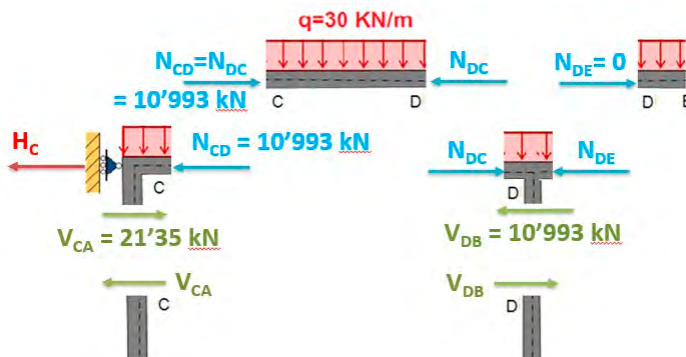


Figura 2-77. Equilíbrio de nós e barras para cálculo dos esforços axiais

Por equilíbrio do nó C:

$$H_c = 21'35 - 10'993 = 10'358 \text{ kN} (\leftarrow)$$

Vemos que o resultado obtido é positivo, e pelo tanto coerente co sentido do vector suposto na Figura 2-77 ($\leftarrow$). É dicir, para equilibrar horizontalmente o nó C, precisamos esa reaccíon H_c . De non existir H_c o nó desprazárase horizontalmente cara a dereita, e deixaríase de ser unha estrutura intraslacional.

2.2.10 Exercício R-10. Viga continua

Para a viga continua da Figura 2-78 inferior:

- calcular o valor dos momentos flexores nos extremos das barras si $q=10 \text{ kN/m}$ e $L=10\text{m}$. Calcular que perfil IPE de aço laminado faria falta, tanto se a viga é continua coma se fosse por tramos independentes entre apoios (biapoiada).
- Como variarían os momentos se para o caso de viga continua hai un asentamento de 140 mm no apoio C. ¿Valería o mesmo perfil como viga continua que no apartado a)?

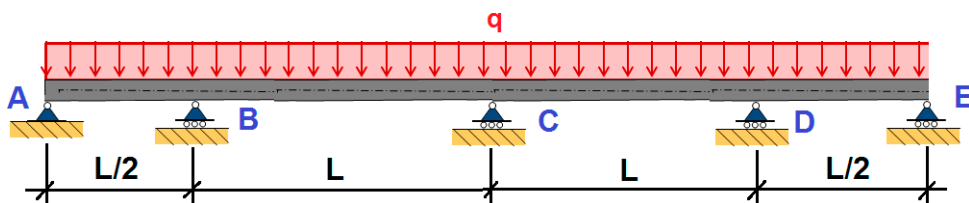


Figura 2-78. Viga continua do enunciado



Figura 2-79. Exemplo de estrutura resolta cunha viga continua
(ver detalle do tipo de apoio no recadro inferior esquerdo)

1º) Coa viga descargada, bloqueamos o xiro das unións ríxidas, e unha vez cargada, calculamos os momentos de encastamento perfecto:

Teremos en conta a simetría da viga respecto do nodo C (xa que non hai cargas horizontais que fagan diferente o comportamento dos nodos A i E):

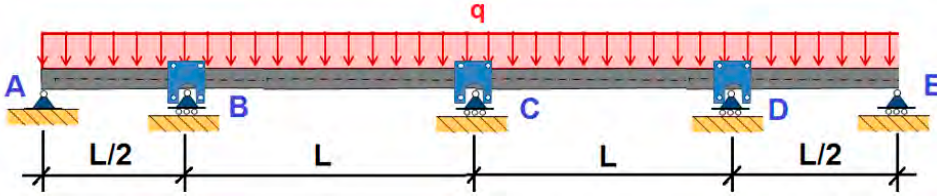
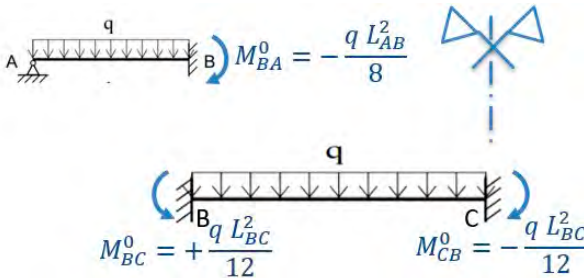


Figura 2-80. Xiros inicialmente bloqueados nas unións ríxidas entre barras



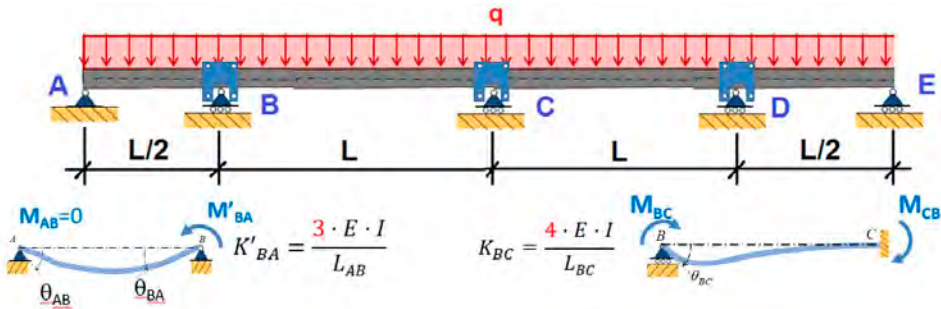
Para $q=10 \text{ kN/m}$ e $L=10 \text{ m}$

$$M_{BA}^0 = -31'3 \text{ kN} \cdot \text{m} = -M_{DE}^0 = +31'3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC}^0 = M_{CD}^0 = +83'3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CB}^0 = M_{DC}^0 = -83'3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

2º) Cálculo dos coeficientes de reparto:



Nodo B		
Barra BA	$K_{BA} = \frac{3EI}{L/2}$	$r_{BA} = \frac{6EI/L}{6EI/L + 4EI/L} = \frac{6}{10}$
Barra BC	$K_{BC} = \frac{4EI}{L}$	$r_{BC} = \frac{4EI/L}{6EI/L + 4EI/L} = \frac{4}{10}$
Sumas Nodo B	$K_B = \frac{10EI}{L}$	$r_{BA} + r_{BC} = 0,6000 + 0,4000 = 1$

Nodo C		
Barra CB	$K_{CB} = \frac{4EI}{L}$	$r_{CB} = \frac{4}{4+4} = \frac{1}{2}$
Barra CD	$K_{CD} = \frac{4EI}{L}$	$r_{CD} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

3º) Equilibrado de nodos. Secuencia B-D-C

168 No último paso (nodo C), indícanse os cálculos realizados:

Flector desequilibrado en C: $-83'3 + 83'3 - 10'4 + 10'4 = 0 \text{ kN}\cdot\text{m}$
 $M_{DE} = -1/2 \cdot 0 = 0 \text{ kN}\cdot\text{m}$
 $M_{DC} = -1/2 \cdot 0 = 0 \text{ kN}\cdot\text{m}$
Flectores transmitidos: $M_{CB} = M_{CD} = 1/2 \cdot 0 = 0 \text{ kN}\cdot\text{m}$

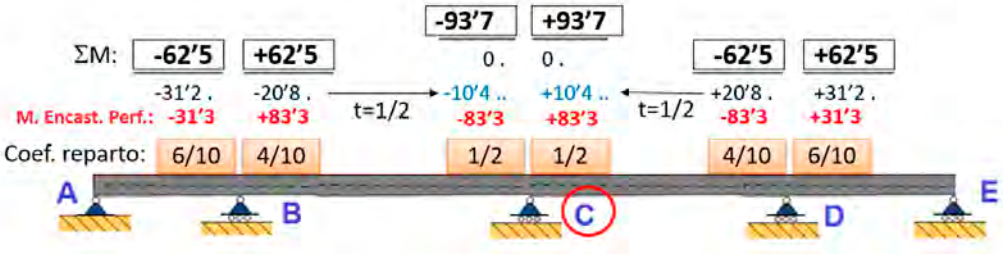


Figura 2-81. Secuencia completa de equilibrado de nodos

4º) Os diagramas de flexores pódense obter illando cada barra, unha vez coñecidos os momentos nos extremos das mesmas:

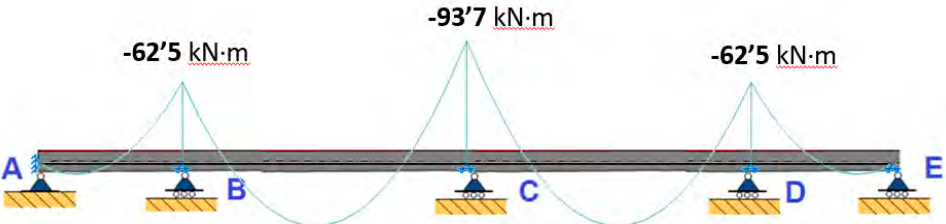
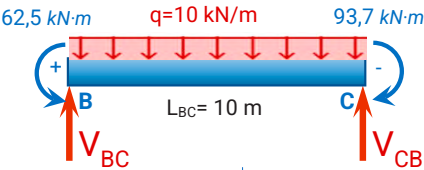


Figura 2-82. Diagrama de momentos flectores

No diagrama de flexores os signos xa están indicados co criterio de resistencia de materiais (+ indica tracción na cara inferior). Os criterios de signos de Cross establecéronse para indicar os sentidos de xiro, para o equilibrado. Polo tanto non se corresponden entre si ambos criterios de signos.

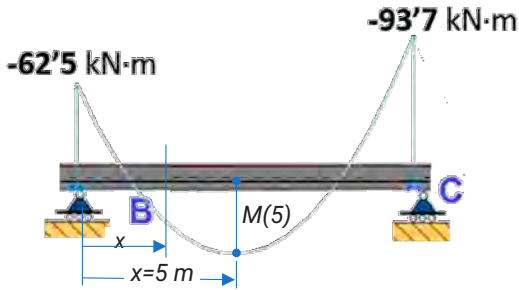
Para obter os cortantes en BC:



$$\sum M_B = 0; V_{CB} \cdot 10 - 93,7 + 62,5 - 10 \cdot 10 \cdot 5 = 0$$

$$V_{CB} = 53,12 \text{ kN}$$

$$V_{BC} = q \cdot L_{BC} - V_{CB} = 10 \cdot 10 - 53,12 = 46,88 \text{ kN}$$



$$M(x) = 46,88x - 62,5 - 10 \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M(5) = 46,88 \cdot 5 - 62,5 - 10 \cdot \frac{5^2}{2} = +46,9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) = +46,88 - 10x = 0 \Rightarrow x = 4,688 \text{ m}$$

$$M_{\max} = 46,88 \cdot 4,688 - 62,5 - 10 \cdot \frac{4,688^2}{2} = +47,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

169

Polo tanto, o flexor máximo do tramo BC é -93'7 kN·m (tracción superior). Imos calcular cal sería o perfil IPE mínimo que cumpriría por tensión de límite elástico cun aceiro S235 en un coeficiente de seguridade do material $\gamma_s=1'1$:

$$\sigma = \frac{M}{w} \Rightarrow w = \frac{M}{\sigma} = \frac{93'7 \cdot 10^6 [\text{N} \cdot \text{mm}]}{235 / 1'1 [\text{N/mm}^2]} = 438'6 \cdot 10^3 [\text{mm}^3]$$

Necesitamos un IPE300 que ten $w=557 \text{ cm}^3$

Si o tramo BC fose biapoiado en vez de continuo, o momento máximo (centro de van, onde $x=5 \text{ m}$) valería:

$$M(5) = q \cdot \frac{L^2}{8} = 10 \cdot \frac{10^2}{8} = +125 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

O incremento do valor absoluto do momento máximo respecto ó caso anterior é: $\frac{125}{93'7} = 1'33 \Rightarrow \uparrow 33\%$

$w = 438'6 \cdot 1'33 = 585'1 \text{ cm}^3 \Rightarrow$ necesitamos IPE330

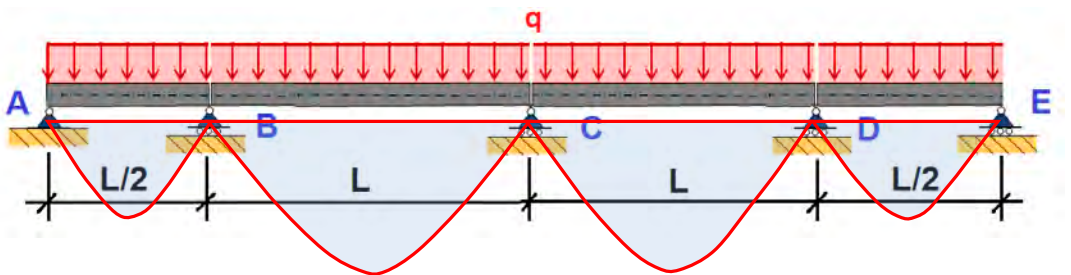


Figura 2-83. Diagrama de momentos flexores con vigas independentes en cada tramo entre apoios



Figura 2-84. Exemplo de ponte de varios vanos resolta con vigas independentes entre apoios (ver detalle do apoio no recadro)

- b) Para poder resolver este apartado temos definimos o concepto de 'rixidez á translación' (K_{AB}^δ) dunha barra AB que sofre un desprazamento relativo δ entre as súas seccións extremas, sen xiro nas mesmas, como:

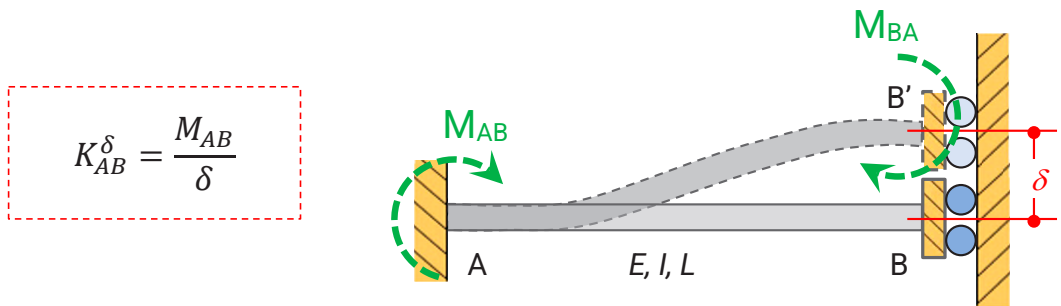


Figura 2-85. Definición de rixidez á translación

M_{AB} é o momento que hai que aplicar na sección A para que non xire ó producirse o desprazamento δ .

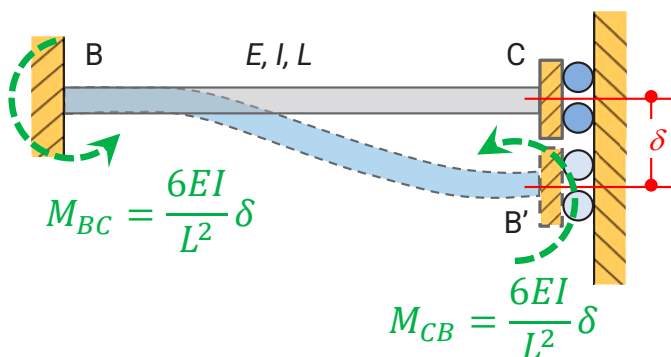
M_{BA} é momento aplicado na sección B para o mesmo. Pódese demostrar que $M_{AB} = M_{BA}$.

Por tanto: $M_{AB} = K_{AB}^\delta \cdot \delta$

Tamén se pode demostrar que, para pezas de $E \cdot I$ constante:

$$K_{AB}^\delta = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

Aplicando o anterior ó exercicio:



171

Figura 2-86. Caso de barras de EI constante

$$K_{BC}^{\delta} = \frac{M_{BC}}{\delta} = \frac{6EI}{L^2} \Rightarrow M_{BC} = \frac{6EI}{L^2} \delta = M_{CB} \quad (EI = \text{cte})$$

Tomando $\delta = 140 \text{ mm}$; $E_{\text{(aço)}} = 2'1 \cdot 10^5$; $L = 10 \text{ m}$

IPE 300 $\rightarrow I = 836 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$ (táboas de perfís normalizados)

$$M_{BC} = \frac{6 \cdot 2'1 \cdot 10^5 \cdot 836 \cdot 10^5}{(10 \cdot 10^3)^2} 140 = +147'4 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$M_{CB} = +147'4 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$, con criterio de signos de Cross.

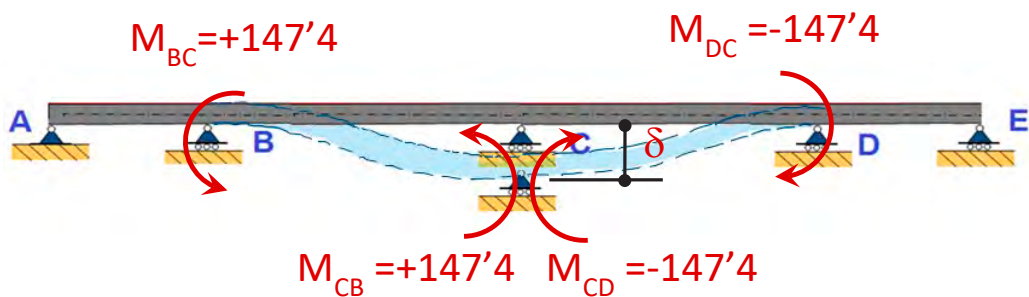


Figura 2-87. Flexores xerados polo asento (sen xiro) nas seccións extremas das barras

Estes momentos que aparecen nos nodos ó producirse o asento sen xiro nas seccións, desequilibran os nodos, polo que teremos que volver a equilíbralos partindo destes valores.

Seguiremos unha secuencia de equilíbrado B-D-C no seguinte esquema:

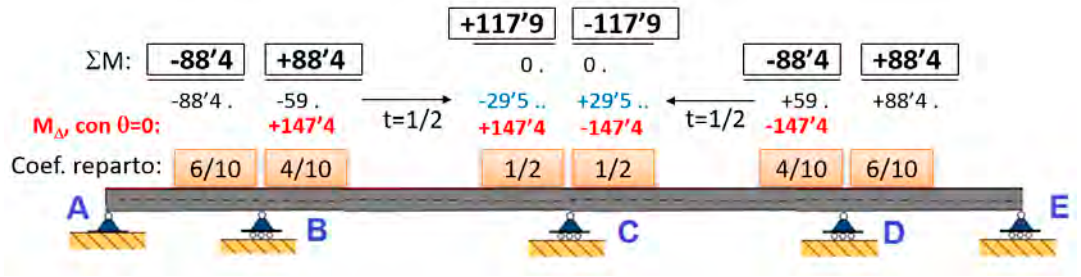


Figura 2-88. Equilibrado dos momentos xerados no asento

O diagrama de flexores debido únicamente ó asento de 140 mm en C é o da Figura 2-89. O diagrama está debuxado no lado da viga (superior / inferior) no que se sitúan as traccións:

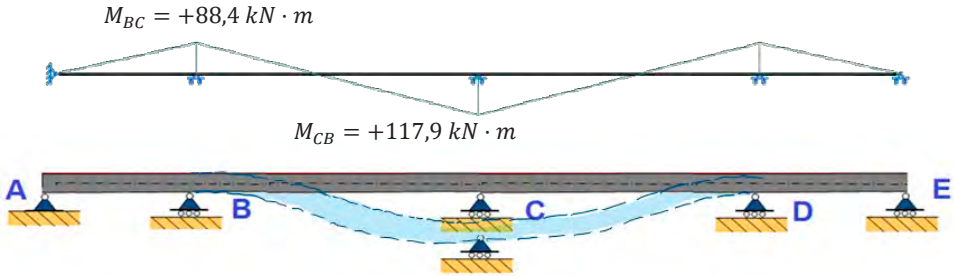


Figura 2-89. Diagrama de flexores debido só ó asento diferencial de C

Aplicando o principio de superposición en sumando os efectos da carga e do asento diferencial, na sección C da barra CB, $M_{CB} = -93'7 + 117'9 = +24'2 \text{ kN} \cdot \text{m}$:

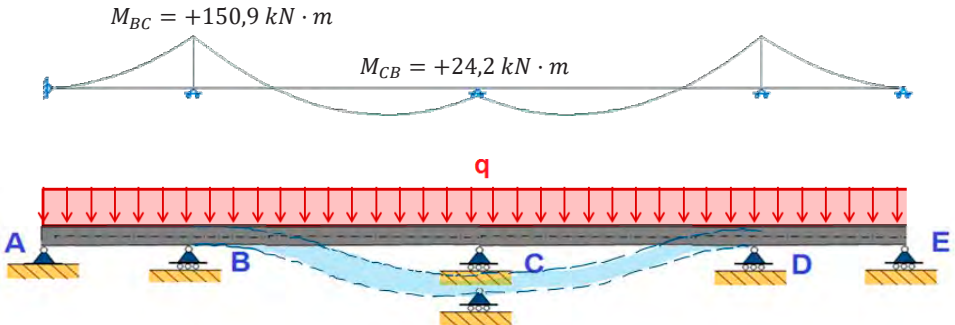


Figura 2-90. Diagrama de flexores total (carga+asento diferencial en C)

$$M_{CB, \text{total}} = M_{CB, q} + M_{CB, \text{asento}} = -93'7 + 117'9 = +24'2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Por ser unha viga continua, $M_{CB}=M_{CD}$, prescindindo do signo de Cross (co criterio de Resistencia de materiais ambos son positivos, e a tracción estará agora na cara inferior da viga). É importante decatarse que a zona traccionada da viga sobre o apoio, pasou de situarse na cara superior (cando só actúa a carga q) á inferior (cando se engade o asento de 140 mm no apoio). Isto, nalgúns materiais, como o formigón armado, que non resisten as traccións sen ser reforzadas con aceiro, pode ser crítico si non se preveu no proxecto.

Na sección B da barra BC: $M_{BC,total} = M_{BC,q} + M_{B,asento} = +62'5 + 88'4 = +150'9 \text{ kN} \cdot \text{m}$

O incremento de flexor máximo na viga debido ó asento de 140 mm en C é dun 61%:

$$[(150'9/93'7) - 1] \cdot 100 = +61\%$$

O momento máximo da viga completa A-E dáse por simetría nas seccións B e D.

2.2.11 Exercício R-11. Pórtico de dous vans e dúas alturas

Na estrutura intranslacional da Figura 2-91, calcular polo método de Cross os momentos flexores nos extremos das barras, para as cargas indicadas.

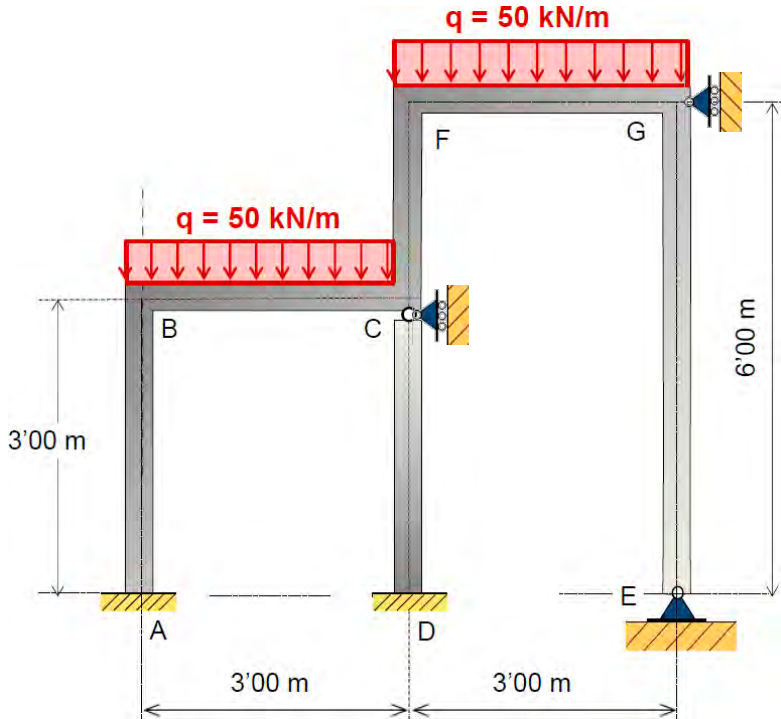


Figura 2-91. Pórtico de dous vans e dúas alturas

Todas as barras son de formigón armado de 0'30x0'30 m x m de sección transversal, e todas teñen o mesmo módulo elástico E. Desbótase o peso propio da estrutura.

Solución:

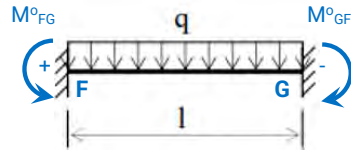
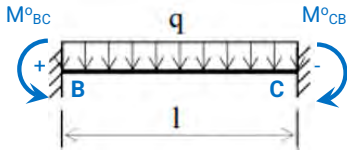
1) Calculamos as constantes elásticas (rixidez ó xiro, coeficientes de transmisión e de reparto):

Nodo B		
Barra BA	$K_{BA} = \frac{4EI}{3}$	$r_{BA} = \frac{4EI/3}{4EI/3 + 4EI/3} = \frac{1}{2}$
Barra BC	$K_{BC} = \frac{4EI}{3}$	$r_{BC} = \frac{4EI/3}{8EI/3} = \frac{1}{2}$
Sumas Nodo B	$K_B = \frac{8EI}{3}$	$r_{BA} + r_{BC} = 0,5 + 0,5 = 1$
Nodo C		
Barra CB	$K_{CB} = \frac{4EI}{3}$	$r_{CB} = \frac{4/3}{4/3 + 4/3 + 0} = \frac{1}{2}$
Barra CF	$K_{CF} = \frac{4EI}{3}$	$r_{CF} = \frac{4/3}{8/3} = \frac{1}{2}$
Barra CD	$K_{CD} = 0$ (articulación)	$r_{CD} = \frac{0}{8/3} = 0$
Sumas Nodo B	$K_C = \frac{8EI}{3}$	$r_{CB} + r_{CF} + r_{CD} = 0,5 + 0,5 + 0 = 1$

Nodo F		
Barra FC	$K_{FC} = \frac{4EI}{3}$	$r_{FC} = \frac{4/3}{4/3 + 4/3 + 0} = \frac{1}{2}$
Barra FG	$K_{FG} = \frac{4EI}{3}$	$r_{FG} = \frac{4/3}{8/3} = \frac{1}{2}$
Sumas Nodo B	$K_F = \frac{8EI}{3}$	$r_{FC} + r_{FG} = 0,5 + 0,5 = 1$

Nodo G		
Barra GF	$K_{GF} = \frac{4EI}{3}$	$r_{GF} = \frac{4/3}{11/6} = \frac{8}{11}$
Barra GE	$K_{GE} = \frac{3EI}{6}$	$r_{GE} = \frac{3/6}{11/6} = \frac{3}{11}$
Sumas Nodo G	$K_G = \frac{11EI}{6}$	$r_{GF} + r_{GE} = 8/11 + 3/11 = 1$

2) Momentos de encastamento perfecto:



$$M^o_{BC} = +\frac{qL^2}{12} = +\frac{50 \cdot 3^2}{12} = +37,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M^o_{CB} = -\frac{qL^2}{12} = -37,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M^o_{FG} = +37,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M^o_{GF} = -37,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

3) Equilibrado de nodos. Comezamos liberando o xiro no nodo B da estrutura, deixando que xire ata que se equilibre o nodo.

$$\sum M_{desequ.} = +37,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC} = -\frac{1}{2} 37,5 = -18,75 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA} = -\frac{1}{2} 37,5 = -18,75 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Os coeficientes de transmisión entre todos os nodos, por seren unións ríxidas e barras de E-I constante, valen $\frac{1}{2}$, excepto no caso da barra GE que é nulo por tratarse dun extremo E articulado no que non se pode transmitir momento. Na barra CD por ser o seu extremo C articulado, non existe momento que transmitir.

Continuamos coa secuencia de equilibrado de nodos, que se pode ver nos valores numéricos indicados sobre o propio esquema estrutural do pórtico na Figura 2-92 seguinte.

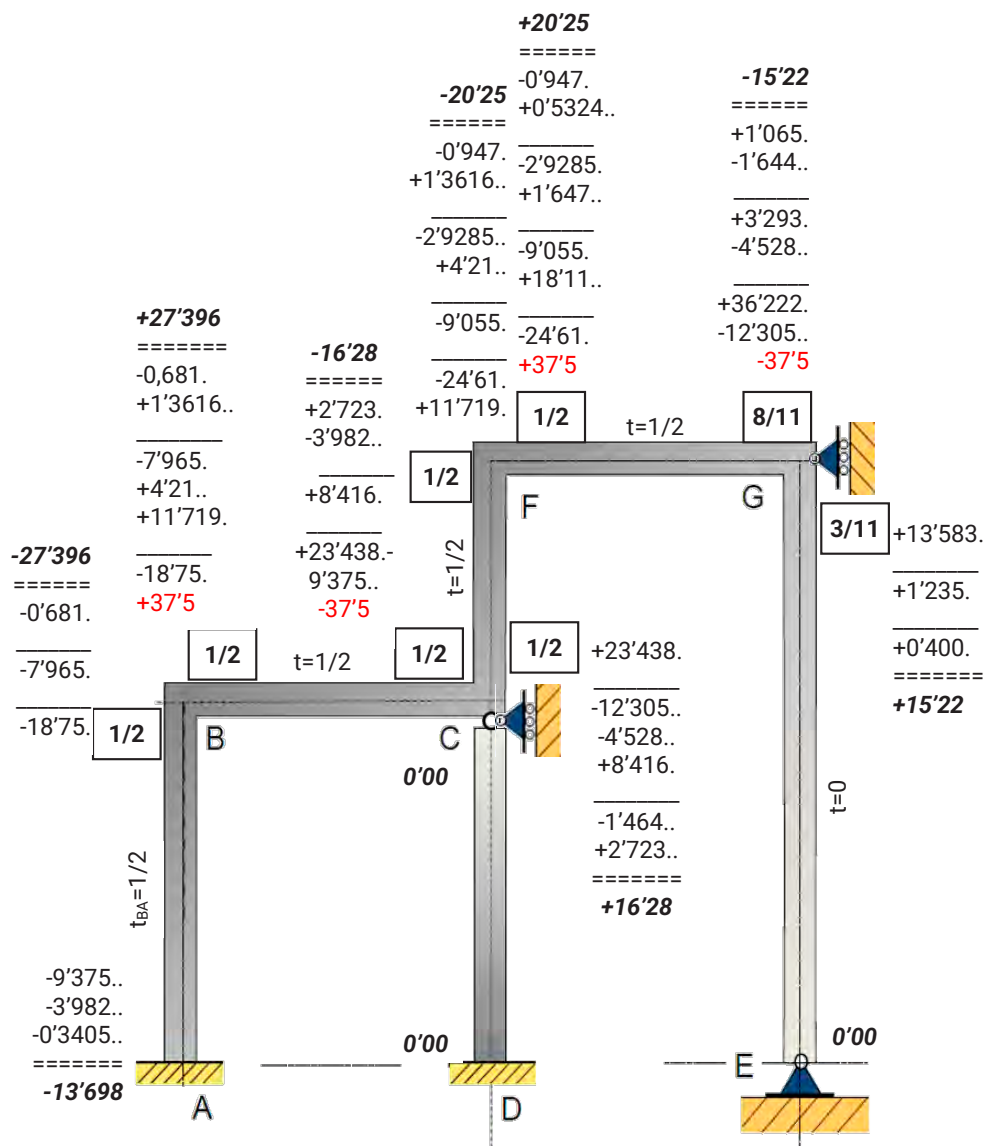


Figura 2-92. Equilibrado de nodos: momentos intermedios e finais nas secções extremas das barras

Illando as barras dos nodos, os momentos antes obtidos terán os seguintes sentidos de actuación e valores (en kN·m). Na seguinte Figura 2-93 indícanse tamén as forzas horizontais (cortantes e axiais) nas seccións extremas de encontro das barras con nodos, resumindo os resultados obtidos ata o de agora:

178

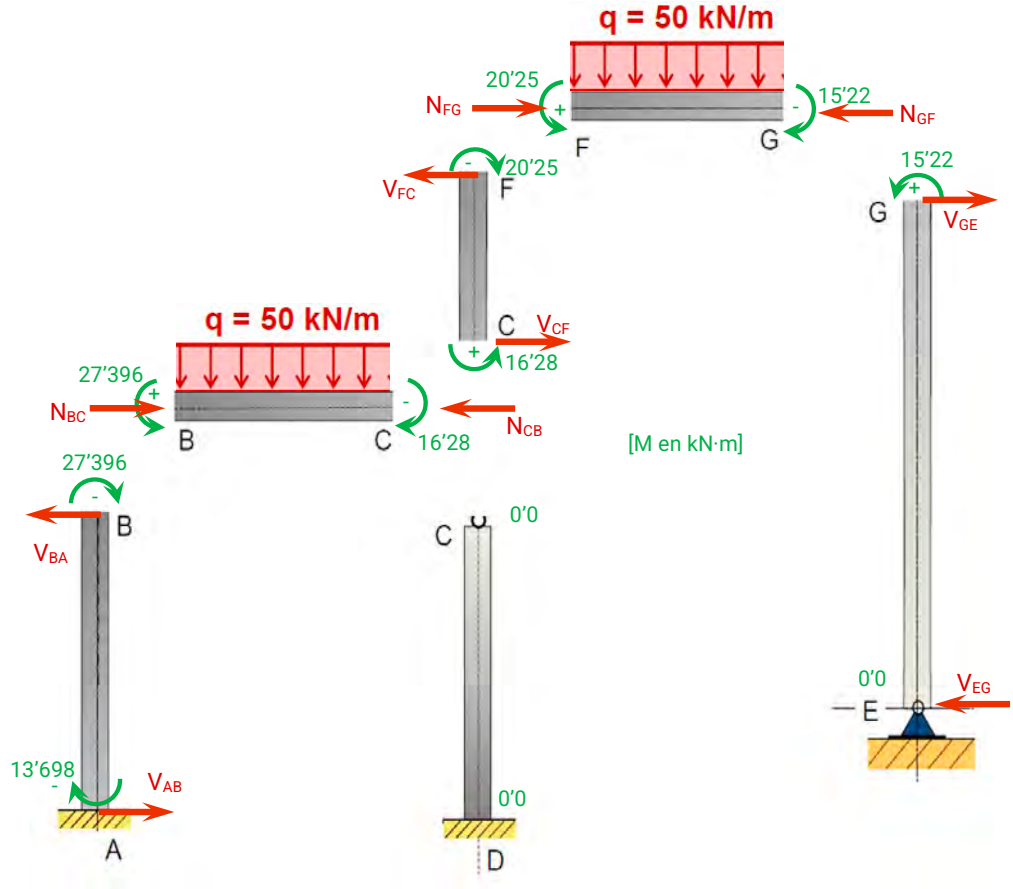


Figura 2-93. Sentido de actuación dos flexores finais nos extremos das barras e solicitacións horizontais nos mesmos (N e V)

b) Calcular os cortante nos pilares e as reaccións nos apoios externos en C e G.

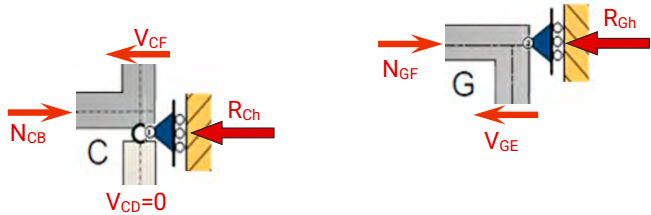


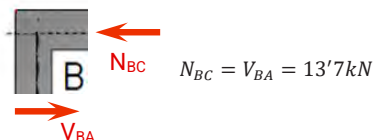
Figura 2-94. Diagrama de esforzos horizontais para equilibrar os nodos C e G

Na Figura 2-94, por equilibrio da barra AB:

$$\sum M_A = 0 = V_{BA} L_{AB} - 27'396 - 13'698 \Rightarrow V_{BA} = \frac{27'396 + 13'698}{3} = \mathbf{13'7 \text{ kN} (\leftarrow)}$$

$$\sum F_{horiz.} = 0 = V_{BA} - V_{AB} \Rightarrow V_{AB} = V_{BA} = \mathbf{13'7 \text{ kN} (\rightarrow)}$$

Por equilibrio de forzas horizontais no nodo B:



179

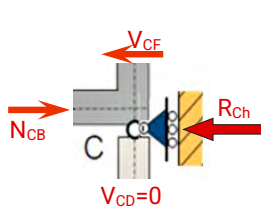
Por equilibrio de forzas horizontais na barra BC: $N_{BC} = N_{CB} = 13'7 \text{ kN}$

Por equilibrio da barra CF:

$$\sum M_C = 0 = V_{FC} L_{CF} - 20'25 + 16'28 \Rightarrow V_{FC} = \frac{20'25 - 16'28}{3} = \mathbf{1'323 \text{ kN} (\leftarrow)}$$

$$\sum F_{horiz.} = 0 = V_{FC} - V_{CF} \Rightarrow V_{CF} = V_{FC} = \mathbf{1'323 \text{ kN} (\rightarrow)}$$

Por equilibrio do nodo C:



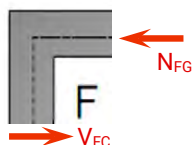
$$\sum F_{horiz. \text{ nodo } C} = 0 \Rightarrow R_{Ch} = N_{CB} - V_{CF} = 13'7 - 1'323 = \mathbf{12'78 \text{ kN} (\leftarrow)}$$

Polo tanto, se no nodo C non houbera un apoio horizontal externo, este nodo non podería estar en equilibrio de forzas horizontais. No caso de non existir o apoio externo en C, este nodo sería translacional, e desprazaríase, xunto coas barras que une, cara a dereita (sentido contrario a R_{Ch}), ata conseguir equilibrarse cando N_{CB}

igualara a V_{CF} (variando polo tanto os cortantes, os axiais e os momentos). Aquelas estruturas nas que todos os seus nodos son intranslacionais para calquera situación de carga (só poden xirar, pero non trasladarse de forma lineal por estar en equilibrio de forzas, tanto verticais coma horizontais), dise que son intranslacionais. Se non se cumpre o anterior (aínda que só sexa nalgún nodo) a estrutura será translacional.

