

A LISTA DE HILBERT

José Nicanor Alonso Álvarez

Universidade de Vigo

Servizo de Publicacións

2018

MONOGRAFÍAS DA UNIVERSIDADE DE VIGO. TECNOLOXÍA E CIENCIAS
EXPERIMENTAIS, Nº 27.

Edición

Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo

Edificio da Biblioteca Central

Campus de Vigo

36310 Vigo

© Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo, 2018

© José Nicanor Alonso Álvarez

ISBN: 978-84-8158-804-0

D.L.: VG 679-2018

Imaxe de portada: Retrato de David Hilbert, da artista Anna Gorban, <http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/376/2118.cover-expansion>. Imaxe de portada do número 'Hilbert's sixth problem', Phil. Trans. R. Soc. A. 2018 vol. 376, (2118). <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=67488614>.

Impresión: Tórculo Comunicación Gráfica, S.A.

Reservados todos os dereitos. Nin a totalidade nin parte deste libro pode reproducirse ou transmitirse por ningún procedemento electrónico ou mecánico, incluídos fotocopia, gravación magnética ou calquera almacenamento de información e sistema de recuperación, sen o permiso escrito do Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo.

Debemos saber. Saberemos.
(David Hilbert)

Índice xeral

1. INTRODUCCIÓN	7
2. BREVES APUNTES BIOGRÁFICOS	9
3. PROBLEMAS MATEMÁTICOS	15
4. MÁIS DUN SÉCULO DESPOIS...	63
5. E PARA O FUTURO...	73
6. BIBLIOGRAFÍA	79

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

David Hilbert (1862-1943) foi sen dúbida un dos máis importantes matemáticos da primeira metade do século XX. É considerado ademais o último matemático universalista, entendendo por tal á persoa que domina todos os eidos da súa ciencia. De feito, as súas contribucións abranguen practicamente todos os campos da matemática pura, dende a Álgebra á Análise Matemática, pasando pola Xeometría e Topoloxía e a Teoría de números. Tamén son máis que salientables as súas contribucións á Física, en particular á teoría da relatividade de Einstein. Pero non son as súas achegas as que motivaron este libro. O máis importante para nós é que Hilbert foi probablemente o matemático con maior influencia no devir da matemática do século XX. E todo debido á conferencia que pronunciou o 8 de agosto de 1900, no II Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París. Ese día o mestre aproveitou a ocasión ofrecida pola organización, pero non para desenvolver en detalle algunha das súas últimas investigacións, senón para indicar á audiencia os que para el eran os problemas que a ciencia matemática debía resolver nos seguintes cen anos. Unha lista de 23 problemas, todos simples de enunciar pero difíciles de resolver, aos que tanto el mesmo coma unha grande parte dos matemáticos da época dedicaron os seus esforzos. Hoxe, aquel relatorio é considerado á conferencia máis importante sobre Matemáticas xamais pronunciada. E, aproveitando que o texto foi publicado integramente con posterioridade, o principal obxectivo deste libro é presentar a súa tradución ao galego.

Unha vez cumprido este obxectivo, entendemos que a calquera lector interesado gustaríalle coñecer o acontecido con cada un dos enunciados, polo que tamén decidimos incluír unha sección indicando os resultados do traballo,

onde hai que contar éxitos (os máis), fracasos (poucos), e algunha sorpresa que deparaba o futuro.

Finalmente, aínda que hoxe non existe nin probablemente podería existir unha figura como a de Hilbert no mundo matemático para marcar o camiño, incluimos unha última sección expoñendo brevemente os que de acordo co Instituto Clay son os máis importantes problemas da matemática na actualidade. Para o lector que se anime, comentar que a resolución de calquera dos sete problemas (en realidade seis, pois un xa foi resolto) leva aparelada, xunto coa fama internacional, unha recompensa dun millón de dólares americanos.

Capítulo 2

BREVES APUNTES BIOGRÁFICOS

David Hilbert naceu en Königsberg (actualmente Kaliningrado), o 23 de xaneiro do 1862. Na universidade da súa cidade natal comezou os estudos de Matemáticas en 1880 e o 11 de decembro de 1884 defendeu a súa tese de doutoramento, dirixida por Ferdinand von Lindemann e titulada *Über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen* (“Sobre as propiedades invariantes de formas binarias especiais, en particular as funcións circulares”). Rematado este trámite, botou unha tempada en Leipzig, onde asistiu a clases con Felix Klein, principiando o seu interese pola teoría de invariantes. Mais adiante marchou a París, onde coñeceu a Henri Poincaré e Charles Hermite. Foi este último quen o animou a estudar o problema de Gordan, considerado daquela o problema máis importante en teoría de invariantes. Este foi o seu primeiro éxito profesional, pois no ano 1888 conseguiu resolvelo. Para acadar o obxectivo, obtivo ao mesmo tempo varios dos seus resultados máis coñecidos, importantes por si mesmos con independencia de que foran precisos para a resolución do problema de Gordan: en particular o teorema da base e o Nullstellensatz ou Teorema dos ceros de Hilbert, que relaciona variedades alxébricas cos ideais do anel de polinomios en varias variables e con coeficientes complexos. Cómpre subliñar que a solución atopada por Hilbert era de grande orixinalidade, cun enfoque diferente ao utilizado previamente, e baseábase nun teorema de existencia, o que adiou a aceptación da súa contribución. O mesmo Gordan manifestou as súas reticencias cun comentario “Isto é teoloxía, non matemática”, aínda que un tempo despois, cando xa era evidente

