

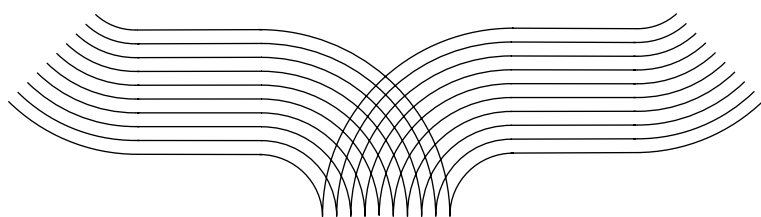
JUEGOS COALICIONALES



Estela Sánchez Rodríguez
Juan Vidal Puga

Servizo de Publicacións

Universidade de Vigo



Monografías

Tecnoloxía e Ciencias Experimentais

n.º 021

Las erratas y el material suplementario de este libro pueden consultarse en las siguientes direcciones

<https://vidalpuga.webs.uvigo.es/jc.html>

<https://esanchez.webs8.uvigo.es>

Edición

Universidade de Vigo

Servizo de Publicacións

Rúa de Leonardo da Vinci, s/n. 36310 Vigo

Imprime

Tórculo Comunicación Gráfica

ISBN (libro impreso)

978-84-8158-656-5

Depósito legal

VG 743-2014

© Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo, 2014

© Estela Sánchez Rodríguez

© Juan Vidal Puga

Printed in Spain - Impreso en España

Sen o permiso escrito do Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo, queda prohibida a reprodución ou a transmisión total e parcial deste libro a través de ningún procedemento electrónico ou mecánico, incluídos a fotocopia, a gravación magnética ou calquera almacenamento de información e sistema de recuperación.

Ao ser esta editorial membro da **une**, garántense a difusión e a comercialización das súas publicacións no ámbito nacional e internacional.



This license enables reusers to distribute, remix, adapt, and build upon the material in any medium or format for noncommercial purposes only if attribution is given to the creator. If you remix, adapt, or build upon the material, you must license the modified material under the same or a compatible license. CC BY-NC-SA includes the following elements:

BY: Credit must be given to the creator.

NC: Only noncommercial use of this work is permitted. *Noncommercial means not primarily intended for or directed towards commercial advantage or monetary compensation.*

SA: Adaptations must be shared under the same terms.

Juegos Coalicionales

Estela Sánchez Rodríguez y Juan Vidal Puga

Universida_{de} Vigo

Septiembre 2014

Índice general

Introducción	1
Notación	5
I Juegos coalicionales con utilidad transferible	9
1. El modelo TU	11
1.1. La forma característica	13
1.1.1. Definiciones básicas	14
1.1.2. Ejemplos	17
1.1.3. Juegos de unanimidad	18
1.1.4. Clases especiales de juegos	19
1.2. Soluciones tipo conjunto y soluciones puntuales	22
Ejercicios del capítulo 1	25
2. Conceptos de solución tipo conjunto	27
2.1. El core. Caracterizaciones	28
2.1.1. El core para estructuras coalicionales generales	39
2.2. El D-core	40
2.3. Los conjuntos estables	42
2.4. El core-cover	44
2.5. El conjunto de Weber	46
2.5.1. Caracterización de los juegos convexos	49
Ejercicios del capítulo 2	50
3. Conceptos de solución puntuales	53
3.1. Propiedades de una regla de reparto	54
3.2. El valor de Shapley	57
3.3. Otras caracterizaciones axiomáticas del valor de Shapley	61
3.4. Situaciones asimétricas	63
3.4.1. Los valores ponderados	64
3.5. Uniones a priori: el valor coalicional de Owen	66
3.6. Situaciones con comunicación restringida: el valor de Myerson	68
3.7. El nucleolus y el prenucleolus	70
3.8. El τ -valor	78
3.9. El core-center	79
3.10. Programación y recursos informáticos	81

Ejercicios del capítulo 3	82
4. Aplicaciones	83
4.1. Juegos simples	83
4.1.1. Índice de poder de Shapley-Shubik	86
4.1.2. Índice de poder de Banzhaf normalizado	88
4.1.3. Índice de poder de Banzhaf absoluto	90
4.2. Mercados de intercambio	91
4.3. Problema del aeropuerto	95
4.4. Problemas de bancarrota	97
4.5. Problemas de árbol de expansión de coste mínimo	102
4.6. Problemas de flujo máximo	105
Ejercicios del capítulo 4	107
II Juegos coalicionales con utilidad no necesariamente transferible	109
5. El modelo NTU	111
5.1. La función característica	112
5.2. Soluciones en juegos NTU	115
5.3. Casos particulares de juegos NTU	117
5.3.1. Juegos TU	117
5.3.2. Problemas de negociación	118
5.3.3. Juegos de hiperplano	119
5.3.4. Mercados de intercambio	119
Ejercicios del capítulo 5	122
6. Una revisión de la teoría de la utilidad	123
6.1. Utilidad ordinal	123
6.1.1. Problemas de decisión	123
6.1.2. Propiedades de las preferencias	124
6.1.3. Funciones de utilidad	124
6.1.4. Soluciones ordinales	125
6.1.5. Ejemplos	126
6.2. Utilidad cardinal	128
6.2.1. Loterías	128
6.2.2. Linealidad, independencia y continuidad	128
6.2.3. Función de utilidad de von Neumann-Morgenstern	130
6.2.4. Equivalencia con juegos TU	131
Ejercicios del capítulo 6	132
7. Soluciones en problemas de negociación	135
7.1. Solución de Nash	136
7.2. Solución de Kalai-Smorodinsky	137
7.3. Solución igualitaria	138
7.4. Solución de Raiffa	139
7.5. Propiedades de las soluciones	141
7.6. Relación entre propiedades	143

7.7. Caracterizaciones axiomáticas	144
Ejercicios del capítulo 7	146
8. Soluciones en juegos NTU generales	149
8.1. El core en juegos NTU	150
8.2. El valor de Harsanyi	152
8.2.1. El valor de Harsanyi en problemas de negociación	152
8.2.2. El valor de Harsanyi en juegos TU	154
8.2.3. El valor de Harsanyi en juegos NTU	155
8.3. El valor de Shapley lambda-transferible	157
8.4. El valor consistente de Maschler-Owen	162
Ejercicios del capítulo 8	165
Apéndice	167
Índice alfabético	169

Introducción

La teoría de juegos modeliza situaciones conflictivas en las que existen varios agentes, comúnmente llamados jugadores, que buscan diferentes objetivos, habitualmente independientes unos de otros, y con la propiedad de que las decisiones o preferencias de cada jugador afectan a lo que consiguen todos los demás. En este sentido, la teoría de juegos puede dividirse en dos bloques: los juegos estratégicos, también llamados juegos no cooperativos, y los juegos coalicionales, también llamados juegos cooperativos.

En contraposición a los juegos estratégicos, en los que todas las posibles acciones (así como su temporalización) están especificadas, en los juegos coalicionales este conjunto de acciones no se indica explícitamente, sino que solo se consideran los resultados posibles de una hipotética cooperación. De esta forma, en un modelo coalicional, se debe especificar cuáles son los beneficios de cooperación ya no solo de todos los jugadores, sino también de cada posible coalición de ellos (de ahí el nombre de juegos coalicionales).

Dada esta premisa, es relevante tener en cuenta la capacidad que tienen los jugadores de compensarse mutuamente con el objetivo de alcanzar acuerdos de cooperación. Aún cuando la cooperación es posible, puede ocurrir que la utilidad pueda repartirse de cualquier modo entre los jugadores o bien que existan ciertas restricciones que no permitan cualquier reparto. Es por ello que la teoría de juegos coalicionales está dividida en dos partes (al igual que está configurada esta monografía): juegos coalicionales con utilidad transferible (juegos TU) y juegos coalicionales con utilidad no necesariamente transferible (juegos NTU). Cabe reseñar que el modelo NTU recoge como caso particular al modelo TU tal y como se estudiará en la Parte II. La razón de tal división es meramente didáctica. La comprensión de los principales conceptos en la parte TU (Parte I) facilita el aprendizaje de los correspondientes en la parte NTU (Parte II).

Un primer objetivo de esta monografía es presentar los juegos coalicionales desde una perspectiva formativa e instructiva, pero sin renunciar al formalismo matemático. Por ello, hemos demostrado muchos de los resultados presentados, mientras que para aquellos enunciados sin demostración hemos intentado dar indicaciones suficientes como para que el lector interesado pueda encontrar la demostración en la bibliografía. Un segundo objetivo es el de lograr que el lector adquiera las habilidades necesarias para aplicar la teoría de juegos coalicionales. Este proceso es, sin duda, más complejo. Dado un problema de decisión concreto, es determinante estudiar en detalle todos los elementos que intervienen en el problema y seleccionar aquellos que son relevantes antes de elaborar el modelo de juego coalicional, dado que la elección de estos condicionará todo el análisis posterior.

Dos de las palabras clave que aparecerán repetidamente son las de *cooperación* y *coalición*. La primera decisión a tomar ante un problema es decidir si puede modelizarse mediante un juego coalicional o mediante un juego no cooperativo. En el primer caso, muchas de las ideas expuestas aquí pueden ser útiles. En el segundo caso, el juego no cooperativo puede tener determinados elementos que permitan aplicar la teoría de juegos coalicionales. Así, en determinadas ocasiones a partir de un juego estratégico o no cooperativo, se puede definir un juego coalicional. Generalmente, en el proceso de pasar al juego coalicional se pierde información (no se tiene en cuenta) del juego no cooperativo. Una situación de este tipo se estudia con mayor detalle en las secciones dedicadas

a los mercados de intercambio y los juegos asociados TU y NTU.

También existen relaciones en sentido inverso entre juegos no cooperativos y coalicionales en lo que se conoce como programa de Nash. Dada una solución coalicional se trata de describir un proceso no cooperativo que conduzca a la solución cooperativa, en el sentido de que ésta se corresponda con los pagos asociados a algún tipo de equilibrio, como por ejemplo el equilibrio de Nash (Nash (1950)). Esta parte no será estudiada en esta monografía dado que implicaría introducir también los juegos no cooperativos.

Estudiaremos distintas soluciones que han aparecido a lo largo de los años desde la aparición de la teoría de juegos (von Neumann y Morgenstern (1944)). Una pregunta que suele plantearse uno cuando termina un curso de juegos coalicionales es la siguiente: ante un juego dado que proviene de un problema concreto, ¿qué solución es la mejor para resolverlo? Contestar a esta pregunta de manera única es casi imposible en la mayor parte de las situaciones. En general, podemos aconsejar estudiar el problema original, que dio origen al modelo, y luego examinar las propiedades de cada solución para comprobar cuál de ellas es más apropiada al problema concreto.

Tampoco podemos dejar al margen el problema computacional de cálculo inherente a la mayor parte de los conceptos de solución. La mayor parte de los ejemplos presentados en esta monografía son de menos de cinco jugadores, aunque las definiciones siempre se refieren al caso más general de n jugadores. En general, para más jugadores tenemos que utilizar programas de cálculo, aunque tampoco son capaces de resolver cualquier juego. Con el paso de los años los problemas computacionales irán disminuyendo y es de esperar que algunas soluciones de difícil cálculo sean abordadas por algoritmos eficientes y por máquinas mejoradas, pero siempre tendremos el problema del *input* exponencial en la complejidad computacional. Por otro lado, existen clases de juegos que disponen de fórmulas explícitas (algunas polinómicas) para el cálculo de alguna solución concreta. Esto implica que el cálculo de algunas de las soluciones aquí presentadas sea posible aún cuando el número de jugadores sea grande. Además, el análisis inteligente del juego en cuestión hará que, en determinados casos, se puedan identificar tipos de jugadores como títeres, nulos o simétricos que simplifiquen los cálculos considerablemente.

La caracterización axiomática de las soluciones tiene especial trascendencia en teoría de juegos, y también en esta monografía. La única manera de poder discernir entre las distintas soluciones que existen en la literatura de juegos coalicionales es mediante el estudio de las propiedades matemáticas que, adecuadamente interpretadas, permiten poder elegir entre uno u otro concepto de solución. Con el estudio axiomático de las distintas soluciones va a ser posible entender por qué una solución beneficia o perjudica a cierto grupo de jugadores (por ejemplo, cuando comparamos empresas pequeñas con empresas grandes). El trabajo de la teoría de juegos consiste en mostrar las distintas posibilidades existentes siempre respaldadas con criterios racionales, que son los que sustentan las soluciones.

A lo largo de la monografía veremos cómo los juegos se agrupan en clases (TU, NTU, monótonos, superaditivos, convexos,...) y que hay una serie de resultados (proposiciones y teoremas) relacionando las distintas soluciones en base a esta forma de agrupar. Esta clasificación facilita el estudio de distintos tipos de juegos y permite (en muchos casos) simplificar demostraciones.

Se puede completar lo aquí expuesto con distintos libros de teoría de juegos, entre los que destacamos, por recoger extensivamente lo que aquí exponemos, Aumann y Hart (1992, 1994, 2002). De interés son también Maschler y otros (2013), recientemente publicado, y González-Díaz y otros (2010).

Para finalizar, queremos añadir que esta monografía es consecuencia de la colaboración de los autores tras varios años compartiendo la asignatura de Juegos Cooperativos en cursos de doctorado y de máster en la Universidad de Vigo.

La estructura de la monografía es la siguiente: la Parte I está dedicada a juegos TU y la Parte II a juegos NTU. En la primera parte se presenta el modelo TU (Capítulo 1), los conceptos de solución

tipo conjunto (Capítulo 2), los conceptos de solución puntuales (Capítulo 3) y algunas aplicaciones concretas (Capítulo 4). En la segunda parte se introduce el modelo NTU (Capítulo 5), una revisión de la teoría de la utilidad (Capítulo 6), las soluciones a los problemas de negociación (Capítulo 7), y las soluciones a los juegos NTU generales (Capítulo 8). Para cada uno de los capítulos se ha propuesto una pequeña colección de ejercicios para que el lector trabaje los conceptos básicos introducidos en cada uno de ellos. La notación básica se presenta después del índice general y añadimos un pequeño apéndice al final con algunas definiciones y teoremas necesarios que no son propios de la teoría de juegos y que se enuncian sin demostración.

Los autores agradecen los comentarios recibidos de dos revisores anónimos que contribuyeron a mejorar la primera versión de esta monografía. Además hacen constar la financiación recibida a través de los proyectos del Ministerio de Ciencia e Innovación ECO2011-23460, MTM2011-27731-C03-03, y de la Xunta de Galicia, 10PXIB362299PR.

En la página web <http://webs.uvigo.es/vidalpuga/jc.html> se irán añadiendo las erratas y otras consideraciones que puedan surgir tras el envío a imprenta de esta monografía. Cualquier comentario al respecto por parte de los lectores será bienvenido.