O mesmo se pode dicir do nodo G. Para calcular a reacción horizontal R_{Gh} temos que coñecer N_{GF} e V_{GE} .

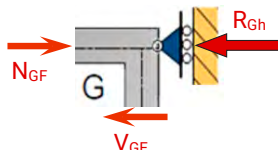
Na barra GE: $\sum M_E = 0 \Rightarrow V_{GE} = \frac{15'22}{6} = \mathbf{2'54 \text{ kN} (\rightarrow)} = V_{EG} (\leftarrow)$



No nodo F: $\sum F_{horiz} = 0 \Rightarrow V_{FC} = \mathbf{1'323 \text{ kN} = N_{FG} (\leftarrow)}$

Na barra FG: $\sum F_{horiz} = 0 \Rightarrow N_{GF} = N_{FG} = \mathbf{1'323 \text{ kN}}$

Por tanto, no nodo G:



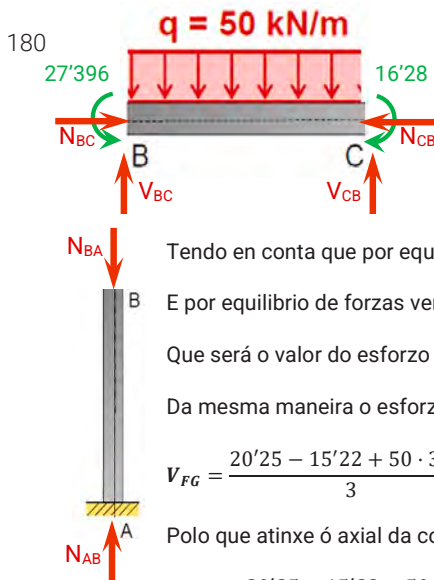
$$R_{Gh} = N_{GF} - V_{GE} = 1'323 - 2'54 = -1'217 \text{ kN} (\leftarrow) \Rightarrow R_{Gh} = \mathbf{+1'217 (\rightarrow)}$$

Dado o signo '-' no resultado de R_{Gh} , en realidade esta forza actúa en sentido contrario, posto que $V_{GE} > N_{GF}$. É dicir: $R_{Gh} = \mathbf{1'217 \text{ kN} (\rightarrow)}$

Polo tanto, de non existir o apoio externo G, o nodo G desprazaríase cara a esquerda, baixo a acción das cargas externas 'q' dadas, empregadas para calcular os momentos, os cortantes e os axiais.

Os apoios externos existentes en C e en G poderían ter estado situados en B e/ou F, e pola hipótese de inextensibilidade das barras en lonxitude, producirían os mesmos efectos que en C e G.

c) Calcularemos agora o esforzo axial das columnas AB, CD e GE. Para elo, na barra BC:



$$\sum M_B = 0 = V_{CB} L_{BC} - 16'28 + 27'396 - 50 L_{BC} \cdot L_{BC}/2$$

$$\Rightarrow V_{CB} = \frac{16'28 - 27'396 + 25 \cdot 3^2}{3} = 71'30 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_{vert} = 0 \Rightarrow V_{BC} = 50 \cdot 3 - 71'30 = 78'7 \text{ kN} (\uparrow)$$

Tendo en conta que por equilibrio de forzas verticais no nodo B: $N_{BA} = V_{BC}$, e polo tanto $N_{BA} = 78'7 \text{ kN}$

E por equilibrio de forzas verticais na columna AB: $N_{BA} = N_{AB} = 78'7 \text{ kN}$

Que será o valor do esforzo axial na columna AB

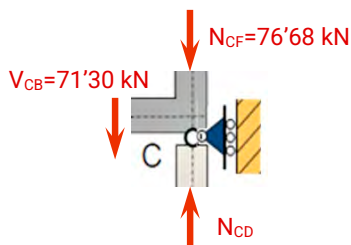
Da mesma maneira o esforzo axial (vertical) na columna FC valerá:

$$V_{FG} = \frac{20'25 - 15'22 + 50 \cdot 3^2/2}{3} = 76'68 \text{ kN} = N_{FC} = N_{CF}(\text{compresión})$$

Polo que atinxe ó axial da columna GE, partimos obtendo o cortante V_{GF} :

$$V_{GF} = \frac{-20'25 + 15'22 + 50 \cdot 3^2/2}{3} = 73'32 \text{ kN} = N_{GE} = N_{EG}(\text{compresión})$$

Tamén podemos obter o axial na barra CD a partires do equilibrio de forzas verticais do nodo C:



$$N_{CD} = 71'30 + 76'68 = 147'98 \text{ kN} (\text{compresión})$$

Polo tanto, a columna co axial máximo será esta barra CD

2.2.12 Exercício R-12. Pórtico continuo con pilar e barra suspendida.

Na estrutura da Figura 2-95 inferior, pídese:

- Calcular polo método de Cross os momentos flexores no extremo das barras, baixo a acción da carga $P=40\text{ kN}$, indicando o seu sentido de actuación, comprobando que a estrutura é intranslacional.
- Calcular as reaccións externas sobre o nodo A

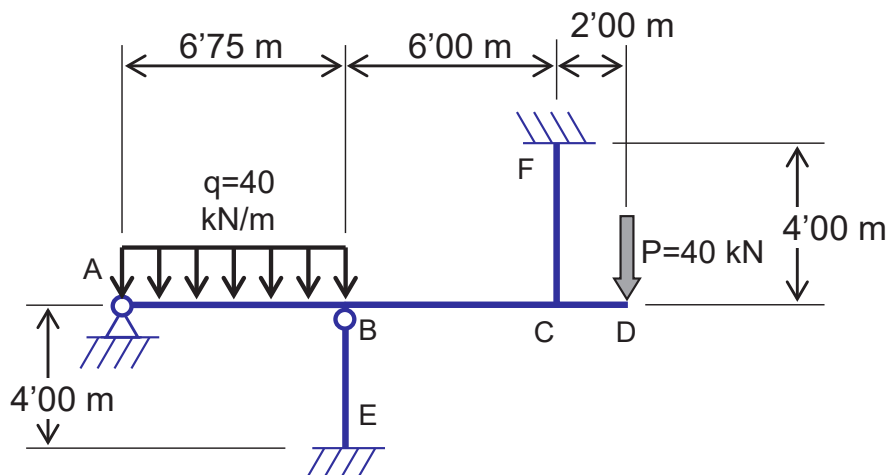


Figura 2-95. Pórtico continuo con pilar articulado en cabeza e barra suspendida

Todas as barras son de formigón armado de $0'30 \times 0'30\text{ m} \times \text{m}$ de sección transversal, e todas teñen o mesmo módulo elástico E. Desbótase o peso propio da estrutura.

Solución:

a) Calculamos a orde de translacionalidade da estrutura (OT):

$$OT = 3 \text{ barras} - \text{ménsulas} - \sum [n \cdot (N-1) \cdot 2] - \text{coaccións externas}$$

Nº barras=5; Nº ménsulas=1; n: nº nodos con N=3 barras =2 ($n_{N=2}=0$)

Coaccións externas ó desprazamento lineal dos nodos: nodo A=2 ($\bar{u}_x=0$; $\bar{u}_y=0$); nodo E=2 ($\bar{u}_x=0$; $\bar{u}_y=0$); nodo F=2 ($\bar{u}_x=0$; $\bar{u}_y=0$). Total = 2+2+2 = 6 coaccións

$$\text{Substituíndo: } OT = 3 \cdot 5 - 1 - [2 \cdot (3-1) \cdot 2] - 6 = 14 - 8 - 6 = 0$$

A estrutura dada é intranslacional. Calculamos polo tanto unicamente o estado fundamental.

En primeiro lugar determinamos as rixideces ó xiro dos nodos B e C:

Nodo B:

$$\left. \begin{aligned} K_{BA} &= \frac{3EI}{6'75} \\ K_{BE} &= 0 \\ K_{BC} &= \frac{4EI}{6'00} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} r_{BA} &= \frac{\frac{3EI}{6'75}}{\frac{3EI}{6'75} + 0 + \frac{4EI}{6'00}} = 0'4 \\ r_{BE} &= 0 \\ r_{BC} &= \frac{\frac{4EI}{6'00}}{\frac{3EI}{6'75} + 0 + \frac{4EI}{6'00}} = 0'6 \end{aligned} \right.$$

Nodo C:

$$\left. \begin{aligned} K_{CB} &= \frac{4EI}{6} \\ K_{CD} &= 0 \\ K_{CF} &= \frac{4EI}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} r_{CB} &= \frac{\frac{4EI}{6}}{\frac{4EI}{6} + 0 + \frac{4EI}{4}} = 0'4 \\ r_{CD} &= 0 \\ r_{CF} &= \frac{\frac{4EI}{4}}{\frac{4EI}{6} + 0 + \frac{4EI}{4}} = 0'6 \end{aligned} \right.$$

Momentos de encastamento perfecto (en barras cargadas):

Barra A-B:

Barra C-D:

$$M_{BA}^{EP} = -\frac{qL^2}{8} = -\frac{40 \cdot 6'75^2}{8} = -227'81 \text{ m} \cdot \text{kN} \quad M_{CD}^{EP} = +P \cdot L = +40 \cdot 2 = +80 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

Resolvemos o equilibrio dos nodos sobre un esquema da propia estrutura:

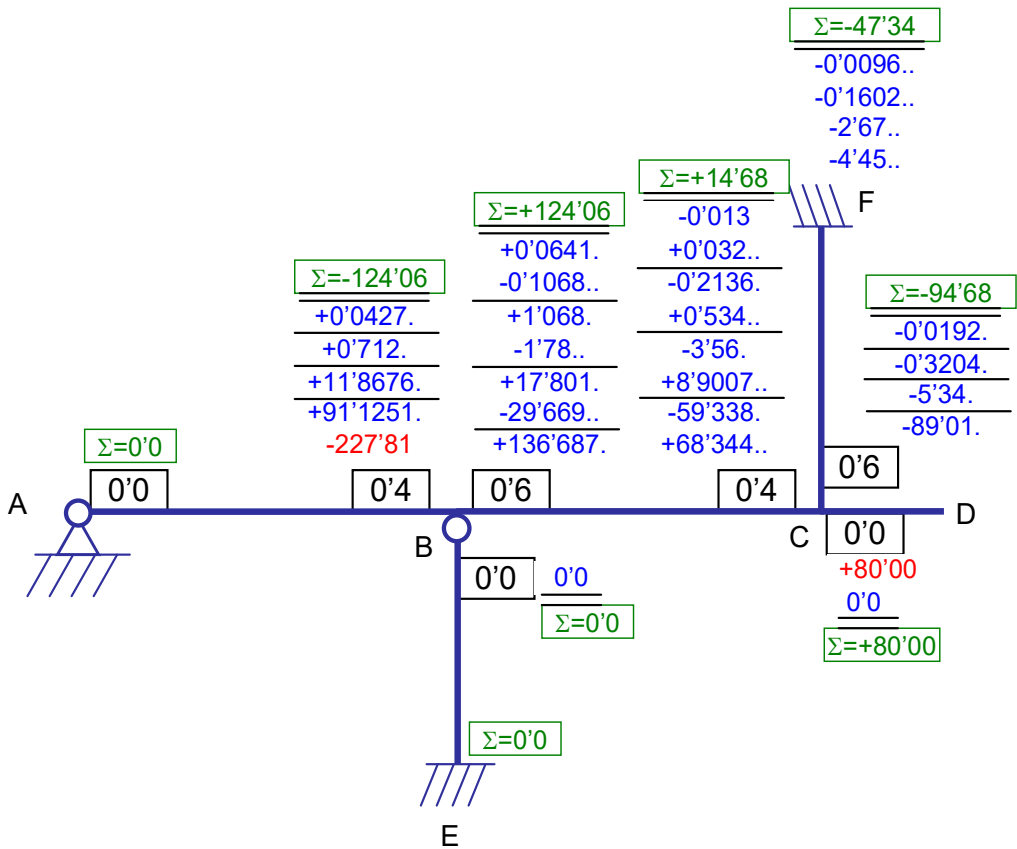


Figura 2-96. Secuencia completa de equilibrado de nodos

Nomenclatura:

En **vermello**: momentos encastamento perfecto.

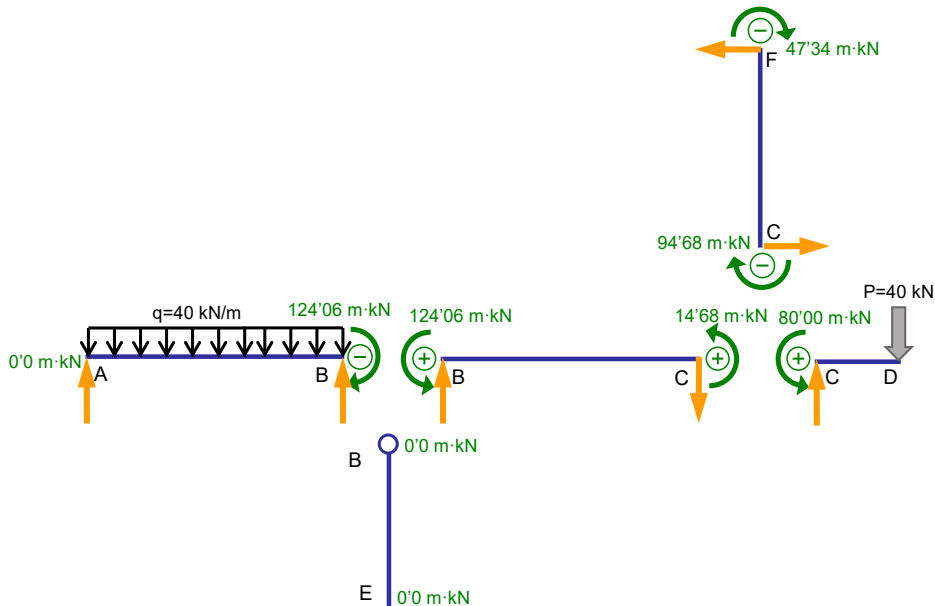
".. momento transmitido";

".. momento procedente dunha transmisión";

"_____ nodo equilibrado (a suma de momentos nese intre é cero)"

Resultados de momentos flexores en extremos de barras:

184



b) Cálculo das reaccions sobre o nodo A:

Equilibrio da barra AB de 6,75 m de luz, sometida á carga $q=40 \text{ kN/m}$.

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_{AB} + V_{BA} = 40 \cdot 6,75 \rightarrow V_{AB} = 40 \cdot 6,75 - 153,38 = 116,62 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_{BA} \cdot 6,75 = \frac{40 \cdot 6,75^2}{2} + 124,06 \rightarrow V_{BA} = \frac{40 \cdot 6,75}{2} + \frac{124,06}{6,75} = 153,38 \text{ kN}$$

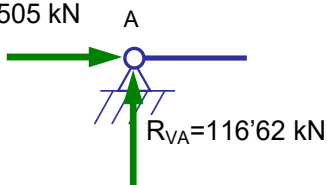
Polo tanto, a reacción vertical sobre o nodo A, será: $R_{VA} = V_{AB} = 116,62 \text{ kN}$.

Amais, o nodo A terá que absorber o axial da barra AB, que será igual ó cortante V_{CF} , única forza horizontal existente sobre a carreira de vigas A-D:

$$V_{CF} = \frac{47,34 + 94,68}{4} = 35,05 \text{ kN} \leftarrow$$

Polo tanto, a reacción horizontal sobre o nodo A, será: $R_{HA} = N_{AB} = 35,05 \text{ kN} \rightarrow$

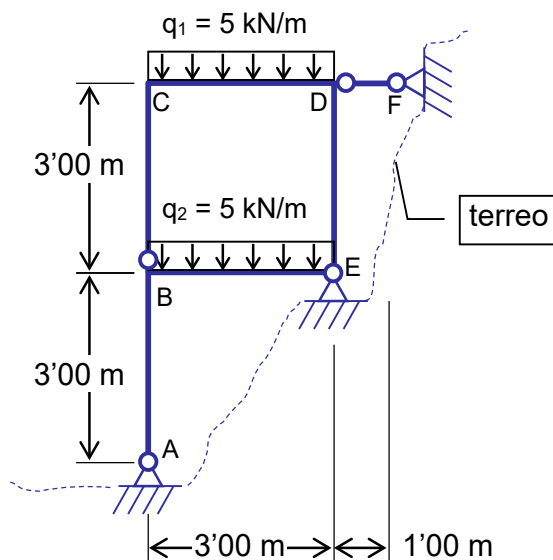
$$R_{HA}=35'505 \text{ kN}$$



2.2.13 Exercicio R-13. Pórtico de galería

O pórtico da estrutura da Figura 2-97 pertence a unha galería de comunicación entre as oficinas e a nave de fabricación dunha planta industrial. Para o caso e valores das accións representados, pídese:

- Calcular polo método de Cross os diagramas de flexores, cortantes e axiais nas barras.
- Qué lle pasaría á estrutura si se eliminara a barra DF?



As barras:

- BA e BE están ríxidamente unidas en B
- BC está articulada ó nodo B
- EB e ED están ambas dúas articuladas ó nodo E
- DE é horizontal e está articulada ó nodo D
- DC e DE están ríxidamente unidas entre si nonodo D

Figura 2-97. Pórtico tipo da galería

Todas as barras son de tubo cuadrado TC 140·6, de aceiro S275 segundo o Código Estructural de 2021.

Solución apartado a):

Calculamos en primeiro lugar a Orde de Translacionalidade (O.T.) da estrutura

$$OT = GD - (C_{ext} + C_{int})$$

$$GD = 3 \cdot (n^{\circ} \text{ barras}) = 3 \cdot 6 = 18$$

$$C_{ext} = C_{ext,A} + C_{ext,E} + C_{ext,F} = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$C_{int} = 2_{B,D} 2 (3 - 1) + 2_{C,E} 2 (2 - 1) = 8 + 4 = 12$$

186

Por tanto: $OT = GD - (C_{ext} + C_{int}) = 18 - (6 + 12) = 0$

Polo tanto, trátase dunha estrutura intranslacional, na que os nodos só poden xirar, non trasladarse linealmente (desbotando a variación de lonxitude das barras polo esforzo axial).

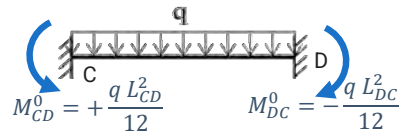
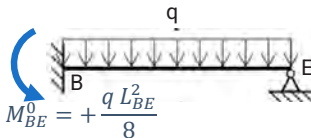
- Calculamos as constantes elásticas das barras e os nodos:

Nodo B	
$K_{BA} = \frac{3EI}{L}$	$r_{BA} = \frac{3}{3+3+0} = \frac{1}{2}$
$K_{BE} = \frac{3EI}{L}$	$r_{BE} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$K_{BC} = 0$ (articulada en B)	$r_{BC} = \frac{0}{6} = 0$

Nodo C	
$K_{CD} = \frac{4EI}{L}$	$r_{CD} = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7} = 0'5714$
$K_{CB} = \frac{3EI}{L}$	$r_{CB} = 1 - 0'5714 = 0'4286$

Nodo D	
$K_{DC} = \frac{4EI}{L}$	$r_{DC} = \frac{4}{4+3+0} = \frac{4}{7} = 0'5714$
$K_{DE} = \frac{3EI}{L}$	$r_{DE} = 1 - 0'5714 = 0'4286$
$K_{DF} = 0$ (articulada en D)	$r_{DF} = \frac{0}{7} = 0$

- Calculamos os momentos de encastamento perfecto das seccións extremas das barras nas unións ríxidas:



$$M_{BE}^0 = \frac{+5 \cdot 3^2}{8} = +5'63 \text{ kN} \cdot \text{m} ; M_{EB}^0 = 0 ; M_{CD}^0 = \frac{+5 \cdot 3^2}{12} = +3'75 \text{ kN} \cdot \text{m} ;$$

$$M_{EB}^0 = \frac{-5 \cdot 3^2}{12} = -3'75 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- Equilibrado de nodos:

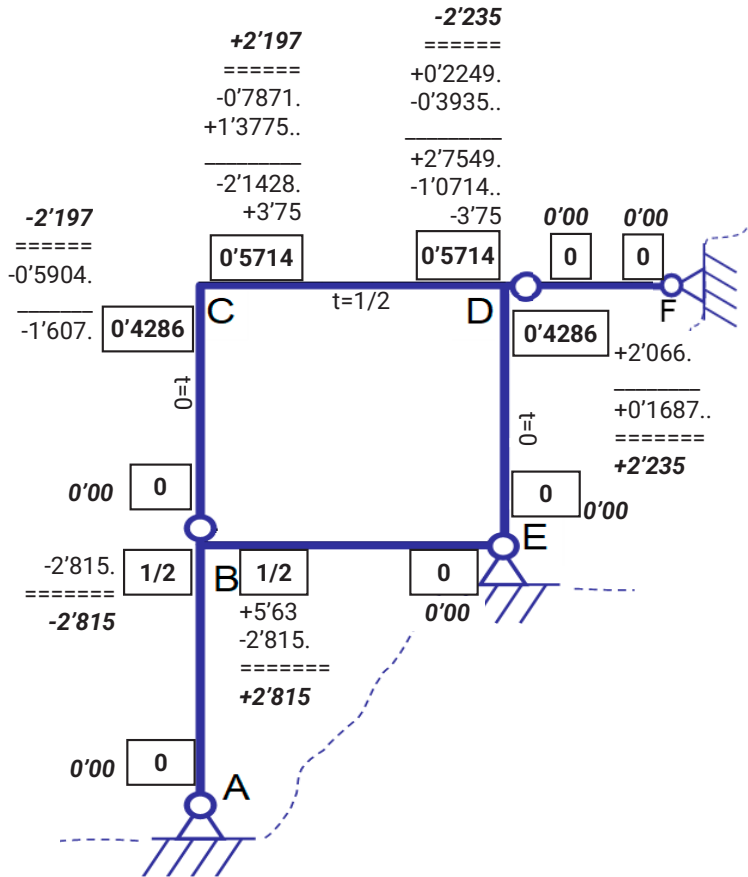


Figura 2-98. Secuencia completa de equilibrado de nodos

Cortantes (sentidos considerados como positivos indicados na Figura 2-99):

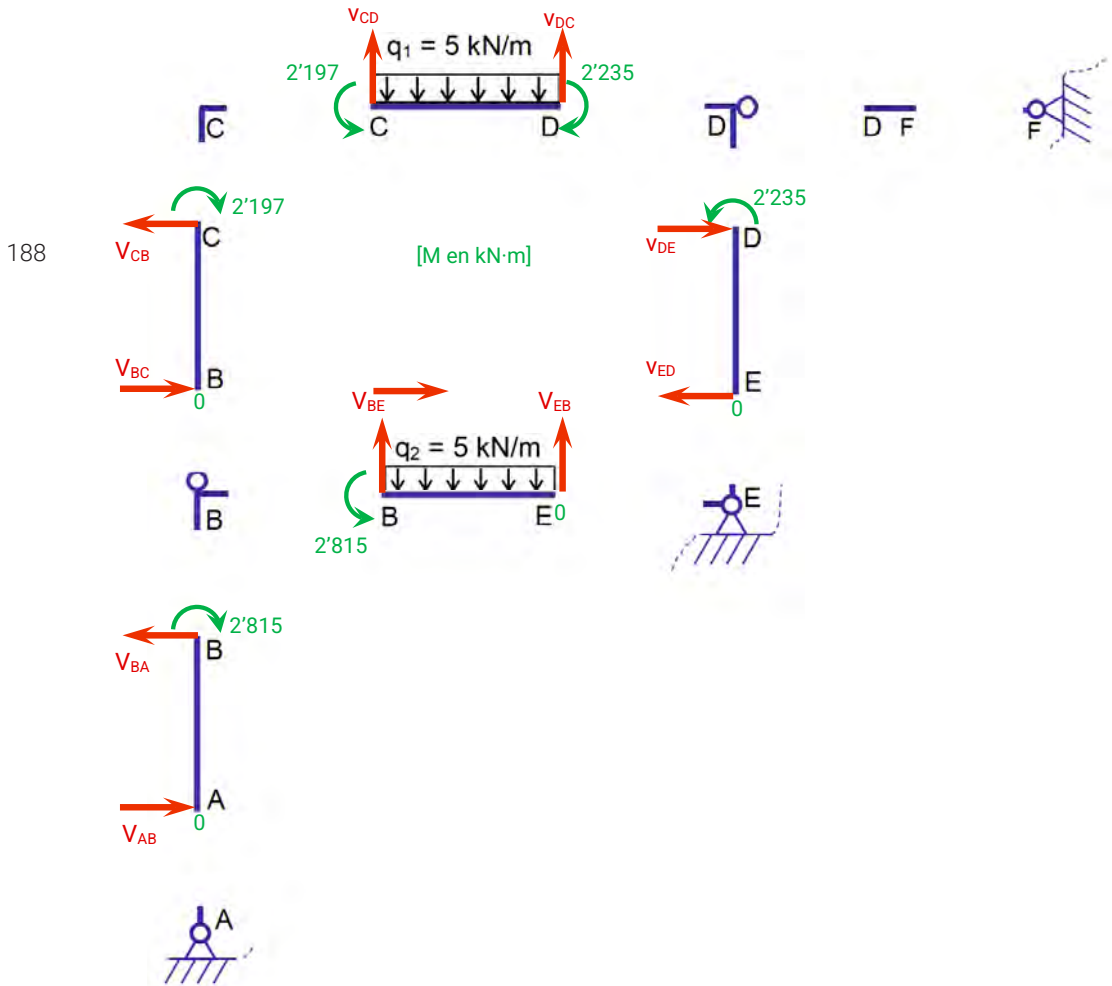


Figura 2-99. Diagramas para o cálculo de cortantes

$$V_{BA} = \frac{2'815}{3} = 0'938 \text{ kN}; \quad V_{AB} = V_{BA} = 0'938 \text{ kN}$$

$$V_{BC} = \frac{2'197}{3} = 0'732 \text{ kN}; \quad V_{CB} = V_{BC} = 0'732 \text{ kN}$$

$$3 \cdot V_{CD} = 2'197 - 2'235 + 5 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow V_{CD} = 7'487 \text{ kN}$$

$$V_{DC} = 5 \cdot 3 - 7'487 = 7'513 \text{ kN}$$

$$3 \cdot V_{BE} = 2'815 + 5 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow V_{BE} = 8'438 \text{ kN}$$

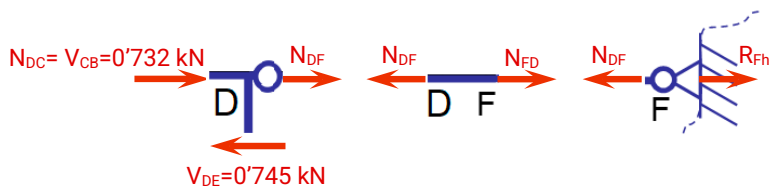
$$V_{EB} = 5 \cdot 3 - 8'438 = 6'561 \text{ kN}$$

$$V_{DE} = V_{ED} = \frac{2'235}{3} = 0'745 \text{ kN}$$

Solución apartado b):

A barra DF traballa unicamente a esforzo axial, posto que só ten cargas nos extremos, e non momentos por estar biarticulada. Isto é así xa que calquera sólido sometido unicamente a dúas forzas, para estar en equilibrio ambas teñen que ter o mesmo valor e sentidos opostos

Polo tanto, o esforzo axial da barra DF ten que corresponderse coa reacción (unicamente horizontal) no apoio D.



189

$$N_{DF} = 0'745 - 0'732 = 0'013 \text{ kN} \Rightarrow R_{Fh} = 0'013 \text{ kN} (\rightarrow)$$

Como vemos, no nodo D o esforzo horizontal cara á esquerda é maior que cara á dereita. Polo que de non existir o apoio F, o nodo D (e polo tanto a barra CD) desprazaríase cara á esquerda. Para evitar este desprazamento aparece no apoio a forza R_{Fh} cara á dereita.

2.2.14 Exercício R-14. Pórtico de 6 barras con ménsula

Na estrutura da Figura 2-100 inferior, para o valor indicado das acciões representadas, pídese o seguinte:

- Calcular polo método de Cross os momentos flexores nos extremos das barras, indicando o seu sentido de actuación.
- Calcular a reacción externa no nodo F

190

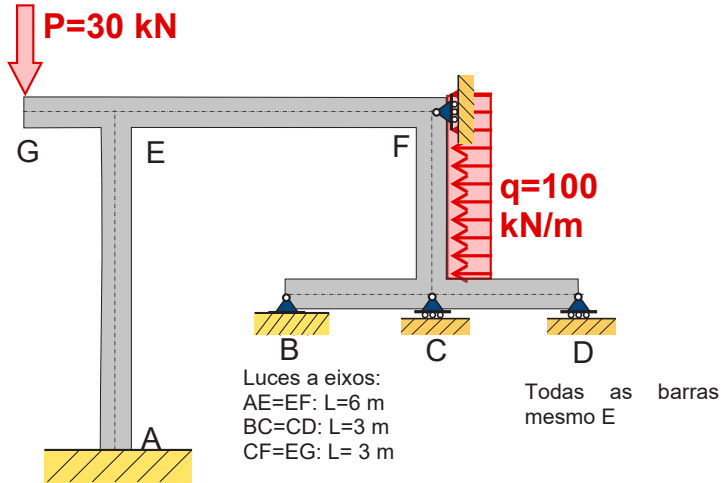


Figura 2-100. Pórtico de 6 barras con ménsula

Todas as barras son de formigón armado de 0'30x0'30 m de sección transversal e módulo elástico E.
Desbótase o peso propio da estrutura.

Solución apartado a):

Calculamos en primeiro lugar a Orde de Translacionalidade (O.T.) da estrutura

$$OT = GD - (C_{ext} + C_{int})$$

As ménsulas non alteran a O.T. polo que aplicamos a fórmula anterior eliminando a ménsula GE:

$$GD = 3 \cdot (n^{\circ} \text{ barras}) = 3 \cdot 5 = 15$$

$$C_{ext} = C_{ext,A} + C_{ext,E} + C_{ext,F} = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7$$

$$C_{int} = 1_C \cdot 2(3 - 1) + 2_{E,F} \cdot 2(2 - 1) = 4 + 4 = 8$$

191

Por tanto: $OT = GD - (C_{ext} + C_{int}) = 15 - (7 + 8) = 0$

Polo tanto, trátase dunha estrutura intranslacional, na que os nodos só poden xirar, non trasladarse linealmente (desbotando a variación de lonxitude das barras polo esforzo axial).

- Calculamos as constantes elásticas das barras e os nodos:

Nodo E	
$K_{EA} = \frac{4EI}{6}$	$r_{EA} = \frac{4/6}{4/6 + 4/6 + 0} = \frac{1}{2}$
$K_{EF} = \frac{4EI}{6}$	$r_{EF} = \frac{4/6}{4/6 + 4/6 + 0} = \frac{1}{2}$
$K_{EG} = 0 \text{ (Voo)}$	$r_{EG} = 0$

Nodo F	
$K_{FE} = \frac{4EI}{6}$	$r_{EF} = \frac{4/6}{4/6 + 4/3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$K_{FC} = \frac{4EI}{3}$	$r_{FC} = 1 - 1/3 = \frac{2}{3}$

Nodo C	
$K_{CF} = \frac{4EI}{3}$	$r_{CF} = \frac{4/3}{4/3 + 3/3 + 3/3} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
$K_{CB} = \frac{3EI}{3}$	$r_{CB} = \frac{3/3}{4/3 + 3/3 + 3/3} = \frac{3}{10}$
$K_{CD} = \frac{3EI}{3}$	$r_{CD} = \frac{3/3}{4/3 + 3/3 + 3/3} = \frac{3}{10}$

Os coeficientes de transmisión entre extremos de barras serán:

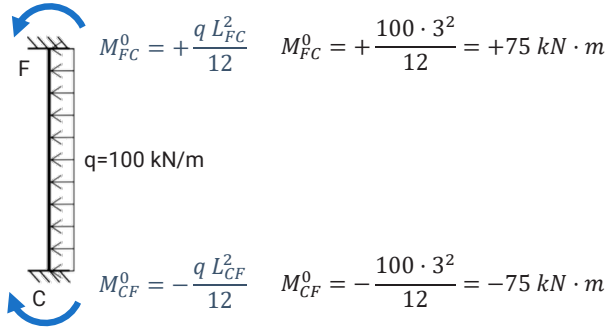
$$t_{EA}=t_{EF}=t_{FE}=t_{EC}=t_{CF}=1/2$$

$$t_{EG}=t_{CB}=t_{CD}=0$$

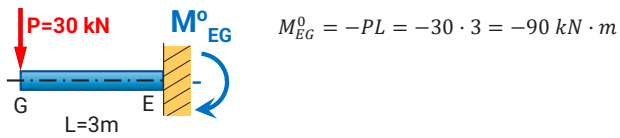
Lémbrese que os coeficientes de transmisión son sempre positivos, e polo tanto conservan os signos dos momentos ó aplicalos entre extremos de barras.

- Calculamos os momentos de encastramento perfecto das seccións extremas das barras nas unións ríxidas:

Barra FC



Barra en ménsula EG



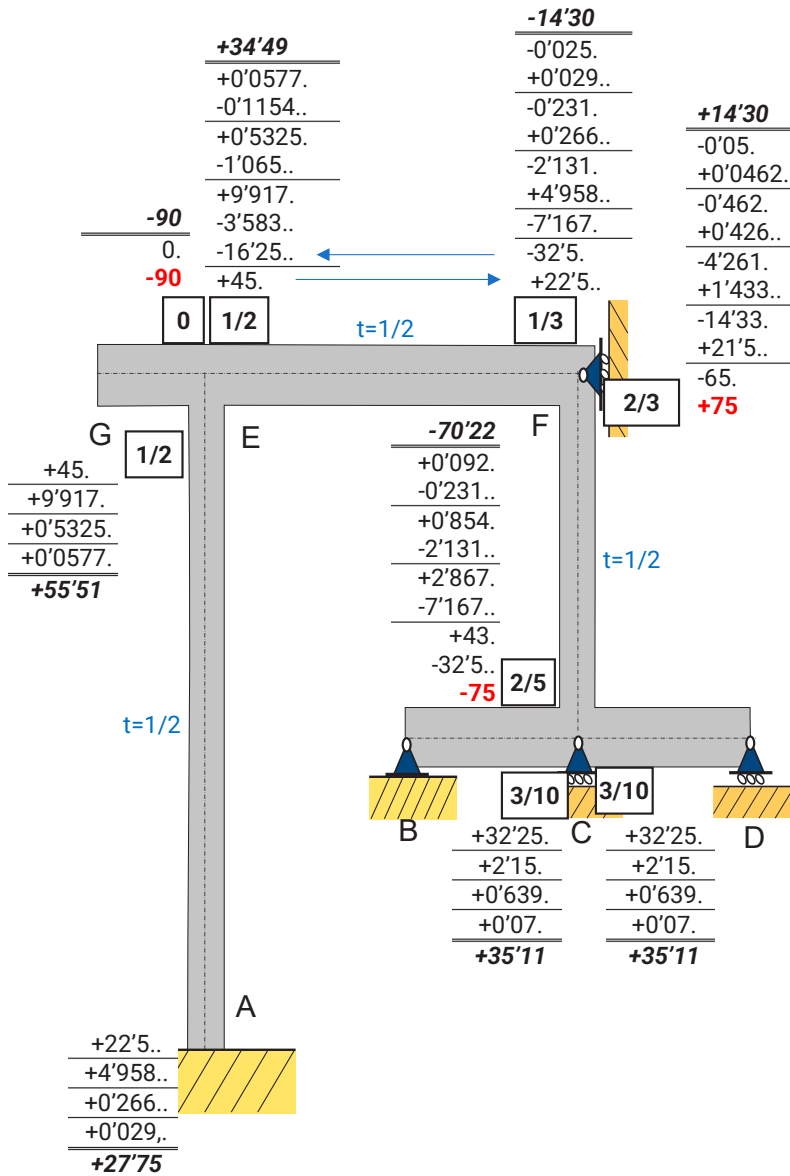


Figura 2-101. Secuencia de equilibrado de nodos e flexores resultantes

Os momentos flexores resultantes nos extremos das barras, amósanse na Figura 2-102 seguinte, na que as barras e os nodos téñense separado e explosionado. Decátense que os nodos están en equilibrio de

momentos cos valores obtidos (a súa resultante de momentos é nula). Nótese tamén que o criterio de signos consérvase na mesma sección entre nodo e barra.