a utilidade do método proposto por Hilbert, recoñeceuno deportivamente dicindo “Debo admitir que incluso a teoloxía ten os seus méritos”.

Froito destes éxitos, en 1892 Hilbert acadou unha praza de profesor titular na universidade de Königsberg, e ese mesmo ano casou con Käthe Jerosch, coa que tivo en 1893 un fillo ao que chamaron Franz e que co tempo sufriría un grave trastorno mental. Nese mesmo ano Hilbert recibiu, xunto co seu gran amigo Minkowski, o encargo da Sociedade Matemática Alemana de elaborar un informe sobre o estado da teoría alxébrica de números. O traballo, presentado dous anos despois e coñecido co nome de *Zahlbericht*, foi a ponte entre o que se sabía sobre o tema no século XIX e por onde había camiñar a investigación no século XX, e resulta importante sinalar que, ao igual que aconteceu coa famosa conferencia que pronunciou no ano 1900, serviu para dirixir no futuro a investigación en teoría de números.

No ano 1898 Hilbert decide abordar outro campo de investigación: Neste caso a Xeometría. Naquela época aínda se utilizaban os Elementos de Euclides (que xa contaban con máis de 2000 anos de existencia) como manual de referencia. Decidido a superar definitivamente un texto tan antigo, Hilbert escribiu os *Fundamentos da Xeometría*. Como punto de partida, enumerou os conceptos sen definición: punto, recta, plano,... para a continuación establecer os axiomas que permitirían unificar a xeometría plana e a sólida de Euclides nun único sistema. O texto permitiulle acadar no ano 1903 o premio Lobachevski.

De todo o antedito, resulta evidente que, xunto con Poincaré, David Hilbert era a finais do século XIX unha autoridade mundial en Matemáticas, e polo seu prestixio foille encomendado (polo propio Poincaré, presidente do comité organizador) unha conferencia plenaria no II Congreso internacional de matemáticos, a celebrar en París en agosto de 1900. Seguindo o consello do seu íntimo amigo Minkowski, e se cadra influído tamén pola súa experiencia cando elaborou o informe sobre a teoría alxébrica de números, escolleu como tema a realización dunha lista dos problemas máis importantes da matemática pura, retando á comunidade matemática a resolvelos nun prazo de cen anos. O resultado foi a elaboración dunha relación de 23 problemas, todos simples de enunciarse pero difíciles de resolver, dos que unicamente lle deu tempo a presentar dez. A conferencia, titulada “Problemas matemáticos”, da que neste libro presentamos unha tradución íntegra, foi publicada no ano 1902 nunha versión en inglés supervisada polo propio Hilbert no Bulletin of the American Mathematical Society.

Xa chegado o século XX, Hilbert decidiu dedicar os seus esforzos ao campo

da Análise Matemática, estudando ecuacións diferenciais e integrais. A súa contribución, a definición do chamado espazo de Hilbert, resultou esencial no desenvolvemento futuro da análise funcional, e anos máis tarde no progreso da Física Matemática. Logo, e tras un período de case dous anos nos que a saúde non o acompañou (chegou a padecer unha crise de esgotamento nervioso no verán de 1908), amosou a súa recuperación para a actividade investigadora traballando en teoría de números e resolvendo o chamado problema de Waring que, xunto coa súa traxectoria anterior, valeulle para acadar no ano 1910 o prestixioso premio János Bolyai da Academia Húngara de Ciencias (o premio foi instituído no ano 1905. Outorgábase cada 5 anos e nesa primeira ocasión foille concedido a Poincaré).