Notación

$\forall$	Para todo.
$\exists$	Existe.
$\nexists$	No existe.
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales. Habitualmente identificado con el universo de jugadores.
N	Conjunto finito de jugadores. Habitualmente $N = \{1, \dots, n\}$.
$ N $	Cardinal del conjunto finito N .
$\lfloor x \rfloor$	Parte entera de $x \in \mathbb{R}$.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales.
$\subset$	Subconjunto.
$\subsetneq$	Subconjunto propio.
$\mathbb{R}_+$	Semirrecta real no negativa, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
$\mathbb{R}_{++}$	Semirrecta real positiva, $\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
$\mathbb{R}^N$	Vectores de $\mathbb{R}^{ N }$ indexados por el conjunto N : $\mathbb{R}^N = \{(x_i)_{i \in N} : x_i \in \mathbb{R}, i \in N\}$.
e^A	Vector cuyas coordenadas valen 1 en los elementos de A y 0 en otro caso.
2^N	Conjunto de partes del conjunto N (subconjuntos de N).
$[0, 1]^A$	Conjunto de aplicaciones de A en $[0, 1]$.
$\emptyset$	Conjunto vacío.
$S \setminus T$	Elementos de S que no pertenecen a T .
$\text{conv}(S)$	Envoltura convexa del conjunto S .
Π^S	Ordenaciones de los elementos del conjunto S : $\Pi^S = \{\pi : S \rightarrow \{1, \dots, S \} : \pi \text{ biyectiva}\}$.
$\text{Pre}^\pi(i)$	Predecesores de $i \in N$ en $\pi \in \Pi^N$: $\text{Pre}^\pi(i) = \{j \in N : \pi(j) < \pi(i)\}$.
(N, v)	Juego TU con función característica v .
(N, c)	Juego de costes con función de costes c .
(N, v^*)	Cobertura superaditiva del juego (N, v) .
$\mathcal{T}(S)$	Conjunto de todas las particiones del conjunto S .
$m^\pi(N, v)$	Reparto de contribuciones marginales de $\pi \in \Pi^N$.
G^N	Conjunto juegos TU con jugadores en N .
$\mathcal{G}^N$	Conjunto de juegos NTU con jugadores en N .
G_P^N	Conjunto de juegos TU con estructura coalicional P .
G_C^N	Conjunto de juegos TU con comunicación restringida por C .

$I^*(N, v)$	Conjunto de preimputaciones del juego (N, v) .
$I(N, v)$	Conjunto de imputaciones del juego (N, v) .
$I^r(N, c)$	Conjunto de imputaciones del juego de costes (N, c) .
$C(N, v)$	Core del juego (N, v) .
$C^r(N, c)$	Core del juego de costes (N, c) .
$C_\varepsilon(N, v)$	ε -core del juego (N, v) .
$LC(N, v)$	Least core del juego (N, v) .
$DC(N, v)$	D-core del juego (N, v) .
$CC(N, v)$	Core-cover del juego (N, v) .
$W(N, v)$	Conjunto de Weber del juego (N, v) .
$Sh(N, v)$	Valor de Shapley del juego (N, v) .
$\psi(N, v, P)$	Valor coalicional del juego $(N, v, P) \in G_P^N$.
$g(N)$	Conjunto de grafos no orientados en N .
$M(N, v, A)$	Valor de Myerson del juego (N, v, A) .
$\tau(N, v)$	τ -valor del juego (N, v) .
$\mu(N, v)$	Core-center del juego (N, v) .
$PreNu(N, v)$	Prenucleolus del juego (N, v) .
$Nu(N, v)$	Nucleolus del juego (N, v) .
$\mathfrak{S}(N, v)$	Índice de poder de Shapley-Shubik del juego simple (N, v) .
$\hat{\beta}(N, v)$	Índice de poder de Banzhaf del juego simple (N, v) .
$\beta(N, v)$	Índice de poder de Banzhaf absoluto del juego simple (N, v) .
(N, V)	Juego NTU con función característica V .
(D, d)	Problema de negociación con punto de desacuerdo d .
$Nash(D, d)$	Solución de Nash del problema de negociación (D, d) .
$KS(D, d)$	Solución de Kalai-Smorodinsky del problema de negociación (D, d) .
$Eg(D, d)$	Solución igualitaria del problema de negociación (D, d) .
$RD(D, d)$	Solución de Raiffa discreta del problema de negociación (D, d) .
$RC(D, d)$	Solución de Raiffa continua del problema de negociación (D, d) .
$SC(N, V)$	Strong core del juego NTU (N, V) .
$WC(N, V)$	Weak core del juego NTU (N, V) .
$\phi(N, V)$	Solución de Harsanyi del juego NTU (N, V) .
$\phi^\lambda(N, V)$	Valor de Shapley λ -transferible del juego NTU (N, V) .
$\sigma(N, V)$	Valor consistente de Maschler-Owen del juego NTU (N, V) .

Dados $x, y \in \mathbb{R}^S$,

$x \in \mathbb{R}^S$	$(x_i)_{i \in S}$ con $x_i \in \mathbb{R}$.
$x_T \in \mathbb{R}^T$	$(x_i)_{i \in T}$ si $T \subset S$ con la convención de que $x_\emptyset = 0$.
$x(S) \in \mathbb{R}$	$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ si $x \in \mathbb{R}^S$.
$x + y \in \mathbb{R}^S$	Vector suma de coordenadas $(x_i + y_i)_{i \in S}$.
$x - y \in \mathbb{R}^S$	Vector resta de coordenadas $(x_i - y_i)_{i \in S}$.
$xy \in \mathbb{R}^S$	Producto vectorial $(x_i y_i)_{i \in S}$.
$x \cdot y \in \mathbb{R}$	Producto escalar $\sum_{i \in S} x_i y_i$.
$0_S \in \mathbb{R}^S$	Vector con todas sus coordenadas 0.
$1_S \in \mathbb{R}^S$	Vector con todas sus coordenadas 1.
$\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_{++}^S$	Vector de coordenadas $\left(\frac{1}{x_i}\right)_{i \in S}$ si $x \in \mathbb{R}_{++}^S$.
$\frac{x}{y} \in \mathbb{R}^S$	Vector de coordenadas $\left(\frac{x_i}{y_i}\right)_{i \in S}$ si $y \in \mathbb{R}_{++}^S$.
$\alpha x \in \mathbb{R}^S$	Vector de coordenadas $(\alpha x_i)_{i \in S}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
$x \leq y$	$x_i \leq y_i$ para todo $i \in S$.
$x < y$	$x \leq y$ y $x \neq y$.
$x \ll y$	$x_i < y_i$ para todo $i \in S$.
$\succeq$	Relación de preferencias $(\succeq_i)_{i \in S}$.
$\succ$	Relación de preferencia estricta $(\succ_i)_{i \in S}$.
$\sim$	Relación de indiferencia $(\sim_i)_{i \in S}$.

Dados dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^S$ y $x \in \mathbb{R}^S$,

∂A	Frontera de A .
$A + B$	$= \{a + b : a \in A, b \in B\} \subset \mathbb{R}^S$.
$A - B$	$= \{a - b : a \in A, b \in B\} \subset \mathbb{R}^S$.
xA	$= \{xa : a \in A\} \subset \mathbb{R}^S$.
$x \cdot A$	$= \{x \cdot a : a \in A\} \subset \mathbb{R}$.

Por simplicidad, y cuando no haya posibilidad de confusión, escribiremos los subconjuntos (coaliciones) de un único jugador sin llaves, por ejemplo, i en lugar de $\{i\}$. En ocasiones también lo haremos con las de dos jugadores, por ejemplo, i, j en lugar de $\{i, j\}$.

En las propiedades que así lo precisen, cuando comparamos una solución en juegos con distinto número de jugadores, definimos el posible universo de jugadores como el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, el conjunto de juegos TU como $G = \bigcup_{N \subset \mathbb{N}; |N| < \infty} G^N$ y el conjunto de juegos NTU como $\mathcal{G} = \bigcup_{N \subset \mathbb{N}; |N| < \infty} \mathcal{G}^N$.

En el Capítulo de la teoría de la utilidad utilizamos la notación $[ta, (1-t)b]$ siendo $t \in [0, 1]$ y $a, b \in A$ para indicar la lotería en la que con probabilidad t ocurre a y con probabilidad $(1-t)$ ocurre b . No debe confundirse con un intervalo cerrado.

Parte I

Juegos coalicionales con utilidad transferible

Capítulo 1

El modelo TU

El modelo con utilidad transferible, o modelo TU¹, se utiliza para modelizar situaciones en las que la cooperación beneficia a los agentes (en términos de ganancias o en términos de costes). La distintas soluciones planteadas para el modelo proponen repartos de los beneficios obtenidos tras la cooperación. Los siguientes ejemplos son una pequeña muestra de distintas situaciones de aplicación:

- Construcción de una autopista en la que distintos agentes están involucrados.
- Comunidades de vecinos que deben sufragar gastos derivados de ascensores, cableados de electricidad, gas, antenas, etc.
- Cooperación entre países (Unión Europea, ONU, etc.) o entre partidos políticos para formar gobiernos (gobiernos en coalición).

A las situaciones donde surgen conflictos de intereses se les llama *juegos* y a los agentes que participan en el juego se les denomina *jugadores*, que pueden ser personas, naciones, partidos políticos, compañías, empresas, etc. En estos modelos se supone que los jugadores pueden llegar a acuerdos vinculantes, de forma que se comprometen con ellos. Además, los jugadores son capaces de compensarse mutuamente mediante la transferencia de utilidad, por ejemplo, a través de un bien perfectamente divisible, que habitualmente se identifica con dinero. Esta capacidad para transferir utilidad es la que distingue a los modelos TU de los modelos con utilidad no transferible que estudiaremos en la Parte II.

Analizamos a continuación un ejemplo introductorio que ilustra el problema de reparto de los beneficios de la cooperación entre distintos agentes y que da pie a la consiguiente formalización de la teoría y análisis axiomático de las distintas soluciones propuestas en la literatura.

Ejemplo 1.1 (Cooperación entre municipios (Rafels i Pallarola y otros (1999))) *En este problema el objetivo es la construcción de una depuradora para abastecer a tres municipios, A, B y C, situados en este orden siguiendo el curso de un río. Además, el municipio B demanda la mitad de agua que el A y el C. Los costes (en miles de euros) de las distintas coaliciones que se pueden formar aparecen detallados a continuación.*

Si se construyese la depuradora de manera individual y, dado que B necesita un depósito más pequeño porque demanda menos agua, tendríamos los siguientes costes:

$$\begin{aligned}c(A) &= 5000 \\c(B) &= 3000 \\c(C) &= 5000.\end{aligned}$$

¹TU son las siglas del término en inglés *Transferable Utility*.

Tras un estudio, también se estima que el coste de abastecer a los tres municipios es de 8000, el coste de la canalización de A a B es de 1000 y la canalización de B a C es de 1500.

De esta forma, podemos construir el coste de abastecer a los tres municipios:

$$c(A, B, C) = 8000 + 1000 + 1500 = 10500.$$

Obsérvese que $c(A, B, C) < c(A) + c(B) + c(C)$.

Supongamos ahora que disponemos de más información: el coste de construir la depuradora para A y B es de 5500 (para B y C es también de 5500) y de canalizar de A a B es de 500 (de B a C es de 1500). Además, construir la depuradora para abastecer a los municipios A y C no supone reducción de costes. La información la podemos resumir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} c(A, B) &= 6000 \\ c(A, C) &= c(A) + c(C) = 10000 \\ c(B, C) &= 7000. \end{aligned}$$

Algunas posibles soluciones al reparto² de costes y algunas objeciones:

■ **Reparto igualitario**

$$x_A = x_B = x_C = \frac{10500}{3} = 3500.$$

Objeción: El municipio B podría argumentar que: $x_B = 3500 > c(B) = 3000$ con lo que no está interesado en la cooperación.

■ **Proporcional a las demandas de agua**

$$\begin{aligned} x_A = x_C &= \frac{2}{5}c(A, B, C) = 4200 \\ x_B &= \frac{1}{5}c(A, B, C) = 2100. \end{aligned}$$

Fijémonos en que $x_A \leq c(A)$, $x_B \leq c(B)$ y $x_C \leq c(C)$. Sin embargo, la coalición (A, B) podría no estar de acuerdo con el reparto, dado que:

$$x_A + x_B = 4200 + 2100 = 6300 > 6000 = c(A, B).$$

■ **Proporcional al uso del bien:** Tenemos que tener en cuenta que B demanda la mitad de agua, que la canalización de A a B la usarán los municipios B y C y que la canalización de B a C sólo afecta al municipio C. Todo ello nos proporciona el siguiente reparto:

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{2}{5}8000 = 3200, \quad x_B = \frac{1}{5}8000 + \frac{1}{3}1000 = 1933.33 \\ x_C &= \frac{2}{5}8000 + \frac{2}{3}1000 + 1500 = 5366.67. \end{aligned}$$

Objeción: El municipio C podría argumentar que $x_C > c(C) = 5000$ con lo que no tendría incentivos para cooperar.

■ **Proporcional a los costes individuales**

Los costes individuales de los municipios son $c(A) = 5000$, $c(B) = 3000$ y $c(C) = 5000$, con lo que el reparto proporcional sería:

$$\begin{aligned} x_A = x_C &= \frac{5}{13}c(A, B, C) = 4038.5 \\ x_B &= \frac{3}{13}c(A, B, C) = 2423. \end{aligned}$$

De nuevo, la coalición (A, B) podría objetar que $x_A + x_B > c(A, B)$.

²Un reparto es, simplemente, un vector $x = (x_A, x_B, x_C)$ en el que cada componente representa la cantidad que debe pagar cada municipio.

▪ **Proporcional a los costes marginales**

Los costes marginales vienen dados por las siguientes diferencias:

$$\begin{aligned}m_A &= c(A, B, C) - c(B, C) = 3500 \\m_B &= c(A, B, C) - c(A, C) = 500 \\m_C &= c(A, B, C) - c(A, B) = 4500.\end{aligned}$$

De esta forma, el coste marginal del municipio A representa el pago adicional que habría que hacer para proveer de agua al municipio A una vez que ya conocemos que los municipios restantes (en este caso, B y C), van a construir la depuradora de manera conjunta.

Observamos que la suma de los costes marginales $m_A + m_B + m_C = 8500 < c(A, B, C) = 10500$, con lo que podemos recurrir al siguiente reparto proporcional:

$$\begin{aligned}x_A &= \frac{3500}{8500} 10500 = 4323.5 \\x_B &= \frac{500}{8500} 10500 = 617.65 \\x_C &= \frac{4500}{8500} 10500 = 5558.82.\end{aligned}$$

Una vez más, $x_C > c(C)$ con lo que el municipio C no tendría incentivos para cooperar.

1.1. La forma característica

Asumimos que la utilidad es transferible, es decir, que los jugadores negocian con un bien perfectamente divisible. En caso de que los jugadores negocien con un bien que no sea perfectamente divisible, podemos asumir que tienen acceso a otro bien compensatorio (en inglés se habla de *side payments*) que sí lo sea. Habitualmente, este bien perfectamente divisible se identifica con dinero.

Los elementos clave para definir el modelo TU son los siguientes:

$$\begin{aligned}N &\text{ CONJUNTO FINITO DE JUGADORES} \\2^N &\text{ CONJUNTO DE TODOS LOS SUBCONJUNTOS DE } N.\end{aligned}$$

Los elementos de 2^N se llaman coaliciones³.