194

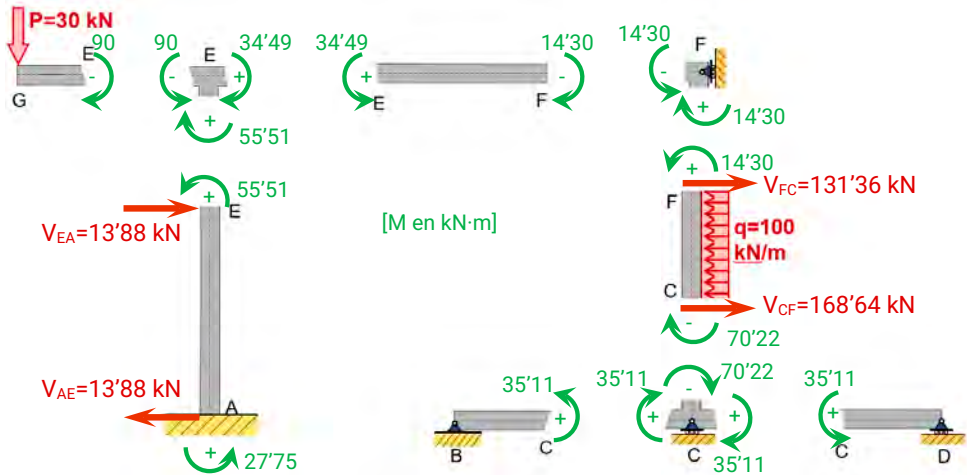


Figura 2-102. Diagramas de sólido libre para cálculo de cortantes en barras verticais

Os esforzos cortantes horizontais nas barras (verticais) obtéñense tomando equilibrio de momentos respecto dun dos seus extremos:

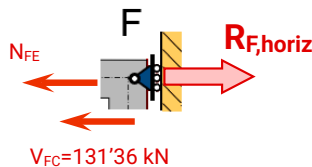
$$\text{Barra EA: } \sum M_A = 0 \Rightarrow V_{EA} = \frac{55'51 + 27'75}{6} = 13'88 \text{ kN}; \quad \sum F_{horiz} = 0 \Rightarrow V_{AE} = V_{EA} = 13'88 \text{ kN}$$

$$\text{Barra FC: } \sum M_C = 0 \Rightarrow V_{FC} = \frac{14'30 - 70'22 + 100 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 0'5}{3} = 131'36 \text{ kN}$$

$$\sum F_{horiz} = 0 \Rightarrow V_{CF} + V_{FC} = qL \Rightarrow V_{CF} = 100 \cdot 3 - 131'36 = 168'64 \text{ kN}$$

Solución apartado b): calcular a reacción externa no nodo F

$$\text{Barra GE: } \sum F_{horiz} = 0 \Rightarrow N_{EG} = 0$$



$$\text{Nodo E: } \sum F_{horiz} = 0 \Rightarrow N_{EF} = V_{EA} = 13'88 \text{ kN} (\leftarrow \text{ sobre o nodo E})$$

$$\text{Barra EF: } \sum F_{horiz} = 0 \Rightarrow N_{FE} = N_{EF} \Rightarrow N_{FE} = 13'88 \text{ kN} (\rightarrow \text{ sobre barra EF})$$

Polo tanto, no nodo F, por sumatorio de forzas horizontais igual a cero:

$$\text{Nodo F: } \sum F_{horiz} = 0 \Rightarrow N_{FE} + V_{FC} = R_{F,horiz} \Rightarrow R_{F,horiz} = 131'36 + 13'88 \text{ kN} = 145'24 \text{ kN} (\rightarrow)$$

2.2.15 Exrcicio R-15. Pórtico simétrico de 3 piares e 2 vans

- Para ambos valores de $P=150$ kN, calcular os momentos flexores nos extremos das barras da seguinte estrutura intranslacional.
- Calcular os diagramas de flexores das barras BD e DF.
- Obter a reacción no apoio B.

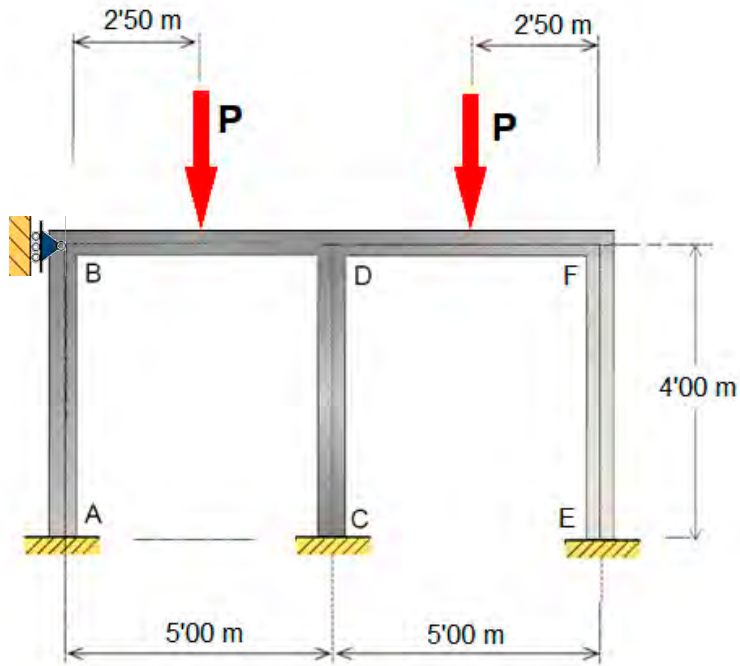


Figura 2-103. Pórtico simétrico de 3 piares e 2 vans

Todas as barras son de formigón armado de 0'40 m x 0'40 m de sección transversal.



Figura 2-104. Pórtico real

Solución:

- a) En primeiro lugar calculamos as constantes elásticas (rixidez ó xiro, coeficientes de reparto e de transmisión).

Nodo B (F simétrico de B)	
$K_{BA} = \frac{4EI}{4}$	$r_{BA} = \frac{5/5}{5/5 + 4/5} = \frac{5}{9}$
$K_{BD} = \frac{4EI}{5}$	$r_{BD} = \frac{4/5}{5/5 + 4/5} = \frac{4}{9}$

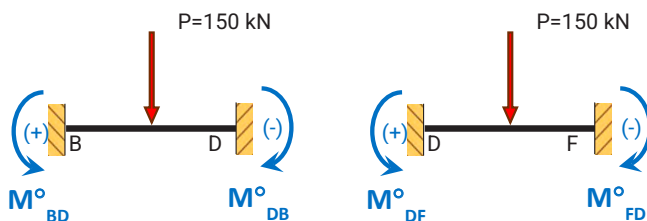
197

Nodo D	
$K_{DB} = \frac{4EI}{5}$	$r_{DB} = \frac{4/5}{4/5 + 5/5 + 4/5} = \frac{4}{13}$
$K_{DC} = \frac{4EI}{4}$	$r_{DC} = \frac{5/5}{4/5 + 5/5 + 4/5} = \frac{5}{13}$
$K_{DF} = \frac{4EI}{5}$	$r_{DF} = \frac{4/5}{4/5 + 5/5 + 4/5} = \frac{4}{13}$

Coefficientes de transmisión. Todos os extremos opostos son ríxidos. Polo tanto:

$$t_{BA} = t_{BD} = t_{DB} = t_{DC} = t_{DF} = t_{FE} = \frac{1}{2}$$

A continuación calculamos os momentos de encastamento perfecto. As cargas P actúan no centro dos vans:



$$M^0_{BD} = +\frac{PL}{8} = +\frac{150 \cdot 5}{8} = +93'75 \text{ kNm} = M^0_{DF}$$

$$M^0_{DB} = -\frac{PL}{8} = -\frac{150 \cdot 5}{8} = -93'75 \text{ kNm} = M^0_{FD}$$

O diagrama de flexores dos lintéis (barras BD e DF), en situación de nodos extremos perfectamente encastados é:

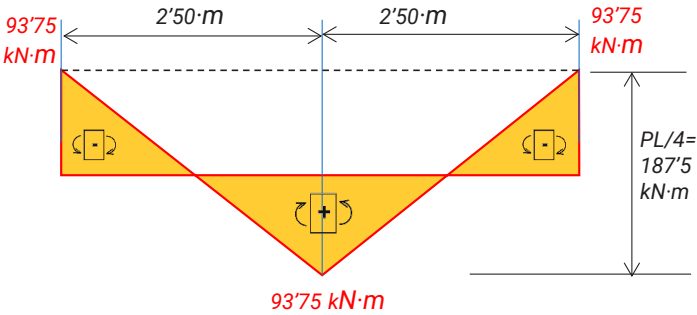


Figura 2-105. Diagrama inicial de momentos nas vigas cos xiros bloqueados

Equilibrado de nodos. Secuencia B-F-D-B→fin

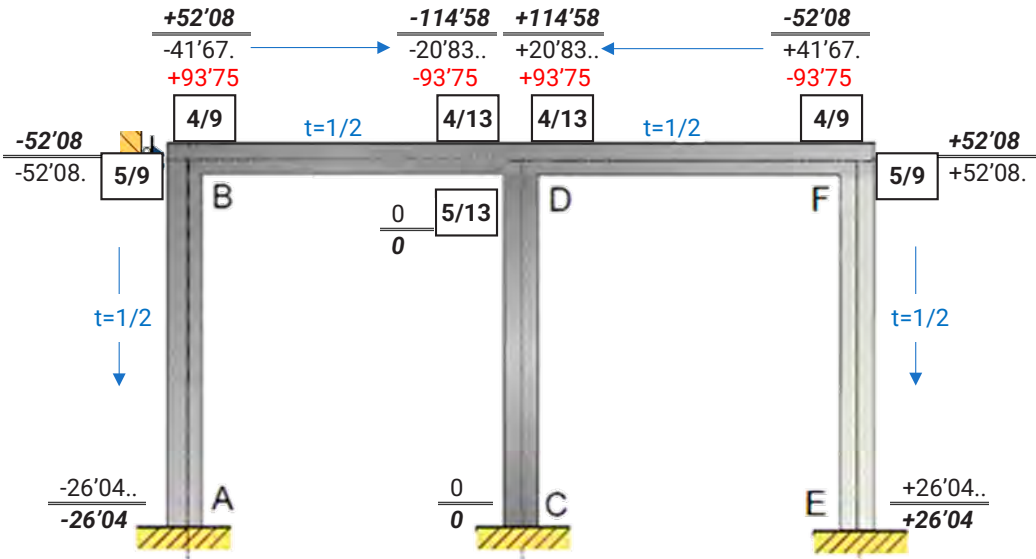


Figura 2-106. Secuencia de equilibrado dos nodos e momentos resultantes

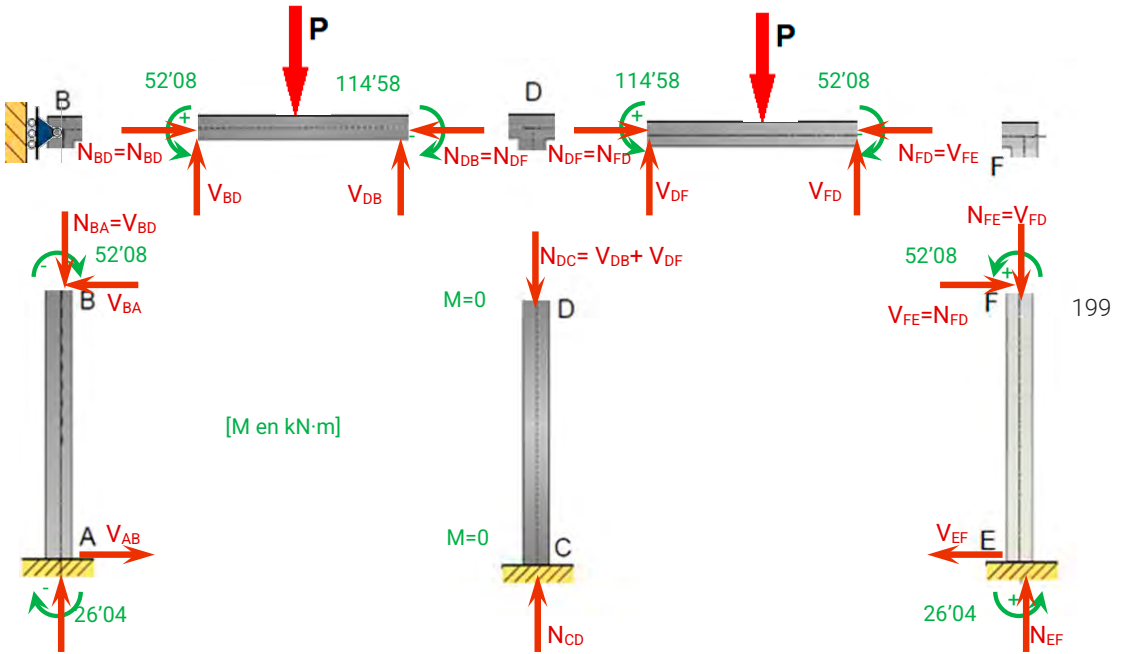


Figura 2-107. Diagramas de barras illadas para o cálculo de cortantes

$$V_{BD} = \frac{150 \cdot 2,5 + 52,08 - 114,58}{5} = 62,5 \text{ kN}; V_{BA} = V_{AB} = \frac{52,08 + 26,04}{4} = 19'53 \text{ kN}$$

$$V_{DB} = 150 - 62,5 = 87,5 \text{ kN};$$

$$V_{FD} = \frac{150 \cdot 2,5 + 52,08 - 114,58}{5} = 62,5 \text{ kN}; V_{FE} = V_{EF} = 19'53 \text{ kN}$$

$$V_{DF} = 150 - 62,5 = 87,5 \text{ kN};$$

$$N_{BA} = V_{BD} = 62,5 \text{ kN} = N_{AB}$$

$$N_{CD} = N_{DC} = V_{DB} + V_{DF} = 87'5 + 87,5 \text{ kN} = 175 \text{ kN}$$

$$N_{FE} = V_{FD} = 62,5 \text{ kN} = N_{EF}$$

$$N_{BD} = V_{BA} = 19'53 \text{ kN} = N_{BD}$$

$$N_{FD} = V_{FE} = 19'53 \text{ kN} = N_{DF}$$

b) Diagramas de flexores das barras BD e DF:

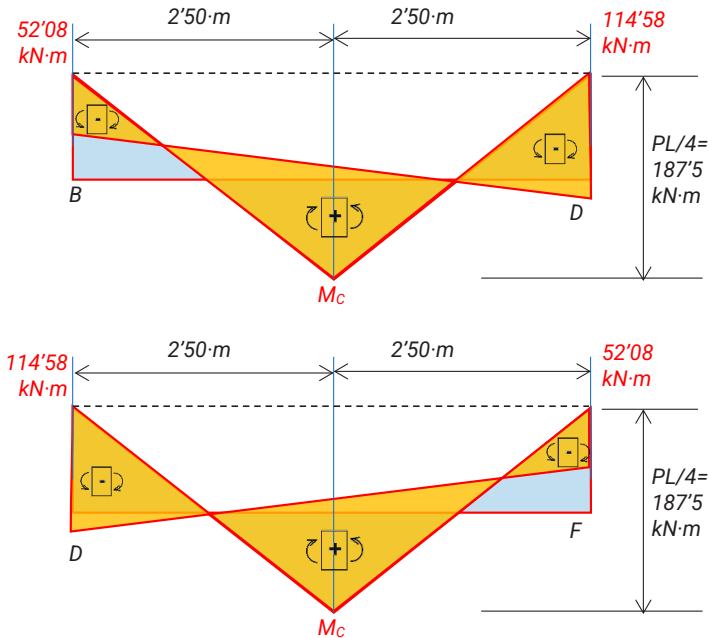


Figura 2-108. Diagramas de momentos resultantes e comparación cos iniciais

$$M_C = 187'5 - \frac{52'08 + 114'58}{2} = 104'17 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

c) Reacción apoio B

$$R_B = N_{BD} - V_{BA} = V_{FE} - V_{BA} = 19'53 - 19'53 = 0$$

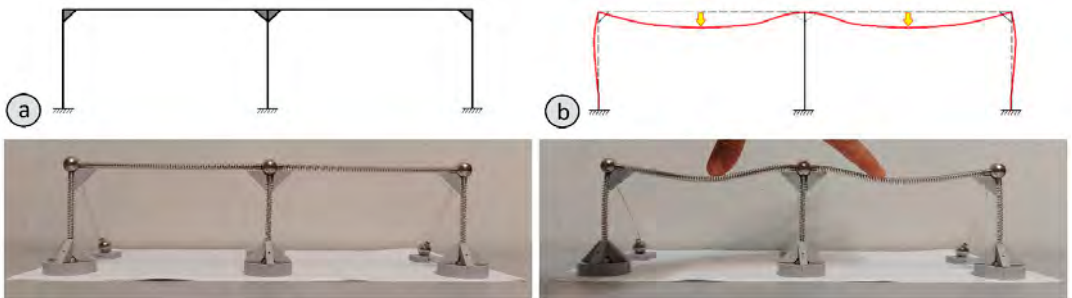


Figura 2-109. a) Pórtico dobre cos nodos ríxidos e bases encastadas, sen carga aplicada.

2.2.16 Exrcicio R-16. Pórtico de 3 pilares e 2 vans. Con articulación.

- Calcular os momentos flexores nos extremos das barras da seguinte estrutura, similar á anterior, pero na que o nodo F é articulado.
- Calcular os diagramas de flexores das barras BD e DF

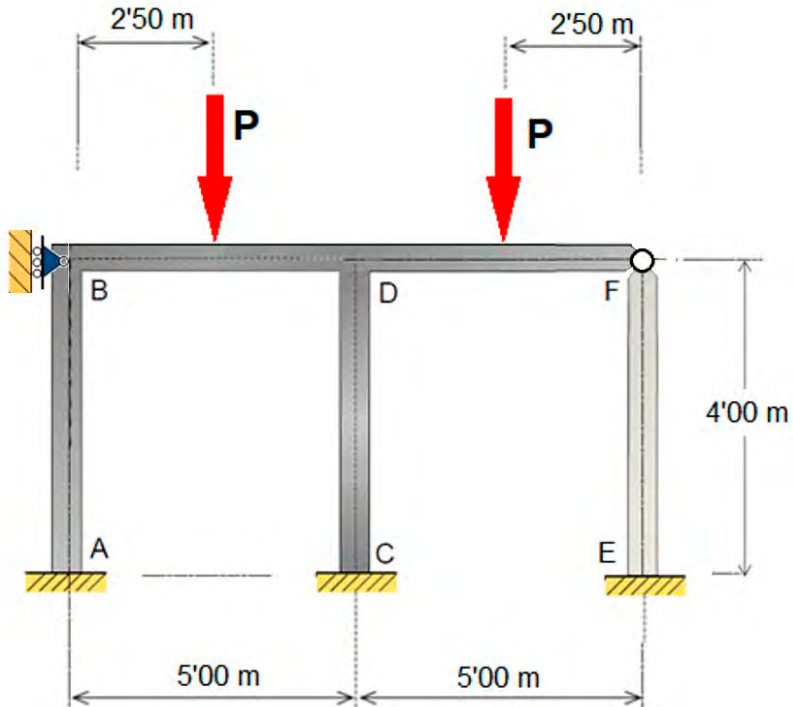


Figura 2-110. Pórtico de 3 paires e 2 vans, con articulación en nodo superior dereito

Todas as barras son de formigón armado de 0'40 m x 0'40 m de sección transversal.

Solución:

- a) Calculamos a nova táboa de constantes elásticas. No nodo B serán as mesmas que no problema anterior.

Nodo B	
$K_{BA} = \frac{4EI}{4}$	$r_{BA} = \frac{5/5}{5/5 + 4/5} = \frac{5}{9}$
$K_{BD} = \frac{4EI}{5}$	$r_{BD} = \frac{4/5}{5/5 + 4/5} = \frac{4}{9}$

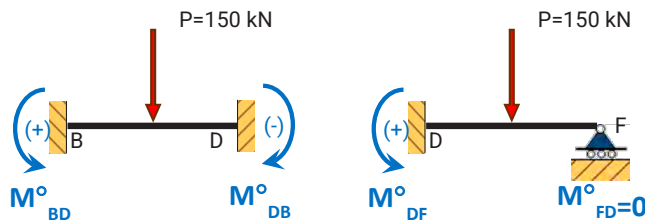
Nodo D	
$K_{DB} = \frac{4EI}{5}$	$r_{DB} = \frac{4}{4 + 5 + 3} = \frac{1}{3}$
$K_{DC} = \frac{4EI}{4}$	$r_{BD} = \frac{5}{4 + 5 + 3} = \frac{5}{12}$
$K_{DF} = \frac{3EI}{5}$	$r_{DF} = \frac{3}{4 + 5 + 3} = \frac{3}{12}$

O Nodo F é articulado en todas as barras que concorren nel, polo tanto todos os seus coeficientes de reparto serán nulos.

Coefficientes de transmisión.

$$t_{BA} = t_{BD} = t_{DB} = t_{DC} = \frac{1}{2}; \quad t_{DF} = 0$$

Momentos de encastamento perfecto, coas cargas P actuando no centro do van:



$$M_{BD}^0 = +\frac{PL}{8} = +\frac{150 \cdot 5}{8} = +93'75 \text{ kNm}; \quad M_{DB}^0 = -93'75 \text{ kNm}$$

$$M_{DF}^0 = +\frac{3PL}{16} = +\frac{3 \cdot 150 \cdot 5}{16} = +140'63 \text{ kNm}; \quad M_{FD}^0 = 0$$

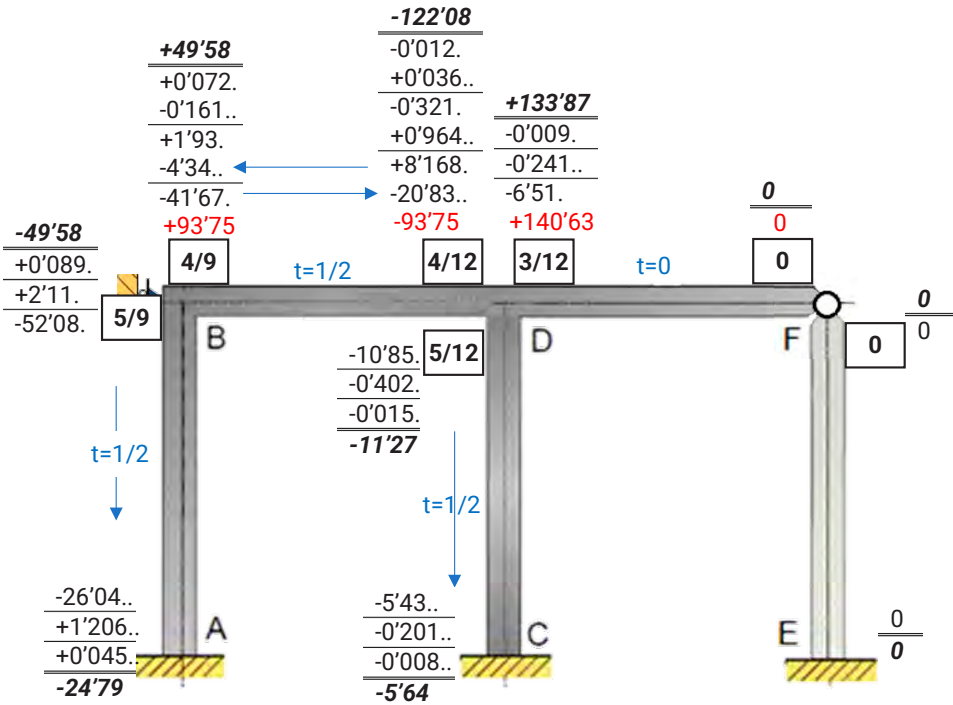


Figura 2-111. Sequencia de equilibrado de nós

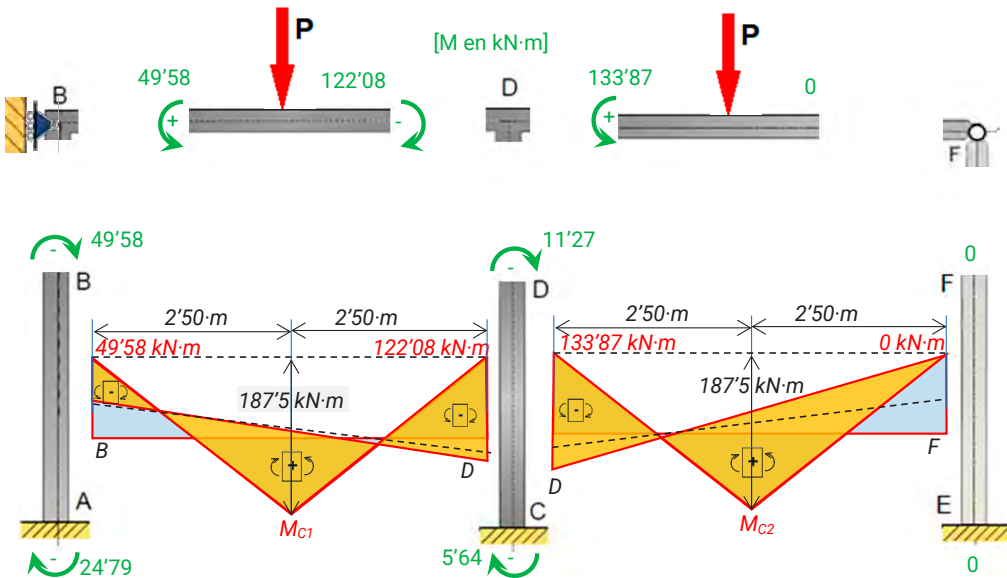


Figura 2-112. Flexões em extremos de barras e diagramas nos lintéis horizontais

$$M_{C1} = \frac{150 \cdot 5}{4} - \frac{49'58 + 122'08}{2} = 187'5 - 85'83 = 101'62 \text{ kNm}$$

$$M_{C2} = \frac{150 \cdot 5}{4} - \frac{133'87}{2} = 187'5 - 66'94 = 120'57 \text{ kNm}$$

Como podemos observar, ó introducir unha rótula no nodo F, o que sucede é que o diagrama de momentos redistribúese, e o que antes soportaba o nodo F ten que ser asumido polo resto da estrutura, especialmente polos extremos das barras do nodo D, que pasan de soportar un momento de 114,58 N·m a un momento de 133,87 N·m no extremo D da barra FD.

204

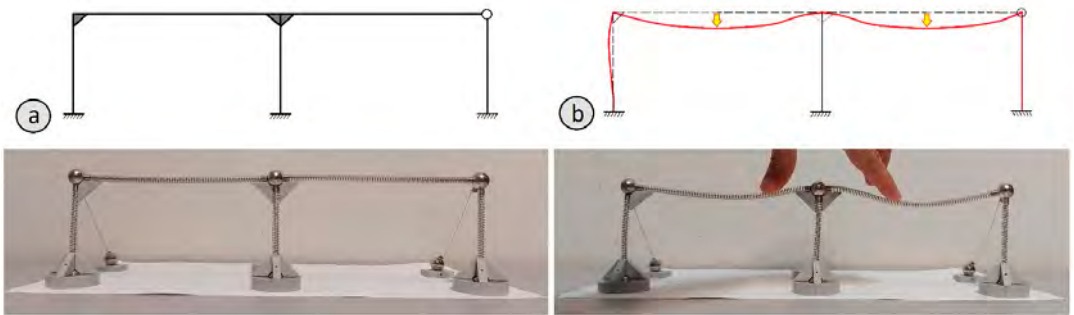


Figura 2-113. a) Pórtico dobre con dous nodos ríxidos e un nodo de extremo articulado e as bases empotradas, sen carga aplicada.

2.2.17 Exercício R-17. Pórtico de 3 piares e 2 vans com carga assimétrica

- Para $P=150$ kN, calcular os momentos flexores nos extremos das barras da seguinte estrutura intranslacional.
- Calcular os diagramas de flexores das barras BD e DF.

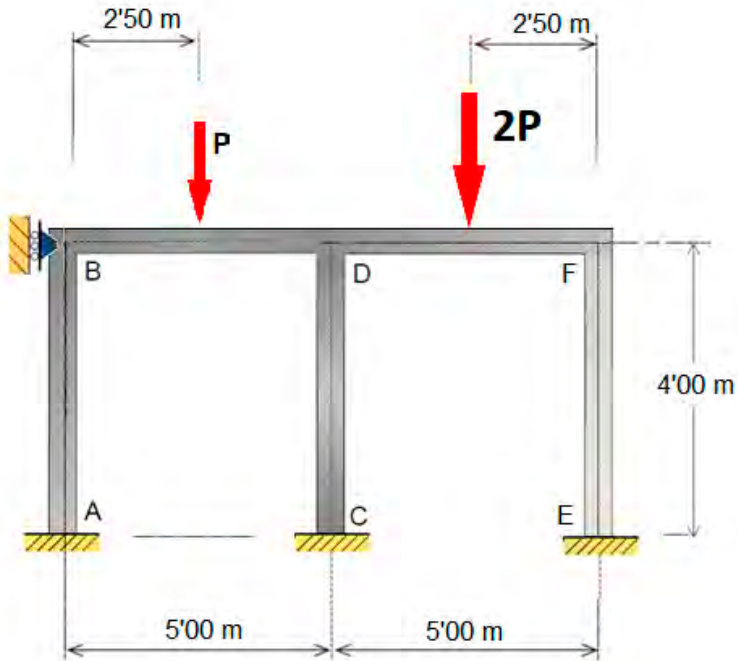


Figura 2-114. Pórtico de 3 columnas e 2 vans com carga assimétrica

Todas as barras son de formigón armado de 0'40 m x 0'40 m de sección transversal

Solución:

a) Calculamos os momentos de encastamento perfecto. As cargas P actúan no centro dos vans:

$$M_{BD}^0 = +\frac{PL}{8} = +\frac{150 \cdot 5}{8} = +93'75 \text{ kNm}; M_{DB}^0 = -\frac{PL}{8} = -\frac{150 \cdot 5}{8} = -93'75 \text{ kNm}$$

$$M_{DF}^0 = +\frac{PL}{8} = +\frac{300 \cdot 5}{8} = +187'5 \text{ kNm}; M_{FD}^0 = -\frac{PL}{8} = -\frac{300 \cdot 5}{8} = -187'5 \text{ kNm}$$

206

O diagrama de flexores dos linteis (barras BD e DF), en situación de nodos extremos perfectamente encastados é:

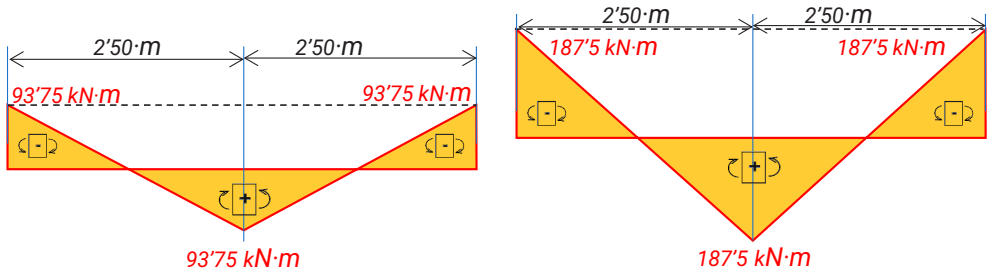


Figura 2-115. Diagramas iniciais das barras horizontais cos xiros bloqueados nos nodos extremos

Equilibrado de nodos. Secuencia F-D-B-F-D-B-F-D-B

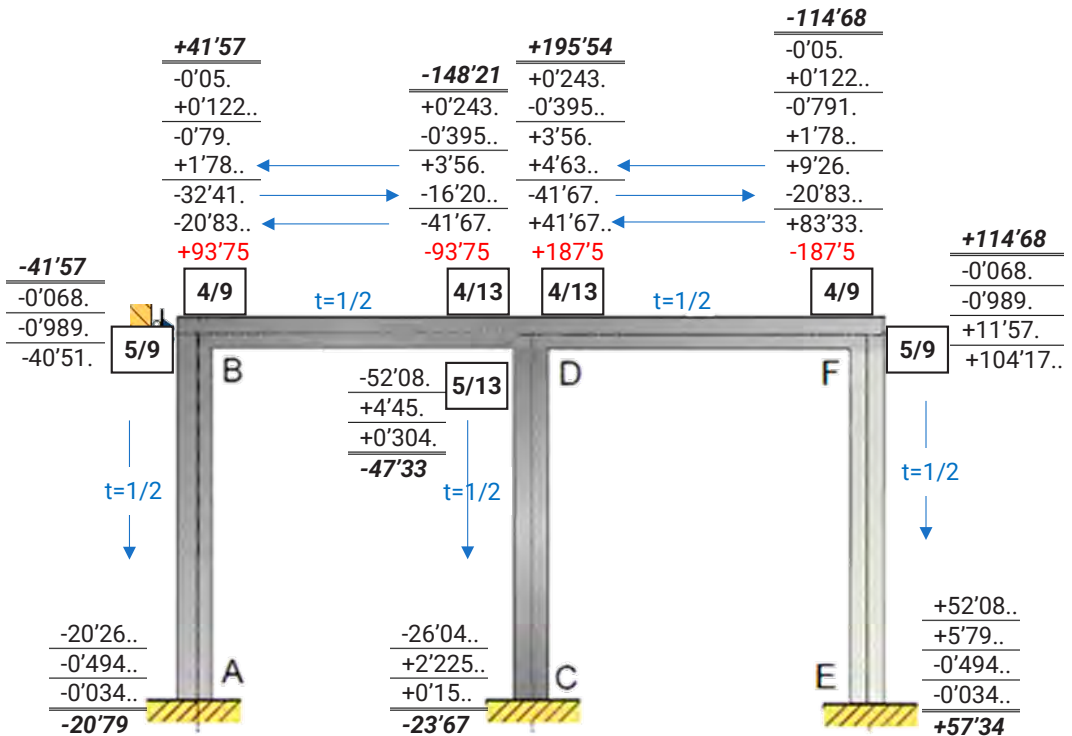
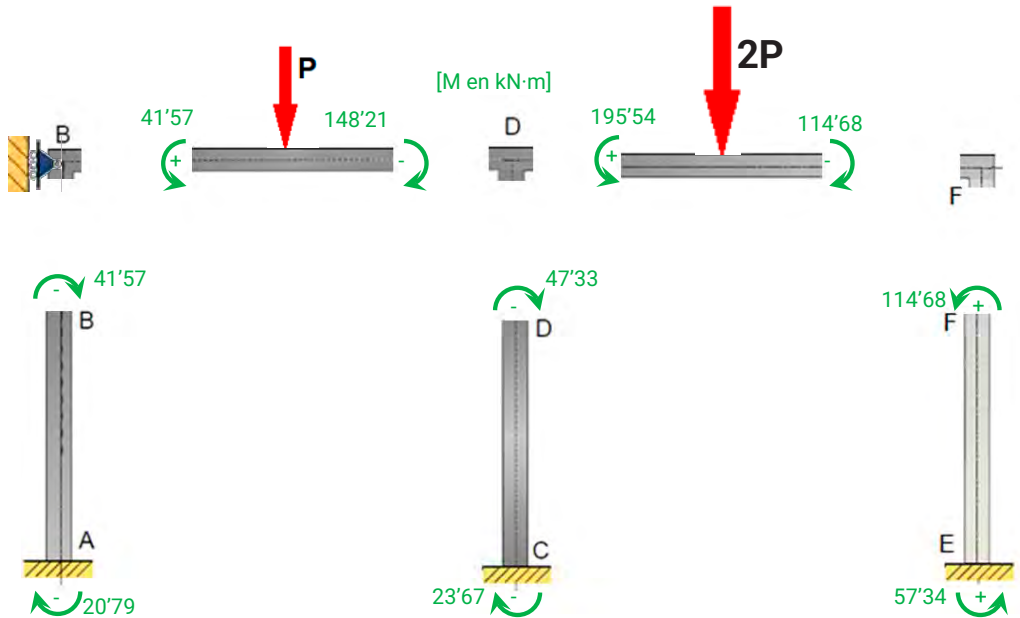


Figura 2-116. Secuencia de equilibrio de nodos e resultado final

b) Calcular os diagramas de flexores das barras BD e DF



207

Figura 2-117. Valores dos momentos resultantes e sentido de xiro

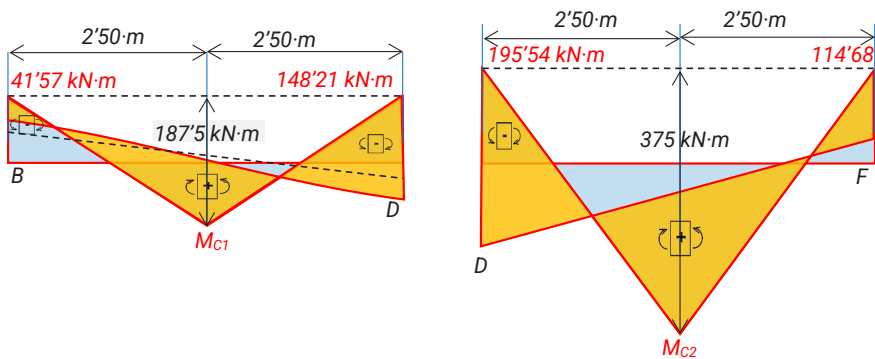


Figura 2-118. Diagramas de flexores resultantes (cor laranja), comparados cos iniciais (em azul)

$$M_{C1} = \frac{150 \cdot 5}{4} - \frac{41'57 + 148'21}{2} = 187'5 - 94'89 = 92'61 \text{ kNm}$$

$$M_{C2} = \frac{300 \cdot 5}{4} - \frac{195'54 + 114'68}{2} = 375 - 155'11 = 219'89 \text{ kNm}$$

2.2.18 Exercicio R-18. Pórtico de 3 barras. Desprazamento lateral por unha forza horizontal

Para o pórtico de unións ríxidas nos nodos, igual ó do exercicio R-5, ó que se lle aplica neste caso unha carga horizontal no nodo B, de valor $R_B=3'2 \text{ N}$ (igual en módulo á reacción calculada no referido exercicio R-5), a cal produce un desprazamento Δ , calcule:

- Valor dos momentos nos extremos das barras para o pórtico
- O valor do desprazamento Δ
- Que pasaría se o pórtico do exercicio R-5 fose transaccional?