E chegamos ao último campo onde as contribucións de Hilbert tiveron un papel destacado, este non estritamente matemático. A Física, que comezou a interesarlle a partires do ano 1910. E o seu obxectivo, dar un tratamento matemático aos fundamentos desta ciencia, tratando, dende un punto de vista axiomático, campos da física como a mecánica, a termodinámica, teoría cinética de gases etc. Neste punto é inevitable facer unha breve referencia ás contribucións de Hilbert á teoría da relatividade. Naquela época Hilbert era catedrático en Gotinga, e convidou a Albert Einstein en xullo de 1915 a impartir un ciclo de leccións sobre os seus últimos avances en investigación. É importante indicar que daquela a famosa teoría da relatividade non estaba aínda rematada satisfactoriamente. A xenial idea de Einstein de describir a gravidade a través da xeometría do espazo, substituíndo a xeometría euclídea utilizada na mecánica de Newton pola xeometría introducida no século XIX por Riemann, requiría dunha grande bagaxe matemática, no que o gran físico foi superando etapas, coa axuda de grandes matemáticos coma Grossmann, ata chegar ante a derradeira dificultade: atopar a versión correcta das chamadas ecuacións de campo, as cales debían ser invariantes fronte a calquera cambio de referencia. O problema interesou a Hilbert, que o 20 de novembro de 1915 presentou os seus resultados na Academia de Ciencias de Gotinga, cinco días antes de que Einstein presentara os seus na Academia de Berlín. Xurde aquí a polémica sobre quen foi o primeiro en completar a teoría xeral de relatividade, pero parece estar probado que o artigo sobre a relatividade de Hilbert titulado “Os fundamentos da Física” e publicado en marzo de 1916, que recollía o texto da conferencia pronunciada en Gotinga, incorporaba varias modificacións realizadas logo da publicación en decembro dun traballo de Einstein. Para rematar con este asunto, cómpre dicir que xamais houbo disputa ningunha entre os dous xenios por este motivo, e

Hilbert, que se refería á teoría de relatividade como “a teoría de Einstein”, seguiu ata o ano 1920 dedicando os seus esforzos á axiomatización da Física.

Chegamos á década dos vinte e David Hilbert volve ocuparse dos fundamentos da matemática. Pode que este avivecido interese non fora casual. Estamos nunha época de crise na nosa ciencia, motivada polo pulo que amosa a escola intuicionista de Brouwer, que reúne adeptos mesmo entre os máis capaces discípulos de Hilbert coma Weyl. Neste punto cremos aconsellable resumir as principais ideas do intuicionismo, que servirán para pór de manifesto a necesidade que sentiu Hilbert de defender a súa matemática, que en adiante chamaremos formalista.

Comezaremos por enunciar o coñecido como principio do terceiro excluído. Trátase dun principio de lóxica que di que toda proposición é verdadeira ou falsa, non habendo unha terceira opción intermedia. É dicir, que se dúas proposicións son contraditorias, unha delas é por forza falsa. Pois ben, a escola intuicionista, cuxo principal representante foi Brouwer, considera que este principio non é aplicable a obxectos infinitos. Para el, a existencia dun obxecto debe ser probada mediante a súa construción, non aceptando como proba de existencia refutar a súa falsidade, é dicir, non considerando válidas as demostracións por redución ao absurdo. Resulta preciso admitir neste punto que un apoio a esta teoría estaba nas contradicións e paradoxos que ofrecía a teoría de conxuntos, que na opinión dos intuicionistas debía ser reformulada. Pero era obvio que aceptar como norma as teses intuicionistas significaba derrubar boa parte do edificio matemático formalista ao que Hilbert dedicara toda a súa vida, polo que o grande matemático criticou abertamente a teoría, defendendo as ideas de Cantor sobre a teoría de conxuntos e insistindo en que “quitarlle o principio do terceiro excluído a un matemático é o mesmo que prohibirlle ao astrónomo o telescopio”.

De todos os xeitos, as obxeccións dos intuicionistas tiñan certa consistencia, apoiadas en parte polos paradoxos da teoría de conxuntos, de xeito que Hilbert decidiu reforzar o seus argumentos dedicando os seus esforzos a probar a consistencia da aritmética e a elaboración dunha teoría da demostración que probara que toda afirmación matemática pode ser probada ou refutada nun número finito de pasos. En palabras do propio Hilbert, “En matemáticas non existe o *ignorabimus*”. Por desgraza para el, e no que foi unha das maiores sorpresas na matemática do século XX, o empeño era imposible pois, como probou Godel na década dos trinta, non todo o verdadeiro é demostrable. De calquera xeito, os resultados de Godel

tampouco validaban o argumentario dos matemáticos construcionistas, polo que o enfrontamento entre o formalismo de Hilbert e o intuicionismo de Brouwer continuou por moitos anos.

No ano 1930 Hilbert xubilase, sendo nomeado cidadán de honra da cidade de Königsberg. Pasará os últimos anos da súa vida vendo a frustración de ver como os nazis, no poder dende 1933, se dedican a destruír coas súas leis de pureza aria a marabillosa creación matemática de Gotinga, depurando aos elementos máis valiosos, en aras de eliminar a “ciencia xudía”. Persoalmente, non lle afectou a represión, pois a súa orixe prusiana o mantiña a salvo, e sendo como era un matemático de prestixio, recibiu constantes honores, como a concesión do premio Mittag-Leffler na súa primeira edición do ano 1939. De calquera xeito continuou afastándose da matemática ata a súa morte en 1943. Na súa tumba permanece como epitafio a última frase da súa conferencia pronunciada no acto de recepción da distinción como cidadán de honra de Königsberg:

Debemos saber. Saberemos.