Definición 1.2 Un juego coalicional, o cooperativo, con utilidad transferible (o juego TU) es un par (N, v) , siendo N un conjunto finito y v una función

$$v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $v(\emptyset) = 0$. Los elementos de N se llaman jugadores, los subconjuntos de N coaliciones y v se denomina función característica.

Denotamos por G^N a la clase de todos los juegos con conjunto de jugadores N .

Operaciones con juegos coalicionales

En el conjunto G^N podemos definir una operación interna, la suma de juegos, y una operación externa, el producto de un juego por un escalar.

Sean $v_1, v_2 \in G^N$, $S \subset N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

- Suma de juegos: $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$.
- Producto de un juego por un escalar: $(\lambda v_1)(S) = \lambda v_1(S)$.

³En particular, el conjunto vacío $\emptyset$ es también una coalición, aunque no existe un criterio estándar y en muchos textos se define coalición como subconjunto *no vacío* de N .

La clase de juegos G^N con las dos operaciones anteriores tiene estructura de espacio vectorial de dimensión $2^{|N|} - 1$. El juego $v_0(S) = 0$ para todo $S \subset N$ es el juego nulo y es el elemento neutro para la suma. Así, podemos identificar $G^{\{1,2\}}$ con $\mathbb{R}^3$, $G^{\{1,2,3\}}$ con $\mathbb{R}^7$, $G^{\{1,2,3,4\}}$ con $\mathbb{R}^{15}$, etc. A lo largo de esta monografía, para facilitar la introducción del juego, también usaremos la notación vectorial. Así, en juegos de tres jugadores con $N = \{1, 2, 3\}$, podremos escribir $v = [v(1), v(2), v(3), v(1, 2), v(1, 3), v(2, 3), v(1, 2, 3)]$, y con 4 jugadores, la correspondiente extensión “lexicográfica” ordenando siempre por tamaño de la coalición.

De forma natural surge el concepto de subjuego de una coalición como aquel que involucra a la coalición y a todas sus subcoaliciones.

Definición 1.3 Sea $(N, v) \in G^N$. Un subjuego de (N, v) es un par (R, v_R) tal que $R \subset N$ y $v_R(S) = v(S)$ para cada $S \in 2^R$.

1.1.1. Definiciones básicas

Definición 1.4 Sea $(N, v) \in G^N$. Diremos que (N, v) es

- *Superaditivo* si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ para todo $S, T \subset N$, $S \cap T = \emptyset$.
- *Subaditivo* si $v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$ para todo $S, T \subset N$, $S \cap T = \emptyset$.
- *Aditivo* si $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ para todo $S, T \subset N$, $S \cap T = \emptyset$.

Observación 1.5 Un juego (N, v) es subaditivo si y solo si el juego $(N, -v)$ es superaditivo.

Si un juego (N, v) es superaditivo, entonces para cada coalición $S \subset N$, $v(N) \geq v(S) + v(N \setminus S)$. Aplicando repetidamente la condición de superaditividad, se obtiene que, para cada $S \subset N$, $v(S) \geq \sum_{i \in S} v(i)$.

Proposición 1.6 Un juego (N, a) es aditivo si y solo si existe un vector $a \in \mathbb{R}^N$ tal que $a(S) = \sum_{i \in S} a_i$ para todo $S \subset N$. En particular, $a_i = a(i)$ para todo $i \in N$.

Demostración: Basta con aplicar repetidamente la condición $a(S) = a(S \setminus i) + a(i)$ para todo $i \in S$ y todo $S \subset N$. ■

Las anteriores condiciones expresan que en la subclase de los juegos superaditivos, los jugadores tienen incentivos para formar la gran coalición. Ésta es la razón por la que en muchos libros o trabajos de investigación se toma como punto de partida la clase de los juegos superaditivos.

Definición 1.7 (N, v) es estratégicamente equivalente a (N, w) si existe $k > 0$ y (N, a) juego aditivo tal que

$$w(S) = kv(S) + a(S)$$

para todo $S \subset N$.

Ser estratégicamente equivalente define una relación de equivalencia en G^N , y por tanto, genera una partición del conjunto de juegos. De algún modo podríamos decir que si dos juegos son estratégicamente equivalentes deberían ser tratados del mismo modo. La constante k es el factor de cambio de escala. Simplemente se cambian las escalas de utilidad para todos los jugadores. La parte aditiva $a(S) = \sum_{i \in S} a_i$ supone simplemente agregar los recursos de los jugadores. Si $a_i > 0$ se puede interpretar como que el jugador i recibe un bono antes de que comience el juego, y si $a_i < 0$, el jugador i paga un impuesto o tasa.

Definición 1.8 Sea $(N, v) \in G^N$. Diremos que (N, v) es

- 0-normalizado si $v(i) = 0$ para todo $i \in N$.
- 0-1 normalizado si $v(i) = 0$ para todo $i \in N$ y $v(N) = 1$.
- 0-0 normalizado si $v(i) = 0$ para todo $i \in N$ y $v(N) = 0$.
- 0-(-1) normalizado si $v(i) = 0$ para todo $i \in N$ y $v(N) = -1$.

Dado un juego (N, v) se puede obtener su juego 0-normalizado (N, w) definiendo $w(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(i)$ para cada $S \subset N$.

Proposición 1.9 $(N, v) \in G^N$ es estratégicamente equivalente a:

- a) Un juego (N, w) 0-1 normalizado si y solo si $v(N) > \sum_{i \in N} v(i)$.
- b) Un juego (N, w) 0-(-1) normalizado (con $w(N) = -1$) si y solo si $v(N) < \sum_{i \in N} v(i)$.
- c) Un juego (N, w) 0-0 normalizado (con $w(N) = 0$) si y solo si $v(N) = \sum_{i \in N} v(i)$.

Además, esta equivalencia es única en los casos a) y b).

Demostración: Sea (N, w) un juego 0-normalizado estratégicamente equivalente a (N, v) . Entonces,

$$\begin{aligned} w(i) &= kv(i) + a_i = 0, \quad i \in N \\ w(N) &= kv(N) + \sum_{i \in N} a_i \end{aligned}$$

para algún $k > 0$ y $a \in \mathbb{R}^N$. Sea $n = |N|$. Escribimos el sistema lineal de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} v(1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ v(2) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v(n) & 0 & 0 & \dots & 1 \\ v(N) & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w(N) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

El sistema (1.1) es compatible determinado si $v(N) \neq \sum_{i \in N} v(i)$ y $w(N) \neq 0$, y es compatible indeterminado si $v(N) = \sum_{i \in N} v(i)$ y $w(N) = 0$ (en este caso el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada es n).

En el primer caso la solución es:

$$\begin{aligned} k &= \frac{w(N)}{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)} \\ a_i &= -\frac{v(i)w(N)}{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)}, \quad i \in N \end{aligned}$$

y solo necesitamos $k > 0$ para que (N, v) y (N, w) sean estratégicamente equivalentes. Por tanto:

- a) Si $w(N) = 1$, ambos juegos son estratégicamente equivalentes si y solo si $v(N) > \sum_{i \in N} v(i)$.
- b) Si $w(N) = -1$, ambos juegos son estratégicamente equivalentes si y solo si $v(N) < \sum_{i \in N} v(i)$.

En el segundo caso, cualquier elección arbitraria de $k > 0$ es válida (tomando $a_i = -kv(i)$ para todo $i \in N$). Por tanto:

- c) Si $w(N) = 0$, ambos juegos son estratégicamente equivalentes si y solo si $v(N) = \sum_{i \in N} v(i)$.

■

Definición 1.10 Sea $(N, v) \in G^N$. Diremos que (N, v) es

- Monótono si $v(S) \leq v(T)$ para todo $S, T \subset N$ tal que $S \subset T$.
- 0-monótono si el juego 0-normalizado w es monótono o, equivalentemente, si para todo $S \subset T$,

$$v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(i) \leq v(T).$$

En juegos monótonos, añadir jugadores a una coalición no supone disminución de la utilidad.

Observación 1.11 Fácilmente se puede comprobar que:

1. Si (N, v) es monótono, entonces $v(S) \geq 0$ para todo $S \subset N$, y $v(S \cup i) - v(S) \geq 0$ para todo $S \subset N \setminus i$.
2. Todo juego superaditivo es 0-monótono.

Definición 1.12 Sea $(N, v) \in G^N$. Diremos que (N, v) es

- Convexo si $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ para todo $S, T \subset N$.
- Estrictamente convexo si $v(S) + v(T) < v(S \cup T) + v(S \cap T)$ para todo $S, T \subset N$.
- Cóncavo si $(N, -v)$ es convexo.
- Estrictamente cóncavo si $(N, -v)$ es estrictamente convexo.

Observación 1.13 Fácilmente se comprueba que si un juego es convexo entonces es superaditivo, pero el recíproco no es cierto.

Las condiciones de convexidad pueden reformularse de un modo más intuitivo, en términos de las contribuciones marginales de los jugadores a las coaliciones. Con esta caracterización, un juego es convexo si la contribución de cada jugador a una coalición no decrece cuantos más jugadores tenga la coalición (efecto *bola de nieve*).

Proposición 1.14 $(N, v) \in G^N$ es convexo si y sólo si $v(S \cup i) - v(S) \geq v(T \cup i) - v(T)$ para todo $S, T \in 2^N$ tal que $T \subset S \subset N \setminus i$.

Demostración: Supongamos que el juego (N, v) es convexo y, por tanto, $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ para todo $S, T \subset N$. Consideremos $T \subset S \subset N \setminus i$, $A = T \cup i$ y $B = S$. Entonces, $A \cup B = S \cup i$ y $A \cap B = T$. Aplicando la definición de convexidad a las coaliciones A y B obtenemos la condición $v(S \cup i) - v(S) \geq v(T \cup i) - v(T)$.

Para probar el recíproco, consideremos $|S \setminus T| \geq 1$ (el caso $S \subset T$ es trivial). Entonces, $S \setminus T = \{i_1, \dots, i_k\}$, siendo $k \geq 1$.

Si $k = 1$, tomemos $A_1 = S \cap T$ y $B_1 = T$. Claramente observamos que $A_1 \subset B_1 \subset N \setminus \{i_1\}$. Por hipótesis,

$$v(A_1 \cup \{i_1\}) - v(A_1) \leq v(B_1 \cup \{i_1\}) - v(B_1), \quad (1.2)$$

y dado que $v(S) = v(A_1 \cup \{i_1\})$, $v(S \cap T) = v(A_1)$, $v(S \cup T) = v(B_1 \cup \{i_1\})$ y $v(T) = v(B_1)$, se tiene directamente que

$$v(S) - v(S \cap T) \leq v(S \cup T) - v(T).$$

Si $k = 2$, definimos $A_2 = A_1 \cup \{i_1\}$ y $B_2 = B_1 \cup \{i_1\}$. De forma análoga al caso anterior obtendríamos que $v(S) - v(A_2) \leq v(T) - v(B_2)$ o, equivalentemente, $v(S) - v(T) \leq v(A_2) - v(B_2)$. Aplicando la desigualdad (1.2) se llega a la relación buscada. Un proceso iterativo hasta terminar el número finito de jugadores completa la demostración. ■

1.1.2. Ejemplos

Ejemplo 1.15 (El juego del dólar) *Tres amigos se plantean el problema de repartirse un dólar. Pero sólo podrán conseguirlo los grupos de dos o los tres conjuntamente, en ningún caso individualmente. Podemos plantear esta situación como un juego coalicional TU con tres jugadores (los amigos) y la función característica que no asigna ganancia alguna a las coaliciones individuales mientras que a las coaliciones de dos jugadores y a la gran coalición de los tres jugadores les asigna una ganancia de 1 dólar.*

- Conjunto de jugadores: $N = \{1, 2, 3\}$.
- Función característica:

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) &= v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.16 (El paso del ganado (en inglés, *The cattle drive*)) *Un ganadero A tiene ganado para vender en el mercado a un precio de 1000 dólares. Para acceder al mercado debe cruzar por los terrenos de al menos uno de sus dos vecinos, también ganaderos, B y C, que pueden negarse a permitirle el paso. Esto es, A necesita la colaboración de al menos uno de sus vecinos para vender su ganado y obtener el beneficio esperado. ¿Cómo podemos modelizar esta situación mediante un juego coalicional? De nuevo, tenemos tres jugadores y una función característica que mide la ganancia obtenida por la cooperación.*

- Conjunto de jugadores: $N = \{A, B, C\}$.
- Función característica:

$$\begin{aligned} v(A) &= v(B) = v(C) = 0 \\ v(A, B) &= v(A, C) = v(A, B, C) = 1000 \\ v(B, C) &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.17 (El juego de los guantes) *Supongamos que tenemos $n = |N|$ jugadores de los cuales $\ell = |L|$ tienen un guante izquierdo y $r = |R|$ tienen un guante derecho. Por cada pareja de guantes (derecho e izquierdo) obtenemos una unidad de utilidad.*

- Conjunto de jugadores: $N = L \cup R$.

▪ *Función característica:*

$$v(S) = \min\{|L \cap S|, |R \cap S|\}$$

para todo $S \subset N$.

Como caso particular consideremos que el jugador 1 tiene un guante izquierdo y los jugadores 2 y 3 tienen, cada uno, un guante derecho. En este caso, el juego de los guantes es análogo al juego del paso del ganado, descrito en el Ejemplo 1.16. En efecto, si escribimos $L = \{1\}$ y $R = \{2, 3\}$ entonces

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) &= v(1, 3) = v(1, 2, 3) = 1 \\ v(2, 3) &= 0. \end{aligned}$$

1.1.3. Juegos de unanimidad

Los juegos de unanimidad son un tipo importante de juegos TU porque constituyen una base de G^N considerado como espacio vectorial.

Definición 1.18 Sea $\emptyset \neq T \subset N$. El juego de unanimidad de la coalición T , (N, u_T) se define para cada coalición $S \subset N$,

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subset S \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La siguiente proposición prueba que cada juego (N, v) se puede expresar de forma única como una combinación lineal de juegos de unanimidad. Esto demuestra que, efectivamente, estos juegos forman una base de G^N como espacio vectorial.

Proposición 1.19 Sea $(N, v) \in G^N$, entonces, los coeficientes $(c_T)_{\emptyset \neq T \subset N} \in \mathbb{R}^{2^N \setminus \{\emptyset\}}$ definidos por

$$c_T = \sum_{T' \subset T} (-1)^{|T| - |T'|} v(T')$$

son tales que

$$v = \sum_{T \subset N, T \neq \emptyset} c_T u_T$$

de forma única.

Demostración: Ya sabemos que G^N es un espacio vectorial de dimensión $2^{|N|} - 1$ y exactamente hay $2^{|N|} - 1$ juegos de unanimidad. Tenemos que probar que son linealmente independientes en $\mathbb{R}^{2^{|N|} - 1}$. Supongamos que fuesen linealmente dependientes, entonces existen números reales, no todos nulos, $(\alpha_T)_{\emptyset \neq T \subset N}$ tales que para todo $S \subset N$,

$$\sum_{\emptyset \neq T \subset N} \alpha_T u_T(S) = 0. \quad (1.3)$$

Sea $A = \{\emptyset \neq T \subset N : \alpha_T \neq 0\}$. Claramente $A \neq \emptyset$. Sea S_0 una coalición minimal de A , es decir, $\alpha_T = 0$ para todo $T \subsetneq S_0$. Entonces,

$$\sum_{\emptyset \neq T \subset N} \alpha_T u_T(S_0) = \sum_{\emptyset \neq T \subsetneq S_0} \alpha_T u_T(S_0) + \alpha_{S_0} u_{S_0}(S_0) + \sum_{\emptyset \neq T \supsetneq S_0} \alpha_T u_T(S_0) = \alpha_{S_0} u_{S_0}(S_0) = \alpha_{S_0} \neq 0$$

lo que contradice la ecuación (1.3). Por tanto son linealmente independientes.