208

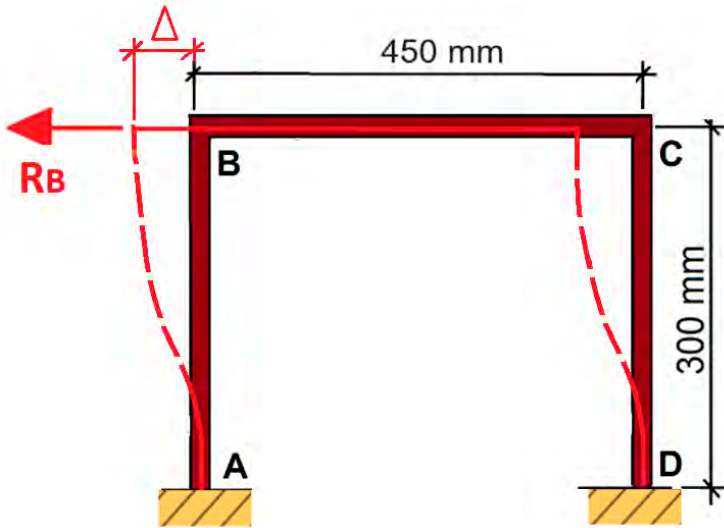


Figura 2-119. Pórtico de 3 barras translacional, con carga horizontal

Solución:

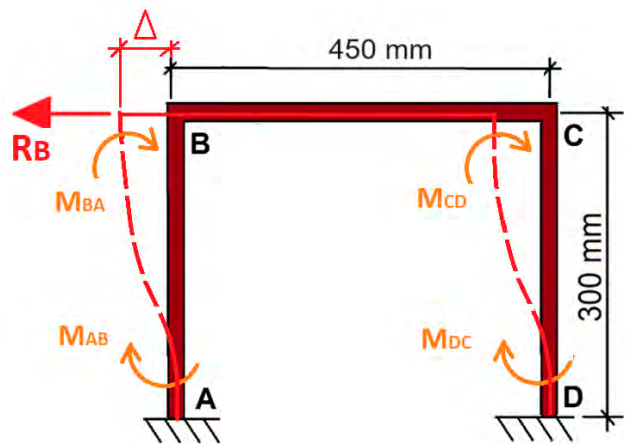
Táboa dos valores de rixidez ó xiro e coeficientes de reparto:

Nodo B		
Barra BA	$K_{BA} = \frac{4EI}{300}$	$r_{BA} = \frac{\frac{4EI}{300}}{\frac{10EI}{450}} = \frac{3}{5} = 0,6000$
Barra BC	$K_{BC} = \frac{4EI}{450}$	$r_{BC} = \frac{\frac{4EI}{450}}{\frac{10EI}{450}} = \frac{2}{5} = 0,4000$
Sumas Nodo B	$K_C = \frac{10EI}{450}$	$r_{BA} + r_{BC} = 0,6 + 0,4 = 1,0$

209

Nodo C		
Barra CB	$K_{CB} = \frac{4EI}{450}$	$r_{CB} = \frac{\frac{4EI}{450}}{\frac{10EI}{450}} = \frac{2}{5} = 0,4000$
Barra CD	$K_{CD} = \frac{4EI}{300}$	$r_{CD} = \frac{\frac{4EI}{300}}{\frac{10EI}{450}} = \frac{3}{5} = 0,6000$
Sumas Nodo B	$K_C = \frac{10EI}{450}$	$r_{CB} + r_{CD} = 0,4 + 0,6 = 1,0$

Calculo dos momentos de encastamento perfecto



$$M_{AB} = \frac{6EI}{L^2} \Delta = M_{BA} = M_{CD} = M_{DC}$$

Tomando $E_{\text{(aço)}} = 2'1 \cdot 10^5$; $L = 300 \text{ mm}$, $I = (15 \times 4^3 / 12) = 80 \text{ mm}^4$

$$M_{AB} = \frac{6 \cdot 2'1 \cdot 10^5 \cdot 80}{(300)^2} \Delta = -1120 \Delta \text{ N}$$

Aplicamos o equilibrado de nodos seguindo o método de Cross, explicado previamente. Os valores dos momentos, deixáremos en función de Δ , que é unha constante. O valor real do desprazamento Δ calculáremolo o final, e entón si o substituiremos. Neste caso empregamos un só decimal para o calculo de cada valor dos flexores. No momento que só traballamos con decimais paramos o equilibrado de nodos.

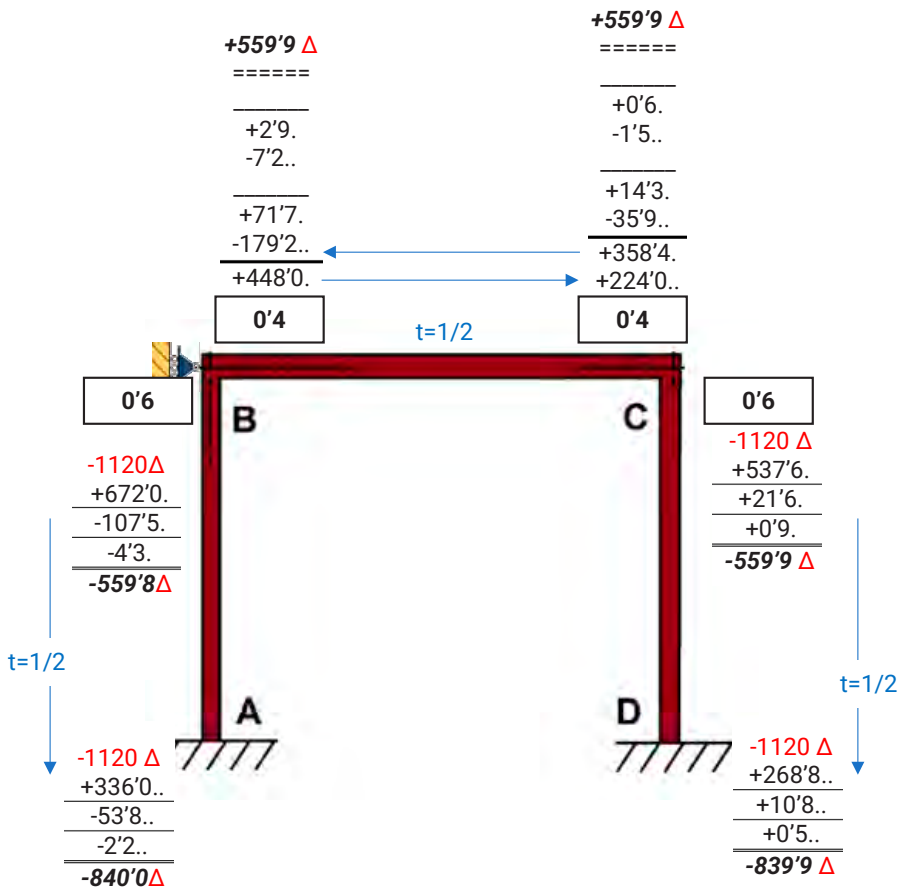


Figura 2-120. Secuencia de equilibrado de nodos. Valores en función de Δ

Cos valores obtidos, podemos representar cada barra cos seus momentos extremos, aínda que estos están en función de Δ .

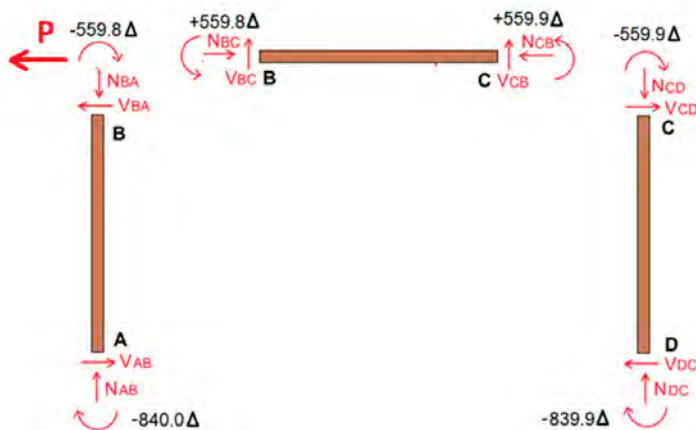


Figura 2-121. Sentidos de xiro dos momentos extremos, en función de Δ

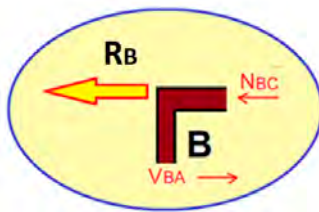
211

Para calcular o valor de Δ , de xeito similar a como se fixo previamente, calculamos o valor da Forza R_B aplicada en función deste Δ , equilibrando o nodo B. Para calcular o valor de V_{BA} , tomamos momentos das forzas da barra AB respecto o extremo A. De igual xeito se fai para calcular V_{CD}

$$V_{BA} = \frac{559.8 + 840.0}{300} = 4'67\Delta \text{ [N]} \leftarrow$$

$$V_{CD} = \frac{-559.8 - 840.0}{300} = -4'67\Delta \text{ N, sabendo que en valor módulo: } V_{CD} = N_{CB} = N_{BC}$$

Realizamos o equilibrio do nodo B, pero tendo en conta que, como xa sabemos de antemán o valor de R_B ($3'2\text{N}$), obtemos o valor de Δ



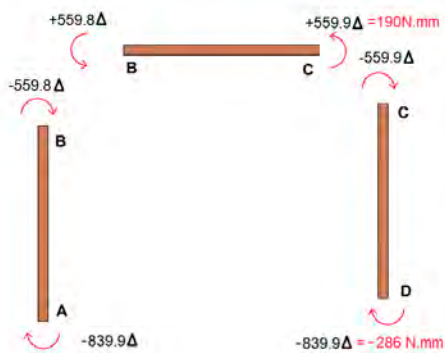
$$R_B = V_{BA} - N_{BC}$$

$$R_B = 3'2\text{N} = 4.67\Delta + 4.67\Delta = 9.33\Delta$$

$$\Delta = 0.34 \text{ mm}$$

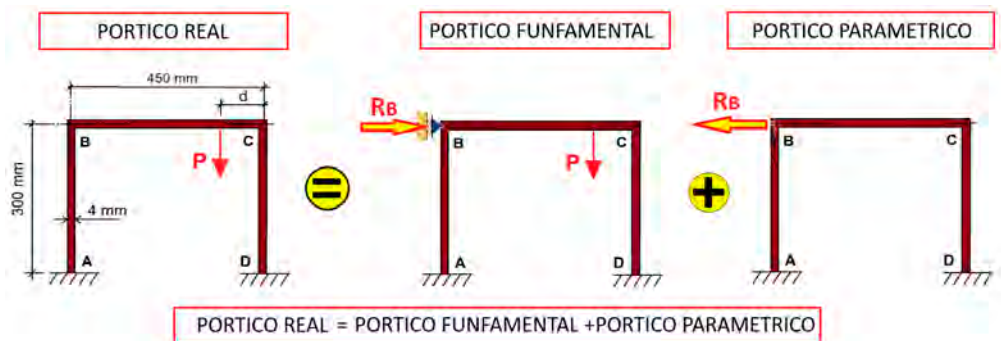
Unha vez calculado o valor Δ xa se poden calcular os momentos los debidos ó posible desprazamento Δ do pórtico pola forza horizontal en B. Estes serían os momentos producidos por una forza R_B horizontal,

equivalente mais de sentido contrario á reacción producida no nodo B no exercicio R-5 do pórtico, igual que este pero cunha carga externa vertical P e apoio externo en B que o convertía en intranslacional.

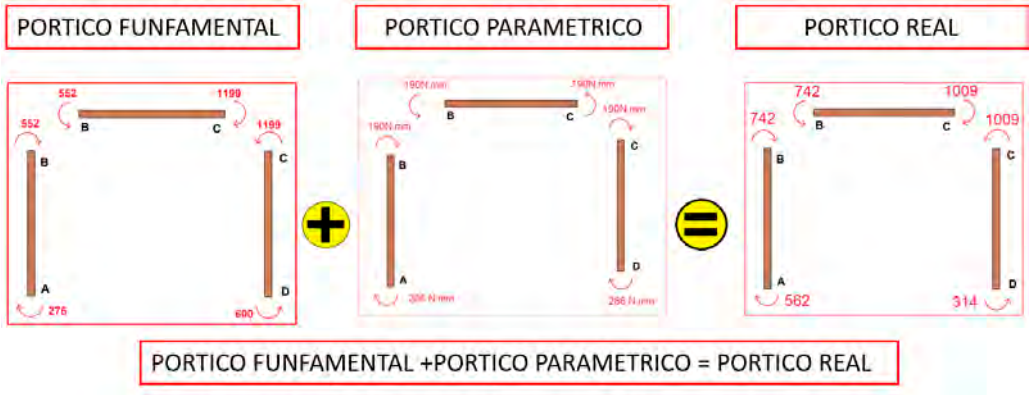


Facendo un resumo entre o calculado neste exercicio e o calculado no exercicio R-5, podemos chegar ás seguintes conclusións:

- Inicialmente o pórtico real non tiña ningún tipo de restrición de translacionalidade, como se pode ver na figura inferior (Estado Real ou Pórtico Real).
- Debido a que os pórticos son realmente translacionais, se lle impón unha restrición no nodo B para que pase a ser intranslacional (o que se denomina estado Fundamental ou pórtico Fundamental, ver figura inferior). É precisamente nese estado onde podemos calcular a reacción R_B que se produce no apoio colocado en B para que o pórtico pase a ser intranslacional.
- Si na realidade o pórtico é translacional, debemos sumarlle os esforzos que se producen na translacionalidade. É dicir, como se ó pórtico sen carga ningunha lle aplicásemos unha carga R_B igual e contraria a reacción que se produce no apoio B, a cal vai producir un desprazamento horizontal en B de valor Δ . A este pórtico que se calcula para un desprazamento de valor Δ debido a carga R_B , denomínase pórtico paramétrico ou estado paramétrico.
- Polo tanto o estado real ou pórtico real será igual a suma do estado fundamental ou intranslacional e o estado paramétrico ou pórtico paramétrico. Neste estado real no que non existe reacción en B, a suma das reaccións en B fundamental e paramétrica anuláanse por ser iguais e de sentidos contrarios.



Para saber o valor dos momentos reais no pórtico orixinal sen apoio adicional en B, temos que sumar os momentos do estado paramétrico (pórtico intranslacional) e os momentos do estado paramétrico (os debidos á translación do pórtico):



213

Sumando os momentos do estado fundamental e do estado paramétrico, podemos obter o diagrama de momentos do pórtico real:

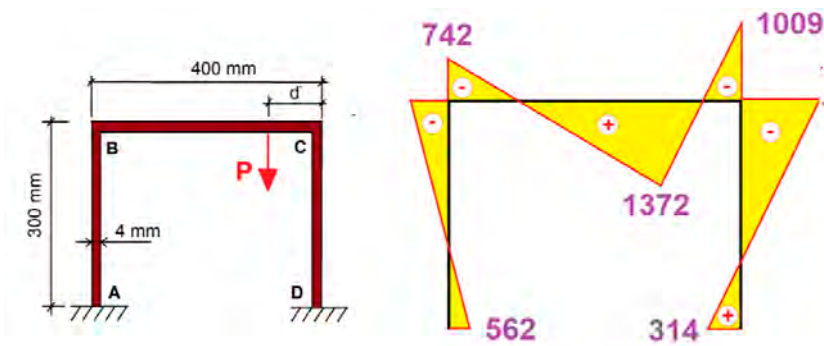
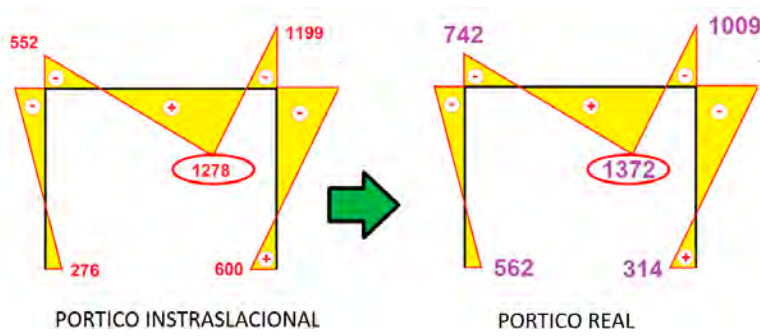


Figura 2-122. Diagrama de flexores no pórtico real

Se comparamos o diagrama do pórtico intranslacional co pórtico real, que sí pode desprazarse, podemos observar que a distribución dos momentos é diferente. En casos como este, poden aumentar os valores dos momentos máximos que se producen no pórtico (incluso podería variar o lugar onde se producen). **Por iso e moi importante ter en conta a translacionalidade dos pórticos**, xa que pasamos de un máximo de 1278 N·mm a 1372 N·mm



Na seguinte Figura 2-123, pode observarse:

a) Pórtico igual o do exercicio sen ningunha carga aplicada (comparador a 0). **b)** Pórtico con carga vertical aplicada de 50 N segundo o exercicio R-5, onde se produce un desprazamento lateral de valor aprox. de 0'34 mm (ver comparador) debido á translacionalidade do pórtico. **c)** Aplicación dunha carga horizontal de 3,2 N que contrarresta o desprazamento lateral del pórtico, debido á translacionalidade, volvendo o comparador a valor 0.

214

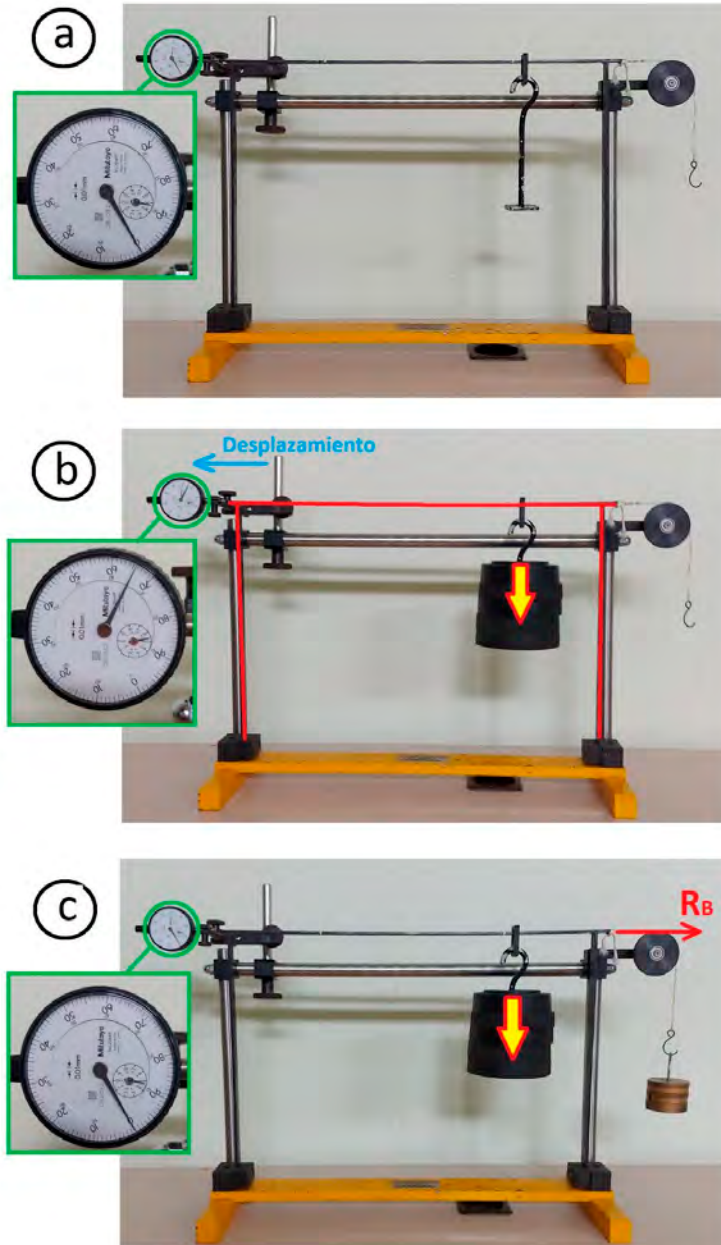


Figura 2-123. Ensaio de laboratorio do pórtico calculado

2.3 Táboas de momentos de encastamento perfecto

2.3.1 Barras perfectamente encastadas en ambos extremos:

MOMENTOS FLECTORES EN EXTREMOS DE BARRAS:

CRITERIO DE SIGNOS CONSIDERADO EN MÉTODO DE CROSS:



	$M_{AB} = +\frac{ql^2}{12}$	$M_{BA} = -\frac{ql^2}{12}$
	$M_{AB} = +\frac{q}{l^2} \left[l^2 \cdot \frac{(a+c)^2 - a^2}{2} - 2l \cdot \frac{(a+c)^3 - a^3}{3} + \frac{(a+c)^4 - a^4}{4} \right]$	$M_{BA} = -\frac{q}{l^2} \left[l \cdot \frac{(a+c)^3 - a^3}{3} - \frac{(a+c)^4 - a^4}{4} \right]$
	$M_{AB} = +\frac{qc^2}{12l^2} [2l \cdot (3l - 4c) + 3c^2]$	$M_{BA} = -\frac{qc^3}{12l^2} (4l - 3c)$
	$M_{AB} = +\frac{qc^3}{12l^2} (4l - 3c)$	$M_{BA} = -\frac{qc^2}{12l^2} [2l \cdot (3l - 4c) + 3c^2]$
	$M_{AB} = +\frac{ql^2}{30} = +\frac{Ql}{15}$ $Q = ql/2$	$M_{BA} = -\frac{ql^2}{20} = -\frac{Ql}{10}$ $Q = ql/2$
	$M_{AB} = +\frac{ql^2}{20} = +\frac{Ql}{10}$ $Q = ql/2$	$M_{BA} = -\frac{ql^2}{30} = -\frac{Ql}{15}$ $Q = ql/2$

MOMENTOS FLECTORES EN EXTREMOS DE BARRAS:
CRITERIO DE SIGNOS CONSIDERADO EN MÉTODO DE CROSS:



	$M_{AB} = +\frac{5}{96}ql^2$	$M_{BA} = -\frac{5}{96}ql^2$
	$M_{AB} = +\frac{17}{384}ql^2$	$M_{BA} = -\frac{17}{384}ql^2$
	$M_{AB} = +\frac{Pab^2}{l^2}$	$M_{BA} = -\frac{Pba^2}{l^2}$
	$M_{AB} = +\frac{Pl}{8}$	$M_{BA} = -\frac{Pl}{8}$
	$M_{AB} = +\frac{P \cdot a(a+b)}{l}$	$M_{BA} = -\frac{P \cdot a(a+b)}{l}$
	$M_{AB} = +\frac{P}{l^2}(ab^2 - ba^2)$	$M_{BA} = +\frac{P}{l^2}(ab^2 - ba^2)$

2.3.2 Barras articuladas nun extremo e perfectamente encastadas no outro

MOMENTOS FLECTORES EN EXTREMOS DE BARRAS:

CRITERIO DE SIGNOS CONSIDERADO EN MÉTODO DE CROSS:



$$M'_{AB} = M_{AB} - M_{AB}$$

$$M'_{BA} = M_{BA} - (M_{AB} / 2)$$

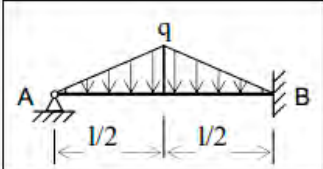
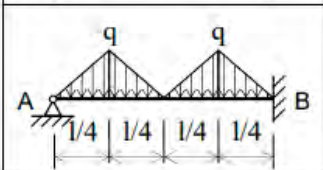
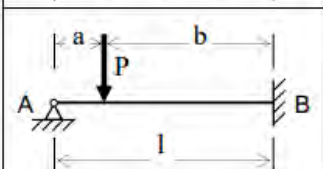
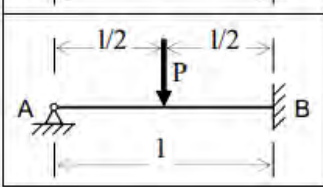
	$M'_{AB} = 0$	$M'_{BA} = -\frac{ql^2}{8}$
	$M'_{AB} = 0$	$M'_{BA} = -\frac{q}{8l^2} \left[a^4 - (a+c)^4 + 2l^2c(2a+c) \right]$
	$M'_{AB} = 0$	$M'_{BA} = -\frac{qc^2}{8l^2} (2l^2 - c^2)$
	$M'_{AB} = 0$	$M'_{BA} = -\frac{qc^2}{8l^2} (l+a)^2$
	$M'_{AB} = 0$	$M'_{BA} = -\frac{ql^2}{15}$
	$M'_{AB} = 0$	$M'_{BA} = -\frac{7ql^2}{120}$

MOMENTOS FLECTORES EN EXTREMOS DE BARRAS:
CRITERIO DE SIGNOS CONSIDERADO EN MÉTODO DE CROSS:



$$M'_{AB} = M_{AB} - M_{AB}$$

$$M'_{BA} = M_{BA} - (M_{AB} / 2)$$

	$M'_{AB} = 0$	$M'_{BA} = -\frac{5}{64}ql^2$
	$M'_{AB} = 0$	$M'_{BA} = -\frac{17}{256}ql^2$
	$M'_{AB} = 0$	$M'_{BA} = -\frac{Pab}{l^2}\left(a + \frac{b}{2}\right)$
	$M'_{AB} = 0$	$M'_{BA} = -\frac{3Pl}{16}$

2.4 Bibliografía capítulo 2, método de Cross

Argüelles Álvarez, R. (1986). *Cálculo de estructuras*. Madrid: Univ. Politécnica de Madrid. ETS Ingenieros de Montes. Sección de publicaciones.

Calavera Ruiz, J. (2008). *Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón en masa, armado y pretensado. Tomo I*. Madrid: Intemac.

Charon, P. (1968). *El método de Cross y el cálculo práctico de las construcciones hiperestáticas : teoría y aplicaciones*. Madrid: Aguilar.

219

Prenzlów, C. (1974). *Cálculo de estructuras por el método de Cross*. Barcelona: Gustavo Gili.

Vázquez, M. (1991). *Resistencia de materiales*. Madrid: Noela.

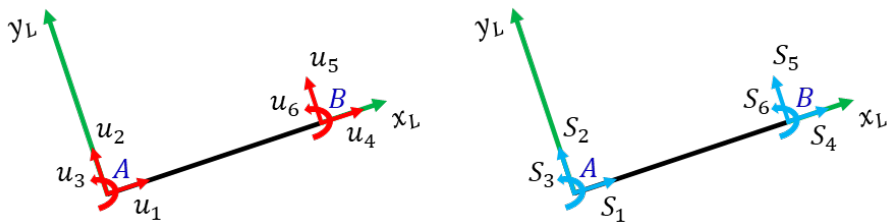
3. Cálculo matricial de estruturas de barras

3.1 Conceptos teóricos

3.1.1 Matriz de rixidez de barra de pórtico plano

- **Coordenadas locais¹**

É un sistema de referencia propio de cada barra, onde o eixo local x_L coincide coa directriz da barra.



$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ - \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \\ - & - & - \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ - \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_A \\ S_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{AA}]_L & [k_{AB}]_L \\ [k_{BA}]_L & [k_{BB}]_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix}$$

¹ Esta obra emprega a formulación e nomenclatura propostas orixinalmente nas referencias [1,2,3]

$$\{S\} = [k]_L \cdot \{u\}$$

sendo:

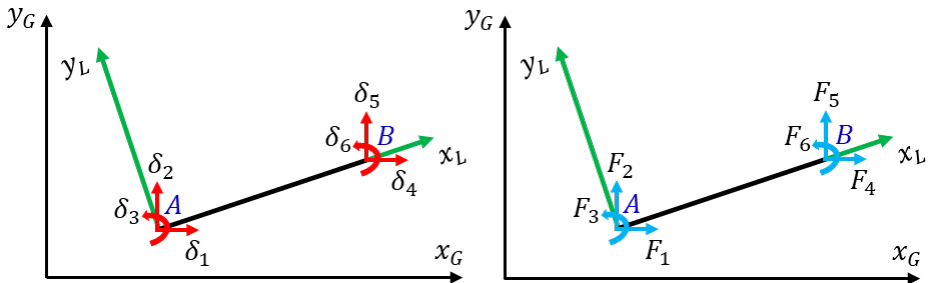
$\{S\}$ o vector de solicitacións (forzas e momentos) nos extremos A e B da barra en coordenadas locais

$\{u\}$ o vector de desprazamentos nos extremos A e B da barra en coordenadas locais

$[k]_L$ a matriz de rixidez da barra en coordenadas locais

- Coordenadas globais**

É o sistema de referencia xeral, e dicir, a nivel de toda a estrutura.



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A \cos^2 \alpha + \frac{12I \sin^2 \alpha}{L^2} & \sin \alpha \cos \alpha \left(A - \frac{12I}{L^2} \right) & -\frac{6I \sin \alpha}{L} & -A \cos^2 \alpha - \frac{12I \sin^2 \alpha}{L^2} & -\sin \alpha \cos \alpha \left(A - \frac{12I}{L^2} \right) & -\frac{6I \sin \alpha}{L} \\ \sin \alpha \cos \alpha \left(A - \frac{12I}{L^2} \right) & A \sin^2 \alpha + \frac{12I \cos^2 \alpha}{L^2} & \frac{6I \cos \alpha}{L} & -\sin \alpha \cos \alpha \left(A - \frac{12I}{L^2} \right) & -A \sin^2 \alpha - \frac{12I \cos^2 \alpha}{L^2} & \frac{6I \cos \alpha}{L} \\ -\frac{6I \sin \alpha}{L} & \frac{6I \cos \alpha}{L} & 4I & \frac{6I \sin \alpha}{L} & -\frac{6I \cos \alpha}{L} & 2I \\ -A \cos^2 \alpha - \frac{12I \sin^2 \alpha}{L^2} & -\sin \alpha \cos \alpha \left(A - \frac{12I}{L^2} \right) & \frac{6I \sin \alpha}{L} & A \cos^2 \alpha + \frac{12I \sin^2 \alpha}{L^2} & \sin \alpha \cos \alpha \left(A - \frac{12I}{L^2} \right) & \frac{6I \sin \alpha}{L} \\ -\sin \alpha \cos \alpha \left(A - \frac{12I}{L^2} \right) & -A \sin^2 \alpha - \frac{12I \cos^2 \alpha}{L^2} & -\frac{6I \cos \alpha}{L} & \sin \alpha \cos \alpha \left(A - \frac{12I}{L^2} \right) & A \sin^2 \alpha + \frac{12I \cos^2 \alpha}{L^2} & -\frac{6I \cos \alpha}{L} \\ -\frac{6I \sin \alpha}{L} & \frac{6I \cos \alpha}{L} & 2I & \frac{6I \sin \alpha}{L} & -\frac{6I \cos \alpha}{L} & 4I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{AA}]_G & [k_{AB}]_G \\ [k_{BA}]_G & [k_{BB}]_G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = [k]_G \cdot \{\delta\}$$

sendo:

$\{F\}$ o vector de forzas internas nos extremos A e B da barra en coordenadas globais

$\{\delta\}$ o vector de desprazamentos nos extremos A e B da barra en coordenadas globais

$[k]_G$ a matriz de rixidez da barra en coordenadas globais

A relación existente entre as diferentes magnitudes expresadas en coordenadas locais ou globais ven dada polas seguintes expresións:

$$\{F\} = [L] \cdot \{S\}$$

$$\{\delta\} = [L] \cdot \{u\}$$

$$[k]_G = [L] \cdot [k]_L \cdot [L]^T$$

onde $[L]$ representa a matriz de cambio de coordenadas:

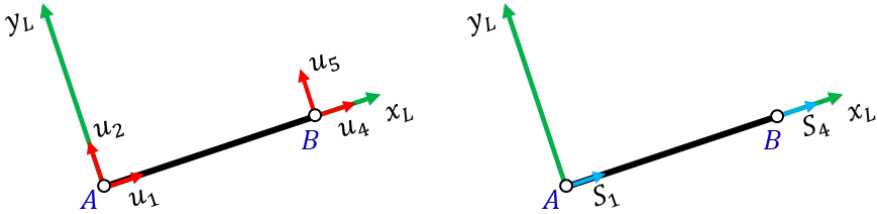
$$[L] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & | & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo α a orientación da barra respecto do eixo global x_G .

3.1.2 Matriz de rigidez de barra de celosía plana

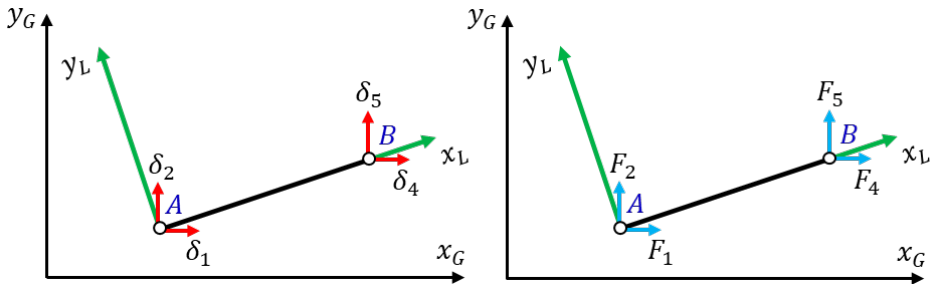
- Coordenadas locais

224



$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ 0 \\ - \\ S_4 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ - \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix}$$

- Coordenadas globais



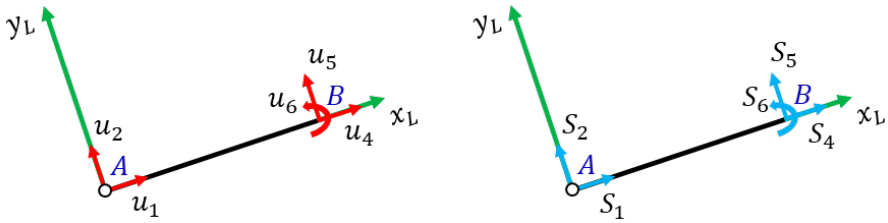
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ - \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ - & - & - & - \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ - \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{Bmatrix}$$

3.1.3 Outras matrizes de rigidez

3.1.3.1 Matriz de rigidez de barra articulada-empotrada

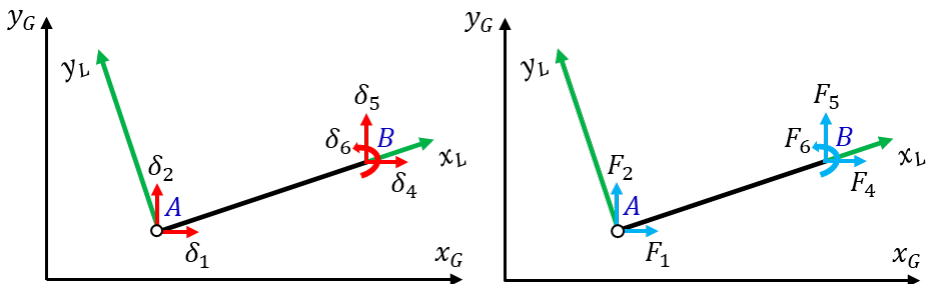
- Coordenadas locais

225



$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ - \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ - \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

- Coordenadas globais



226

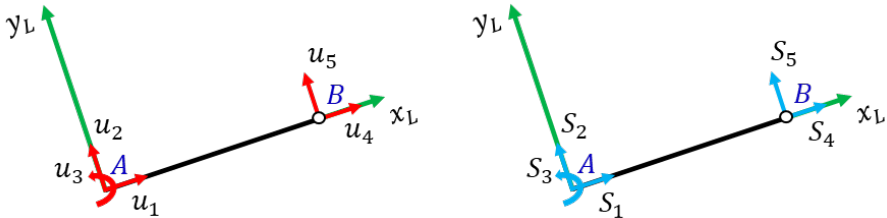
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ - \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \frac{Ac^2}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & \frac{Asc}{L} - \frac{3Is^2}{L^3} & 0 & | & -\frac{Ac^2}{L} - \frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{Asc}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{3Is}{L^2} \\ \frac{Asc}{L} - \frac{3Is^2}{L^3} & \frac{As^2}{L} + \frac{3Ic^2}{L^3} & 0 & | & -\frac{Asc}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{As^2}{L} - \frac{3Ic^2}{L^3} & \frac{3Ic}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & | & - & - & - \\ -\frac{Ac^2}{L} - \frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{Asc}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & 0 & | & \frac{Ac^2}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & \frac{Asc}{L} - \frac{3Is^2}{L^3} & \frac{3Is}{L^2} \\ \frac{Asc}{L} - \frac{3Is^2}{L^3} & \frac{As^2}{L} + \frac{3Ic^2}{L^3} & 0 & | & -\frac{Asc}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{As^2}{L} - \frac{3Ic^2}{L^3} & -\frac{3Ic}{L^2} \\ -\frac{3Is}{L^2} & \frac{3Ic}{L^2} & 0 & | & \frac{3Is}{L^2} & -\frac{3Ic}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ - \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}$$

$$c = \cos \alpha$$

$$s = \sin \alpha$$

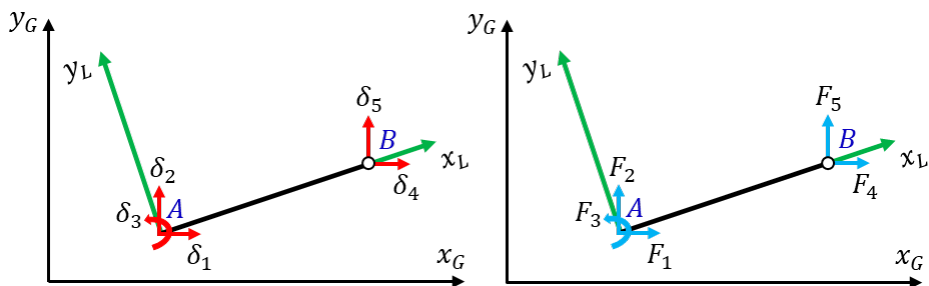
3.1.3.2 Matriz de rigidez de barra empotrada- articulada

- Coordenadas locais**



$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ - \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & | & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & | & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & | & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ - & - & - & | & - & - & - \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & | & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & | & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ - \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

- Coordenadas globais



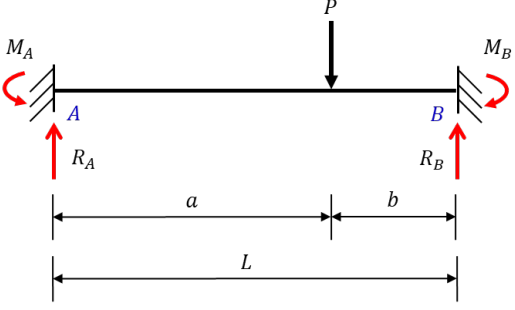
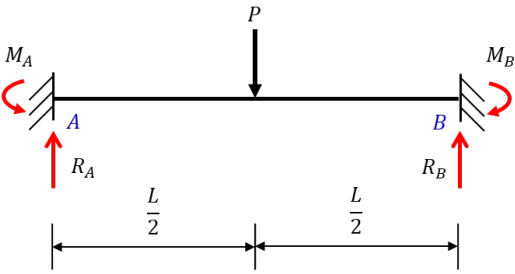
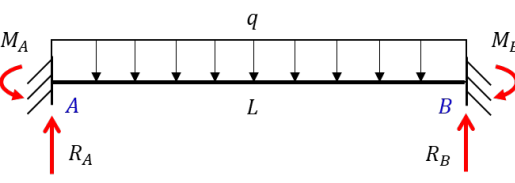
227

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ - \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} \frac{Ac^2}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & \frac{Asc}{L} - \frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{3Is}{L^2} & -\frac{Ac^2}{L} - \frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{Asc}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & 0 \\ \frac{Asc}{L} - \frac{3Is^2}{L^3} & \frac{As^2}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & \frac{3Is}{L^2} & \frac{Asc}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & \frac{As^2}{L} - \frac{3Is^2}{L^3} & 0 \\ -\frac{3Is}{L^2} & \frac{3Is}{L^2} & \frac{3I}{L} & \frac{3Is}{L^2} & -\frac{3Is}{L^2} & 0 \\ -\frac{Ac^2}{L} - \frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{Asc}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{3Is}{L^2} & \frac{Ac^2}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & -\frac{Asc}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & 0 \\ \frac{Asc}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & \frac{As^2}{L} - \frac{3Is^2}{L^3} & \frac{3Is}{L^2} & \frac{Asc}{L} - \frac{3Is^2}{L^3} & \frac{As^2}{L} + \frac{3Is^2}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ - \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}$$

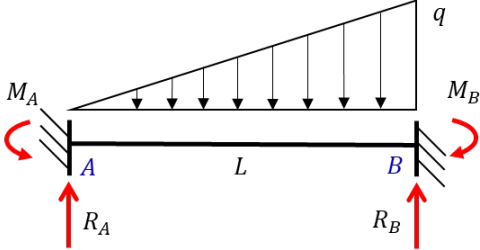
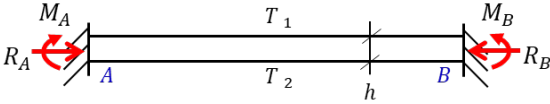
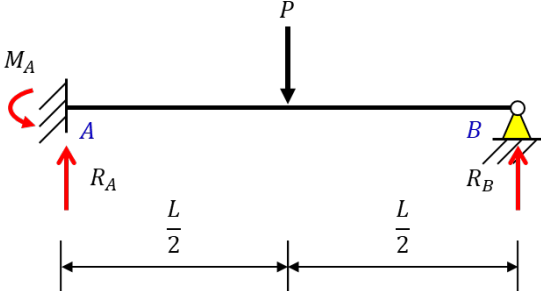
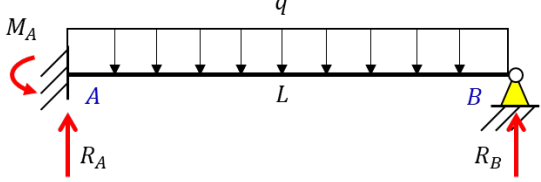
$$c = \cos \alpha$$

$$s = \sin \alpha$$

3.1.4 Táboas de forças e momentos de empotramento perfectó

	$R_A = \frac{Pb^2}{L^3}(L + 2a)$ $R_B = \frac{Pa^2}{L^3}(L + 2b)$ $M_A = \frac{Pab^2}{L^2}$ $M_B = \frac{Pba^2}{L^2}$
	$R_A = R_B = \frac{P}{2}$ $M_A = M_B = \frac{PL}{8}$
	$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$ $M_A = M_B = \frac{qL^2}{12}$

* Nota: empotramento ou encastamento

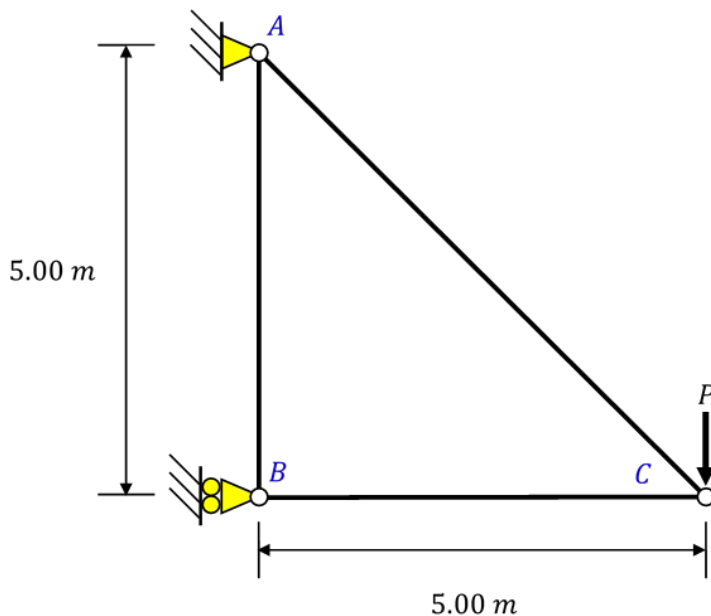
	$R_A = \frac{3qL}{20} \quad R_B = \frac{7qL}{20}$ $M_A = \frac{qL^2}{30} \quad M_B = \frac{qL^2}{20}$
	$R_A = R_B = EA\alpha \frac{(T_1 + T_2)}{2}$ $M_A = M_B = EI\alpha \frac{(T_1 - T_2)}{h}$
	$M_A = \frac{3PL}{16}$ $R_A = \frac{11P}{16}$ $R_B = \frac{5P}{16}$
	$M_A = \frac{qL^2}{8}$ $R_A = \frac{5qL}{8}$ $R_B = \frac{3qL}{8}$

3.2 Problemas de cálculo matricial de estruturas de barras

3.2.1 Exercicio M-1. Celosía triangular con carga puntual vertical

Para a estrutura articulada plana da figura, determinar:

- Desprazamentos dos nós
- Reaccións nos apoios A e B
- Esforzo axial na barra AC



$$P = 10 \text{ kN}; E = 210 \text{ GPa}; A = 1500 \text{ mm}^2$$

1. Discretización

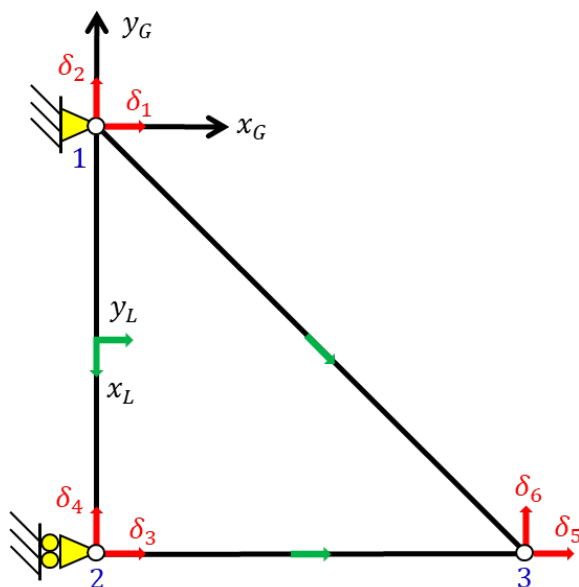
Esta fase ten que ver co establecemento do modelo matemático de cálculo. Así, as barras que conforman o sistema estrutural discretízanse en “elementos” ligados por puntos chamados “nodos”. No sistema analizado, elixiuse unha discretización onde os “elementos” coinciden coas barras do sistema estrutural e os “nós”¹ cos puntos reais de unión de ditas barras. En xeral, este será o tipo de discretización adoptada ao

¹ Nodos=nós

longo desta obra, polo que en aras da simplicidade usaremos indistintamente os termos “barra” e “elemento”.

Respecto a numeración de nós e elementos, esta non é única, aínda que a elección de unha numeración secuencial soe ser preferida, xa que favorece a obtención dunha matriz de rixidez global da estrutura en forma de banda, e dicir, cos elementos non nulos agrupados ao redor da diagonal principal. No que respecta ao sistema de eixos de referencia, o criterio utilizado ao longo desta obra é situar os eixos globais no nó numero 1, e os eixos locais con x_L positivo dende o nó de menor numeración ao nó de maior numeración.

231



2. Esquema da matriz completa de rixidez

Esta fase ten que ver co establecemento do esquema de ensamblaxe da matriz de rixidez global da estrutura a partir da contribución das diferentes barras que a constitúen. Este esquema establecece en termos das submatrices de rixidez das barras atendendo a vinculación destas a través dos nós.

Así, para o exemplo analizado, o esquema de ensamblaxe obtense da seguinte forma:

- Contribución da barra 1-2:

$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} & k_{12}^{12} & 0 \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde os subíndices fan referencia aos coeficientes de rixidez da estrutura, e os superíndices á barra que fai a aportación. Neste caso a barra 1-2, que vincula os nós 1 e 2.

- Contribución da barra 2-3:

Esta barra vincula os nós 2 e 3, polo tanto, as súas catro submatrices de rixidez colocaranse nas posicións asociadas:

$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} & k_{12}^{12} & 0 \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} \\ 0 & k_{32}^{23} & k_{33}^{23} \end{bmatrix}$$

- Contribución da barra 1-3:

Esta barra vincula os nós 1 e 3, polo tanto, as súas catro submatrices de rixidez colocaranse nas posicións asociadas, resultando:

$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} + k_{11}^{13} & k_{12}^{12} & k_{13}^{13} \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} \\ k_{31}^{13} & k_{32}^{23} & k_{33}^{23} + k_{33}^{13} \end{bmatrix}$$

3. Matrices de rixidez das barras en coordenadas locais

Para cada unha das barras calcúlase a matriz de rixidez no sistema de coordenadas propio, e dicir, en coordenadas locais.

Estas matrices empréganse para o posterior ensamblaxe da matriz de rixidez global da estrutura, a través da apropiada transformación do sistema de coordenadas:

$$[k]_G = [L] \cdot [k]_L \cdot [L]^T$$

Así mesmo, as matrices de rixidez calculadas no sistema de coordenadas locais, serán empregadas para a cálculo das solicitacións de extremo, unha vez os desprazamentos de todos os nós da estrutura sexan determinados.

- Barra 1-2

- Substituíndo as propiedades mecánicas do material (en N/mm^2), a área da sección transversal das barras (en mm^2), e a lonxitude (en mm) resulta:

$$[k^{12}]_L = \begin{vmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 63000 & 0 & -63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ -63000 & 0 & 63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- Barra 2-3

$$[k^{23}]_L = \begin{vmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 63000 & 0 & -63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ -63000 & 0 & 63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- Barra 1-3

$$[k^{13}]_L = \begin{vmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 44548 & 0 & -44548 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ -44548 & 0 & 44548 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Matrices de rixidez das barras en coordenadas globais

Para cada unha das barras calcúlase a matriz de rixidez no sistema de coordenadas xeral da estrutura, e dicir, en coordenadas globais.

- Barra 1-2 ($\alpha = 270^\circ$)

O eixo local x_L da barra 1-2 forma un ángulo de 270° co eixo global x_G da estrutura. Este ángulo mídese a partir do eixo x_G en sentido antihorario (sentido positivo do eixo z_G) ata chegar ao eixo local x_L .

Polo tanto, a partir da expresión da matriz de rixidez en coordenadas globais dunha barra de celosía plana:

$$[\mathbf{k}^{12}]_G = \frac{EA}{L} \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ - & - & - & - \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{vmatrix}$$

substituíndo as propiedades mecánicas do material (en N/mm^2), a area da sección transversal das barras (en mm^2), e a lonxitude (en mm) resulta:

$$[\mathbf{k}^{12}]_G = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 63000 & 0 & -63000 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -63000 & 0 & 63000 \end{vmatrix}$$

- Barra 2-3 ($\alpha = 0^\circ$)

O eixo local x_L da barra 2-3 forma un ángulo de 0° co eixo global x_G da estrutura.

$$[\mathbf{k}^{23}]_G = \begin{vmatrix} 63000 & 0 & -63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ -63000 & 0 & 63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- Barra 1-3 ($\alpha = 315^\circ$)

O eixo local x_L da barra 1-3 forma un ángulo de 315° co eixo global x_G da estrutura.

$$[\mathbf{k}^{13}]_G = \begin{vmatrix} 22274 & -22274 & -22274 & 22274 \\ -22274 & 22274 & 22274 & -22274 \\ - & - & - & - \\ -22274 & 22274 & 22274 & -22274 \\ 22274 & -22274 & -22274 & 22274 \end{vmatrix}$$

5. Matriz completa de rixidez da estrutura

Unha vez as matrices de rixidez das diversas barras están expresadas no sistema de coordenadas xeral, procédese ao cálculo da matriz completa ou matriz de rixidez global da estrutura $[K_0]$. Esta matriz obtense a partir da contribución das diversas barras que conforman o sistema estrutural; proceso que se denomina “ensamblaxe”, e que se fai atendendo ao esquema de $[K_0]$ determinado anteriormente.

- Contribución da barra 1-2

Atendendo ao modelo de cálculo establecido na fase de discretización, a barra 1-2 involucra aos grados de liberdade 1, 2, 3, e 4. Polo tanto, a matriz de rixidez en coordenadas globais desta barra debe colocarse nas posicións asociadas, isto é, nas filas e columnas 1, 2, 3, e 4.

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 63000 & 0 & -63000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -63000 & 0 & 63000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Contribución da barra 2-3

Atendendo ao modelo de cálculo establecido na fase de discretización, a barra 2-3 involucra aos grados de liberdade 3, 4, 5, e 6. Polo tanto, a matriz de rixidez en coordenadas globais desta barra debe colocarse nas posicións asociadas, isto é, nas filas e columnas 3, 4, 5, e 6.

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 63000 & 0 & 63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -63000 & 0 & 63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Contribución da barra 1-3

Atendendo ao modelo de cálculo establecido na fase de discretización, a barra 1-3 involucra aos grados de liberdade 1, 2, 5, e 6. Polo tanto, a matriz de rixidez en coordenadas globais desta barra debe colocarse nas posicións asociadas, isto é, nas filas e columnas 1, 2, 5, e 6.

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 22274 & -22274 & 0 & 0 & -22274 & 22274 \\ -22274 & 22274 & 0 & 0 & 22274 & -22274 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -22274 & 22274 & 0 & 0 & 22274 & -22274 \\ 22274 & -22274 & 0 & 0 & -22274 & 22274 \end{bmatrix}$$

- Ensamblaxe final da matriz completa de rixidez da estrutura

Facendo a suma de elementos naquelas posicións onde haxa mais de un valor, obtense finalmente a matriz $[K_0]$. Nótese a correspondencia que existe co esquema de $[K_0]$ establecido no paso 2. Neste caso, tódalas submatrices son de orde 2, xa que tódolos nós teñen dous grados de liberdade.

$$[K_0] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 22274 & -22274 & 0 & 0 & -22274 & 22274 \\ -22274 & 85274 & 0 & -63000 & 22274 & -22274 \\ \hline - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 63000 & 0 & -63000 & 0 \\ 0 & -63000 & 0 & 63000 & 0 & 0 \\ \hline - & - & - & - & - & - \\ -22274 & 22274 & -63000 & 0 & 85274 & -22274 \\ 22274 & -22274 & 0 & 0 & -22274 & 22274 \end{array} \right]$$

6. Ecuación matricial completa de equilibrio da estrutura

Ten que ver coas ecuacións de equilibrio de tódolos nós da estrutura, expresadas en forma matricial. Así, unha vez determinada $[K_0]$, procédese á determinación dos vectores $\{\delta_0\}$ e $\{P_0\}$, de desprazamentos e forzas nodais, respectivamente. $\{P_0\}$, ao igual que $[K_0]$, obtense por ensamblaxe, a partir da contribución das diversas barras.

Dentro dos grados de liberdade do problema, distínguense entre os grados de liberdade activos, que constitúen as incógnitas fundamentais do problema, e

grados de liberdade restrinxidos, que son aqueles asociados aos apoios ou a desprazamentos prescritos.

Así, para a determinación do vector de desprazamentos nodais $\{\delta_0\}$, podemos distinguir entre desprazamentos coñecidos de antemán $\{\delta_c\}$ (asociados aos grados de liberdade restrinxidos), e desprazamentos descoñecidos $\{\delta_d\}$ (as incógnitas a determinar). No problema que nos ocupa, e atendendo ao modelo de cálculo establecido, o vector de desprazamentos nodais $\{\delta_0\}$ ten a seguinte forma:

$$\{\delta_0\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ - \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ - \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ \delta_y^2 \\ - \\ \delta_x^3 \\ \delta_y^3 \end{bmatrix}$$

onde os grados de liberdade 1, 2, e 3, correspóndense con desprazamentos nulos debido aos apoios que presenta a estrutura. Un apoio articulado fixo no nó 1, que impide o desprazamento lonxitudinal ($\delta_x^1 = 0$) e vertical ($\delta_y^1 = 0$), así como un apoio deslizante no nó 2, que impide o desprazamento normal a el ($\delta_x^2 = 0$).

Respecto a determinación do vector de forzas nodais $\{P_0\}$, podemos distinguir tamén entre forzas coñecidas $\{P_c\}$, e dicir as cargas externas actuantes nos nós, e forzas descoñecidas $\{P_d\}$, é dicir as reaccións nos apoios. No problema que nos ocupa, e atendendo ao modelo de cálculo establecido, o vector de forzas nodais $\{P_0\}$ ten a seguinte forma:

$$\{\mathbf{P}_0\} = \begin{bmatrix} R_x^1 \\ R_y^1 \\ - \\ R_x^2 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ -10^4 \end{bmatrix}$$

onde R_x^1 e R_y^1 son as reaccións horizontal e vertical, respectivamente, no apoio articulado situado no nó 1, e R_x^2 a reacción horizontal no apoio deslizando situado no nó 2. A única carga externa actuante $P = 10$ kN está situada no nó 3 en dirección vertical, correspondente ao grado de liberdade δ_6 . Nótese o signo negativo da mesma para indicar o seu sentido descendente, de acordo o sistema de coordenadas globais da estrutura.

Finalmente, a ecuación matricial completa de equilibrio da estrutura resulta:

$$\{\mathbf{P}_0\} = [\mathbf{K}_0] \cdot \{\boldsymbol{\delta}_0\}$$

$$\begin{bmatrix} R_x^1 \\ R_y^1 \\ - \\ R_x^2 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ -10^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22274 & -22274 & | & 0 & 0 & | & -22274 & 22274 \\ & 85274 & | & 0 & -63000 & | & 22274 & -22274 \\ & & | & - & - & | & - & - \\ & & | & 63000 & 0 & | & -63000 & 0 \\ & & | & & 63000 & | & 0 & 0 \\ & \text{Sim} & | & & & | & - & - \\ & & | & & & | & 85274 & -22274 \\ & & | & & & | & & 22274 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ \delta_y^2 \\ - \\ \delta_x^3 \\ \delta_y^3 \end{bmatrix}$$

7. Ecuación matricial de equilibrio da estrutura

Atendendo a distinción feita entre os grados de liberdade activos e restrinxidos, e por tanto a subseguinte división dos vectores de forzas nodais e de desprazamentos nodais, nas súas partes coñecidas e descoñecidas, o sistema matricial de ecuacións de equilibrio, pode reescribirse do seguinte xeito:

$$\begin{bmatrix} K_{dd} & K_{dc} \\ K_{cd} & K_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_d \\ \delta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_c \\ P_d \end{bmatrix}$$

onde, operando:

$$[K_{dd}] \cdot \{\delta_d\} + [K_{dc}] \cdot \{\delta_c\} = \{P_c\}$$

239

$$\{\delta_d\} = [K_{dd}]^{-1} \cdot (\{P_c\} - [K_{dc}] \cdot \{\delta_c\})$$

A parte coñecida $\{\delta_c\}$ do vector de desprazamentos nodais $\{\delta_o\}$ soe corresponderse na súa totalidade con desprazamentos nulos, xa que son desprazamentos impedidos polos apoios que presenta a estrutura. Non obstante, isto non sempre é así. Existen casos nos que existe un ou varios desprazamentos prescritos, por exemplo, nunha estrutura que experimenta un asentamento nun dos seus apoios. Na maioría dos casos, non obstante, $\{\delta_c\} = 0$, como o exemplo que nos ocupa, polo que a expresión anterior simplifícase na forma:

$$[K_{dd}] \cdot \{\delta_d\} = \{P_c\}$$

que representa a *ecuación matricial de equilibrio da estrutura*, onde se teñen en conta unicamente os grados de liberdade activos, sendo $[K_{dd}]$ ou simplemente, $[K]$, a *matriz de rixidez da estrutura*.

Para obtela, buscamos na matriz $[K_o]$, as filas e columnas asociadas aos grados de liberdade activos. No problema que nos ocupa, son as filas e columnas 4, 5, e 6, de tal xeito que $[K_{dd}]$ resulta:

$$[K_{dd}] = \begin{bmatrix} 63000 & 0 & 0 \\ 0 & 85274 & -22274 \\ 0 & -22274 & 22274 \end{bmatrix}$$

Analogamente, caracterizamos os vectores $\{P_c\}$ e $\{\delta_d\}$, asociados aos grados de liberdade activos:

$$\{\mathbf{P}_c\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10^4 \end{Bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\delta}_d\} = \begin{Bmatrix} \delta_y^2 \\ \delta_x^3 \\ \delta_y^3 \end{Bmatrix}$$

Polo que o sistema final resulta:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10^4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 63000 & 0 & 0 \\ 0 & 85274 & -22274 \\ 0 & -22274 & 22274 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_y^2 \\ \delta_x^3 \\ \delta_y^3 \end{Bmatrix}$$

8. Desprazamentos

Resolvendo o sistema de ecuacións:

$$\{\boldsymbol{\delta}_d\} = [\mathbf{K}_{dd}]^{-1} \cdot \{\mathbf{P}_c\}$$

$$\delta_y^2 = 0 \text{ mm}, \delta_x^3 = -0.159 \text{ mm}, \delta_y^3 = -0.608 \text{ mm}$$

9. Reaccións nos apoios

Volvendo a ecuación matricial completa de equilibrio da estrutura:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{dc} \\ \mathbf{K}_{cd} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_d \\ \boldsymbol{\delta}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_c \\ \mathbf{P}_d \end{Bmatrix}$$

e despxando o vector de forzas nodais descoñecidas $\{\mathbf{P}_d\}$, ou reaccións, resulta:

$$[\mathbf{K}_{cd}] \cdot \{\boldsymbol{\delta}_d\} + [\mathbf{K}_{cc}] \cdot \{\boldsymbol{\delta}_c\} = \{\mathbf{P}_d\}$$

No caso máis xeral de que algún dos desprazamentos coñecidos $\{\boldsymbol{\delta}_c\}$ sexa non nulo, e introducindo os desprazamentos $\{\boldsymbol{\delta}_d\}$ calculados no paso anterior, a expresión para o cálculo das reaccións é:

$$\{\mathbf{P}_d\} = [\mathbf{K}_{cd}] \cdot [\mathbf{K}_{dd}]^{-1} \cdot (\{\mathbf{P}_c\} - [\mathbf{K}_{dc}] \cdot \{\boldsymbol{\delta}_c\}) + [\mathbf{K}_{cc}] \cdot \{\boldsymbol{\delta}_c\}$$

No caso particular de que os desprazamentos coñecidos sexan nulos $\{\boldsymbol{\delta}_c\} = 0$, a expresión simplificada para o cálculo das reaccións é:

241

$$\{\mathbf{P}_d\} = [\mathbf{K}_{cd}] \cdot \{\boldsymbol{\delta}_d\}$$

onde $[\mathbf{K}_{cd}]$ obtense a partir da matriz $[\mathbf{K}_0]$, seleccionando as filas asociadas aos grados de liberdade restrinxidos e as columnas asociadas aos grados de liberdade activos. No problema que nos ocupa, son as filas 1, 2, e 3 e as columnas 4, 5, e 6, de tal xeito que $[\mathbf{K}_{cd}]$ resulta:

$$[\mathbf{K}_{cd}] = \begin{bmatrix} 0 & -22274 & 22274 \\ -63000 & 22274 & -22274 \\ 0 & -63000 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente, caracterizamos os vectores $\{\mathbf{P}_d\}$ e $\{\boldsymbol{\delta}_d\}$, asociados aos grados de liberdade restrinxidos e activos, respectivamente:

$$\{\mathbf{P}_d\} = \begin{bmatrix} R_x^1 \\ R_y^1 \\ R_x^2 \end{bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\delta}_d\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.159 \\ -0.608 \end{bmatrix}$$

Polo que o sistema final resulta:

$$\begin{bmatrix} R_x^1 \\ R_y^1 \\ R_x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -22274 & 22274 \\ -63000 & 22274 & -22274 \\ 0 & -63000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.159 \\ -0.608 \end{bmatrix}$$

resolvendo o sistema de ecuacións obtense:

$$R_x^1 = -10 \text{ kN}, R_y^1 = 10 \text{ kN}, R_x^2 = 10 \text{ kN}$$

Nótese unha vez máis, que o sentido das reaccións ven dado polo valor positivo ou negativo de acordo co sistema de referencia global.

10. Solicitacións de extremo en barras

Para a determinación das solicitacións (forzas e momentos) nos extremos das diferentes barras, abordaremos o cálculo de forma individual, e dicir, barra a barra do modelo estrutural, traballando no sistema de coordenadas locais, a través da seguinte expresión:

$$\{\mathbf{S}\} = [\mathbf{k}]_L \cdot [\mathbf{L}]^T \cdot \{\boldsymbol{\delta}\}$$

onde o vector de desprazamentos da barra en coordenadas globais $\{\boldsymbol{\delta}\}$ e transformado ao sistema de referencia local a través da matriz de cambio $[\mathbf{L}]^T$.

No problema que nos ocupa, e para o caso da barra 1-3, a ecuación anterior queda como segue:

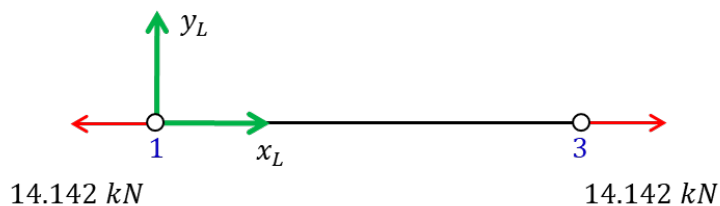
- Barra 1-3 (AC)

$$\{\mathbf{S}\} = \begin{bmatrix} 44548 & 0 & -44548 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -44548 & 0 & 44548 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071 & -0.7071 \\ 0 & 0 & 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.159 \\ -0.608 \end{bmatrix}$$

Obtendo o vector de solicitacións de extremo:

$$\{\mathbf{S}\} = \{-14142, 0, 14142, 0\}^T \text{ (N)}$$

A representación no sistema de eixos locais é a seguinte:



11. Diagramas de esforzos

A partir das solicitacións de extremo calculadas no paso anterior é posible realizar a análise seccional de cada unha das barras utilizando as expresións clásicas de Resistencia de Materiais, determinando así os diagramas de esforzos e a partir de estes as deformacións e as tensións a nivel de punto.

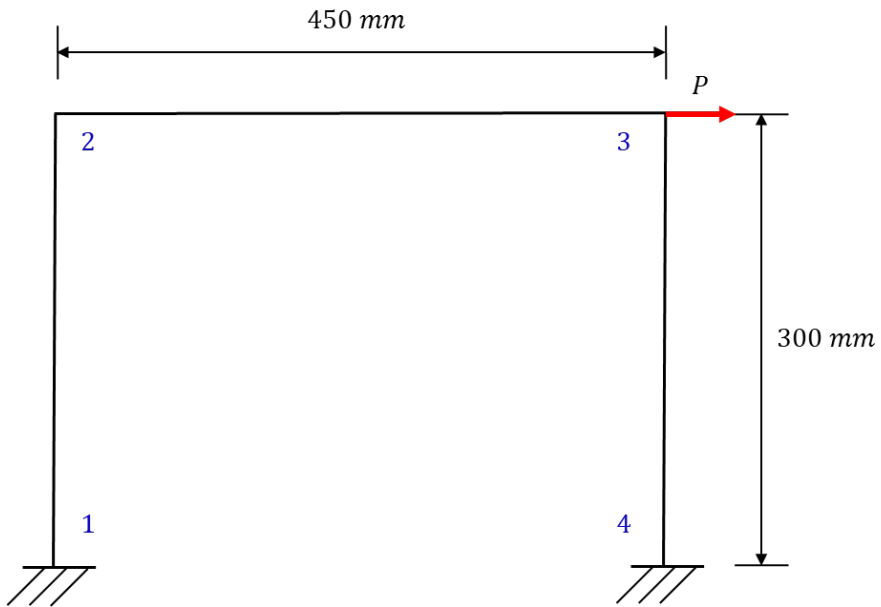
No caso da barra analizada, a 1-3, conclúese que se encontra sometida a un esforzo axial de tracción de 14.142 kN.

3.2.2 Exercício M-2. Pórtico con carga puntual nun dos nós

Para o pórtico da figura, determinar:

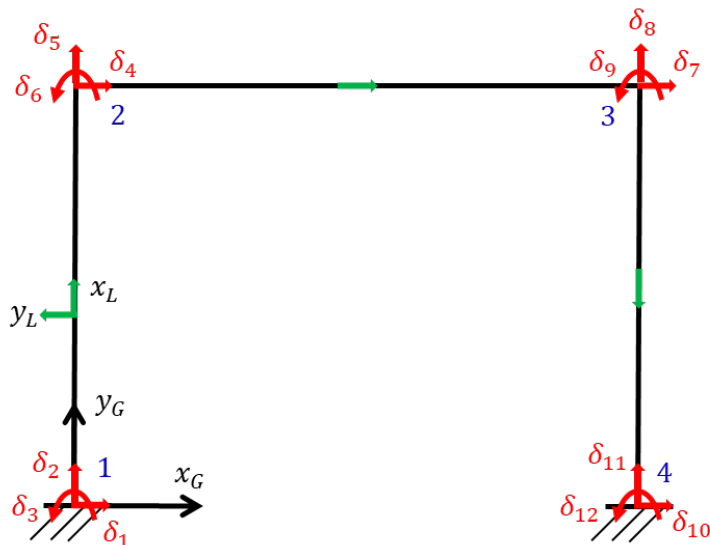
- a) Desprazamentos do nó 3
- b) Reaccións no apoio 1

244



$$P = 5 \text{ N}; E = 210 \text{ GPa}; A = 60 \text{ mm}^2; I = 80 \text{ mm}^4$$

1. Discretización



2. Esquema da matriz completa de rixidez

$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} & k_{12}^{12} & 0 & 0 \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} & 0 \\ 0 & k_{32}^{23} & k_{33}^{23} + k_{33}^{34} & k_{34}^{34} \\ 0 & 0 & k_{43}^{34} & k_{44}^{34} \end{bmatrix}$$

3. Matrices de rixidez das barras en coordenadas globais

- Barra 1-2 ($\alpha = 90^\circ$)

$$[k^{12}]_G = \begin{bmatrix} 7.467 & 0 & -1120 & -7.467 & 0 & -1120 \\ 0 & 42000 & 0 & 0 & -42000 & 0 \\ -1120 & 0 & 224000 & 1120 & 0 & 112000 \\ -7.467 & 0 & 1120 & 7.467 & 0 & 1120 \\ 0 & -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 \\ -1120 & 0 & 112000 & 1120 & 0 & 224000 \end{bmatrix}$$

246

- Barra 2-3 ($\alpha = 0^\circ$)

$$[k^{23}]_G = \begin{bmatrix} 28000 & 0 & 0 & -28000 & 0 & 0 \\ 0 & 2.212 & 497.778 & 0 & -2.212 & 497.778 \\ 0 & 497.778 & 149333.333 & 0 & -497.778 & 74666.667 \\ -28000 & 0 & 0 & 28000 & 0 & 0 \\ 0 & -2.212 & -497.778 & 0 & 2.212 & -497.778 \\ 0 & 497.778 & 74666.667 & 0 & -497.778 & 149333.333 \end{bmatrix}$$

- Barra 3-4 ($\alpha = 270^\circ$)

$$[k^{34}]_G = \begin{bmatrix} 7.467 & 0 & 1120 & -7.467 & 0 & 1120 \\ 0 & 42000 & 0 & 0 & -42000 & 0 \\ 1120 & 0 & 224000 & -1120 & 0 & 112000 \\ -7.467 & 0 & -1120 & 7.467 & 0 & -1120 \\ 0 & -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 \\ 1120 & 0 & 112000 & -1120 & 0 & 224000 \end{bmatrix}$$

4. Matriz completa de rixidez da estrutura

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 7.467 & 0 & -1120 & -7.467 & 0 & -1120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 42000 & 0 & 0 & -42000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 224000 & 1120 & 0 & 112000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ & & & 28007.467 & 0 & 1120 & -28000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 42002.212 & 497.778 & 0 & -2.212 & 497.778 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 373333.333 & 0 & -497.778 & 74666.667 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & - & - & - & - & - & - \\ & & & & & & 28007.467 & 0 & 1120 & -7.467 & 0 & 1120 \\ & & & & & & & 42002.212 & -497.778 & 0 & -42000 & 0 \\ & & & & & & & & 373333.333 & -1120 & 0 & 112000 \\ & & & & & & & & & - & - & - \\ & & & & & & & & & 7.467 & 0 & -1120 \\ & & & & & & & & & & 42000 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 224000 \end{bmatrix}$$

5. Ecuación matricial completa de equilibrio da estrutura

$$\{P_0\} = [K_0] \cdot \{\delta_0\}$$

$$\begin{bmatrix} R_1^x \\ R_1^y \\ M_1^z \\ - \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ - \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ - \\ R_2^x \\ R_2^y \\ M_2^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.467 & 0 & -1120 & -7.467 & 0 & -1120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 42000 & 0 & 0 & -42000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 224000 & 1120 & 0 & 112000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ & & & 28007.467 & 0 & 1120 & -28000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 42002.212 & 497.778 & 0 & -2.212 & 497.778 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 373333.333 & 0 & -497.778 & 74666.667 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & - & - & - & - & - & - \\ & & & & & & 28007.467 & 0 & 1120 & -7.467 & 0 & 1120 \\ & & & & & & & 42002.212 & -497.778 & 0 & -42000 & 0 \\ & & & & & & & & 373333.333 & -1120 & 0 & 112000 \\ & & & & & & & & & - & - & - \\ & & & & & & & & & 7.467 & 0 & -1120 \\ & & & & & & & & & & 42000 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 224000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^x \\ \delta_1^y \\ \delta_1^z \\ - \\ \delta_2^x \\ \delta_2^y \\ \delta_2^z \\ - \\ \delta_3^x \\ \delta_3^y \\ \delta_3^z \\ - \\ \delta_4^x \\ \delta_4^y \\ \delta_4^z \end{bmatrix}$$

6. Ecuación matricial de equilibrio da estrutura

$$\{P_c\} = [K_{dd}] \cdot \{\delta_d\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ - \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 28007.467 & 0 & 1120 & -28000 & 0 & 0 \\ 0 & 42002.212 & 497.778 & 0 & -2.212 & 497.778 \\ 1120 & 497.778 & 373333.333 & 0 & -497.778 & 74666.667 \\ -28000 & 0 & 0 & 28007.467 & 0 & 1120 \\ 0 & -2.212 & -497.778 & 0 & 42002.212 & -497.778 \\ 0 & 497.778 & 74666.667 & 1120 & -497.778 & 373333.333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x^2 \\ \delta_y^2 \\ \theta_2 \\ - \\ \delta_x^3 \\ \delta_y^3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

247

7. Desprazamentos

$$\{\delta_d\} = [K_{dd}]^{-1} \cdot \{P_c\}$$

Desprazamentos do nó 3

$$\delta_x^3 = 0.536 \text{ mm}, \delta_y^3 = 3.174e - 05 \text{ mm}, \theta_3 = -0.0013 \text{ rad}$$

12. Reaccións nos apoios

$$\{P_d\} = [K_{cd}] \cdot \{\delta_d\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_x^1 \\ R_y^1 \\ M_R^1 \\ - \\ R_x^4 \\ R_y^4 \\ M_R^4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.467 & 0 & -1120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -42000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1120 & 0 & 112000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.467 & 0 & -1120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -42000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1120 & 0 & 112000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.536 \\ 3.174e - 05 \\ -0.0013 \\ - \\ 0.536 \\ -3.174e - 05 \\ -0.0013 \end{Bmatrix}$$

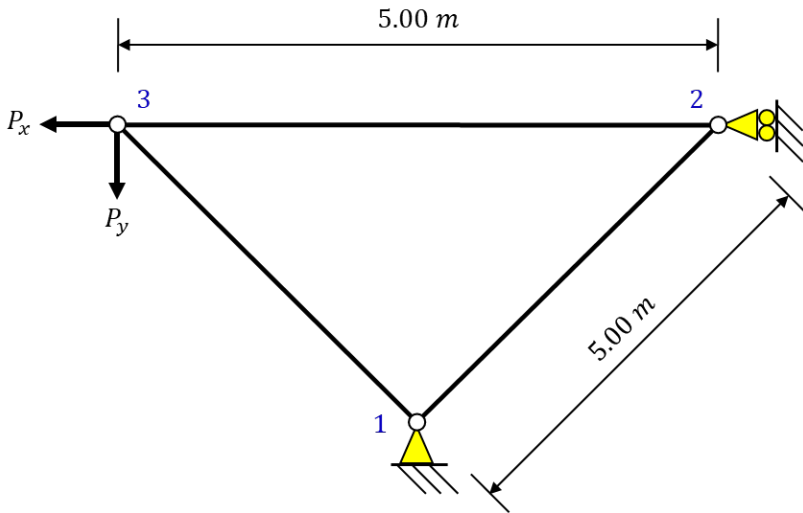
Reaccións do apoio 1

$$R_x^1 = -2.50 \text{ N}, R_y^1 = -1.33 \text{ N}, M_R^1 = 450 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