Para demostrar $c_T = \sum_{T' \subset T} (-1)^{|T|-|T'|} v(T')$, es suficiente comprobar que, para todo $S \subset N$,

$$v(S) = \sum_{\emptyset \neq T \subset N} \sum_{\emptyset \neq T' \subset T} (-1)^{|T|-|T'|} v(T') u_T(S).$$

Sea $S \subset N$. Por definición de los juegos de unanimidad, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\emptyset \neq T \subset N} \sum_{\emptyset \neq T' \subset T} (-1)^{|T|-|T'|} v(T') u_T(S) &= \sum_{\emptyset \neq T \subset S} \sum_{\emptyset \neq T' \subset T} (-1)^{|T|-|T'|} v(T') \\ &= \sum_{\emptyset \neq T \subsetneq S} \sum_{\emptyset \neq T' \subset T} (-1)^{|T|-|T'|} v(T') + \sum_{\emptyset \neq T' \subsetneq S} (-1)^{|S|-|T'|} v(T') + v(S) \\ &= \sum_{\emptyset \neq T' \subsetneq S} \left(\sum_{\emptyset \neq T \subsetneq S: T' \subset T} (-1)^{|T|-|T'|} + (-1)^{|S|-|T'|} \right) v(T') + v(S). \end{aligned}$$

Por tanto, basta probar que $\sum_{\emptyset \neq T \subsetneq S: T' \subset T} (-1)^{|T|-|T'|} + (-1)^{|S|-|T'|} = 0$ para todo $\emptyset \neq T' \subsetneq S$. Sea $\emptyset \neq T' \subsetneq S$. Entonces:

$$\sum_{\emptyset \neq T \subsetneq S: T' \subset T} (-1)^{|T|-|T'|} + (-1)^{|S|-|T'|} = \sum_{Q \subsetneq S \setminus T'} (-1)^{|Q|} + (-1)^{|S|-|T'|} = \sum_{Q \subsetneq S \setminus T'} (-1)^{|Q|}.$$

Dado cualquier $i \in S \setminus T'$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{Q \subsetneq S \setminus T'} (-1)^{|Q|} &= \sum_{Q \subsetneq S \setminus T': i \in Q} (-1)^{|Q|} + \sum_{Q \subsetneq S \setminus T': i \notin Q} (-1)^{|Q|} \\ &= \sum_{Q \subsetneq (S \setminus T') \setminus i} (-1)^{|Q \cup i|} + \sum_{Q \subsetneq (S \setminus T') \setminus i} (-1)^{|Q|} \\ &= - \sum_{Q \subsetneq (S \setminus T') \setminus i} (-1)^{|Q|} + \sum_{Q \subsetneq (S \setminus T') \setminus i} (-1)^{|Q|} \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Los coeficientes c_T tienen importancia por sí mismos ya que se pueden interpretar como la influencia de cada juego de unanimidad en el juego original.

Definición 1.20 Para cada $(N, v) \in G^N$, los coeficientes

$$c_T = \sum_{T' \subset T} (-1)^{|T|-|T'|} v(T')$$

para todo $T \subset N \setminus \{\emptyset\}$, se llaman *dividendos de Harsanyi*.

1.1.4. Clases especiales de juegos

En esta sección describimos mediante ejemplos concretos dos clases particulares de juegos: el juego de un Parlamento (juego simple) y un juego de costes. Esta última clase, aún teniendo grandes analogías con los juegos de ganancias, tiene ciertos matices que conviene tener en cuenta para entender la obtención de las principales soluciones en los capítulos siguientes.

Posteriormente, sin entrar en detalles, estudiamos en qué consiste un problema de bancarrota y un problema de asignación. A partir de estos problemas, la teoría de juegos coalicionales asocia a tales situaciones juegos TU, que serán tratados más adelante. Ahora, el propósito es simplemente

mostrar con distintos ejemplos situaciones que pueden ser abordadas desde la teoría de juegos coalicionales. Bancarrota y asignación son dos clases de problemas elegidos de una amplia clase de las que podrían formar parte de esta sección. Estos problemas surgen en campos diversos tales como la economía, la investigación operativa, la biología, la ingeniería o las ciencias en general.

Ejemplo 1.21 (El juego de un Parlamento) *Imaginemos un Parlamento con 130 escaños en el que las decisiones se toman por mayoría absoluta, esto es, por 66 votos o más. Supongamos que los escaños se han repartido entre los distintos partidos de la siguiente forma:*

Partido	Escaños
A	48
B	32
C	20
D	16
E	14

Podemos describir el juego del Parlamento del siguiente modo:

- Conjunto de jugadores: $N = \{A, B, C, D, E\}$.
- Función característica:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \in \mathcal{W} \\ 0 & \text{si } S \notin \mathcal{W} \end{cases}$$

siendo $\mathcal{W}$ el conjunto de las coaliciones ganadoras, entendiendo por ganadora cualquier coalición que supere los 65 escaños.

En este caso, un reparto consiste en dar distribuciones del poder entre los distintos agentes involucrados.

Ejemplo 1.22 (Juegos de costes) *Los juegos de costes aparecen frecuentemente en situaciones reales. Por ejemplo, en problemas en los que existen redes de comunicación entre diversos agentes: conexiones a redes eléctricas, depósitos de agua, aeropuertos con distintos tipos de aviones, etc. En un juego de costes (N, c) , N es el conjunto de agentes entre los cuales deben ser divididos los costes y $c: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina la función de costes. Para cada coalición $S \subset N$, $c(S)$ representa el mínimo coste en que incurren los miembros de la coalición S .*

El Ejemplo 1.1 de la depuradora es un caso sencillo de un juego de costes. Estudiemos otro. Tres empresas de un polígono industrial quieren conectarse mediante una línea de alta tensión a la central eléctrica más cercana. En la Figura 1.1 se indican los costes asociados a las líneas que conectarían las empresas entre sí y con la central.

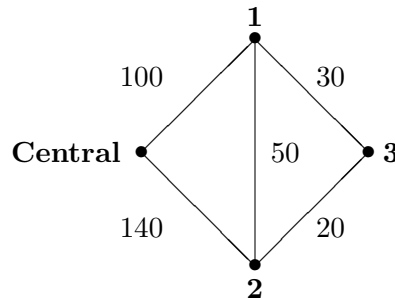


Figura 1.1: Esquema de la conexión entre las empresas y la central eléctrica.

Así pues, el juego de costes vendría dado por:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$c(S)$	100	140	130	150	130	150	150

Asociado a un juego de costes (N, c) podemos definir el juego (N, v_c) que indica el ahorro de cada coalición si sus miembros deciden cooperar en lugar de actuar por su cuenta. Matemáticamente,

$$v_c(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S), \text{ para todo } S \in 2^N.$$

Para nuestro problema de las empresas el juego de ahorros sería:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$v_c(S)$	0	0	0	90	100	120	220

Ejemplo 1.23 (Problemas de bancarrota) Los problemas de bancarrota aparecen ya en el Talmud.⁴ Analicemos el siguiente ejemplo recogido en el citado documento: Un hombre tiene 3 esposas. En los contratos de sus matrimonios figura que si muere, sus mujeres deberían recibir 100, 200 y 300 unidades monetarias, respectivamente. En el momento de su defunción su hacienda asciende a 100. ¿Cómo se divide el dinero entre sus esposas? El Talmud recomienda los siguientes repartos dependiendo del montante total:

- Si la hacienda es de 100, recomienda división igualitaria: $(33 + \frac{1}{3}, 33 + \frac{1}{3}, 33 + \frac{1}{3})$.
- Si la hacienda es de 300, recomienda división proporcional: $(50, 100, 150)$.
- Si la hacienda es de 200, recomienda la división: $(50, 75, 75)$.

Existen distintas formas de definir un juego coalicional asociado a una situación de bancarrota. La más conocida es la pesimista, que consiste en modelizar el juego de acuerdo con el siguiente patrón: para cada coalición S se mira lo que queda después de que los miembros de $N \setminus S$ hayan recibido sus demandas. El valor de cada coalición es, entonces, el máximo entre ese número y 0.

Así pues, si denotamos a las esposas respectivamente como 1, 2 y 3, los juegos asociados a cada hacienda vendrían dados por:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$v_{100}(S)$	0	0	0	0	0	0	100
$v_{300}(S)$	0	0	0	0	100	200	300
$v_{200}(S)$	0	0	0	0	0	100	200

De alguna forma, el Talmud anticipó la teoría moderna de juegos coalicionales, dado que las soluciones antes mencionadas se corresponden con un conocido reparto en teoría de juegos para el juego de bancarrota: el nucleolus.

Ejemplo 1.24 (Problemas de asignación) Supongamos un mercado bilateral con m propietarios o vendedores, cada uno con un bien o casa, y n posibles compradores, interesados en un único bien o casa. El vendedor i valora su casa en c_i unidades monetarias, $i = 1, \dots, m$, mientras que el comprador j valora la casa del vendedor i en h_{ij} unidades monetarias, $j = 1, \dots, n$. Si, finalmente, el vendedor i vende su casa al comprador j al precio p_i se produce una ganancia o beneficio dado por:

- $p_i - c_i$ para el vendedor i .
- $h_{ij} - p_i$ para el comprador j .

⁴Documento de, aproximadamente, 2000 años de antigüedad que es el libro sagrado de la religión judía.

Observamos que conjuntamente entre el vendedor i y el comprador j se produce un beneficio de $p_i - c_i + h_{ij} - p_i = h_{ij} - c_i$ unidades, que puede ser positivo, negativo o nulo.

El valor de una coalición S formada por vendedores y compradores elegirá las transacciones óptimas que maximicen el beneficio conjunto.

Formalmente, el conjunto de jugadores es la unión de dos conjuntos disjuntos $M \cup M'$, donde M es el conjunto de compradores y M' es el conjunto de vendedores, de forma que $|M| = n$ y $|M'| = m$. Dados $T \subset M$ y $T' \subset M'$, un emparejamiento (o asignación) entre T y T' es un subconjunto $\mu \subset T \times T'$ tal que cada jugador pertenece como mucho a una pareja en μ . Sea $\mathcal{M}(T, T')$ el conjunto de emparejamientos entre T y T' . Tenemos entonces:

- Conjunto de jugadores: $N = M \cup M'$.
- Función característica: $v(S) = \max \left\{ \sum_{(i,j) \in \mu} (h_{ij} - c_i) : \mu \in \mathcal{M}(S \cap M, S \cap M') \right\}$ para todo $S \subset N$.

1.2. Soluciones tipo conjunto y soluciones puntuales

Dado un juego coalicional TU, de forma natural surgen dos preguntas:

¿Qué coalición o coaliciones se van a formar?

¿Cómo se dividen las ganancias entre los jugadores?

Por el propio planteamiento coalicional inherente a las situaciones modelizadas mediante juegos superaditivos, el objetivo implícito de estos juegos es que se forme la gran coalición N y que los jugadores se repartan entre ellos el beneficio de la cooperación.

Definición 1.25 Un reparto es un vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$, donde cada coordenada x_i representa la cantidad asignada al jugador i . Dado un reparto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$, la suma de las cantidades asignadas a los miembros de una coalición $S \subset N$ se denota por $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

Enumeramos dos requerimientos muy comunes en teoría de juegos:

- Racionalidad individual. Un reparto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ verifica la propiedad de racionalidad individual si cada jugador recibe un pago que no es inferior a lo que puede garantizarse por sí mismo, es decir, $x_i \geq v(i)$ para todo $i \in N$.
- Eficiencia. Un reparto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ será eficiente si distribuye el valor de la gran coalición $v(N)$ entre los jugadores, esto es, si $x(N) = x_1 + \dots + x_n = v(N)$.

El primero establece que cada jugador debe llevar, al menos, lo que puede garantizarse por sí mismo. El segundo, razonable si asumimos que los jugadores van a formar la gran coalición, impone que se va a repartir el valor total disponible.

Los repartos eficientes que son individualmente racionales se denominan imputaciones.

Definición 1.26 Sea $(N, v) \in G^N$.

- El conjunto de preimputaciones del juego (N, v) es el conjunto de todos los repartos eficientes.

$$I^*(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \right\}.$$

- El conjunto de imputaciones de un juego (N, v) es el conjunto de todos los repartos eficientes que verifican además la propiedad de racionalidad individual.⁵

$$I(N, v) = \{x \in I^*(N, v) : x_i \geq v(i), \forall i \in N\}.$$

El conjunto de imputaciones $I(N, v)$ puede ser vacío. Así ocurre, por ejemplo, en el juego de tres jugadores con función característica: $v(1) = 1, v(2) = 2, v(3) = 3, v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = 0$ y $v(1, 2, 3) = 5$.

Habrán casos en los que los jugadores de N no formen la gran coalición y formen una estructura coalicional de jugadores.

Definición 1.27 Una estructura coalicional del conjunto de jugadores N es una partición de N ; es decir, un conjunto $\mathcal{B} \subset 2^N$ de coaliciones de N tal que para cada $i \in N$ existe una única coalición $B \in \mathcal{B}$ tal que $i \in B$.

En juegos superaditivos parece razonable que se forme la gran coalición N con lo que $\mathcal{B} = \{N\}$, pero pueden ocurrir situaciones en las que los jugadores no formen la gran coalición. Sea $\mathcal{B}$ una estructura coalicional de jugadores de N . El conjunto de imputaciones para una estructura coalicional $\mathcal{B}$ es el conjunto de vectores individualmente racionales tales que el pago total de cada elemento coalicional de la estructura ha de ser igual a su valor coalicional.

$$I(N, v, \mathcal{B}) = \{x \in \mathbb{R}^N : x(B) = v(B) \text{ para todo } B \in \mathcal{B}, x_i \geq v(i), \text{ para todo } i \in N\}.$$

Definición 1.28 Un juego (N, v) es esencial si $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(i)$ y es degenerado si $v(N) = \sum_{i \in N} v(i)$.

Proposición 1.29 Sea $(N, v) \in G^N$.