3.2.3 Exercício M-3. Celosía triangular con cargas puntuais vertical e horizontal

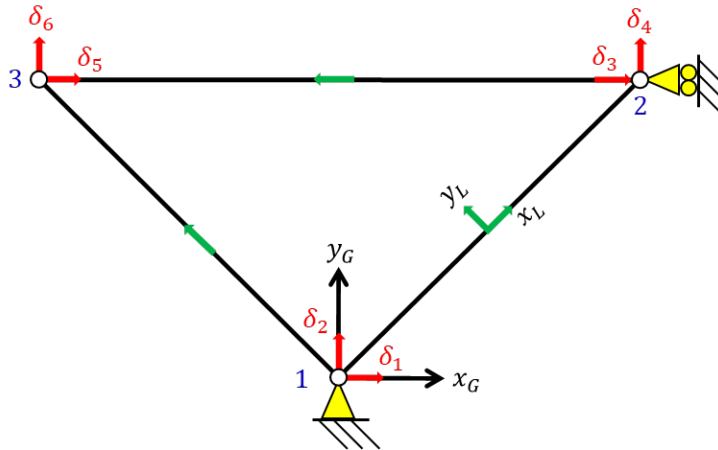
Para a estrutura plana articulada da figura, determinar:

- Os deslocamentos do nó 3
- As reacções no apoio 1



$$A = 10 \text{ cm}^2; E = 210 \text{ GPa}; P_x = 100 \text{ kN}; P_y = 100 \text{ kN}$$

1. Discretização



2. Esquema da matriz completa de rigidez

$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} + k_{11}^{13} & k_{12}^{12} & k_{13}^{13} \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} \\ k_{31}^{13} & k_{32}^{23} & k_{33}^{13} + k_{33}^{23} \end{bmatrix}$$

3. Matrices de rigidez das barras em coordenadas globais

- Barra 1-2 ($\alpha = 60^\circ$)

$$[k^{12}]_G = \begin{bmatrix} 10500 & 18186.534 & -10500 & -18186.534 \\ 18186.534 & 31500 & -18186.534 & -31500 \\ -10500 & -18186.534 & 10500 & 18186.534 \\ -18186.534 & -31500 & 18186.534 & 31500 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-3 ($\alpha = 180^\circ$)

$$[k^{23}]_G = \begin{bmatrix} 42000 & 0 & -42000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -42000 & 0 & 42000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Barra 1-3 ($\alpha = 120^\circ$)

$$[k^{13}]_G = \begin{bmatrix} 10500 & -18186.534 & -10500 & 18186.534 \\ -18186.534 & 31500 & 18186.534 & -31500 \\ -10500 & 18186.534 & 10500 & -18186.534 \\ 18186.534 & -31500 & -18186.534 & 31500 \end{bmatrix}$$

4. Matriz completa de rixidez da estrutura

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 210000 & 0 & -10500 & -18186.534 & -10500 & 18186.534 \\ 0 & 63000 & -18186.534 & -31500 & 18186.534 & -31500 \\ - & - & - & - & - & - \\ -10500 & -18186.534 & 52500 & 18186.534 & -42000 & 0 \\ -18186.534 & -31500 & 18186.534 & 31500 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ -10500 & 18186.534 & -42000 & 0 & 52500 & -18186.534 \\ 18186.534 & -31500 & 0 & 0 & -18186.534 & 31500 \end{bmatrix}$$

5. Ecuación matricial completa de equilibrio da estrutura

$$\{P_0\} = [K_0] \cdot \{\delta_0\}$$

$$\begin{bmatrix} R_x^1 \\ R_y^1 \\ - \\ R_x^2 \\ 0 \\ - \\ -100^3 \\ -100^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210000 & 0 & -10500 & -18186.534 & -10500 & 18186.534 \\ 0 & 63000 & -18186.534 & -31500 & 18186.534 & -31500 \\ - & - & - & - & - & - \\ -10500 & -18186.534 & 52500 & 18186.534 & -42000 & 0 \\ -18186.534 & -31500 & 18186.534 & 31500 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ -10500 & 18186.534 & -42000 & 0 & 52500 & -18186.534 \\ 18186.534 & -31500 & 0 & 0 & -18186.534 & 31500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ \delta_y^2 \\ - \\ \delta_x^3 \\ \delta_y^3 \end{bmatrix}$$

6. Ecuación matricial de equilibrio da estrutura

$$\{P_c\} = [K_{dd}] \cdot \{\delta_d\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -100^3 \\ -100^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31500 & 0 & 0 \\ 0 & 52500 & -18186.534 \\ 0 & -18186.534 & 31500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_y^2 \\ \delta_x^3 \\ \delta_y^3 \end{bmatrix}$$

7. Desprazamentos

$$\{\delta_d\} = [K_{dd}]^{-1} \cdot \{P_c\}$$

$$\delta_y^2 = 0 \text{ mm}, \delta_x^3 = -3.76 \text{ mm}, \delta_y^3 = -5.34 \text{ mm}$$

8. Reaccións nos apoios

$$\{\mathbf{P}_d\} = [\mathbf{K}_{cd}] \cdot \{\boldsymbol{\delta}_d\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_x^1 \\ R_y^1 \\ R_x^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -18186.534 & -10500 & 18186.534 \\ -31500 & 18186.534 & -31500 \\ 18186.534 & -42000 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -3.76 \\ -5.34 \end{Bmatrix}$$

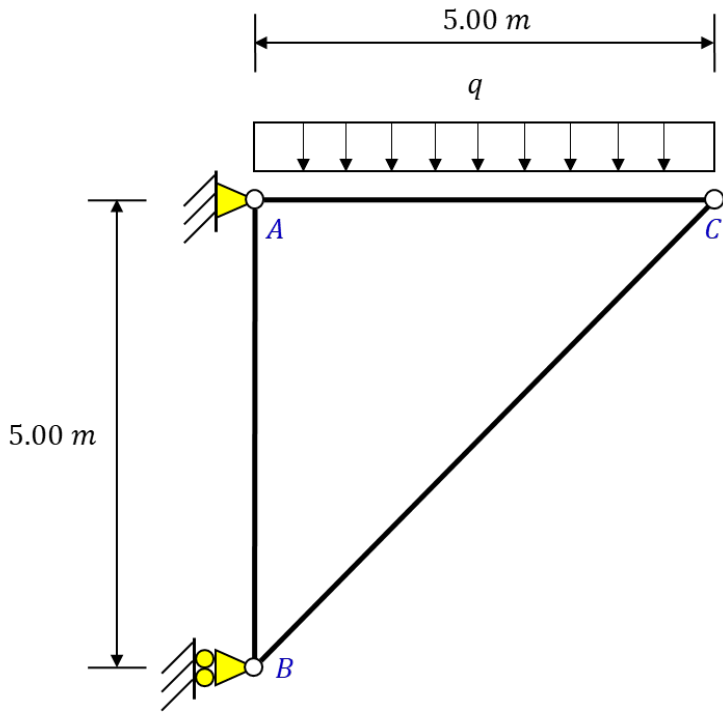
251

$$R_x^1 = -57.73 \text{ kN}, R_y^1 = 100 \text{ kN}, R_x^2 = 157.74 \text{ kN}$$

3.2.4 Exercício M-4. Cелosía triangular con carga uniformemente distribuída nunha das barras

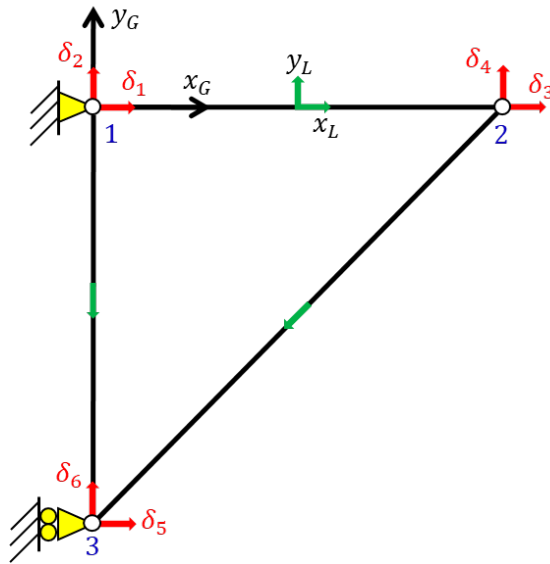
Para a estrutura articulada plana da figura, determinar:

- Desprazamentos dos nós
- Reaccións nos apoios A e B
- Diagramas de esforzos da barra AC



$$q = 2 \text{ kN/m}; E = 210 \text{ GPa}; A = 1500 \text{ mm}^2$$

1. Discretización



2. Esquema da matriz completa de rixidez

$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} + k_{11}^{13} & k_{12}^{12} & k_{13}^{13} \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} \\ k_{31}^{13} & k_{32}^{23} & k_{33}^{13} + k_{33}^{23} \end{bmatrix}$$

3. Forzas de empotramento perfecto e forzas nodais equivalentes

No caso de que o sistema de accións externas actuantes sobre a estrutura comprenda ademais de cargas puntuais nos nós tamén cargas aplicadas nas barras, a metodoloxía de cálculo será a seguinte.

Para a análise aplicáramos o principio de superposición, descompoñendo o estado de carga real noutros dous estados: o estado de carga I e o estado de carga II.

- Estado I

No estado de carga I, consideramos nulos os desprazamentos asociados aos grados de liberdade dos nós. Deste xeito, para as barras con cargas aparecerán unhas reaccións nos seus extremos que denominaremos *forzas de empotramento perfecto*.

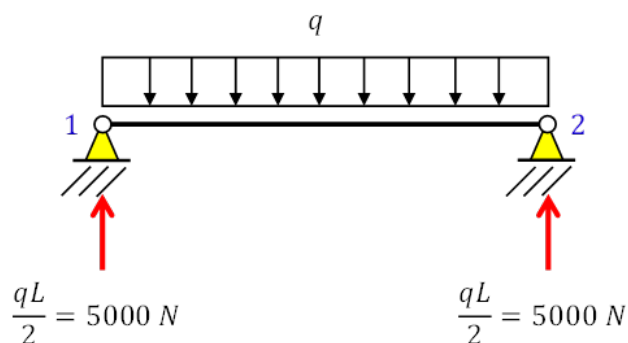
- Estado II

No estado de carga II, consideraremos, ademais das cargas externas directamente aplicadas nos nós, unhas forzas iguais e de sentido contrario as forzas de empotramento perfecto, que denominaremos *forzas nodais equivalentes*.

Así, para o exemplo analizado, o proceso de cálculo sería o seguinte:

- Estado I

Consideramos as barras con cargas con todos os seus grados de liberdade restrinxidos. Neste caso, a barra 1-2, sometida a unha carga uniformemente distribuída q , onde colocamos dous apoios articulados que impiden o desprazamento horizontal e vertical dos nós 1 e 2.



Acudindo as expresións da táboa de forzas e momentos de empotramento perfecto, determinamos as reaccións que aparecen neses apoios, e dicir, as *forzas de empotramento perfecto*. É importante observar que este cálculo realizase no sistema de coordenadas locais da barra de cara a unha maior simplicidade e sistematización do proceso de análise.

Así, o vector de forzas de empotramento perfecto, expresado en coordenadas locais, sería o seguinte:

$$\{\mathbf{F}_{emp}\}_L = \{0, 5000, 0, 5000\}^T (N)$$

No caso de existir máis barras cargadas, este mesmo proceso debería repetirse de xeito individualizado obtendo os correspondentes vectores de forzas de empotramento perfecto.

- Estado II

Analizaremos a estrutura pola metodoloxía de cálculo matricial considerando ademais das cargas externas directamente aplicadas nos nós, as forzas nodais equivalentes as cargas aplicadas sobre as barras.

Como mencionamos anteriormente, estas forzas nodais equivalentes son iguais en magnitude e de sentido contrario as forzas de empotramento perfecto. Polo que para a barra 1-2, o vector de forzas nodais equivalentes, expresado en coordenadas locais, é o seguinte:

$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_L = -\{\mathbf{F}_{emp}\}_L = \{0, -5000, 0, -5000\}^T (N)$$

Este vector debe finalmente referirse ao sistema de coordenadas xerais da estrutura (sistema de eixos global), para a ensamblaxe do vector de forzas global da estrutura $\{\mathbf{P}_0\}$. Así, para a transformación do vector de forzas nodais equivalentes de coordenadas locais a globais, utilizaremos a seguinte expresión:

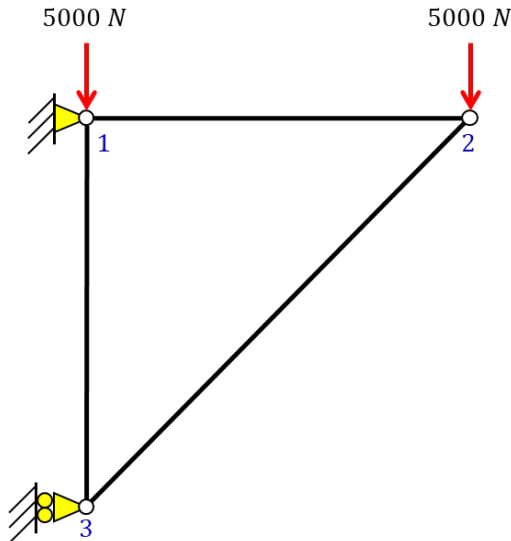
$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_G = [\mathbf{L}] \cdot \{\mathbf{F}_{eq}\}_L$$

onde $[\mathbf{L}]$ representa a matriz de cambio de coordenadas.

256

Para a barra 1-2, o eixo local x_L forma um ângulo de 0° co eixo global x_G da estrutura, polo que o vector de forzas nodais equivalentes en coordenadas globais resulta:

$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_G = \{0, -5000, 0, -5000\}^T \text{ (N)}$$



4. Matrices de rixidez das barras en coordenadas locais

- Barra 1-2

$$[\mathbf{k}^{12}]_L = \begin{bmatrix} 63000 & 0 & -63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -63000 & 0 & 63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-3

$$[k^{23}]_L = \begin{bmatrix} 44548 & 0 & -44548 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -44548 & 0 & 44548 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Barra 1-3

$$[k^{13}]_L = \begin{bmatrix} 63000 & 0 & -63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -63000 & 0 & 63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Matrices de rigidez das barras em coordenadas globais

- Barra 1-2 ($\alpha = 0^\circ$)

$$[k^{12}]_G = \begin{bmatrix} 63000 & 0 & -63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -63000 & 0 & 63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-3 ($\alpha = 225^\circ$)

$$[k^{23}]_G = \begin{bmatrix} 22274 & 22274 & -22274 & -22274 \\ 22274 & 22274 & -22274 & -22274 \\ -22274 & -22274 & 22274 & 22274 \\ -22274 & -22274 & 22274 & 22274 \end{bmatrix}$$

- Barra 1-3 ($\alpha = 270^\circ$)

$$[k^{13}]_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 63000 & 0 & -63000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -63000 & 0 & 63000 \end{bmatrix}$$

6. Matriz completa de rigidez da estrutura

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 63000 & 0 & -63000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 63000 & 0 & 0 & 0 & -63000 \\ - & - & - & - & - & - \\ -63000 & 0 & 85274 & 22274 & -22274 & -22274 \\ 0 & 0 & 22274 & 22274 & -22274 & -22274 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & -22274 & -22274 & 22274 & 22274 \\ 0 & -63000 & -22274 & -22274 & 22274 & 85274 \end{bmatrix}$$

7. Ecuación matricial completa de equilibrio da estrutura

$$\{P_0\} = [K_0] \cdot \{\delta_0\}$$

$$\begin{bmatrix} R_x^1 \\ R_y^1 - 5000 \\ - \\ 0 \\ -5000 \\ - \\ R_x^3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63000 & 0 & -63000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 63000 & 0 & 0 & 0 & -63000 \\ - & - & - & - & - & - \\ -63000 & 0 & 85274 & 22274 & -22274 & -22274 \\ 0 & 0 & 22274 & 22274 & -22274 & -22274 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & -22274 & -22274 & 22274 & 22274 \\ 0 & -63000 & -22274 & -22274 & 22274 & 85274 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ \delta_x^2 \\ \delta_y^2 \\ - \\ 0 \\ \delta_y^3 \end{bmatrix}$$

8. Ecuación matricial de equilibrio da estrutura

$$\{P_c\} = [K_{dd}] \cdot \{\delta_d\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85274 & 22274 & -22274 \\ 22274 & 22274 & -22274 \\ -22274 & -22274 & 85274 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x^2 \\ \delta_y^2 \\ \delta_y^3 \end{bmatrix}$$

9. Desprazamentos

Posto que para a solución do sistema estrutural se aplicou o principio de superposición, os desprazamentos dos nós para o estado de carga real son a suma dos estados de carga I e II.

Non obstante, xa que no estado I se supuxeron desprazamentos nulos, os valores reais dos desprazamentos corresponderanse directamente cos calculados no estado de carga II.

Así, para a estrutura de nós articulados deste exercicio, trala resolución do sistema de ecuacións, obtivéronse os seguintes valores:

$$\delta_x^2 = 0.079 \text{ mm}, \delta_y^2 = -0.383 \text{ mm}, \delta_y^3 = -0.079 \text{ mm}$$

10. Reaccións nos apoios

259

$$\{P_d\} = [K_{cd}] \cdot \{\delta_d\}$$

$$\begin{bmatrix} R_x^1 \\ R_y^1 - 5000 \\ R_x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{13} & k_{14} & k_{16} \\ k_{23} & k_{24} & k_{26} \\ k_{53} & k_{54} & k_{56} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x^2 \\ \delta_y^2 \\ \delta_y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -63000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -63000 \\ -22274 & -22274 & 22274 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.079 \\ -0.383 \\ -0.079 \end{bmatrix}$$

$$R_x^1 = -5.00 \text{ kN}, R_y^1 = 10.00 \text{ kN}, R_x^3 = 5.00 \text{ kN}$$

11. Solicitacións de extremo en barras

De igual xeito que para os desprazamentos, as solicitudes nos extremos das barras para o estado de carga real son a suma dos estados de carga I e II.

Para o estado de carga I, as solicitudes de extremo correspóndense coas forzas de empotramento perfecto en coordenadas locais:

$$\{S\}_I = \{F_{emp}\}_L$$

Para o estado de carga II, as solicitudes de extremo obtéñense a partires dos desprazamentos nodais da estrutura mediante a expresión xa coñecida:

$$\{S\}_{II} = [k]_L \cdot [L]^T \cdot \{\delta\}$$

Polo tanto, para o estado de carga real, as solicitudes de extremo poden obterse mediante a expresión:

$$\{S\}_R = \{S\}_I + \{S\}_{II} = \{F_{emp}\}_L + [k]_L \cdot [L]^T \cdot \{\delta\}$$

No problema que nos ocupa, e para o caso da barra 1-2 (AC):

- Estado I

$$\{S\}_I = \{F_{emp}\}_L = \{0, 5000, 0, 5000\}^T (N)$$

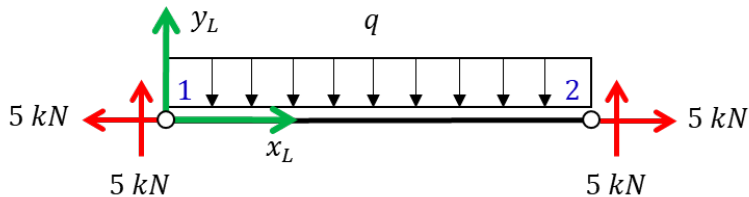
- Estado II

$$\{S\}_{II} = \begin{bmatrix} 63000 & 0 & -63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -63000 & 0 & 63000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.079 \\ -0.383 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5000 \\ 0 \\ 5000 \\ 0 \end{bmatrix} (N)$$

$$\{S\}_{II} = \{-5000, 0, 5000, 0\}^T (N)$$

- Estado real

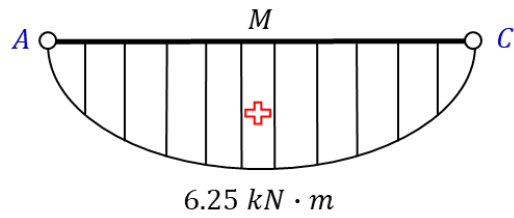
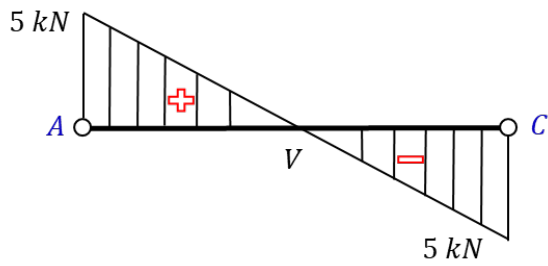
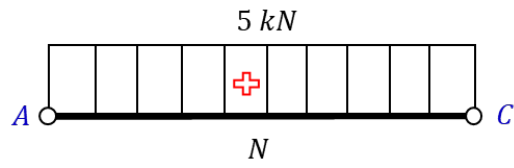
$$\{S\}_R = \{S\}_I + \{S\}_{II} = \{-5000, 5000, 5000, 5000\}^T$$



12. Diagramas de esforzos

A partir das solicitacións de extremo calculadas no paso anterior é posible realizar a análise seccional de cada unha das barras utilizando as expresións clásicas de Resistencia de Materiais, determinando así os diagramas de esforzos.

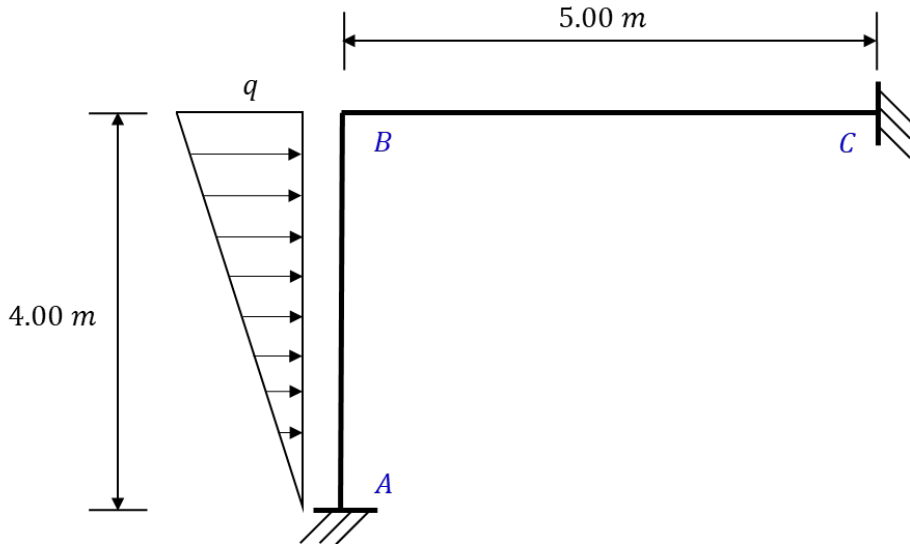
No caso da barra analizada, a 1-2, represéntanse a continuación os diagramas de esforzo axial, esforzo cortante e momento flexor.



3.2.5 Exercício M-5. Pórtico com carga distribuída triangular

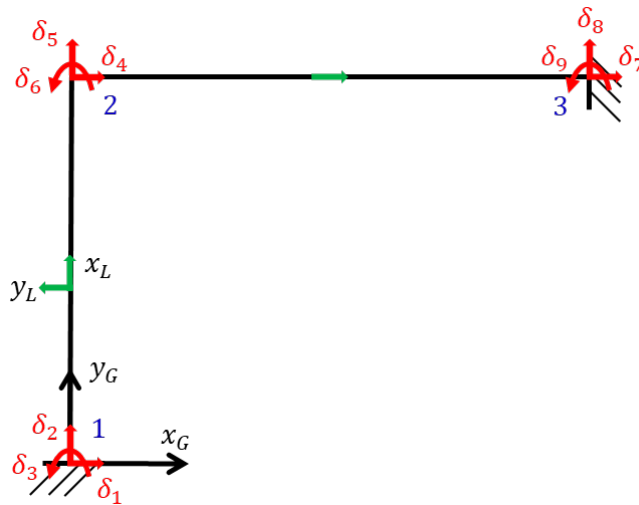
Para a estrutura reticulada plana da figura, determinar:

- Desprazamento do nó B
- Momento reacción en A
- Compoñente horizontal da reacción en C



$$E = 30 \text{ GPa}; I = 67500 \text{ cm}^4; A = 900 \text{ cm}^2; q = 50 \text{ kN/m}$$

1. Discretización

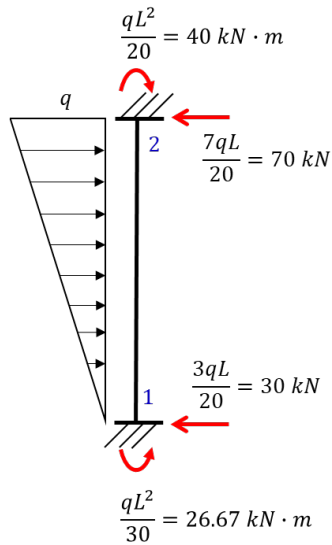


2. Esquema da matriz completa de rixidez

$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} & k_{12}^{12} & 0 \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} \\ 0 & k_{32}^{23} & k_{33}^{23} \end{bmatrix}$$

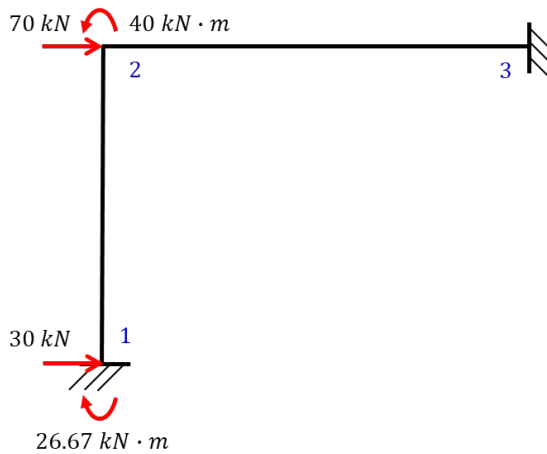
3. Forzas de empotramento perfecto e forzas nodais equivalentes

- Estado I



$$\{\mathbf{F}_{emp}\}_L = \{0, 30, 26.67, 0, 70, -40\}^T (kN \text{ e } kN \cdot m)$$

• Estado II



$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_L = -\{\mathbf{F}_{emp}\}_L = \{0, -30, -26.67, 0, -70, 40\}^T (kN \text{ e } kN \cdot m)$$

$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_G = [\mathbf{L}] \cdot \{\mathbf{F}_{eq}\}_L = \{30, 0, -26.67, 70, 0, 40\}^T (kN \text{ e } kN \cdot m)$$

4. Matrices de rixidez das barras en coordenadas globais

- Barra 1-2 ($\alpha = 90^\circ$)

$$[k^{12}]_G = \begin{bmatrix} 3796.875 & 0 & -7593750 & | & -3796.875 & 0 & -7593750 \\ 0 & 675000 & 0 & | & 0 & -675000 & 0 \\ -7593750 & 0 & 20250000000 & | & 7593750 & 0 & 10125000000 \\ - & - & - & | & - & - & - \\ -3796.875 & 0 & 7593750 & | & 3796.875 & 0 & 7593750 \\ 0 & -675000 & 0 & | & 0 & 675000 & 0 \\ -7593750 & 0 & 10125000000 & | & 7593750 & 0 & 20250000000 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-3 ($\alpha = 0^\circ$)

$$[k^{23}]_G = \begin{bmatrix} 540000 & 0 & 0 & | & -540000 & 0 & 0 \\ 0 & 1944 & 4860000 & | & 0 & -1944 & 4860000 \\ 0 & 4860000 & 16200000000 & | & 0 & -4860000 & 8100000000 \\ - & - & - & | & - & - & - \\ -540000 & 0 & 0 & | & 540000 & 0 & 0 \\ 0 & -1944 & -4860000 & | & 0 & 1944 & -4860000 \\ 0 & 4860000 & 8100000000 & | & 0 & -4860000 & 16200000000 \end{bmatrix}$$

5. Matriz completa de rixidez da estrutura

$$[K_G] = \begin{bmatrix} 3796.875 & 0 & -7593750 & | & -3796.875 & 0 & -7593750 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 675000 & 0 & | & 0 & -675000 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ -7593750 & 0 & 20250000000 & | & 7593750 & 0 & 10125000000 & | & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & | & - & - & - & | & - & - & - \\ -3796.875 & 0 & 7593750 & | & 543796.875 & 0 & 7593750 & | & -540000 & 0 & 0 \\ 0 & -675000 & 0 & | & 0 & 676944 & 4860000 & | & 0 & -1944 & 4860000 \\ -7593750 & 0 & 10125000000 & | & 7593750 & 4860000 & 36450000000 & | & 0 & -4860000 & 8100000000 \\ - & - & - & | & - & - & - & | & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & -540000 & 0 & 0 & | & 540000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1944 & -4860000 & | & 0 & 1944 & -4860000 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 4860000 & 8100000000 & | & 0 & -4860000 & 16200000000 \end{bmatrix}$$

6. Ecuación matricial completa de equilibrio da estrutura

$$\{P_0\} = [K_0] \cdot \{\delta_0\}$$

$$\begin{bmatrix} R_1^1 + 30 \cdot 10^3 \\ R_2^1 \\ M_2^1 - 26.67 \cdot 10^6 \\ - \\ 70 \\ 0 \\ 40 \cdot 10^6 \\ - \\ R_2^2 \\ R_3^2 \\ M_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3796.875 & 0 & -7593750 & | & -3796.875 & 0 & -7593750 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 675000 & 0 & | & 0 & -675000 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ -7593750 & 0 & 20250000000 & | & 7593750 & 0 & 10125000000 & | & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & | & - & - & - & | & - & - & - \\ -3796.875 & 0 & 7593750 & | & 543796.875 & 0 & 7593750 & | & -540000 & 0 & 0 \\ 0 & -675000 & 0 & | & 0 & 676944 & 4860000 & | & 0 & -1944 & 4860000 \\ -7593750 & 0 & 10125000000 & | & 7593750 & 4860000 & 36450000000 & | & 0 & -4860000 & 8100000000 \\ - & - & - & | & - & - & - & | & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & -540000 & 0 & 0 & | & 540000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1944 & -4860000 & | & 0 & 1944 & -4860000 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 4860000 & 8100000000 & | & 0 & -4860000 & 16200000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^1 \\ \delta_2^1 \\ \delta_3^1 \\ - \\ \delta_2^2 \\ \delta_3^2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

7. Ecuación matricial de equilibrio da estrutura

$$\{P_c\} = [K_{dd}] \cdot \{\delta_d\}$$

266

$$\begin{bmatrix} 70 \\ 0 \\ 40 \cdot 10^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 543796.875 & 0 & 7593750 \\ 0 & 676944 & 4860000 \\ 7593750 & 4860000 & 36450000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x^2 \\ \delta_y^2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

8. Desprazamentos

$$\delta_x^2 = 0.114 \text{ mm}, \delta_y^2 = -0.008 \text{ mm}, \theta_2 = -0.001 \text{ rad}$$

9. Reaccións nos apoios

$$|M_R^1 - 26.67 \cdot 10^6| = [K_{34} \quad K_{35} \quad K_{36}] \begin{bmatrix} \delta_x^2 \\ \delta_y^2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = [7593750 \quad 0 \quad 10125000000] \begin{bmatrix} 0.114 \\ -0.008 \\ -0.001 \end{bmatrix}$$

$$M_R^1 = 38.41 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$|R_x^3| = [K_{74} \quad K_{75} \quad K_{76}] \begin{bmatrix} \delta_x^2 \\ \delta_y^2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = [-540000 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.114 \\ -0.008 \\ -0.001 \end{bmatrix}$$

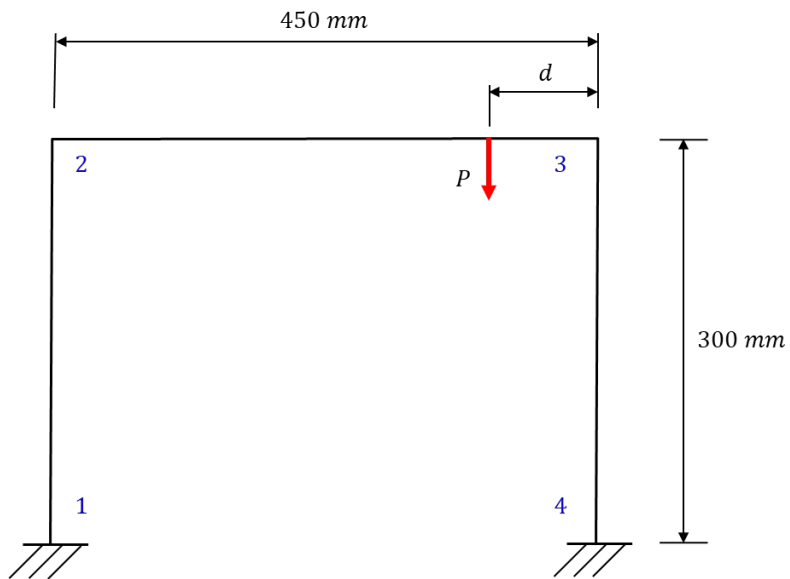
$$R_x^3 = -61.41 \text{ kN}$$

3.2.6 Exercício M-6. Pórtico con carga puntual nunha das barras

Para o pórtico da figura, determinar:

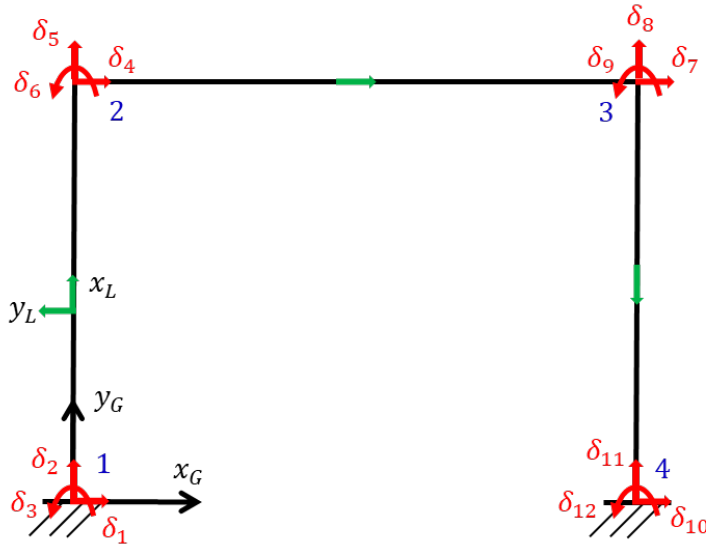
- Desprazamentos dos nós 2 e 3
- Solicitações nos extremos da barra 2-3

267



$$P = 30 \text{ N}; E = 210 \text{ GPa}; A = 60 \text{ mm}^2; I = 80 \text{ mm}^4; d = 100 \text{ mm}$$

1. Discretización

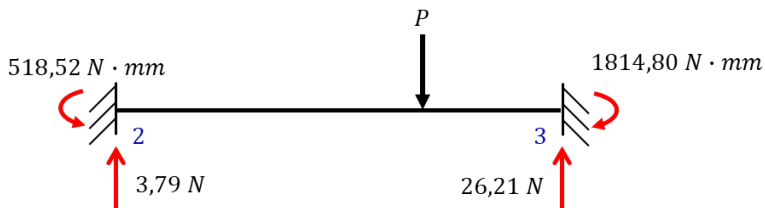


2. Esquema da matriz completa de rigidez

$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} & k_{12}^{12} & 0 & 0 \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} & 0 \\ 0 & k_{32}^{23} & k_{33}^{23} + k_{33}^{34} & k_{34}^{34} \\ 0 & 0 & k_{43}^{34} & k_{44}^{34} \end{bmatrix}$$

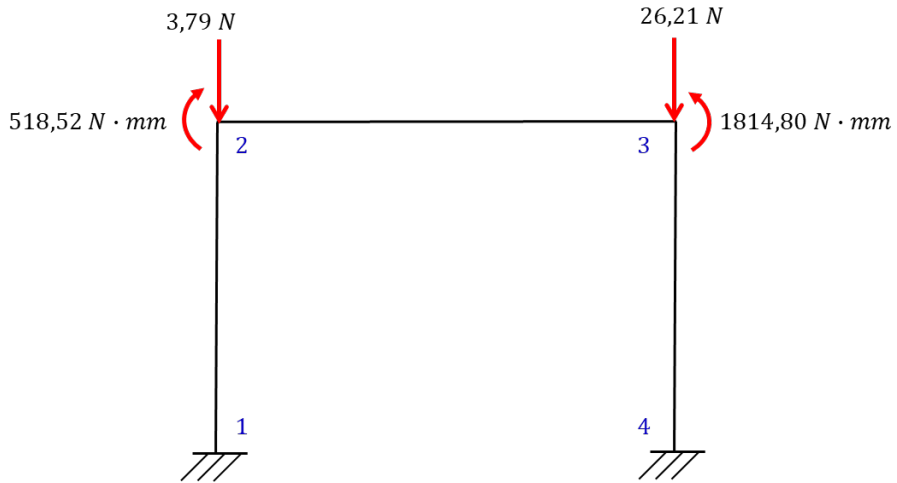
3. Fuerzas de empotramiento perfecto e fuerzas nodales equivalentes

- Estado I



$$\{F_{emp}\}_L = \{0, 3,79, 518,52, 0, 26,21, -1814,80\}^T (N \text{ e } N \cdot mm)$$

- Estado II



269

$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_L = -\{\mathbf{F}_{emp}\}_L = \{0, -3.79, -518.52, 0, -26.21, 1814.80\}^T (N e N \cdot mm)$$

$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_G = [\mathbf{L}] \cdot \{\mathbf{F}_{eq}\}_L = \{0, -3.79, -518.52, 0, -26.21, 1814.80\}^T (N e N \cdot mm)$$