- El conjunto de imputaciones no es vacío, $I(N, v) \neq \emptyset$, si y solo si el juego (N, v) es esencial.
- Si (N, v) es un juego esencial, entonces $I(N, v)$ es la envoltura convexa de $f^1, \dots, f^n$ siendo, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$f_k^i = \begin{cases} v(k) & \text{si } k \neq i \\ v(N) - \sum_{k \in N \setminus i} v(k) & \text{si } k = i. \end{cases}$$

Demostración: a) Es inmediato por la propia definición del conjunto de imputaciones.

b) Si el juego es esencial entonces por a) sabemos que el conjunto de imputaciones es no vacío. Por su definición, el conjunto de imputaciones es un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^N$ y, por tanto, se puede expresar como envoltura convexa de sus puntos extremos⁶. ■

Observación 1.30 El conjunto de imputaciones de un juego esencial no degenerado de n jugadores es un subconjunto convexo $(n-1)$ -dimensional de $\mathbb{R}^N$ contenido en el hiperplano $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. Podemos representar gráficamente estos conjuntos tan sólo en el caso de juegos con menos de cinco jugadores. Obviando el caso trivial de dos jugadores para el que se obtiene un segmento, el conjunto de imputaciones de un juego de tres jugadores es el triángulo equilátero de vértices $(v(1, 2, 3) - v(2) - v(3), v(1, 2, 3) - v(1) - v(3), v(1, 2, 3) - v(1) - v(2))$.

⁵En el caso de un juego de costes (N, c) definimos

$$I^r(N, c) = \{x \in I^*(N, c) : x_i \leq c(i), \forall i \in N\}.$$

Se cumple que, $x \in I^r(N, c) \Leftrightarrow -x \in I(N, -c)$.

⁶El teorema de Krein y Milman (1940) establece que todo subconjunto convexo y compacto se puede expresar como la envoltura convexa de sus puntos extremos.

$v(3), v(2), v(3)), (v(1), v(1, 2, 3) - v(1) - v(3), v(3))$ y $(v(1), v(2), v(1, 2, 3) - v(1) - v(2))$ (ver Figura 1.2), mientras que para un juego de cuatro jugadores el conjunto de imputaciones es un tetraedro.

Es habitual representar el conjunto de imputaciones de un juego esencial no degenerado (N, v) de tres jugadores por medio de un triángulo equilátero de altura $v(N)$ (aunque geométricamente la altura en $\mathbb{R}^N$ como espacio euclídeo sería otra).

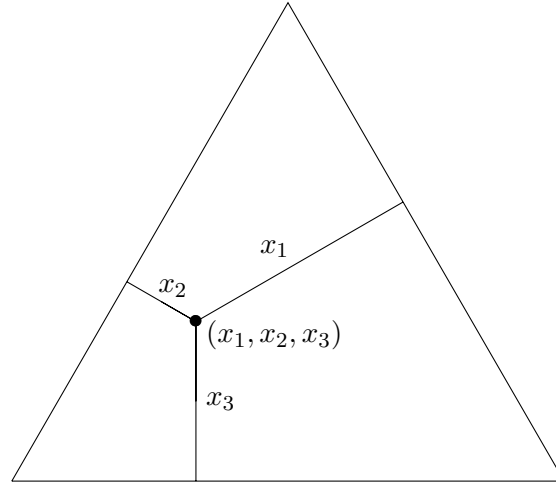


Figura 1.2: Coordenadas en el conjunto de imputaciones de tres jugadores.

Cuando el juego está 0-normalizado, y gracias a esta convención de que la altura del triángulo es $v(N)$, dada una imputación $x = (x_1, x_2, x_3) \in I(N, v)$, la coordenada x_i es la distancia de x al lado opuesto del vértice i (coordenadas baricéntricas).

Es trivial comprobar que se tienen las siguientes cotas para cualquier imputación $x \in I(N, v)$:

$$v(i) \leq x_i \leq v(N) - \sum_{j \in N \setminus i} v(j), \text{ para todo } i \in N.$$

A continuación, damos algunas relaciones entre las diferentes clases de juegos que hemos definido.

Proposición 1.31 Sea $(N, v) \in G^N$. Se verifica que:

- a) Si (N, v) es un juego superaditivo no degenerado, entonces existe un único juego 0-1 normalizado, (N, w) , tal que v y w son estratégicamente equivalentes. Además, (N, w) es superaditivo y, por tanto, $0 \leq w(S) \leq 1$, para todo $S \subset N$.
- b) Si (N, v) es un juego superaditivo degenerado, entonces es estratégicamente equivalente al juego idénticamente nulo.

Demostración: a) Teniendo en cuenta la Proposición 1.9 tenemos que existe un único juego (N, w) 0-1 normalizado estratégicamente equivalente a (N, v) . Tenemos que probar que (N, w) es superaditivo. Para cada $S \subset N$, tenemos que

$$w(S) = \frac{1}{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)} \left(v(S) - \sum_{i \in S} v(i) \right).$$

Por tanto, (N, w) es la suma, multiplicada por una constante, del juego superaditivo (N, v) y un juego aditivo, con lo que el juego (N, w) también es superaditivo. De aquí se deduce que $0 \leq w(S) \leq 1$ para todo $S \subset N$.

b) Aplicando la Proposición 1.9 c), para cada $k \in \mathbb{R}_+$ y $S \subset N$, $w(S) = k(v(S) - \sum_{i \in S} v(i)) = 0$, siendo la última igualdad cierta porque el juego (N, v) es aditivo (véase el Ejercicio 6) y, por tanto, el juego (N, w) es el juego idénticamente nulo. ■

Ejercicios

1. Piensa una situación en la que la cooperación entre los agentes sea importante y, además, sea posible la transferencia de utilidad entre ellos. Describe los elementos del problema y trata de modelizarlo mediante un juego coalicional TU.
2. Demuestra que el juego del Ejemplo 1.1 es subaditivo.
3. Encuentra dos juegos distintos que den lugar al mismo juego 0-normalizado.
4. Encuentra un ejemplo de juego monótono que no sea 0-monótono y otro ejemplo de juego 0-monótono que no sea monótono.
5. Encuentra, si existe, un juego superaditivo que no sea monótono y uno monótono que no sea superaditivo. ¿Es cierto que si (N, v) es un juego superaditivo tal que $v(S) \geq 0$ para todo $S \subset N$ entonces es monótono?
6. Demuestra que:
 - a) Si (N, v) es aditivo entonces el conjunto de imputaciones se reduce a un único punto, $I(N, v) = \{(v(1), \dots, v(n))\}$ para $N = \{1, \dots, n\}$.
 - b) Todo juego superaditivo es esencial.
 - c) Si (N, v) es un juego superaditivo, entonces (N, v) es degenerado si y solo si (N, v) es aditivo.
7. Considera $N = \{1, 2, 3\}$ y los juegos definidos mediante $v(S) = |S|$ y $w(S) = -|S|$, para todo $S \subset N$. ¿Son estratégicamente equivalentes? ¿Son monótonos? ¿Se preserva la monotonía en juegos estratégicamente equivalentes?
8. Comprueba que la superaditividad y la convexidad se preservan bajo juegos estratégicamente equivalentes.
9. Considera el juego $v = [3, 13, 4, 12, 15, 1, 10]$. ¿Es monótono? Encuentra un juego monótono que sea estratégicamente equivalente a v . Demuestra que cualquier juego es estratégicamente equivalente a un juego monótono y concluye que, por tanto, la propiedad de monotonía no se preserva en juegos estratégicamente equivalentes.
10. Escribe la función característica de un juego de mayoría simple de 3 jugadores.
11. Demuestra que si dos juegos (N, v) y (N, w) son estratégicamente equivalentes, entonces $x \in I(N, v)$ implica que $kx + a \in I(N, w)$, siendo $k > 0$ y (N, a) el juego aditivo tales que $w = kv + a$.
12. El Consejo de Seguridad de Naciones Unidas está formado por 5 miembros permanentes y por 10 no permanentes. Cada miembro permanente tiene poder de veto y se necesitan al menos 9 miembros para que una ley (decisión, etc.) sea aprobada. Modeliza esta situación como un juego coalicional, indicando qué representa el valor de una coalición. ¿Cuántas coaliciones pueden formarse?

13. En el proceso legislativo de Estados Unidos para que una decisión sea adoptada tiene que ser aprobada por:
- El Presidente y la mayoría simple del Senado (con 100 miembros) y la mayoría simple del Congreso (*House of Representatives*, con 435 miembros).
 - O bien:
 - $\frac{2}{3}$ del Senado y $\frac{2}{3}$ del Congreso.

Modeliza la situación como un juego coalicional, indicando quiénes son los jugadores y el valor de las coaliciones.

14. **Árboles de expansión de coste mínimo.** Modeliza el juego coalicional asociado a la red representada en la Figura 1.3, en la que se muestran sobre cada arista los costes de cada conexión. Para cada coalición $S \subset \{A, B, C, D\}$, $c(S)$ representa el mínimo coste para que todos los nodos de S se conecten.

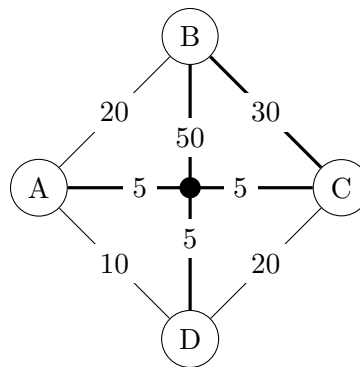


Figura 1.3: Costes de conexión.

- ¿Tiene sentido el juego generado? Escribe el juego correspondiente si consideramos que los nodos quieren conectarse a una fuente (en este caso el punto central). Estudia las principales propiedades de los juegos asociados.
15. **Juegos de mercado bilateral.** Hay 5 jugadores, 3 de ellos tienen 100 litros de ginebra cada uno y 2 de ellos 100 litros de tónica. Un cocktail se forma con iguales partes de ginebra y tónica. El precio del cocktail es de 100 euros por litro. Modeliza esta situación como un juego coalicional indicando el valor de cada una de las coaliciones.
16. Escribe la 0-1 normalización del siguiente juego $v = [3, 6, 8, 12, 15, 18, 80]$.
17. Demuestra que si un juego (N, v) es monótono, entonces $v(S) \geq 0$ para todo $S \subset N$, y $v(S \cup i) - v(S) \geq 0$ para todo $S \subset N \setminus i$.
18. Escribe para $n = 4$ todas las posibles estructuras coalicionales.

Capítulo 2

Conceptos de solución tipo conjunto

En la teoría de juegos coalicionales el concepto de solución de un juego se puede estudiar desde dos perspectivas: una consiste en indicar qué repartos son más preferidos que otros siguiendo unos determinados criterios, *los conceptos de solución tipo conjunto*, que serán estudiados en este capítulo, y la otra perspectiva consiste en dejar que sea un árbitro o un juez el que recomiende a los jugadores un reparto del valor entre los jugadores, *los conceptos de solución puntuales*, que serán estudiados en el Capítulo 3.

Las soluciones tipo conjunto establecen criterios para eliminar repartos del conjunto de imputaciones o del conjunto inicial de partida, mientras que la metodología clásica de las soluciones puntuales establece criterios, axiomas o propiedades básicas que deben verificar las soluciones. En general, lo que diferencia a los distintos conceptos de solución tipo conjunto son los criterios empleados para decidir qué es beneficioso, o estable, para los jugadores. En contraposición, lo que diferencia los distintos conceptos de solución tipo puntual son los axiomas que se imponen a la solución, y que suelen estar basados en la justicia o en las expectativas racionales de los jugadores.

Por otro lado, los conceptos de solución tipo conjunto pueden seleccionar uno, un número finito, un número infinito, o incluso, ningún reparto, mientras que en las soluciones puntuales de juegos TU, el reparto, si existe, es único.

Formalizamos de forma matemática el concepto de solución de un juego coalicional que recoge tanto los conceptos de solución tipo conjunto como las soluciones puntuales.

Definición 2.1 Una solución definida en algún dominio $\Omega \subset G^N$, es una correspondencia Ψ , $\Psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, que asocia a cada juego (N, v) en Ω un subconjunto $\Psi(N, v) \subset \mathbb{R}^N$.

En el caso de que la solución sea siempre unitaria hablamos de *solución puntual* o *regla de reparto* (en inglés, *allocation rule*). En otro caso, se trata de una solución tipo conjunto.

A continuación indicamos las principales soluciones de tipo conjunto, indicando la referencia correspondiente en cada caso.

- Core o *núcleo* (Edgeworth (1881), Gillies (1953)).
- ε -Core (Shapley y Shubik (1963, 1966)).
- Least core o *menor núcleo* (Maschler y otros (1979)).
- D-core o *dominance core* (Gillies (1953, 1959)).
- Conjuntos estables, soluciones de von Neumann y Morgenstern o *stable sets* (von Neumann y Morgenstern (1944)).
- Core-cover o *cubrimiento del núcleo* (Tijs (1981)).

- Conjunto de Weber o *Weber set* (Weber (1988)).
- Kernel (Davis y Maschler (1965)).
- Prekernel (Maschler y otros (1972)).
- Conjunto de Harsanyi, *Harsanyi set* o *selectope* (Hammer y otros (1977), Vasil'ev (1980)).
- Conjunto de regateo, conjunto de negociación o *bargaining set* (Aumann y Maschler (1965)).

En esta monografía, nos limitaremos a estudiar los siete primeros.

2.1. El core. Caracterizaciones

La racionalidad coalicional supone que a cada coalición $S \subset N$ debemos darle, al menos, lo que se puede garantizar por sí misma. Matemáticamente, esto quiere decir que $x(S) = \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$, para cada $S \subset N$. Diremos que las asignaciones seleccionadas de esta forma son estables, en el sentido de que ninguna coalición S tendrá incentivos para desviarse y obtener un reparto mejor (en sentido estricto) que lo que asigna un reparto en el núcleo (*core*, en inglés). Si $x(S) < v(S)$ podrían dividir, por ejemplo, el exceso $v(S) - x(S)$ a partes iguales entre los miembros de S .

Definición 2.2 *El core o núcleo de un juego (N, v) es el conjunto:*

$$C(N, v) = \{x \in I(N, v) : x(S) \geq v(S), \forall S \subset N\}.$$

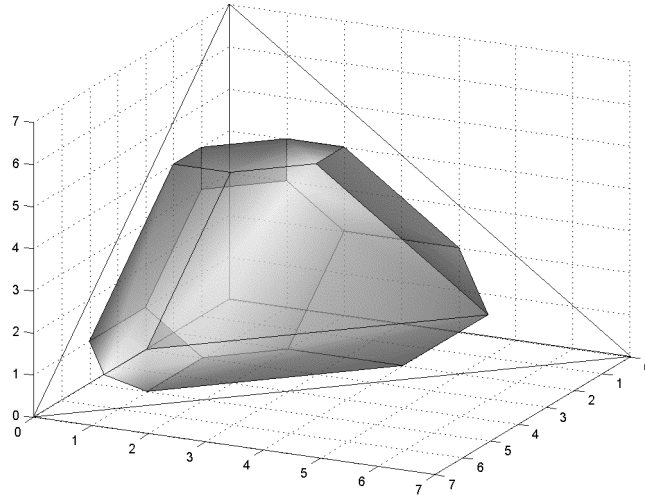


Figura 2.1: Core de un juego de cuatro jugadores.

Teorema 2.3 *Sea $(N, v) \in G^N$ tal que $C(N, v) \neq \emptyset$. Entonces se tiene que:*

- a) *El core $C(N, v)$ es un politopo convexo y compacto de $\mathbb{R}^N$.*

b) Existen $x_1, \dots, x_l \in C(N, v)$ tales que cualquier elemento del core $x \in C(N, v)$ puede escribirse como

$$x = \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i, \text{ con } \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i.$$

Es decir, el core es la envoltura convexa de los puntos $x_1, \dots, x_l$,

$$C(N, v) = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_l\}).$$

Demostración: a) Para cada coalición S , el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : x(S) \geq v(S)\}$ es un semiespacio cerrado. El core, por definición es la intersección de $2^{|N|} - 1$ semiespacios $\{x \in \mathbb{R}^N : x(S) \geq v(S)\}$ con $\emptyset \neq S \subset N$ y el semiespacio $\{x \in \mathbb{R}^N : x(N) \leq v(N)\}$. Cada semiespacio es convexo (y cerrado) y la intersección de convexos (cerrados) es también convexo (y cerrado). Por tanto el core es cerrado y convexo. Como es un subconjunto de imputaciones, está acotado, y por tanto es compacto.

b) Como el core es convexo y compacto se puede expresar como envoltura convexa de sus puntos extremos (Krein y Milman (1940)). ■

El siguiente resultado nos da una condición necesaria para que el core de un juego sea no vacío. Es un tipo de superaditividad, pero no implica necesariamente que el juego sea superaditivo porque la condición sólo se aplica a las particiones de N .

Proposición 2.4 Si el core de un juego (N, v) no es vacío, $C(N, v) \neq \emptyset$, entonces $\sum_{i=1}^k v(P_i) \leq v(N)$, para toda partición $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ de N .

Demostración: Dado $x \in C(N, v)$ tenemos que $\sum_{i \in P_j} x_i \geq v(P_j)$ para todo $P_j \in \mathcal{P}$. Entonces $\sum_{j=1}^k v(P_j) \leq \sum_{j=1}^k \sum_{i \in P_j} x_i = \sum_{i \in N} x_i = v(N)$, que es la relación buscada. ■

Observación 2.5 La condición de la Proposición 2.4 no es suficiente, como se puede comprobar con el juego de dividir el dólar. Se observa fácilmente que este juego tiene core vacío y, sin embargo, se verifican las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} v(1, 2, 3) &\geq v(1, 2) + v(3) \\ &\geq v(2, 3) + v(1) \\ &\geq v(1, 3) + v(2) \\ &\geq v(1) + v(2) + v(3). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.6 Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y el juego definido como sigue:

$$\begin{aligned} v(1, 2, 3) &= 1 \\ v(1, 2) &= v(1, 3) = \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ v(S) &= 0 \text{ en otro caso.} \end{aligned}$$

Se puede comprobar que:

$$C(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N : x \geq 0_N, x_2 \leq 1 - \alpha, x_3 \leq 1 - \alpha, x(N) = 1\}.$$

Dependiendo del valor de α , tenemos que:

- Si $0 \leq \alpha \leq 0.5$, entonces el core coincide con

$$\text{conv}(\{(1, 0, 0), (\alpha, 0, 1 - \alpha), (\alpha, 1 - \alpha, 0), (0, \alpha, 1 - \alpha), (0, 1 - \alpha, \alpha)\}).$$

- Si $0.5 \leq \alpha \leq 1$, entonces el core coincide con

$$\text{conv}(\{(1, 0, 0), (\alpha, 0, 1 - \alpha), (\alpha, 1 - \alpha, 0), (2\alpha - 1, 1 - \alpha, 1 - \alpha)\}).$$

En la Figura 2.2 se han dibujado los cores correspondientes a $\alpha = 0.25$ y $\alpha = 0.75$.

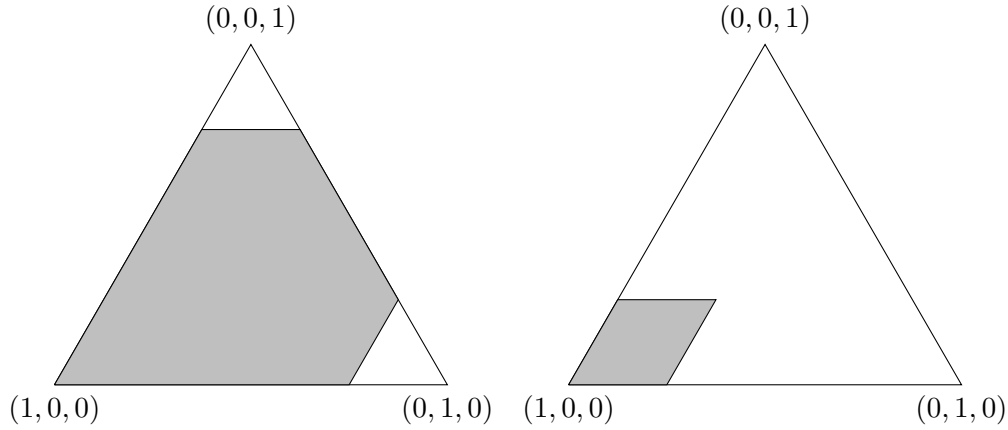


Figura 2.2: Izquierda: core con $\alpha = 0.25$. Derecha: core con $\alpha = 0.75$.

La dimensión del core puede ser $|N| - 1$ a lo sumo, dado que está contenido en el hiperplano $\sum_{i=1}^{|N|} x_i = v(N)$. Los cores “más completos”, técnicamente denominados por Shapley (1971), cores con estructura estrictamente completa, tienen dimensión máxima y, exactamente, $2^{|N|} - 2$ caras de dimensión $n - 2$: una por cada uno de los hiperplanos que lo definen. Los gráficos de la Figura 2.3 muestran cores que no tiene dimensión máxima, lo que se denomina ser “degenerados” (un único punto o un segmento en el caso de 3 jugadores; un punto, un segmento o un poliedro plano para juegos de 4 jugadores).

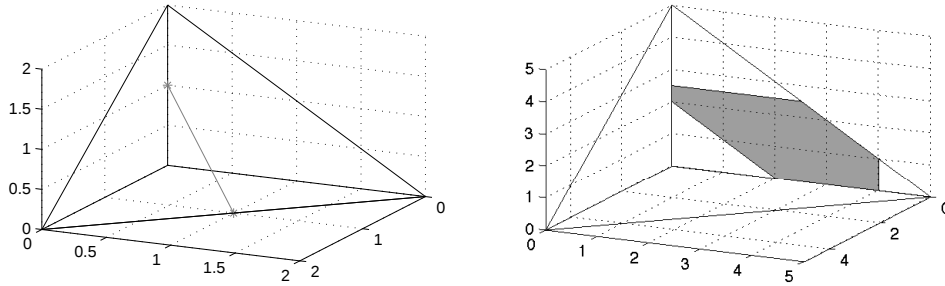


Figura 2.3: Cores degenerados de juegos de cuatro jugadores.

Proposición 2.7 Si dos juegos (N, v) y (N, w) son estratégicamente equivalentes, entonces $x \in C(N, v)$ si y solo si $kx + a \in C(N, w)$, siendo $k > 0$ y (N, a) el juego aditivo tales que $w = kv + a$.

Demostración: Sea $x \in C(N, v)$, demostramos que $kx + a \in C(N, w)$. Dado que $x(S) \geq v(S)$ para todo $S \subset N$ y $x(N) = v(N)$, tenemos que como $k > 0$, $kx(S) + a(S) \geq kv(S) + a(S) = w(S)$ para todo

$S \subset N$ y $kx(N) + a(N) = kv(N) + a(N) = w(N)$, con lo que $kC(N, v) + a \subset C(N, w)$. Ahora queda por demostrar que $C(N, w) \subset kC(N, v) + a$. Haciendo uso de que la relación de ser estratégicamente equivalente es simétrica el resultado está probado. El juego (N, w) es estratégicamente equivalente a (N, v) siendo $v = \frac{w}{k} - \frac{a}{k}$. Aplicando la primera parte de la demostración, tenemos que $\frac{1}{k}C(N, w) - \frac{a}{k} \subset C(N, v)$, o lo que es equivalente, $C(N, w) \subset kC(N, v) + a$. ■

Observación 2.8 El core de un juego de costes (N, c) se define como el conjunto

$$C^r(N, c) = \{x \in I^r(N, c) : x(S) \leq c(S), \forall S \subset N\}.$$

Se demuestra fácilmente que:

- $x \in C^r(N, c) \Leftrightarrow -x \in C(N, -c)$
- (N, c) es cóncavo $\Leftrightarrow (N, -c)$ es convexo.
- Si (N, v_c) es el juego de ahorros asociado al juego de costes (N, c) ,

$$x = (x_i)_{i \in N} \in C(N, v_c) \Leftrightarrow (c(i) - x_i)_{i \in N} \in C^r(N, c).$$

El siguiente resultado determina una clase de juegos que tienen core vacío: los esenciales de suma constante. A esta clase de juegos pertenece el juego del dólar.

Definición 2.9 Un juego (N, v) es de suma constante si $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$ para todo $S \subset N$.

En un juego de suma constante la utilidad de la gran coalición se reparte íntegramente entre la utilidad de una coalición cualquiera y la de su complementaria.

Proposición 2.10 Si (N, v) es un juego esencial no degenerado y de suma constante, entonces $C(N, v) = \emptyset$.

Demostración: Sea (N, v) un juego de suma constante y supongamos, por reducción al absurdo, que $x \in C(N, v)$. Entonces, para cada jugador $i \in N$,

$$\sum_{j \in N \setminus i} x_j \geq v(N \setminus i) = v(N) - v(i).$$

Además, dado que x es eficiente, $\sum_{j \in N \setminus i} x_j = v(N) - x_i$. Luego, $x_i \leq v(i)$. Al ser $x \in I(N, v)$, $x_i = v(i)$ para todo $i \in N$ y, por tanto, el juego es degenerado. ■

La siguiente proposición establece cotas para las asignaciones que pueden recibir los jugadores en el core. Además, en el caso de que el vector de cotas superiores sea eficiente, el core es unitario y proporciona a cada jugador su contribución a la gran coalición.

Proposición 2.11 Sea $(N, v) \in G^N$.

- a) Si $x \in C(N, v)$, entonces $v(i) \leq x_i \leq v(N) - v(N \setminus i)$ para cada $i \in N$.
- b) Supongamos que $C(N, v) \neq \emptyset$. Si $\sum_{i \in N} (v(N) - v(N \setminus i)) = v(N)$ entonces

$$C(N, v) = \{(v(N) - v(N \setminus i))_{i \in N}\}.$$

Demostración: a) Si $x \in C(N, v)$ entonces $x_i \geq v(i)$ para todo $i \in N$. Además, $v(N) = \sum_{i \in N} x_i = \sum_{j \in N \setminus i} x_j + x_i \geq v(N \setminus i) + x_i$ con lo que $x_i \leq v(N) - v(N \setminus i)$.
b) Inmediata por la definición de core y el apartado a). ■

Definición 2.12 Para cualquier $S \subset N$, definimos $\Pi^S = \{o_S : S \rightarrow \{1, \dots, |S|\} : o_S \text{ biyectiva}\}$ como el conjunto de ordenaciones de los jugadores de S .

Dado $S \subset N$, para cada $\pi_S \in \Pi^S$ e $i \in S$, $\pi_S(i)$ representa la posición del jugador i en el orden π_S . Escribiremos abreviadamente π en lugar de π_N .

Definición 2.13 Sea $\pi : N \rightarrow \{1, \dots, |N|\}$ una ordenación de los jugadores de N , es decir, $\pi \in \Pi^N$. Se define el reparto de contribuciones marginales asociado al orden π , $m^\pi(v) = (m_i^\pi(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$, como

$$m_i^\pi(v) = v(\text{Pre}^\pi(i) \cup i) - v(\text{Pre}^\pi(i))$$

para todo $i \in N$, donde $\text{Pre}^\pi(i) = \{j \in N : \pi(j) < \pi(i)\}$ es el conjunto de jugadores que preceden al jugador i en el orden π .

Proposición 2.14 Sea $(N, v) \in G^N$ y sea $\pi \in \Pi^N$ cualquier ordenación de los jugadores de N .

a) Si $m^\pi(v) \in C(N, v)$, entonces $m^\pi(v)$ es un punto extremo del core.

b) Si (N, v) es un juego convexo, entonces $m^\pi(v) \in C(N, v)$.

Demostración: a) Sea $N = \{i_1, \dots, i_n\}$ y sea $\pi \in \Pi^N$ definido por $\pi(i_l) = l$ para todo $l \in \{1, \dots, n\}$. Se verifican las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned} m_{i_1}^\pi(v) &= v(i_1) \\ m_{i_1}^\pi(v) + m_{i_2}^\pi(v) &= v(i_1) + v(i_1, i_2) - v(i_1) = v(i_1, i_2) \\ &\vdots \\ \sum_{l=1}^n m_{i_l}^\pi(v) &= v(i_1, \dots, i_n). \end{aligned}$$

Es decir, todo vector de contribuciones marginales satura n igualdades linealmente independientes del core y, por tanto, si pertenece al core tiene que ser un punto extremo.

b) Comprobemos que todo vector de contribuciones marginales está en el core del juego o, equivalentemente, que para cada $\pi \in \Pi^N$ y $S \subset N$, $\sum_{i \in S} m_i^\pi(v) \geq v(S)$. Consideremos $\pi \in \Pi^N$. Para cada $S \subset N$, sea $\pi_S = \{i_1, \dots, i_s\} \in \Pi^S$ la ordenación de los jugadores de S inducida en S , es decir, la obtenida a partir de π eliminando de ésta los jugadores de $N \setminus S$.

$$\begin{aligned} m_{i_1}^\pi(v) &\geq v(i_1) \\ m_{i_2}^\pi(v) &\geq v(i_1, i_2) - v(i_1) \\ &\vdots \\ m_{i_s}^\pi(v) &\geq v(S) - v(i_1, \dots, i_{s-1}). \end{aligned}$$

Las desigualdades anteriores son ciertas porque el juego es convexo. Efectuando las correspondientes sumas obtenemos el resultado buscado. ■

A continuación definimos los juegos exactos. Geométricamente, un juego es exacto si todos los hiperplanos $x(S) = v(S)$ con $S \subset N$, tienen intersección no vacía con el core del juego.

Definición 2.15 Diremos que $(N, v) \in G^N$ es exacto si para cada $S \subset N$, existe $x \in C(N, v)$ tal que $x(S) = v(S)$.

Sea (N, v) un juego cuyo core no es vacío. Se puede demostrar que hay un único juego exacto $(N, \hat{v})$ tal que $C(N, \hat{v}) = C(N, v)$. Este juego se conoce como la envoltura exacta de (N, v) . Su definición es la siguiente:

$$\hat{v}(S) = \min_{x \in C(N, v)} x(S)$$

para cada $S \subset N$.

Una propiedad de los juegos exactos es que si dos juegos de esta clase tienen el mismo core entonces son el mismo juego.

Los juegos exactos también son llamados juegos con estructura completa (Shapley (1971)). Para esta clase de juegos la intersección del core con cualquiera de los hiperplanos que lo definen no es vacía (aunque no tenga necesariamente dimensión $|N| - 2$). En el citado trabajo de Shapley se analiza la configuración del core, de sus caras y del número de vértices.

Todos los juegos convexos son exactos. Si un juego es estrictamente convexo entonces todos los vectores de contribuciones marginales son distintos y su core se dice que tiene estructura estrictamente completa.