4. Matrices de rigidez das barras em coordenadas globais

- Barra 1-2 ($\alpha = 90^\circ$)

$$[\mathbf{k}^{12}]_G = \begin{bmatrix} 7.467 & 0 & -1120 & -7.467 & 0 & -1120 \\ 0 & 42000 & 0 & 0 & -42000 & 0 \\ -1120 & 0 & 224000 & 1120 & 0 & 112000 \\ -7.467 & 0 & 1120 & 7.467 & 0 & 1120 \\ 0 & -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 \\ -1120 & 0 & 112000 & 1120 & 0 & 224000 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-3 ($\alpha = 0^\circ$)

$$[\mathbf{k}^{23}]_G = \begin{bmatrix} 28000 & 0 & 0 & -28000 & 0 & 0 \\ 0 & 2.212 & 497.778 & 0 & -2.212 & 497.778 \\ 0 & 497.778 & 149333.333 & 0 & -497.778 & 74666.667 \\ -28000 & 0 & 0 & 28000 & 0 & 0 \\ 0 & -2.212 & -497.778 & 0 & 2.212 & -497.778 \\ 0 & 497.778 & 74666.667 & 0 & -497.778 & 149333.333 \end{bmatrix}$$

270

- Barra 3-4 ($\alpha = 270^\circ$)

$$[k^{34}]_G = \begin{bmatrix} 7.467 & 0 & 1120 & -7.467 & 0 & 1120 \\ 0 & 42000 & 0 & 0 & -42000 & 0 \\ 1120 & 0 & 224000 & -1120 & 0 & 112000 \\ -7.467 & 0 & -1120 & 7.467 & 0 & -1120 \\ 0 & -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 \\ 1120 & 0 & 112000 & -1120 & 0 & 224000 \end{bmatrix}$$

5. Matriz completa de rixidez da estrutura

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 7.467 & 0 & -1120 & -7.467 & 0 & -1120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 42000 & 0 & 0 & -42000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 224000 & 1120 & 0 & 112000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ & & & 28007.467 & 0 & 1120 & -28000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 42002.212 & 497.778 & 0 & -2.212 & 497.778 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 373333.333 & 0 & -497.778 & 74666.667 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & - & - & - & - & - & - \\ & & & & & & 28007.467 & 0 & 1120 & -7.467 & 0 & 1120 \\ & & & & & & & 42002.212 & -497.778 & 0 & -42000 & 0 \\ & & & & & & & & 373333.333 & -1120 & 0 & 112000 \\ & & & & & & & & & - & - & - \\ & & & & & & & & & 7.467 & 0 & -1120 \\ & & & & & & & & & & 42000 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 224000 \end{bmatrix}$$

6. Ecuación matricial completa de equilibrio da estrutura

$$\{P_0\} = [K_0] \cdot \{\delta_0\}$$

$$\begin{bmatrix} R_1^1 \\ R_2^1 \\ M_1^1 \\ 0 \\ -3.79 \\ -518.52 \\ 0 \\ -26.21 \\ 1814.80 \\ 0 \\ R_1^2 \\ R_2^2 \\ M_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.467 & 0 & -1120 & -7.467 & 0 & -1120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 42000 & 0 & 0 & -42000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 224000 & 1120 & 0 & 112000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ & & & 28007.467 & 0 & 1120 & -28000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 42002.212 & 497.778 & 0 & -2.212 & 497.778 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 373333.333 & 0 & -497.778 & 74666.667 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & - & - & - & - & - & - \\ & & & & & & 28007.467 & 0 & 1120 & -7.467 & 0 & 1120 \\ & & & & & & & 42002.212 & -497.778 & 0 & -42000 & 0 \\ & & & & & & & & 373333.333 & -1120 & 0 & 112000 \\ & & & & & & & & & - & - & - \\ & & & & & & & & & 7.467 & 0 & -1120 \\ & & & & & & & & & & 42000 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 224000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^1 \\ \delta_2^1 \\ \theta_1^1 \\ \delta_2^2 \\ \delta_1^2 \\ \theta_1^2 \\ \delta_2^3 \\ \delta_1^3 \\ \theta_1^3 \\ \delta_2^4 \\ \delta_1^4 \\ \theta_1^4 \end{bmatrix}$$

7. Ecuación matricial de equilibrio da estrutura

$$\{P_c\} = [K_{dd}] \cdot \{\delta_d\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -3.79 \\ -518.52 \\ - \\ 0 \\ -26.21 \\ 1814.80 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 28007.467 & 0 & 1120 & -28000 & 0 & 0 \\ 0 & 42002.212 & 497.778 & 0 & -2.212 & 497.778 \\ 1120 & 497.778 & 373333.333 & 0 & -497.778 & 74666.667 \\ -28000 & 0 & 0 & 28007.467 & 0 & 1120 \\ 0 & -2.212 & -497.778 & 0 & 42002.212 & -497.778 \\ 0 & 497.778 & 74666.667 & 1120 & -497.778 & 373333.333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x^2 \\ \delta_y^2 \\ \theta_2 \\ - \\ \delta_x^3 \\ \delta_y^3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

8. Desplazamientos

$$\{\delta_d\} = [K_{dd}]^{-1} \cdot \{P_c\}$$

$$\delta_x^2 = -0.35 \text{ mm}, \delta_y^2 = -1.45e-04 \text{ mm}, \theta_2 = -1.59e-03 \text{ rad}$$

$$\delta_x^3 = -0.35 \text{ mm}, \delta_y^3 = -5.69e-04 \text{ mm}, \theta_3 = 6.22e-03 \text{ rad}$$

9. Solicitaciones de extremo en barras

- Barra 2-3:

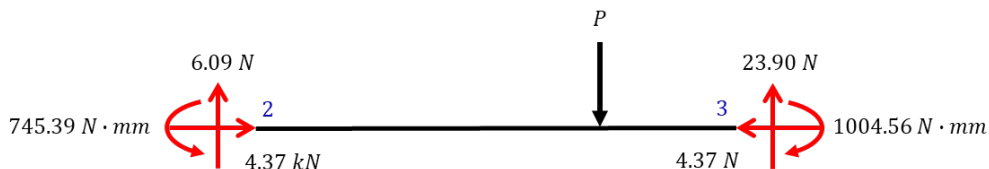
$$\{S\}_R = \{S\}_I + \{S\}_{II} = \{F_{emp}\}_L + [k]_L \cdot [L]^T \cdot \{\delta\}$$

$$\{S\}_I = \{0, 3.79, 518.52, 0, 26.21, -1814.80\}^T (N \text{ e } N \cdot mm)$$

$$\{S\}_{II} = \begin{bmatrix} 28000 & 0 & 0 & -28000 & 0 & 0 \\ 0 & 2.212 & 497.778 & 0 & -2.212 & 497.778 \\ 0 & 497.778 & 149333.333 & 0 & -497.778 & 74666.667 \\ -28000 & 0 & 0 & 28000 & 0 & 0 \\ 0 & -2.212 & -497.778 & 0 & 2.212 & -497.778 \\ 0 & 497.778 & 74666.667 & 0 & -497.778 & 149333.333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.35 \\ -1.45e-04 \\ -1.59e-03 \\ -0.35 \\ -5.69e-4 \\ 6.22e-03 \end{Bmatrix}$$

$$\{S\}_{II} = \{4.37, 2.30, 226.87, -4.37, -2.30, 810.24\}^T (N \text{ e } N \cdot mm)$$

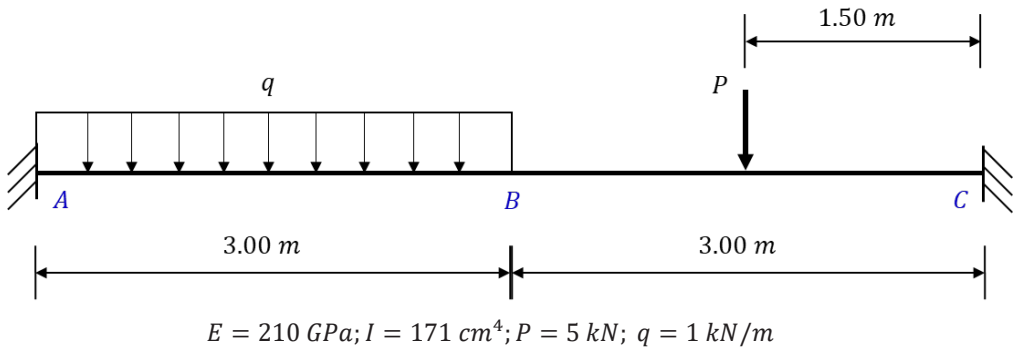
$$\{S\}_R = \{4.37, 6.09, 745.39, -4.37, 23.90, -1004.56\}^T (N \text{ e } N \cdot mm)$$



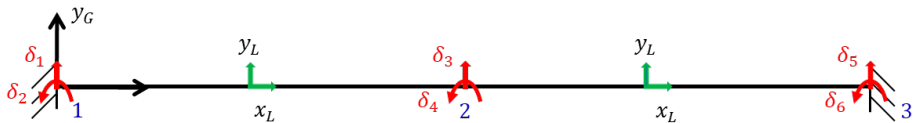
3.2.7 Exercício M-7. Viga continua con carga distribuída e puntual

Para a viga continua da figura, determinar:

- Frecha e xiro da sección central B
- Compoñente vertical da reacción en A e momento reacción en C
- Solicitacións de extremo para as barras AB e BC



1. Discretización

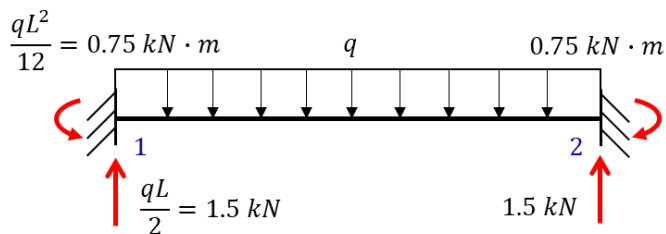


2. Esquema da matriz completa de rixidez

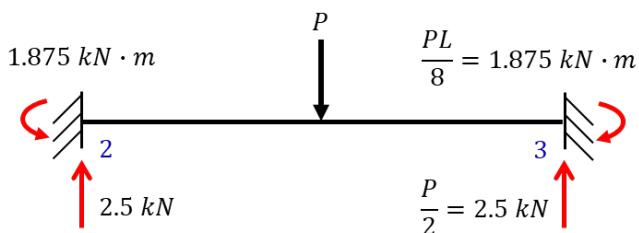
$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} & k_{12}^{12} & 0 \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} \\ 0 & k_{32}^{23} & k_{33}^{23} \end{bmatrix}$$

3. Forzas de empotramento perfecto e forzas nodais equivalentes

- Estado I

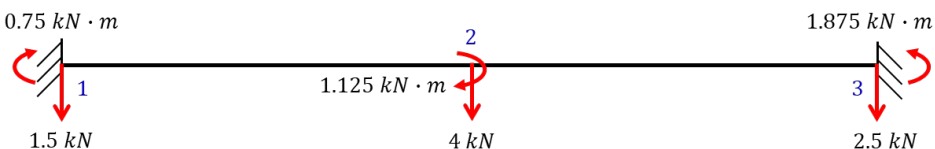


$$\{F_{emp}\}_L^{12} = \{1.5, 0.75, 1.5, -0.75\}^T \text{ (kN e kN} \cdot \text{m)}$$



$$\{F_{emp}\}_L^{23} = \{2.5, 1.875, 2.5, -1.875\}^T \text{ (kN e kN} \cdot \text{m)}$$

- Estado II



$$\{F_{eq}\}_G^{12} = -[L]\{F_{emp}\}_L^{12} = \{-1.5, -0.75, -1.5, 0.75\}^T \text{ (kN e kN} \cdot \text{m)}$$

$$\{F_{eq}\}_G^{23} = -[L]\{F_{emp}\}_L^{23} = \{-2.5, -1.875, -2.5, 1.875\}^T \text{ (kN e kN} \cdot \text{m)}$$

4. Matrices de rigidez das barras en coordenadas locais

- Nas vigas, se as cargas actuantes son unicamente transversais, sóese omitir a compoñente lonxitudinal dos desprazamentos.

- Deste xeito, a matriz de rixidez en coordenadas locais pódese obter a partires do caso máis xeral de barra de pórtico plano:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & | & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & | & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ - & - & | & - & - \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & | & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & | & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

- Barra 1-2

$$[k^{12}]_L = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & | & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & | & -239400 & 239400000 \\ - & - & | & - & - \\ -159.6 & -239400 & | & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & | & -239400 & 478800000 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-3

$$[k^{23}]_L = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & | & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & | & -239400 & 239400000 \\ - & - & | & - & - \\ -159.6 & -239400 & | & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & | & -239400 & 478800000 \end{bmatrix}$$

5. Matrices de rixidez das barras en coordenadas globais

Coinciden coas matrices en eixos locais

6. Matriz completa de rixidez da viga continua

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & -159.6 & 239400 & 0 & 0 \\ 239400 & 478800000 & -239400 & 239400000 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ -159.6 & -239400 & 319.2 & 0 & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 239400000 & 0 & 957600000 & -239400 & 239400000 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & -159.6 & -239400 & 159.6 & -239400 \\ 0 & 0 & 239400 & 239400000 & -239400 & 478800000 \end{bmatrix}$$

7. Ecuación matricial completa de equilibrio da estrutura

$$\{P_0\} = [K_0] \cdot \{\delta_0\}$$

$$\begin{bmatrix} R_y^1 - 1.5 \cdot 10^3 \\ M_R^1 - 0.75 \cdot 10^6 \\ - \\ -4.0 \cdot 10^3 \\ -1.125 \cdot 10^6 \\ - \\ R_y^3 - 2.5 \cdot 10^3 \\ M_R^3 + 1.875 \cdot 10^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & -159.6 & 239400 & 0 & 0 \\ 239400 & 478800000 & -239400 & 239400000 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ -159.6 & -239400 & 319.2 & 0 & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 239400000 & 0 & 957600000 & -239400 & 239400000 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & -159.6 & -239400 & 159.6 & -239400 \\ 0 & 0 & 239400 & 239400000 & -239400 & 478800000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ \delta_y^2 \\ \theta_2 \\ - \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. Ecuación matricial de equilibrio da estrutura

$$\{P_c\} = [K_{dd}] \cdot \{\delta_d\}$$

$$\begin{bmatrix} -4.0 \cdot 10^3 \\ -1.125 \cdot 10^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 319.2 & 0 \\ 0 & 957600000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_y^2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

9. Desprazamentos

$$\delta_y^2 = -12.53 \text{ mm}, \theta_2 = 1.17e - 03 \text{ rad}$$

10. Reaccións nos apoios

$$|R_y^1 - 1.5 \cdot 10^3| = [K_{13} \quad K_{14}] \begin{bmatrix} \delta_y^2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = [-159.6 \quad 239400] \begin{bmatrix} -12.53 \\ 1.17e - 03 \end{bmatrix}$$

$$R_y^1 = 3.22 \text{ kN}$$

$$|M_R^3 + 1.875 \cdot 10^6| = [K_{63} \quad K_{64}] \begin{bmatrix} \delta_y^2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = [239400 \quad 239400000] \begin{bmatrix} -12.53 \\ 1.17e - 03 \end{bmatrix}$$

$$M_R^3 = -5.16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

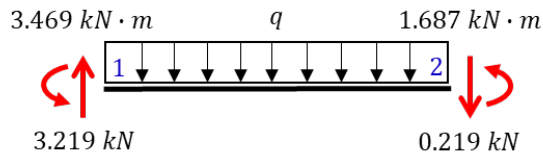
11. Solicitaciones de extremo en barras

- Barra 1-2 (AB)

$$\{S\} = [k]_L \cdot [L]^T \cdot \{\delta\} + \{F_{emp}\}_L$$

$$\{S\} = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & -239400 & 239400000 \\ -159.6 & -239400 & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & -239400 & 478800000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12.53 \\ 1.17e-03 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 \cdot 10^3 \\ 0.75 \cdot 10^6 \\ 1.5 \cdot 10^3 \\ -0.75 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.219 \cdot 10^3 \\ 3.469 \cdot 10^6 \\ -0.219 \cdot 10^3 \\ 1.687 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \text{ (N e N} \cdot \text{mm)}$$

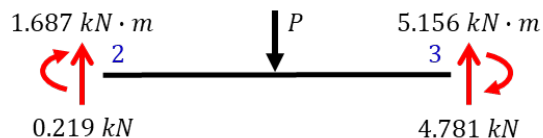


- Barra 2-3 (BC)

$$\{S\} = [k]_L \cdot [L]^T \cdot \{\delta\} + \{F_{emp}\}_L$$

$$\{S\} = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & -239400 & 239400000 \\ -159.6 & -239400 & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & -239400 & 478800000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12.53 \\ 1.17e-03 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5 \cdot 10^3 \\ 1.875 \cdot 10^6 \\ 2.5 \cdot 10^3 \\ -1.875 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.219 \cdot 10^3 \\ -1.687 \cdot 10^6 \\ 4.781 \cdot 10^3 \\ -5.156 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \text{ (N e N} \cdot \text{mm)}$$

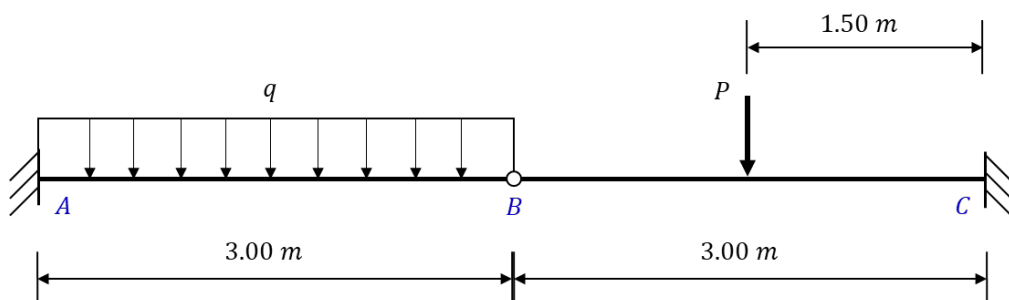


3.2.8 Exercício M-8. Viga continua con rótula na sección central e carga distribuída e puntual

Para a viga continua da figura, determinar:

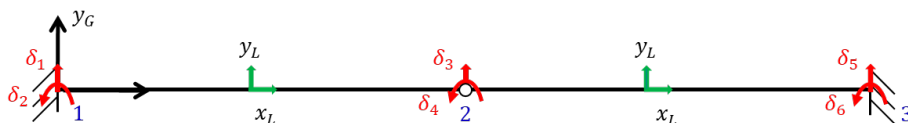
277

- Frecha e xiro da sección central B
- Compoñente vertical da reacción en A e momento reacción en C
- Solicitacións de extremo para as barras AB e BC



$$E = 210 \text{ GPa}; I = 171 \text{ cm}^4; P = 1.0 \text{ kN}; q = 0.5 \text{ kN/m}$$

1. Discretización

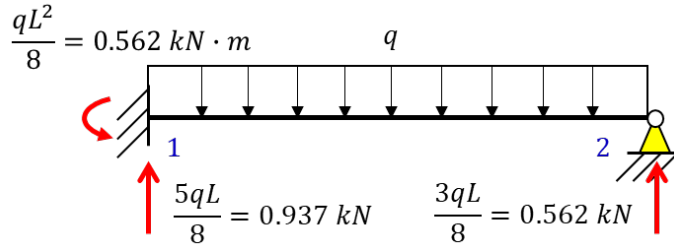


2. Esquema da matriz completa de rixidez

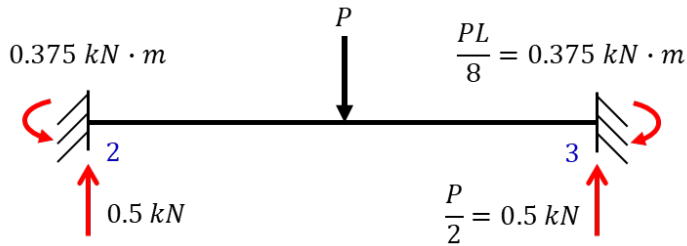
$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} & k_{12}^{12} & 0 \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} \\ 0 & k_{32}^{23} & k_{33}^{23} \end{bmatrix}$$

3. Forzas de empotramento perfecto e forzas nodais equivalentes

• Estado I



$$\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{12} = \{0.937, 0.562, 0.562, 0\}^T (\text{kN e kN} \cdot \text{m})$$

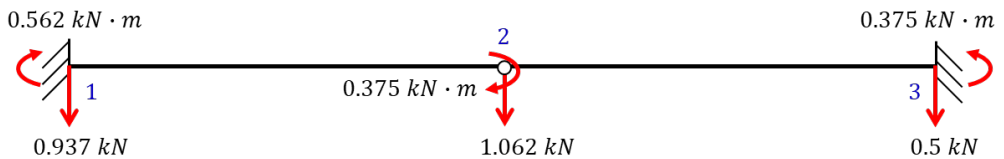


$$\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{23} = \{0.5, 0.375, 0.5, -0.375\}^T (\text{kN e kN} \cdot \text{m})$$

• Estado II

$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_G^{12} = -[\mathbf{L}]\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{12} = \{-0.937, -0.562, -0.562, 0\}^T (\text{kN e kN} \cdot \text{m})$$

$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_G^{23} = -[\mathbf{L}]\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{23} = \{-0.5, -0.375, -0.5, 0.375\}^T (\text{kN e kN} \cdot \text{m})$$



4. Matrices de rigidez das barras em coordenadas locais

- Barra 1-2

$$[k^{12}]_L = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & | & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & | & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ - & - & | & - & - \\ -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & | & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k^{12}]_L = \begin{bmatrix} 39.9 & 119700 & | & -39.9 & 0 \\ 119700 & 359100000 & | & -119700 & 0 \\ - & - & | & - & - \\ -39.9 & -119700 & | & 39.9 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-3

$$[k^{23}]_L = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & | & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & | & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ - & - & | & - & - \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & | & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & | & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$[k^{23}]_L = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & | & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & | & -239400 & 239400000 \\ - & - & | & - & - \\ -159.6 & -239400 & | & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & | & -239400 & 478800000 \end{bmatrix}$$

5. Matrices de rixidez das barras en coordenadas globais

Coinciden coas matrices en eixos locais

6. Matriz completa de rixidez da viga continua

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 39.9 & 119700 & -39.9 & 0 & 0 & 0 \\ 119700 & 359100000 & -119700 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ -39.9 & -119700 & 199.5 & 239400 & -159.6 & 239400 \\ 0 & 0 & 239400 & 478800000 & -239400 & 239400000 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & -159.6 & -239400 & 159.6 & -239400 \\ 0 & 0 & 239400 & 239400000 & -239400 & 478800000 \end{bmatrix}$$

7. Ecuación matricial completa de equilibrio da viga continua

$$\{P_0\} = [K_0] \cdot \{\delta_0\}$$

$$\begin{bmatrix} R_y^1 - 0.937 \cdot 10^3 \\ M_R^1 - 0.562 \cdot 10^6 \\ - \\ -1.062 \cdot 10^3 \\ -0.375 \cdot 10^6 \\ - \\ R_y^3 - 0.5 \cdot 10^3 \\ M_R^3 + 0.375 \cdot 10^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39.9 & 119700 & -39.9 & 0 & 0 & 0 \\ 119700 & 359100000 & -119700 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ -39.9 & -119700 & 199.5 & 239400 & -159.6 & 239400 \\ 0 & 0 & 239400 & 478800000 & -239400 & 239400000 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & -159.6 & -239400 & 159.6 & -239400 \\ 0 & 0 & 239400 & 239400000 & -239400 & 478800000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ \delta_y^2 \\ \theta_2 \\ - \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. Ecuación matricial reducida de equilibrio da viga continua

$$\{P_c\} = [K_{dd}] \cdot \{\delta_d\}$$

$$\begin{bmatrix} -1.062 \cdot 10^3 \\ -0.375 \cdot 10^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 199.5 & 239400 \\ 239400 & 478800000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_y^2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

9. Desprazamentos

$$\delta_y^2 = -10.96 \text{ mm}, \theta_2 = 4.70e - 03 \text{ rad}$$

10. Reaccións nos apoios

$$[R_y^1 - 0.937 \cdot 10^3] = [K_{13} \quad K_{14}] \begin{bmatrix} \delta_y^2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = [-39.9 \quad 0] \begin{bmatrix} -10.96 \\ 4.70e - 03 \end{bmatrix}$$

$$R_y^1 = 1.375 \text{ kN}$$

$$|M_R^3 + 0.375 \cdot 10^6| = [K_{63} \quad K_{64}] \begin{vmatrix} \delta_y^2 \\ \theta_2 \end{vmatrix} = [239400 \quad 239400000] \begin{vmatrix} -10.96 \\ 4.70e-03 \end{vmatrix}$$

$$M_R^3 = -1.875 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

281

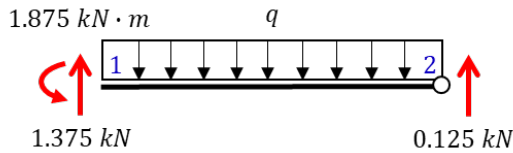
11. Solicitaciones de extremo en barras

- Barra 1-2 (AB)

$$\{S\} = [k]_L \cdot [L]^T \cdot \{\delta\} + \{F_{emp}\}_L$$

$$\{S\} = \begin{bmatrix} 39.9 & 119700 & -39.9 & 0 \\ 119700 & 359100000 & -119700 & 0 \\ -39.9 & -119700 & 39.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -10.96 \\ 4.70e-03 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.937 \cdot 10^3 \\ 0.562 \cdot 10^6 \\ 0.562 \cdot 10^3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1.375 \cdot 10^3 \\ 1.875 \cdot 10^6 \\ 0.125 \cdot 10^3 \\ 0 \end{vmatrix} (N \text{ e } N \cdot mm)$$

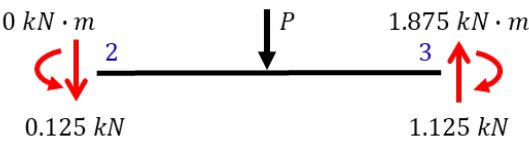


- Barra 2-3 (BC)

$$\{S\} = [k]_L \cdot [L]^T \cdot \{\delta\} + \{F_{emp}\}_L$$

$$\{S\} = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & -239400 & 239400000 \\ -159.6 & -239400 & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & -239400 & 478800000 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} -10.96 \\ 4.70e-03 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.50 \cdot 10^3 \\ 0.375 \cdot 10^6 \\ 0.50 \cdot 10^3 \\ -0.375 \cdot 10^6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -0.125 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 1.125 \cdot 10^3 \\ -1.875 \cdot 10^6 \end{vmatrix} (N \text{ e } N \cdot mm)$$

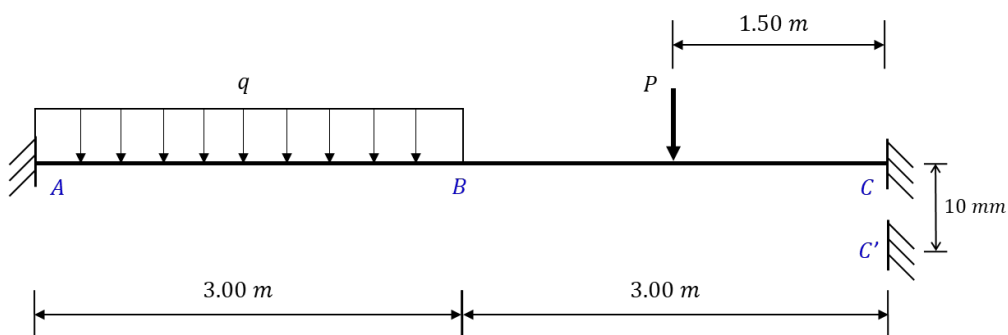


3.2.9 Exercício M-9. Viga continua con asento nun dos apoios: resolución polo método directo

Para a viga continua da figura, sometida as cargas indicadas, e a un asento no apoio C, determinar utilizando o método directo:

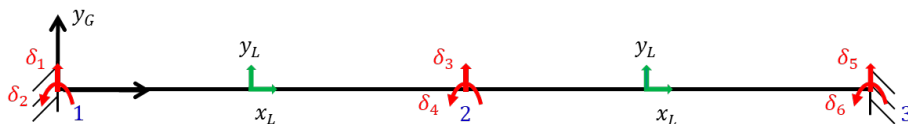
283

- Frecha e xiro da sección central B
- Solicitacións de extremo nas barras AB e BC



$$E = 210 \text{ GPa}; I = 171 \text{ cm}^4; P = 5.0 \text{ kN}; q = 1.0 \text{ kN/m}$$

1. Discretización

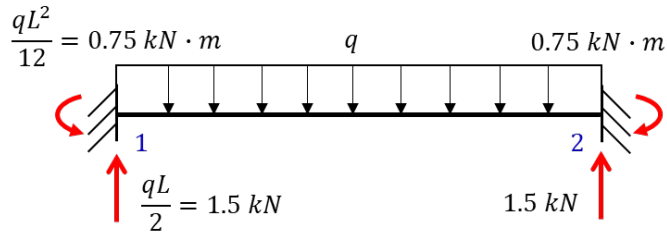


2. Esquema da matriz completa de rixidez

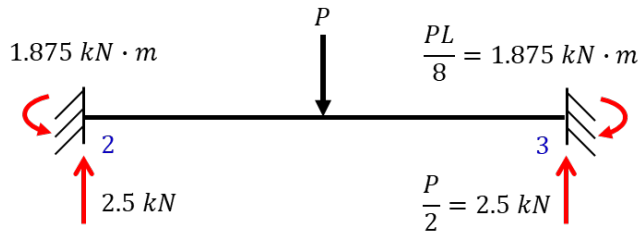
$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} & k_{12}^{12} & 0 \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} \\ 0 & k_{32}^{23} & k_{33}^{23} \end{bmatrix}$$

3. Forzas de empotramento perfecto e forzas nodais equivalentes

• Estado I

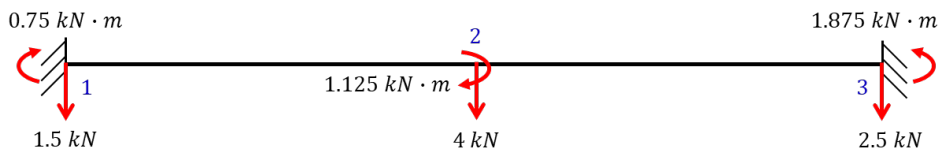


$$\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{12} = \{1.5, 0.75, 1.5, -0.75\}^T (\text{kN e kN} \cdot \text{m})$$



$$\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{23} = \{2.5, 1.875, 2.5, -1.875\}^T (\text{kN e kN} \cdot \text{m})$$

• Estado II



$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_G^{12} = -[\mathbf{L}]\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{12} = \{-1.5, -0.75, -1.5, 0.75\}^T (\text{kN e kN} \cdot \text{m})$$

$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_G^{23} = -[\mathbf{L}]\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{23} = \{-2.5, -1.875, -2.5, 1.875\}^T (\text{kN e kN} \cdot \text{m})$$

4. Matrices de rixidez das barras en coordenadas locais

- Barra 1-2

$$[k^{12}]_L = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & | & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & | & -239400 & 239400000 \\ - & - & | & - & - \\ -159.6 & -239400 & | & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & | & -239400 & 478800000 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-3

$$[k^{23}]_L = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & | & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & | & -239400 & 239400000 \\ - & - & | & - & - \\ -159.6 & -239400 & | & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & | & -239400 & 478800000 \end{bmatrix}$$

5. Matrices de rixidez das barras en coordenadas globais

Coinciden coas matrices en eixos locais

6. Matriz completa de rixidez da viga continua

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & | & -159.6 & 239400 & | & 0 & 0 \\ 239400 & 478800000 & | & -239400 & 239400000 & | & 0 & 0 \\ - & - & | & - & - & | & - & - \\ -159.6 & -239400 & | & 319.2 & 0 & | & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 239400000 & | & 0 & 957600000 & | & -239400 & 239400000 \\ - & - & | & - & - & | & - & - \\ 0 & 0 & | & -159.6 & -239400 & | & 159.6 & -239400 \\ 0 & 0 & | & 239400 & 239400000 & | & -239400 & 478800000 \end{bmatrix}$$

7. Ecuación matricial completa de equilibrio

$$\begin{bmatrix} R_y^1 - 1.5 \cdot 10^3 \\ M_R^1 - 0.75 \cdot 10^6 \\ - \\ -4.0 \cdot 10^3 \\ -1.125 \cdot 10^6 \\ - \\ R_y^3 - 2.5 \cdot 10^3 \\ M_R^3 + 1.875 \cdot 10^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & | & -159.6 & 239400 & | & 0 & 0 \\ 239400 & 478800000 & | & -239400 & 239400000 & | & 0 & 0 \\ - & - & | & - & - & | & - & - \\ -159.6 & -239400 & | & 319.2 & 0 & | & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 239400000 & | & 0 & 957600000 & | & -239400 & 239400000 \\ - & - & | & - & - & | & - & - \\ 0 & 0 & | & -159.6 & -239400 & | & 159.6 & -239400 \\ 0 & 0 & | & 239400 & 239400000 & | & -239400 & 478800000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ \delta_y^2 \\ \theta_2 \\ - \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. Desplazamientos

$$[K_{dd}] \cdot \{\delta_d\} + [K_{dc}] \cdot \{\delta_c\} = \{P_c\}$$

$$\{\delta_d\} = [K_{dd}]^{-1} \cdot (\{P_c\} - [K_{dc}] \cdot \{\delta_c\})$$

286

$$\begin{bmatrix} 3.13e-03 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{Bmatrix} -4000 \\ -1125000 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -159.60 & -239400 & -159.60 & 239400 \\ 239400 & 239400000 & -239400 & 239400000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\delta_y^2 = -17.53 \text{ mm}, \theta_2 = -3.67e-03 \text{ rad}$$

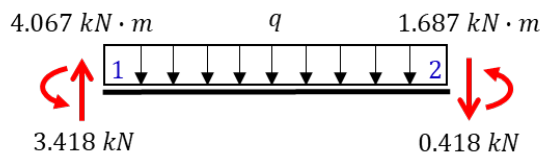
9. Solicitaciones de extremo en barras

- Barra 1-2 (AB)

$$\{S\} = [k]_L \cdot [L]^T \cdot \{\delta\} + \{F_{emp}\}_L$$

$$\{S\} = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & -239400 & 239400000 \\ -159.6 & -239400 & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & -239400 & 478800000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -17.53 \\ -3.67e-03 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 \cdot 10^3 \\ 0.75 \cdot 10^6 \\ 1.5 \cdot 10^3 \\ -0.75 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.418 \cdot 10^3 \\ 4.067 \cdot 10^6 \\ -0.418 \cdot 10^3 \\ 1.687 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \text{ (N e N} \cdot \text{mm)}$$



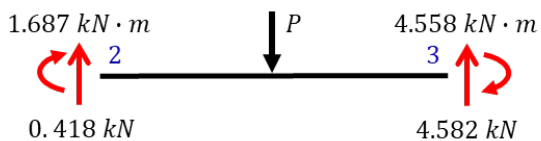
- Barra 2-3 (BC)

$$\{S\} = [k]_L \cdot [L]^T \cdot \{\delta\} + \{F_{emp}\}_L$$

$$\{S\} = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & -239400 & 239400000 \\ -159.6 & -239400 & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & -239400 & 478800000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -17.53 \\ -3.67e-03 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.5 \cdot 10^3 \\ 1.875 \cdot 10^6 \\ 2.5 \cdot 10^3 \\ -1.875 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.418 \cdot 10^3 \\ -1.687 \cdot 10^6 \\ 4.582 \cdot 10^3 \\ -4.558 \cdot 10^6 \end{bmatrix} (N e N \cdot mm)$$

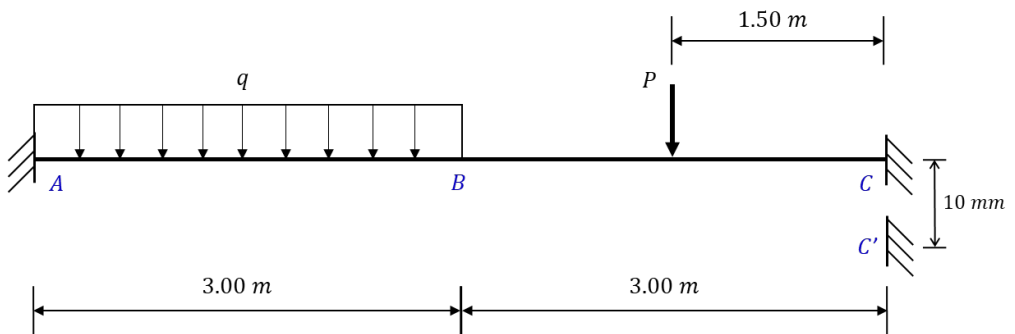
287



3.2.10 Exercício M-10. Viga continua con asento nun dos apoios: resolución polo método indirecto

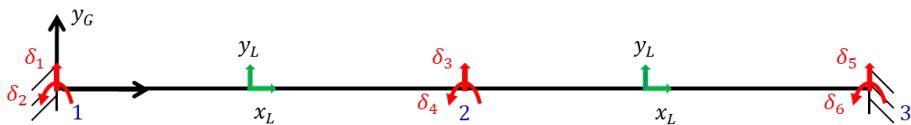
Para a viga continua da figura, sometida as cargas indicadas, e a un asento no apoio C, determinar utilizando o método indirecto:

- Frecha e xiro da sección central B
- Solicitacións de extremo nas barras AB e BC



$$E = 210 \text{ GPa}; I = 171 \text{ cm}^4; P = 5.0 \text{ kN}; q = 1.0 \text{ kN/m}$$