Con el objeto de presentar el teorema que caracteriza los juegos cuyo core no es vacío, introducimos el concepto de familia equilibrada.

Definición 2.16 Una familia $\mathcal{F}$ de coaliciones no vacías de N se dice equilibrada si existen unos pesos positivos $\{\delta_S\}_{S \in \mathcal{F}}$, $\delta_S > 0$ para todo $S \in \mathcal{F}$, tales que $\sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S e^S = e^N$, siendo $e^S \in \mathbb{R}^N$ el vector característico de S , es decir, $e_i^S = 1$ si $i \in S$ y $e_i^S = 0$ si $i \notin S$ o, equivalentemente, $\sum_{S \in \mathcal{F}: i \in S} \delta_S = 1$ para todo $i \in N$.

Ejemplo 2.17 Estos son algunos ejemplos de familias equilibradas:

- Cualquier partición de N , $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$, es una familia equilibrada con $\delta_S = 1$ para todo $S \in \mathcal{P}$.
- Sea $N = \{1, 2, 3\}$. Entonces, $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ es una familia equilibrada con $\delta_S = \frac{1}{2}$ para todo $S \in \mathcal{F}$.

Observación 2.18 Una familia $\mathcal{F}'$ de coaliciones no vacías de N se dice equilibrada minimal si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ equilibrada implica $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. Las familias equilibradas minimales tienen un único vector de pesos asociado. Dada $\mathcal{F}$ una familia equilibrada minimal, denotamos por $\{\gamma_T^{\mathcal{F}}\}_{T \in \mathcal{F}}$ el vector de pesos. Se verifica que para cada $\mathcal{F}$ familia equilibrada no minimal con pesos asociados δ , existen $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ familias equilibradas minimales con $r \geq 2$ y $t_1, \dots, t_r \in (0, 1)$ con $\sum_{l=1}^r t_l = 1$ tales que $\mathcal{F} = \cup_{l=1}^r \mathcal{F}_l$ y $\delta_R = \sum_{l \in \{1, \dots, r\}: R \ni l} t_l \gamma_R^{\mathcal{F}_l}$.

Ejemplo 2.19 Sea $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces:

- La familia $\mathcal{F}_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{4\}\}$ es equilibrada. Para ello se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \delta_{\{1,2\}} + \delta_{\{1,3,4\}} = 1 & i = 1 \\ \delta_{\{1,2\}} + \delta_{\{2,3\}} = 1 & i = 2 \\ \delta_{\{2,3\}} + \delta_{\{1,3,4\}} = 1 & i = 3 \\ \delta_{\{1,3,4\}} + \delta_{\{4\}} = 1 & i = 4. \end{array}$$

Resolvemos el sistema asociado:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1,2} \\ \delta_{2,3} \\ \delta_{1,3,4} \\ \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ que nos da la solución}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_{1,2} \\ \delta_{2,3} \\ \delta_{1,3,4} \\ \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

- La familia $\mathcal{F}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$ no es equilibrada. Si lo fuese los pesos deberían cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \delta_1 + \delta_{1,3,4} &= 1 & i = 1 \\ \delta_2 &= 1 & i = 2 \\ \delta_3 + \delta_{3,4} + \delta_{1,3,4} &= 1 & i = 3 \\ \delta_{3,4} + \delta_{1,3,4} &= 1 & i = 4. \end{aligned}$$

De la tercera y cuarta condición obtenemos que $\delta_3 = 0$, con lo que no puede ser una familia equilibrada.

- La familia $\mathcal{F}_3 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3, 4\}\}$ es equilibrada pero no es minimal. El sistema correspondiente tiene más variables que restricciones y tiene infinitas soluciones, por ejemplo $\delta_4 = 0.4, \delta_{2,3,4} = 0.4, \delta_{1,2} = 0.6, \delta_{1,3} = 0.2, \delta_{1,4} = 0.2, \delta_3 = 0.4$.

$$\begin{aligned} \delta_{1,2} + \delta_{1,3} + \delta_{1,4} &= 1 & i = 1 \\ \delta_{1,2} + \delta_{2,3,4} &= 1 & i = 2 \\ \delta_{1,3} + \delta_3 + \delta_{2,3,4} &= 1 & i = 3 \\ \delta_{1,4} + \delta_4 + \delta_{2,3,4} &= 1 & i = 4. \end{aligned}$$

La subfamilia $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ es una partición y, por tanto, es equilibrada, con lo que la familia inicial no es minimal.

Definición 2.20 Un juego (N, v) se dice equilibrado si para toda familia $\mathcal{F}$ equilibrada, con pesos asociados $\{\delta_S\}_{S \in \mathcal{F}}$, se verifica que

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S v(S) \leq v(N).$$

En la definición anterior, $\sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S v(S)$ representa el valor esperado de v asociado a la distribución de probabilidad $\{\delta_S\}_{S \in \mathcal{F}}$, dado que para cada $i \in N$, $\sum_{S \in \mathcal{F}, i \in S} \delta_S = 1$.

El teorema de Bondareva-Shapley (Bondareva (1963), Shapley (1967)) establece que los juegos equilibrados coinciden con aquellos cuyo core no es vacío. De hecho, demostraron que es suficiente con verificar las familias equilibradas minimales.

Teorema 2.21 El core del juego (N, v) no es vacío si y solo si el juego es equilibrado.

Demostración: La condición necesaria es consecuencia inmediata de la definición de juego equilibrado. Sea $\mathcal{F}$ una familia equilibrada. Por hipótesis, sabemos que existe $x \in C(N, v)$. Entonces

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S v(S) \leq \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S \sum_{i \in S} x_i = \sum_{S \in \mathcal{F}} \sum_{i \in S} \delta_S x_i = \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{F}: i \in S} \delta_S x_i = \sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

y, por tanto, (N, v) es equilibrado.

Probaremos la condición suficiente utilizando el teorema de dualidad de programación lineal. Consideremos el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{i \in N} x_i \\ \text{sueto a :} \quad & \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \text{ para todo } S \subset N, S \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (P)$$

Fácilmente se comprueba que $C(N, v) \neq \emptyset$ si y solo si (P) tiene solución y su valor es $v(N)$.

Sea $x = (x_i)_{i \in N}$ una solución factible de (P) , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &\geq v(S), \text{ para todo } \emptyset \neq S \subset N, S \neq N \\ \sum_{i \in N} x_i &\geq v(N). \end{aligned}$$

Además, todo elemento $x \in C(N, v)$ verifica que $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ y $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. Construimos el dual del problema primal (P) :

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S v(S) \\ \text{sueto a:} \quad & \begin{cases} \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S e^S = e^N \\ \delta_S \geq 0, \text{ para todo } S \subset N, S \neq \emptyset. \end{cases} \end{aligned} \quad (D)$$

Comprobamos que (D) es resoluble y su valor es $v(N)$ si y solo si (N, v) es equilibrado.

El conjunto factible de (D) es cerrado, acotado y no vacío: $\delta_S = 0$ si $S \neq N$ y $\delta_N = 1$ es una solución factible de (D) , para la cual $\sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S v(S) = v(N)$. Por tanto, $\text{máx} \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S v(S) \geq v(N)$.

Así pues, (D) tiene solución y su valor es $v(N)$ si y solo si para todo δ , con $\delta_S \geq 0$ y $\sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S e^S = e^N$, se cumple que $\sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S v(S) \leq v(N)$. Esta última condición es equivalente a decir que para toda familia equilibrada $\mathcal{F}$, $\sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S v(S) \leq v(N)$. Aplicando ahora el Teorema 9.4 (ver el Apéndice) queda demostrada la suficiencia. ■

Si el carácter no vacío del core de un juego se transmite a todos sus subjuegos se dice que el juego es totalmente equilibrado.

Definición 2.22 *Un juego (N, v) se dice totalmente equilibrado si todo subjuego (R, v_R) , con $R \subset N$, $R \neq \emptyset$, es equilibrado.*

Ejemplo 2.23 *Consideremos el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y función característica:*

$$\begin{aligned} v(1, 2) &= v(1, 2, 3) = v(2, 3) = v(2, 3, 4) = v(3, 4) = v(1, 2, 4) = v(1, 3, 4) = \frac{1}{2} \\ v(N) &= 1, \quad v(S) = 0 \text{ en otro caso.} \end{aligned}$$

Obsérvese que $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \in C(N, v)$ y, por tanto, el juego (N, v) es equilibrado. Además, $(0, \frac{1}{2}, 0)$ es un elemento del core de los subjuegos de las coaliciones $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ y $\{2, 3, 4\}$. También es sencillo comprobar que todos sus subjuegos de dos jugadores tienen core no vacío. Luego, el juego es totalmente equilibrado.

No todos los juegos equilibrados son totalmente equilibrados como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.24 Consideremos el juego de cuatro jugadores $N = \{1, 2, 3, 4\}$ con función característica:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| \in \{0, 1\} \text{ ó si } S \in \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\} \\ 1 & \text{si } |S| = 3 \text{ ó si } S \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\} \\ 2 & \text{si } |S| = 4. \end{cases}$$

Es sencillo comprobar que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in C(N, v)$, luego el juego original es equilibrado. Pero el subjuego (T, v_T) con $T = \{1, 2, 3\}$ no es equilibrado (exactamente se corresponde con el juego del dólar). En consecuencia, el juego (N, v) no es totalmente equilibrado.

Proposición 2.25 Todo juego totalmente equilibrado es superaditivo.

Demostración: Sean $S, T \subset N$ tales que $S \cap T = \emptyset$. Dado que el subjuego de la coalición $S \cup T$ es equilibrado, existe $x \in \mathbb{R}^{|S \cup T|}$ tal que $x(S) \geq v(S)$, $x(T) \geq v(T)$ y $x(S \cup T) = v(S \cup T)$. Por tanto,

$$v(S) + v(T) \leq x(S) + x(T) = x(S \cup T) = v(S \cup T)$$

como queríamos demostrar. ■

Trataremos ahora con una interesante clase de juegos, contenida en la de los totalmente equilibrados, definida a partir de una propiedad que conjuga monotonía y obtención de repartos eficientes en subcoaliciones. Podemos pensar para motivarla que los jugadores pueden no alcanzar la eficiencia y que podría interesar la cooperación parcial, con lo que deberíamos de dar repartos que no sólo distribuyan el valor de la gran coalición sino también el valor de cada coalición S . Una vez que una coalición S decide un reparto de $v(S)$, ningún jugador debe tener tentaciones de formar una coalición más pequeña. Formalmente, la definición es la siguiente:

Definición 2.26 (Sprumont (1990)) Sea $(N, v) \in G^N$. Una distribución monótona respecto a la población (“population monotonic allocation scheme”), abreviadamente PMAS, consiste en una distribución

$$(x_{i,S})_{\emptyset \neq S \subset N, i \in S}$$

verificando:

1. Para todo $S \subset N$, $\sum_{i \in S} x_{i,S} = v(S)$ (eficiencia relativa a S).
2. Para todo $S \subset T$ y todo $i \in S$, $x_{i,S} \leq x_{i,T}$ (monotonía).

En general, los juegos no tienen por qué tener estas distribuciones. A continuación demostramos que los juegos que las poseen forman una subclase de los juegos totalmente equilibrados.

Proposición 2.27 Si un juego coalicional tiene PMAS, entonces es totalmente equilibrado.

Demostración: De la propia definición deducimos que si x es una PMAS de un juego v , entonces $x_S = (x_{i,S})_{i \in S} \in C(S, v_S)$ para todo $S \subset N$, siendo (S, v_S) el subjuego restringido a S . ■

Observación 2.28 Si $|N| \leq 3$ se verifica que tener PMAS y ser totalmente equilibrado son condiciones equivalentes. Sin embargo, para $|N| \geq 4$, esto ya no es cierto como muestra el Ejemplo 2.29 presentado a continuación. Se puede demostrar fácilmente que los juegos convexos siempre tienen PMAS y que, en particular, el valor de Shapley extendido (valor de Shapley en los subjuegos), es una PMAS. En todo caso, también hay juegos que no son convexos y tienen PMAS, por ejemplo los juegos monótonos que poseen un jugador veto. Sprumont (1990) demuestra que un juego tiene PMAS si y solo si es una combinación lineal positiva de juegos monótonos simples con al menos un jugador veto.

Ejemplo 2.29 Consideramos el juego del guante (Ejemplo 1.17) en el que los jugadores 1 y 2 tienen cada uno un guante izquierdo y el 3 y el 4 tienen cada uno un guante derecho. Un par de guantes de pueden vender en el mercado a un precio de 1. Comprobemos que es un juego totalmente equilibrado que no tiene PMAS.

Sea $R = \{1, 2\}$ y $L = \{3, 4\}$. El core del juego $v = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 2]$ es el segmento que une los puntos $(0, 0, 1, 1)$ y $(1, 1, 0, 0)$. Todos los subjuegos de tres jugadores son juegos del guante en los que el core les proporciona toda la utilidad al jugador que tiene el guante único. Además, todos los subjuegos de dos jugadores tienen trivialmente su core no vacío. Por tanto, el juego es totalmente equilibrado. Comprobemos que no tiene PMAS. Si x fuese un PMAS, entonces debería verificar, como consecuencia de la monotonía y de la eficiencia relativa a S , que:

$$\begin{aligned} x_{1,N} &\geq x_{1,\{1,3,4\}} = 1 \\ x_{2,N} &\geq x_{2,\{2,3,4\}} = 1 \\ x_{3,N} &\geq x_{3,\{1,2,3\}} = 1 \\ x_{4,N} &\geq x_{4,\{1,2,4\}} = 1 \end{aligned}$$

por lo que $\sum_{i \in N} x_{i,N} \geq 4$ que está en contradicción con la eficiencia $\sum_{i \in N} x_{i,N} = 2$.

Una forma de generalizar el concepto de core es mediante los ε -cores. Se trata de seleccionar preimputaciones en las que ninguna coalición tiene incentivos a desviarse cuando se le impone un coste de ε . Cuando $\varepsilon = 0$, tenemos el concepto de core clásico y a medida que ε aumenta el ε -core también se hace mayor.

Definición 2.30 Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, definimos los conjuntos,

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(N, v) &= \{x \in \mathbb{R}^N : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S) - \varepsilon \text{ si } S \in 2^N \setminus \{\emptyset, N\}\} \\ \widehat{C}_\varepsilon(N, v) &= \{x \in I(v) : x(S) \geq v(S) - \varepsilon \text{ si } 1 < |S| < n\}. \end{aligned}$$

La definición del segundo conjunto difiere de la definición del primero en que en el segundo conjunto se seleccionan imputaciones, dado que no se resta ε en las coaliciones individuales. No es difícil comprobar que se cumplen las siguientes relaciones:

1. $C_0(N, v) = \widehat{C}_0(N, v) = C(N, v)$.
2. Si $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, entonces $C_{\varepsilon_2}(N, v) \subset C_{\varepsilon_1}(N, v)$ y $\widehat{C}_{\varepsilon_2}(N, v) \subset \widehat{C}_{\varepsilon_1}(N, v)$.

Si ε es suficientemente grande estos conjuntos son, para $|N| > 2$, poliedros con el número máximo de caras $(2^{|N|} - 2)$.