1. Discretización

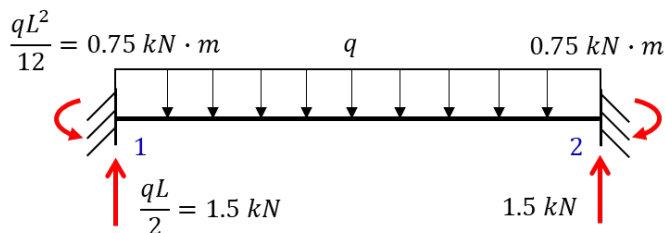


2. Esquema da matriz completa de rixidez

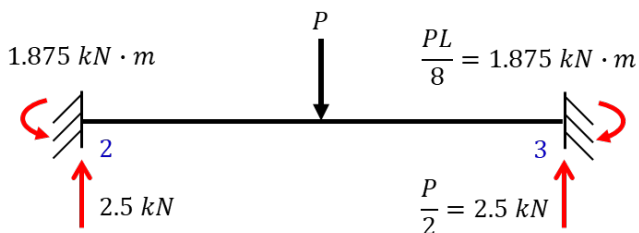
$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} & k_{12}^{12} & 0 \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} \\ 0 & k_{32}^{23} & k_{33}^{23} \end{bmatrix}$$

3. Forzas de empotramento perfecto e forzas nodais equivalentes

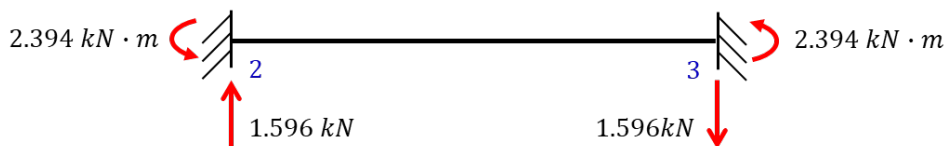
- Estado I



$$\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{12} = \{1.5, 0.75, 1.5, -0.75\}^T \text{ (kN e kN} \cdot \text{m)}$$



$$\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{23} = \{2.5, 1.875, 2.5, -1.875\}^T \text{ (kN e kN} \cdot \text{m)}$$



$$\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{23} = [\mathbf{k}]_L \cdot [\mathbf{L}]^T \cdot \{\boldsymbol{\delta}_{23}\} \leftrightarrow \{\boldsymbol{\delta}_{23}\} = \{0, 0, -10, 0\}^T \text{ (mm)}$$

$$\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{23} = \{1.596, 2.394, -1.596, 2.394\}^T \text{ (kN e kN} \cdot \text{m)}$$

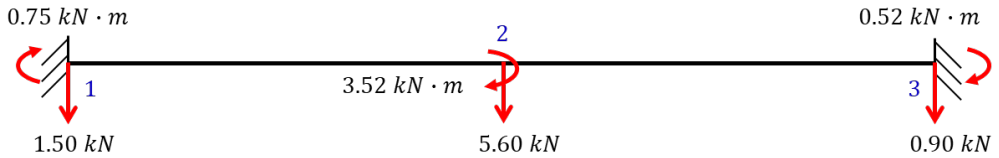
- Estado II

$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_G^{12} = -[\mathbf{L}]\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{12} = \{-1.5, -0.75, -1.5, 0.75\}^T \text{ (kN e kN} \cdot \text{m)}$$

$$\{F_{eq}\}_G^{23} = -[L]\{F_{emp}\}_L^{23} = \{-2.5, -1.875, -2.5, 1.875\}^T (kN \text{ e } kN \cdot m)$$

$$\{F_{eq}\}_G^{23} = -[L]\{F_{emp}\}_L^{23} = \{-1.596, -2.394, 1.596, -2.394\}^T (kN \text{ e } kN \cdot m)$$

290



4. Matrices de rigidez das barras em coordenadas locais

- Barra 1-2

$$[k^{12}]_L = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & | & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & | & -239400 & 239400000 \\ - & - & | & - & - \\ -159.6 & -239400 & | & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & | & -239400 & 478800000 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-3

$$[k^{23}]_L = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & | & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & | & -239400 & 239400000 \\ - & - & | & - & - \\ -159.6 & -239400 & | & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & | & -239400 & 478800000 \end{bmatrix}$$

5. Matrices de rigidez das barras em coordenadas globais

Coinciden coas matrices en eixos locais

6. Matriz completa de rigidez da viga continua

$$[K_0] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 159.6 & 239400 & -159.6 & 239400 & 0 & 0 \\ 239400 & 478800000 & -239400 & 239400000 & 0 & 0 \\ \hline - & - & - & - & - & - \\ -159.6 & -239400 & 319.2 & 0 & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 239400000 & 0 & 957600000 & -239400 & 239400000 \\ \hline - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & -159.6 & -239400 & 159.6 & -239400 \\ 0 & 0 & 239400 & 239400000 & -239400 & 478800000 \end{array} \right]$$

291

7. Ecuación matricial completa de equilibrio

$$\left[\begin{array}{l} R_y^1 - 1.5 \cdot 10^3 \\ M_R^1 - 0.75 \cdot 10^6 \\ - \\ -5.60 \cdot 10^3 \\ -3.52 \cdot 10^6 \\ - \\ R_y^3 - 0.90 \cdot 10^3 \\ M_R^3 - 0.52 \cdot 10^6 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 159.6 & 239400 & -159.6 & 239400 & 0 & 0 \\ 239400 & 478800000 & -239400 & 239400000 & 0 & 0 \\ \hline - & - & - & - & - & - \\ -159.6 & -239400 & 319.2 & 0 & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 239400000 & 0 & 957600000 & -239400 & 239400000 \\ \hline - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & -159.6 & -239400 & 159.6 & -239400 \\ 0 & 0 & 239400 & 239400000 & -239400 & 478800000 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ - \\ \delta_y^2 \\ \theta_2 \\ - \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

8. Ecuación matricial reducida de equilibrio

$$\left[\begin{array}{l} -5.60 \cdot 10^3 \\ -3.52 \cdot 10^6 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 319.2 & 0 \\ 0 & 957600000 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \delta_y^2 \\ \theta_2 \end{array} \right]$$

9. Desplazamientos

$$\delta_y^2 = -17.53 \text{ mm}, \theta_2 = -0.0037 \text{ rad}$$

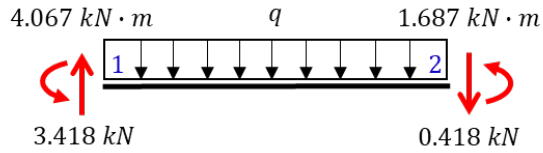
10. Solicitaciones de extremo en barras

- Barra 1-2 (AB)

$$\{S\} = [k]_L \cdot [L]^T \cdot \{\delta\} + \{F_{emp}\}_L$$

$$\begin{aligned} \{S\} &= \left[\begin{array}{cc|cc} 159.6 & 239400 & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & -239400 & 239400000 \\ \hline -159.6 & -239400 & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & -239400 & 478800000 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -17.53 \\ -0.0037 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} 1.5 \cdot 10^3 \\ 0.75 \cdot 10^6 \\ 1.5 \cdot 10^3 \\ -0.75 \cdot 10^6 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{l} 3.418 \cdot 10^3 \\ 4.067 \cdot 10^6 \\ -0.418 \cdot 10^3 \\ 1.687 \cdot 10^6 \end{array} \right] \end{aligned}$$

292

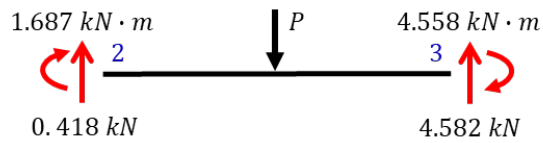


- Barra 2-3 (BC)

$$\{S\} = [k]_L \cdot [L]^T \cdot \{\delta\} + \{F_{emp}\}_L$$

$$\{S\} = \begin{bmatrix} 159.6 & 239400 & -159.6 & 239400 \\ 239400 & 478800000 & -239400 & 239400000 \\ -159.6 & -239400 & 159.6 & -239400 \\ 239400 & 239400000 & -239400 & 478800000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -17.53 \\ -0.0037 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.10 \cdot 10^3 \\ 4.27 \cdot 10^6 \\ 0.90 \cdot 10^3 \\ 0.52 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.418 \cdot 10^3 \\ -1.687 \cdot 10^6 \\ 4.582 \cdot 10^3 \\ -4.558 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

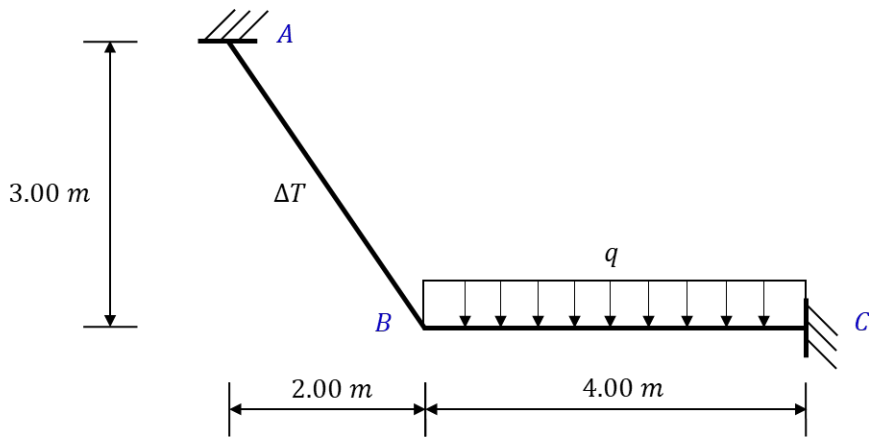


3.2.11 Exercício M-11. Estrutura de nós ríxidos con carga térmica e uniformemente distribuída

Para a estrutura da figura, sometida a carga distribuída q e a unha variación de temperatura uniforme ΔT na barra AB, determinar:

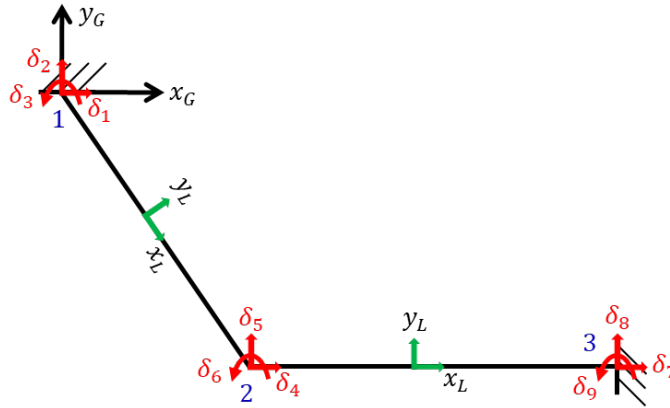
293

- a) Desprazamentos do nó B
- b) Solicitacións de extremo na barra AB



$$q = 1 \text{ kN/m}, E = 70 \text{ GPa}, I = 76.4 \text{ cm}^4, A = 4.72 \text{ cm}^2, \Delta T = 45 \text{ }^\circ\text{C}, \alpha = 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

1. Discretización

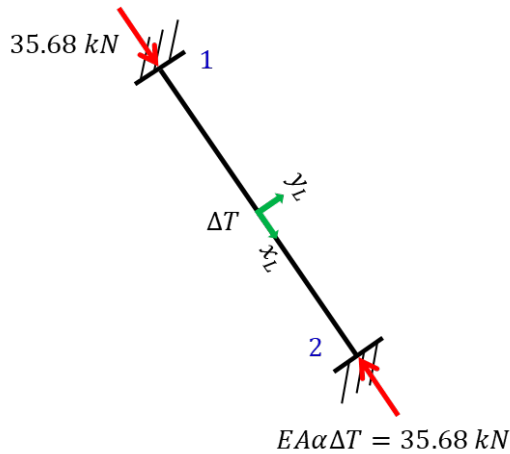


2. Esquema da matriz completa de rixidez

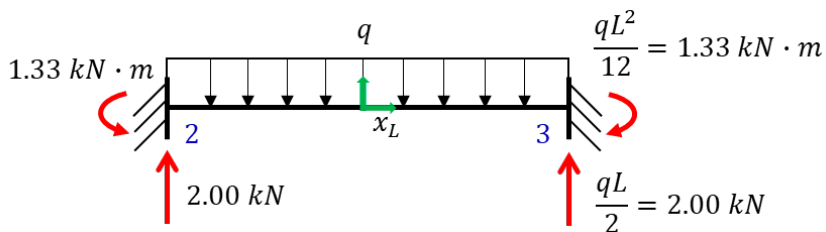
$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} & k_{12}^{12} & 0 \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} \\ 0 & k_{32}^{23} & k_{33}^{23} \end{bmatrix}$$

3. Forzas de empotramento perfecto e forzas nodais equivalentes

- Estado I

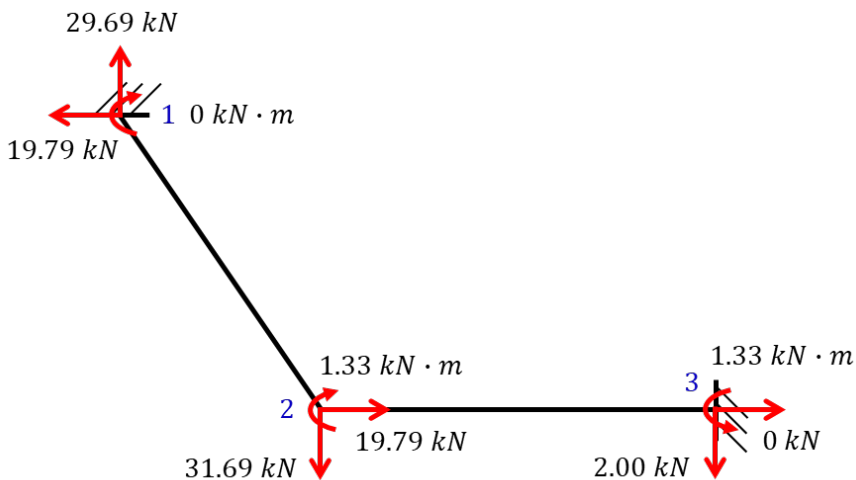


$$\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{12} = \{35.68, 0, 0, -35.68, 0, 0\}^T (\text{kN e kN} \cdot \text{m})$$



$$\{F_{emp}\}_L^{23} = \{0, 2.00, 1.33, 0, 2.00, -1.33\}^T (kN \text{ e } kN \cdot m)$$

• Estado II



$$\{F_{eq}\}_L^{12} = -\{F_{emp}\}_L^{12} = \{-35.68, 0, 0, 35.68, 0, 0\}^T (kN \text{ e } kN \cdot m)$$

$$\{F_{eq}\}_G^{12} = [L] \cdot \{F_{eq}\}_L^{12} = \{-19.79, 29.69, 0, 19.79, -29.69, 0\}^T (kN \text{ e } kN \cdot m)$$

$$\{F_{eq}\}_L^{23} = -\{F_{emp}\}_L^{23} = \{0, -2.00, -1.33, 0, -2.00, 1.33\}^T (kN \text{ e } kN \cdot m)$$

$$\{F_{eq}\}_G^{23} = [L] \cdot \{F_{eq}\}_L^{23} = \{0, -2.00, -1.33, 0, -2.00, 1.33\}^T (kN \text{ e } kN \cdot m)$$

4. Matrices de rixidez das barras en coordenadas globais

- Barra 1-2 ($\alpha = 303.70^\circ$)

$$[k^{12}]_G = \begin{bmatrix} 2829.06 & -4223.05 & 20537.56 & | & -2829.06 & 4223.05 & 20537.56 \\ -4223.05 & 6348.27 & 13691.70 & | & 4223.05 & -6348.27 & 13691.70 \\ 20537.56 & 13691.70 & 59330732.99 & | & -20537.56 & -13691.70 & 29665366.49 \\ - & - & - & | & - & - & - \\ -2829.06 & 4223.05 & -20537.56 & | & 2829.06 & -4223.05 & -20537.56 \\ 4223.05 & -6348.27 & -13691.70 & | & -4223.05 & 6348.27 & -13691.70 \\ 20537.56 & 13691.70 & 29665366.49 & | & -20537.56 & -13691.70 & 59330732.99 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-3 ($\alpha = 0^\circ$)

$$[k^{23}]_G = \begin{bmatrix} 8260 & 0 & 0 & | & -8260 & 0 & 0 \\ 0 & 10.03 & 20055 & | & 0 & -10.03 & 20055 \\ 0 & 20055 & 53480000 & | & 0 & -20055 & 26740000 \\ - & - & - & | & - & - & - \\ -8260 & 0 & 0 & | & 8260 & 0 & 0 \\ 0 & -10.03 & -20055 & | & 0 & 10.03 & -20055 \\ 0 & 20055 & 26740000 & | & 0 & -20055 & 53480000 \end{bmatrix}$$

5. Matriz completa de rixidez da estrutura

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 2829.06 & -4223.05 & 20537.56 & | & -2829.06 & 4223.05 & 20537.56 & | & 0 & 0 & 0 \\ -4223.05 & 6348.27 & 13691.70 & | & 4223.05 & -6348.27 & 13691.70 & | & 0 & 0 & 0 \\ 20537.56 & 13691.70 & 59330732.99 & | & -20537.56 & -13691.70 & 29665366.49 & | & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & | & - & - & - & | & - & - & - \\ -2829.06 & 4223.05 & -20537.56 & | & 11089.06 & -4223.05 & -20537.56 & | & -8260 & 0 & 0 \\ 4223.05 & -6348.27 & -13691.70 & | & -4223.05 & 6358.30 & 6363.29 & | & 0 & -10.02 & 20055 \\ 20537.56 & 13691.70 & 29665366.49 & | & -20537.56 & 6363.29 & 112810733 & | & 0 & -20055 & 26740000 \\ - & - & - & | & - & - & - & | & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & -8260 & 0 & 0 & | & 8260 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -10.02 & -20055 & | & 0 & 10.02 & -20055 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 20055 & 26740000 & | & 0 & -20055 & 53480000 \end{bmatrix}$$

6. Ecuación matricial completa de equilibrio da estrutura

$$\begin{bmatrix} R_1^x - 19.79 \cdot 10^3 \\ R_1^y + 29.69 \cdot 10^3 \\ M_R^1 \\ 19.79 \cdot 10^3 \\ -31.69 \cdot 10^3 \\ -1.33 \cdot 10^6 \\ - \\ R_2^x \\ R_2^y - 2.00 \cdot 10^3 \\ M_R^2 + 1.33 \cdot 10^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2829.06 & -4223.05 & 20537.56 & | & -2829.06 & 4223.05 & 20537.56 & | & 0 & 0 & 0 \\ -4223.05 & 6348.27 & 13691.70 & | & 4223.05 & -6348.27 & 13691.70 & | & 0 & 0 & 0 \\ 20537.56 & 13691.70 & 59330732.99 & | & -20537.56 & -13691.70 & 29665366.49 & | & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & | & - & - & - & | & - & - & - \\ -2829.06 & 4223.05 & -20537.56 & | & 11089.06 & -4223.05 & -20537.56 & | & -8260 & 0 & 0 \\ 4223.05 & -6348.27 & -13691.70 & | & -4223.05 & 6358.30 & 6363.29 & | & 0 & -10.02 & 20055 \\ 20537.56 & 13691.70 & 29665366.49 & | & -20537.56 & 6363.29 & 112810733 & | & 0 & -20055 & 26740000 \\ - & - & - & | & - & - & - & | & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & -8260 & 0 & 0 & | & 8260 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -10.02 & -20055 & | & 0 & 10.02 & -20055 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 20055 & 26740000 & | & 0 & -20055 & 53480000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^x \\ \delta_1^y \\ \theta_1 \\ \delta_2^x \\ \delta_2^y \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

7. Ecuación matricial de equilibrio da estrutura

$$\begin{Bmatrix} 19.79 \cdot 10^3 \\ -31.69 \cdot 10^3 \\ -1.33 \cdot 10^6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 11089.06 & -4223.05 & -20537.56 \\ -4223.05 & 6358.30 & 6363.29 \\ -20537.56 & 6363.29 & 112810733 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_x^2 \\ \delta_y^2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

8. Desprazamentos

$$\delta_x^2 = -0.174 \text{ mm}, \delta_y^2 = -5.088 \text{ mm}, \theta_2 = -1.156e - 02 \text{ rad}$$

9. Solicitacións de extremo na barra AB

$$\{S\} = [k]_L \cdot [L]^T \cdot \{\delta\} + \{F_{emp}\}_L$$

$$\{S\} = \begin{bmatrix} 9163.64 & 0 & 0 & | & -9163.64 & 0 & 0 \\ 0 & 13.69 & 24683.07 & | & 0 & -13.69 & 24683.07 \\ 0 & 24683.07 & 59330732.99 & | & 0 & -24683.07 & 29665366.49 \\ - & - & - & | & - & - & - \\ -9163.64 & 0 & 0 & | & 9163.64 & 0 & 0 \\ 0 & -13.69 & -24683.07 & | & 0 & 13.69 & -24683.07 \\ 0 & 24683.07 & 29665366.49 & | & 0 & -24683.07 & 59330732.99 \end{bmatrix}$$

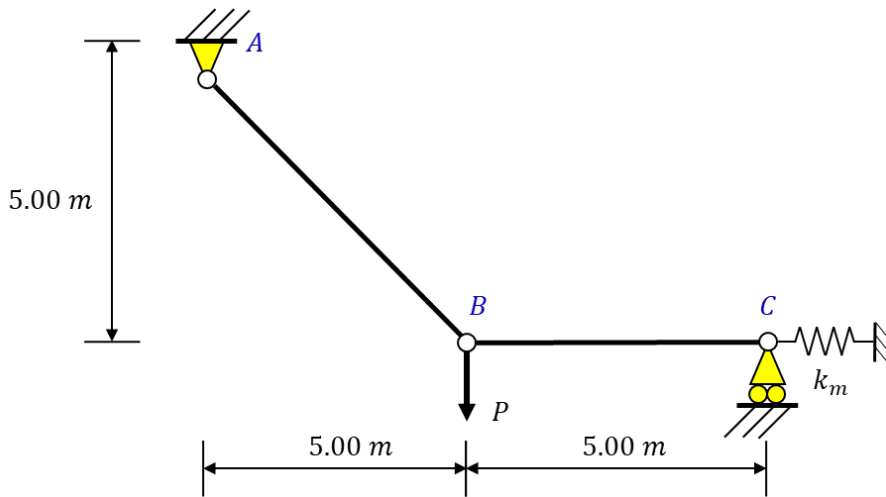
$$\cdot \begin{bmatrix} 0.55 & -0.83 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0.83 & 0.55 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & | & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & 0.55 & -0.83 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0.83 & 0.55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ - \\ -0.1742 \\ -5.0882 \\ -0.0116 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix} 35.68 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 0 \\ - \\ -35.68 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.22 \cdot 10^3 \\ -2.44 \cdot 10^2 \\ -2.69 \cdot 10^5 \\ - \\ 2.22 \cdot 10^3 \\ 2.44 \cdot 10^2 \\ -6.12 \cdot 10^5 \end{Bmatrix}$$

3.2.12 Exercício M-12. Estrutura de nós articulados com carga puntual e apoio elástico

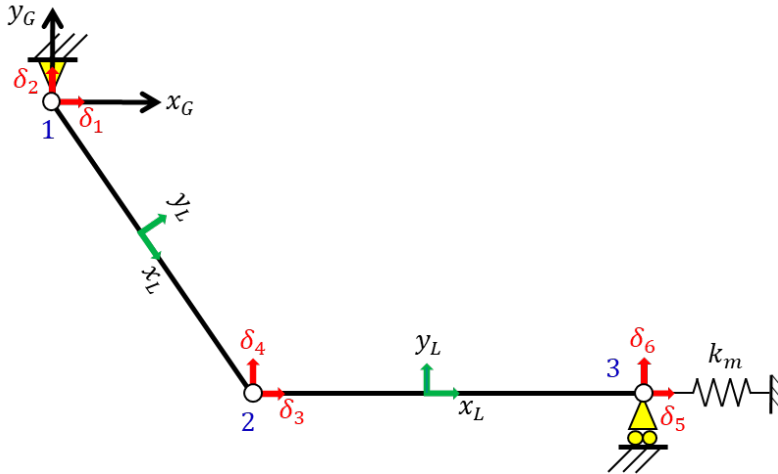
Para a estrutura plana de nós articulados da figura, determinar:

- Desprazamentos do nó B
- Reacção no apoio elástico C



$$P = 10 \text{ kN}, E = 210 \text{ GPa}, A = 150 \text{ mm}^2, k = 5000 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

1. Discretización



2. Esquema da matriz completa de rigidez

$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} & k_{12}^{12} & 0 \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} \\ 0 & k_{32}^{23} & k_{33}^{23} + k_{33}^{k_m} \end{bmatrix}$$

3. Matrices de rigidez das barras en coordenadas globais

- Barra 1-2 ($\alpha = 315^\circ$)

$$[k^{12}]_G = \begin{bmatrix} 2227.38 & -2227.38 & | & -2227.38 & 2227.38 \\ -2227.38 & 2227.38 & | & 2227.38 & -2227.38 \\ - & - & | & - & - \\ -2227.38 & 2227.38 & | & 2227.38 & -2227.38 \\ 2227.38 & -2227.38 & | & -2227.38 & 2227.38 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-3 ($\alpha = 0^\circ$)

$$[k^{23}]_G = \begin{bmatrix} 6300 & 0 & | & -6300 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ - & - & | & - & - \\ -6300 & 0 & | & 6300 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Resorte

$$[k_{33}^m]_G = \begin{bmatrix} 5000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Ecuación matricial completa de equilibrio da estrutura

300

$$\begin{bmatrix} R_x^1 \\ R_y^1 \\ - \\ 0 \\ -10 \cdot 10^3 \\ - \\ 0 \\ R_y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2227.38 & -2227.38 & -2227.38 & 2227.38 \\ -2227.38 & 2227.38 & 2227.38 & -2227.38 \\ - & - & - & - \\ -2227.38 & 2227.38 & 8527.38 & -2227.38 \\ 2227.38 & -2227.38 & -2227.38 & 2227.38 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & -6300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ -6300 \\ 0 \\ - \\ 6300 + 5000 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ \delta_x^2 \\ \delta_y^2 \\ - \\ \delta_x^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Ecuación matricial reducida de equilibrio

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \cdot 10^3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8527.38 & -2227.38 & -6300 \\ -2227.38 & 2227.38 & 0 \\ -6300 & 0 & 11300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x^2 \\ \delta_y^2 \\ \delta_x^3 \end{bmatrix}$$

6. Desprazamentos

$$\delta_x^2 = -3.587 \text{ mm}, \delta_y^2 = -8.077 \text{ mm}, \delta_x^3 = -2.00 \text{ mm}$$

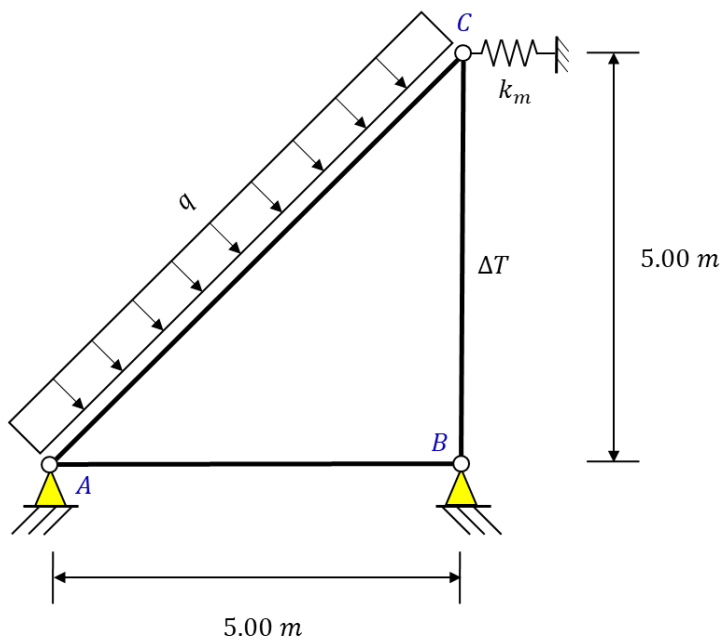
7. Reacción no apoio elástico C

$$R_x^C = R_x^3 = -k_m \cdot \delta_x^3 = 10 \text{ kN}$$

$$R_x^C = 10 \text{ kN} \rightarrow$$

3.2.13 Exercício M-13. Estrutura de nós articulados com carga distribuída, térmica e apoio elástico

Para a estrutura plana de nós articulados da figura, onde todas as barras são do mesmo material e com a mesma secção transversal, determinar os deslocamentos do nó C. 301

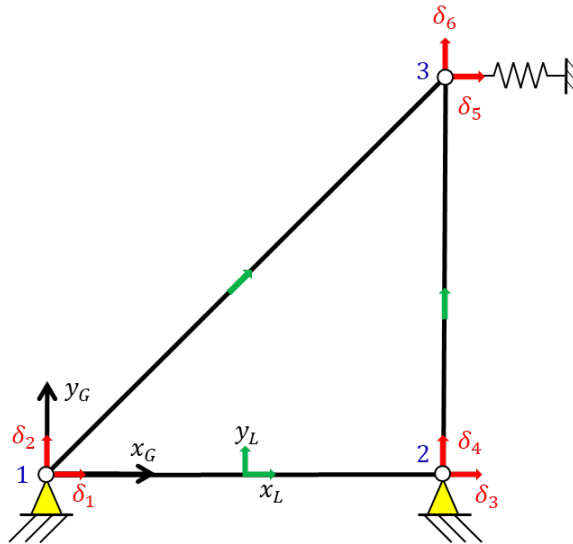


$$E = 210 \text{ GPa}, A = 50 \text{ cm}^2, \alpha = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$q = 50 \text{ kN/m}, \Delta T = +50^\circ\text{C}$$

$$k_m = 5000 \text{ kN/m}$$

1. Discretización

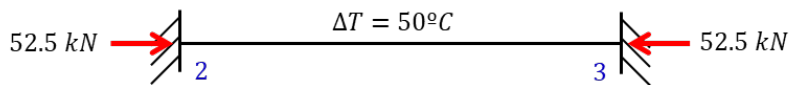


2. Esquema da matriz completa de rixidez

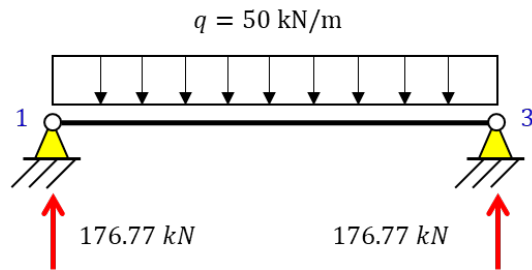
$$[K_0] = \begin{bmatrix} k_{11}^{12} + k_{11}^{13} & k_{12}^{12} & k_{13}^{13} \\ k_{21}^{12} & k_{22}^{12} + k_{22}^{23} & k_{23}^{23} \\ k_{31}^{13} & k_{32}^{23} & k_{33}^{13} + k_{33}^{23} \end{bmatrix}$$

3. Forzas de empotramento perfecto e forzas nodais equivalentes

- Estado I

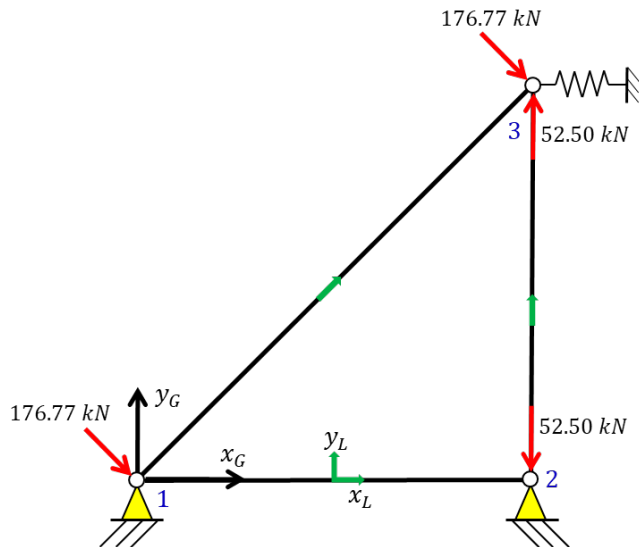


$$\{F_{emp}\}_L^{23} = \{52.5, 0, -52.5, 0\}^T \text{ (kN)}$$



$$\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{13} = \{0, 176.77, 0, 176.77\}^T (kN)$$

- Estado II



$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_L^{23} = -\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{23} = \{-52.50, 0, 52.50, 0\}^T (kN)$$

$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_G^{23} = [\mathbf{L}] \cdot \{\mathbf{F}_{eq}\}_L^{23} = \{0, -52.50, 0, 52.50\}^T (kN)$$

$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_L^{13} = -\{\mathbf{F}_{emp}\}_L^{13} = \{0, -176.77, 0, -176.77\}^T (kN)$$

$$\{\mathbf{F}_{eq}\}_G^{13} = [\mathbf{L}] \cdot \{\mathbf{F}_{eq}\}_L^{13} = \{125, -125, 125, -125\}^T (kN)$$

4. Matrices de rixidez das barras en coordenadas globais

- Barra 1-2 ($\alpha = 0^\circ$)

$$[k^{12}]_G = \begin{bmatrix} 210000 & 0 & -210000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -210000 & 0 & 210000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Barra 2-3 ($\alpha = 90^\circ$)

$$[k^{23}]_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 210000 & 0 & -210000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -210000 & 0 & 210000 \end{bmatrix}$$

- Barra 1-3 ($\alpha = 45^\circ$)

$$[k^{13}]_G = \begin{bmatrix} 74246.21 & 74246.21 & -74246.21 & -74246.21 \\ 74246.21 & 74246.21 & -74246.21 & -74246.21 \\ -74246.21 & -74246.21 & 74246.21 & 74246.21 \\ -74246.21 & -74246.21 & 74246.21 & 74246.21 \end{bmatrix}$$

5. Matriz completa de rixidez da estrutura

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 284246.212 & 74246.212 & -210000 & 0 & -74246.212 & -74246.212 \\ 742416.212 & 74246.212 & 0 & 0 & -74246.212 & -74246.212 \\ - & - & - & - & - & - \\ -210000 & 0 & 210000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 210000 & 0 & -210000 \\ - & - & - & - & - & - \\ -74246.212 & -74246.212 & 0 & 0 & 74246.212 + 5000 & 74246.212 \\ -74246.212 & -74246.212 & 0 & -210000 & 74246.212 & 284246.212 \end{bmatrix}$$

6. Ecuación matricial completa de equilibrio da estrutura

$$\begin{bmatrix} R_x^1 + 125000 \\ R_y^1 - 125000 \\ - \\ R_x^2 \\ R_y^2 - 52500 \\ - \\ 125000 \\ -72500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 284246.212 & 74246.212 & -210000 & 0 & -74246.212 & -74246.212 \\ 742416.212 & 74246.212 & 0 & 0 & -74246.212 & -74246.212 \\ - & - & - & - & - & - \\ -210000 & 0 & 210000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 210000 & 0 & -210000 \\ - & - & - & - & - & - \\ -74246.212 & -74246.212 & 0 & 0 & 74246.212 + 5000 & 74246.212 \\ -74246.212 & -74246.212 & 0 & -210000 & 74246.212 & 284246.212 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 0 \\ - \\ \delta_x^3 \\ \delta_y^3 \end{bmatrix}$$

7. Ecuación matricial de equilibrio da estrutura

$$\begin{bmatrix} 125000 \\ -72500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74246.212 + 5000 & 74246.212 \\ 74246.212 & 284246.212 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x^3 \\ \delta_y^3 \end{bmatrix}$$

8. Desprazamentos

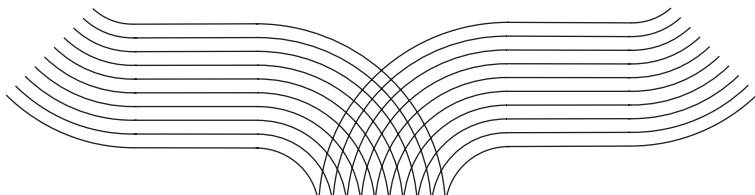
$$\delta_x^3 = 2.40 \text{ mm}, \delta_y^3 = -0.88 \text{ mm}$$

3.3 Referencias

[1] Manuel Vázquez, Cálculo Matricial de Estructuras, Colegio de ITOP de Madrid, 1999.

[2] Manuel Vázquez, El método de los elementos finitos, Noela, 2011.

[3] París Carballo, Federico; Cañas Delgado, José; Fernández Canteli, Alfonso; Lamela Rey, M^a Jesús, Cálculo matricial de estructuras, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo, 2006.



Manuais

Serie de manuais didácticos

Últimas publicacións na colección

MAReMÁTICAS. Contidos matemáticos para os estudos universitarios de Ciencias (2024)

Manuel Besada Moráis, F. Javier García Cutrín,
Miguel Ángel Miras Calvo, María del Carmen
Quinteiro Sandomingo e Carmen Vázquez Pampín.

Modelado e Simulación de Sistemas Biomédicos (2024)

Alejandro Fernández Villaverde

Traduçon comentada de textos didáticos e divulgadores.

Um modelo orientativo para tradutor em formação (2023)

Carlos Garrido Rodríguez

Bioestatística para a Enxeñaría Biomédica (2023)

Juan Carlos Pardo Fernández

Fundamentos de Dereito de Defensa da Competencia (2022)

Julio Costas Comesaña



Problemas de estruturas de barras

50 Exercicios resoltos paso a paso

Neste manual de exercicios resoltos de estruturas de barras, trátanse fundamentalmente tres metodoloxías de cálculo diferentes: o método dos nodos e das seccións en estruturas de barras articuladas; o cálculo polo método de Cross para estruturas de nodos ríxidos; e o cálculo matricial para estruturas xerais de barras. Propóñense e resólvense paso a paso 50 exercicios sobre estas diferentes metodoloxías de análise estrutural. Os exercicios están enfocados a casos prácticos e reais onde o lector

poida entender como se calculan estas estruturas, e especialmente como é o seu comportamento estrutural. Este manual está enfocado a alumnos das materias de Teoría de estruturas ou Calculo de estruturas de Enxeñeiras e Arquitectura, sendo ademais un manual idóneo de apoio para docentes, investigadores e profesionais do ámbito das enxeñerías e arquitectura, que necesiten aprofundar no calculo de estruturas de barras.

Servizo de Publicacións

Universidade de Vigo