Ejemplo 2.31 En la Figura 2.4 se dibuja el core del juego $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = 0.5$ y $v(1, 2, 3) = 1$. El core se corresponde con el triángulo invertido cuyos vértices están sobre los lados del conjunto de imputaciones. Además, se dibujan $\widehat{C}_\varepsilon(N, v)$ con $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = -0.1$. $\widehat{C}_{0.1}(N, v)$ se corresponde con el hexágono y $\widehat{C}_{-0.1}(N, v)$ se corresponde con el triángulo interior.

Ejemplo 2.32 En la Figura 2.5 se representa el core del juego $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(1, 2) = 2$, $v(1, 3) = 3$, $v(2, 3) = 7$ y $v(1, 2, 3) = 9$. También se presenta el ε -core para distintos valores de ε . Observamos que si $\varepsilon = -1$ el correspondiente $C_\varepsilon(N, v)$ es degenerado y, por tanto, tomando un valor de ε menor, el correspondiente $C_\varepsilon(N, v)$ sería vacío.

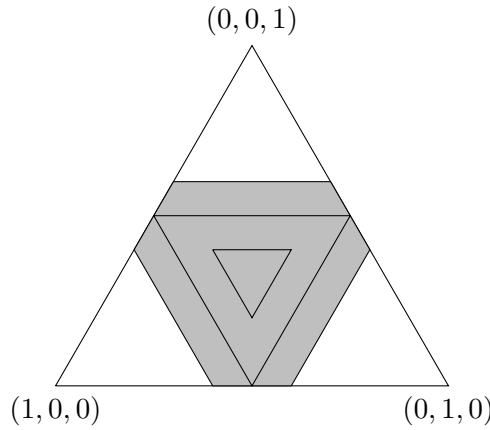


Figura 2.4: $\hat{C}_\varepsilon(N, v)$ para $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon = -0.1$ del juego del Ejemplo 2.31.

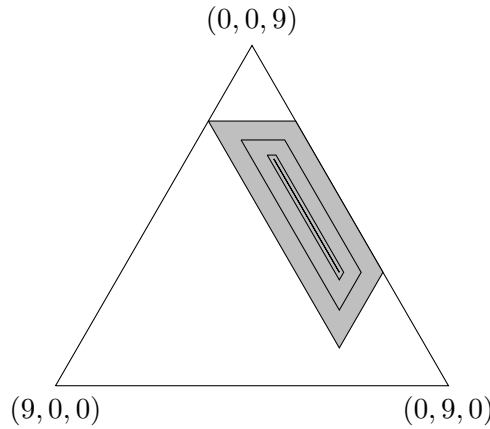


Figura 2.5: $C_\varepsilon(N, v)$ para $\varepsilon = 0$, -0.5 , -0.9 y -1 del Ejemplo 2.32.

Analizando los ejemplos anteriores es fácil comprender el proceso inverso, es decir que si un juego no es equilibrado, siempre existirá un ε para el que el correspondiente ε -core sea no vacío. De igual forma, si un juego es equilibrado podremos obtener el menor ε -core que sea no vacío.

Definición 2.33 Dado un juego (N, v) , se define el menor core (*least core*) como el conjunto

$$LC(N, v) = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}: C_\varepsilon(N, v) \neq \emptyset} C_\varepsilon(N, v).$$

Equivalentemente, el least core coincide con

$$LC(N, v) = C_{\varepsilon_0}(N, v), \text{ con } \varepsilon_0 = \min_{x \in I^*(N, v)} \max_{\emptyset \neq S \subset N} (v(S) - x(S)).$$

Si el core de un juego no es vacío, el menor core (*least core*) ocupa una posición central en el core (que puede ser un punto o no). Todos los ε -cores no vacíos, con excepción del least core, tienen dimensión $|N| - 1$. La dimensión del least core es menor o igual que $|N| - 2$.

Ejemplo 2.34 Calculamos el least core del juego del Ejemplo 2.32. Consideremos el juego $v_\varepsilon = [0 - \varepsilon, 0 - \varepsilon, 0 - \varepsilon, 2 - \varepsilon, 3 - \varepsilon, 7 - \varepsilon, 9]$ y calculemos su core. De las desigualdades $x_1 \geq -\varepsilon$ y $x_2 + x_3 \geq 7 - \varepsilon$ obtenemos $-\varepsilon \leq x_1 \leq 9 - 7 + \varepsilon$. De las desigualdades $x_2 \geq -\varepsilon$ y $x_1 + x_3 \geq 3 - \varepsilon$

obtenemos $-\varepsilon \leq x_2 \leq 9 - 3 + \varepsilon$. De las desigualdades $x_3 \geq -\varepsilon$ y $x_1 + x_2 \geq 2 - \varepsilon$ obtenemos $-\varepsilon \leq x_3 \leq 9 - 2 + \varepsilon$.

Por tanto, podemos calcular qué hiperplanos colapsan antes cuando se desplazan a la misma velocidad. Igualamos y obtendríamos $\varepsilon = -1$ con la coalición (1) y la (2,3); $\varepsilon = -3$ con la coalición (2) y la (1,3); y $\varepsilon = -3.5$ con la coalición (3) y la (1,2). De esta forma vemos que colapsará primero la (1) con la (2,3) y, por tanto:

$$LC(N, v) = C_{-1}(N, v) = \text{conv}\{(1, 5, 3), (1, 2, 6)\}.$$

2.1.1. El core para estructuras coalicionales generales

En esta parte se proporcionan algunos resultados sobre el core de un juego cuando el conjunto de jugadores está dividido formando una partición y no se forma la coalición total.

Definición 2.35 Sea $\mathcal{B}$ una estructura coalicional de jugadores N , es decir, una partición del conjunto N . El core de un juego coalicional con estructura coalicional $\mathcal{B}$, es el conjunto:

$$C(N, v, \mathcal{B}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \begin{array}{ll} x(B) = v(B), & B \in \mathcal{B} \\ x(S) \geq v(S), & S \subset N \end{array} \right\}.$$

Definición 2.36 Sea $(N, v) \in G^N$, la cobertura superaditiva de (N, v) es el juego (N, v^*) definido mediante:

$$v^*(S) = \max_{\mathcal{B} \in \mathcal{T}(S)} \sum_{T \in \mathcal{B}} v(T)$$

siendo $\mathcal{T}(S)$ el conjunto de todas las particiones de S .

Fácilmente se puede comprobar que $v(S) \leq v^*(S)$ y se da la igualdad si el juego inicial es superaditivo.

El siguiente resultado indica que para calcular el core de un juego con estructura coalicional (en particular cuando $\mathcal{B} = \{N\}$) es suficiente calcular el core de la cobertura superaditiva e intersecarla con el conjunto de imputaciones de la estructura coalicional. De este resultado deducimos que el core de un juego coincide con el core de su cobertura superaditiva y, por tanto, es suficiente estudiar los cores de los juegos superaditivos.

Teorema 2.37 Sea $(N, v, \mathcal{B})$ un juego con estructura coalicional $\mathcal{B}$, entonces

$$C(N, v, \mathcal{B}) = C(N, v^*) \cap I(N, v, \mathcal{B}).$$

Demostración: Demostramos primero que $C(N, v, \mathcal{B}) \supset C(N, v^*) \cap I(N, v, \mathcal{B})$. Sea $x \in C(N, v^*) \cap I(N, v, \mathcal{B})$. Necesitamos probar que $x(S) \geq v(S)$ para todo $S \subset N$. Dado que $x \in C(N, v^*)$, entonces,

$$x(S) \geq v^*(S) \geq v(S).$$

Probamos a continuación que $C(N, v, \mathcal{B}) \subset C(N, v^*) \cap I(N, v, \mathcal{B})$. Sea $x \in C(N, v, \mathcal{B})$, entonces claramente $x \in I(N, v, \mathcal{B})$. Demostramos que $x \in C(N, v^*)$. Sea $S \subset N$. Sabemos que existe una partición $\mathcal{B} \in \mathcal{T}(S)$ tal que $v^*(S) = \sum_{T \in \mathcal{B}} v(T)$. Dado que $x \in C(N, v)$, $x(T) \geq v(T)$ para toda coalición $T \in \mathcal{B}$ y, por tanto,

$$x(S) = \sum_{T \in \mathcal{B}} x(T) \geq \sum_{T \in \mathcal{B}} v(T) = v^*(S).$$

De esta forma, hemos probado que $x(S) \geq v^*(S)$ para todo $S \subset N$. Tomando $S = N$, deducimos que $x(N) \geq v^*(N)$. Además, $x(N) \leq v^*(N)$, con lo que $x(N) = v^*(N)$. ■

2.2. El D-core

A continuación definimos el concepto de dominación entre imputaciones. Una imputación domina a otra a través de una coalición S si le asigna a cada jugador de S un mejor pago, en sentido estricto, manteniendo la factibilidad, es decir, no puede repartir más de lo que la coalición S puede garantizarse por sí misma.

Definición 2.38 Sean $x, y \in I(N, v)$ y $S \subset N$.

- Decimos que x domina a y a través de S , y escribiremos $x \underset{S}{\text{dom}} y$, si

$$x_i > y_i \text{ para todo } i \in S \text{ y } \sum_{i \in S} x_i \leq v(S).$$

- Decimos que x domina a y , y escribiremos $x \text{ dom } y$, si existe $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, tal que $x \underset{S}{\text{dom}} y$.
- Las imputaciones dominadas a través de S son aquellas que son dominadas por alguna imputación a través de la coalición S , esto es,

$$\text{dom}(S) = \left\{ x \in I(N, v) : y \underset{S}{\text{dom}} x \text{ para algún } y \in I(N, v) \right\}.$$

El D-core selecciona aquellas imputaciones que no son dominadas por ninguna otra.

Definición 2.39 (Gillies (1953, 1959)) El D-core, o “dominance core”, es el conjunto

$$DC(N, v) = \{x \in I(N, v) : \nexists y \in I(N, v) \text{ tal que } y \text{ dom } x\}.$$

O, equivalentemente,

$$DC(N, v) = I(N, v) \setminus \bigcup_{S \subset N \setminus \{\emptyset\}} \text{dom}(S).$$

Ejemplo 2.40 Consideramos las siguientes imputaciones así como las correspondientes relaciones de dominación en el juego del dólar (Ejemplo 1.15):

$$\begin{array}{ccc} x = (0.5, 0.5, 0) & y = (0, 0.6, 0.4) & z = (0.3, 0, 0.7) \\ x \underset{S=\{1,2\}}{\text{dom}} z & z \underset{S=\{1,3\}}{\text{dom}} y & y \underset{S=\{2,3\}}{\text{dom}} x \end{array}$$

A la vista de este ejemplo debemos concluir que la relación de dominación no es transitiva. ¿Puede ocurrir que existan coaliciones S y T tales que $x \underset{S}{\text{dom}} y$ y que $y \underset{T}{\text{dom}} x$? Para responder a esta pregunta elegimos cualquier juego de 4 jugadores tal que $v(i) = 0$ para todo i , $v(1, 2) = v(3, 4) = v(1, 2, 3, 4) = 2$. Consideremos las imputaciones $x = (1, 1, 0, 0)$ e $y = (0, 0, 1, 1)$ y las coaliciones $S = \{1, 2\}$ y $T = \{3, 4\}$. Es claro que $x \underset{S}{\text{dom}} y$ y que $y \underset{T}{\text{dom}} x$, con lo que la respuesta a la pregunta planteada es afirmativa.

Los siguientes ejemplos muestran que hay juegos que tienen core vacío cuyo D-core no lo es. En el primero, el D-core es unitario mientras que en el segundo es un conjunto infinito.

Ejemplo 2.41 Consideremos el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica:

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2, 3) = v(N) = 1 \\ v(S) &= 0, \text{ para el resto de coaliciones.} \end{aligned}$$

Fácilmente comprobamos que $I(N, v) = \{(1, 0, 0)\}$ y que $C(N, v) = \emptyset$. Dado que sólo hay una imputación, es la única que selecciona el D-core, puesto que no puede ser dominada por ninguna otra, es decir, $DC(N, v) = \{(1, 0, 0)\}$.

Ejemplo 2.42 Consideremos el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica:

$$\begin{aligned} v(N) &= 1, \quad v(1, 2) = 2 \\ v(S) &= 0, \text{ para el resto de coaliciones.} \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.4 podemos concluir que el core es vacío. Por otra parte,

$$DC(N, v) = \{x \in I(N, v) : x_3 = 0\} = \{(x_1, 1 - x_1, 0) : 0 \leq x_1 \leq 1\}.$$

Consideramos $A = \{(x_1, 1 - x_1, 0) : 0 \leq x_1 \leq 1\}$. Observamos que dadas dos imputaciones x e y pertenecientes a A es imposible que una domine a la otra a través de la coalición $\{1, 2\}$. Además, dado que en las restantes coaliciones la utilidad es 0, tampoco se puede dar una relación de dominación. Para concluir, basta considerar que cualquier imputación con $x_3 > 0$ está dominada por alguna imputación de A a través de la coalición $\{1, 2\}$.

El siguiente teorema prueba que el core siempre está contenido en el D-core, y que para la clase de los juegos superaditivos ambos conceptos coinciden.

Teorema 2.43 Para cualquier juego $(N, v) \in G^N$ se tiene que:

- a) $C(N, v) \subset DC(N, v)$.
- b) Si (N, v) es superaditivo, entonces $DC(N, v) = C(N, v)$.

Demostración: Sean $(N, v) \in G^N$ y $x \in I(N, v)$ tal que $x \notin DC(N, v)$. Veamos que $x \notin C(N, v)$. Sabemos que existen $y \in I(N, v)$ y $\emptyset \neq S \subset N$ tales que $y \underset{S}{\text{dom}} x$, es decir,

$$v(S) \geq y(S) > x(S).$$

Por tanto, $x \notin C(N, v)$.

Supongamos ahora que el juego es superaditivo y sea $x \in I(N, v)$ tal que $x \notin C(N, v)$. Podemos afirmar que existe $\emptyset \neq S \subsetneq N$ tal que $x(S) < v(S)$. Para demostrar que $x \notin DC(N, v)$ construimos la siguiente asignación $y = (y_i)_{i \in N}$

$$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{v(S) - x(S)}{|S|} & \text{si } i \in S \\ v(i) + \frac{v(N) - v(S) - \sum_{j \in N \setminus S} v(j)}{|N \setminus S|} & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

Veamos que $y \in I(N, v)$ y que $y \underset{S}{\text{dom}} x$. Sabemos que $v(N) - v(S) - \sum_{j \in N \setminus S} v(j) > 0$. Por lo que $y \in I(N, v)$. Además, para todo $i \in S$ se cumple que $y_i > x_i$ y que $y(S) = v(S)$. Luego, $y \underset{S}{\text{dom}} x$. En consecuencia, si el juego es superaditivo entonces $DC(N, v) = C(N, v)$. ■

Observación 2.44 Dado que el juego del dólar (Ejemplo 1.15) y el juego del guante (Ejemplo 1.17) son superaditivos, concluimos que, para ambos, su D-core coincide con su core.

2.3. Los conjuntos estables

Los conjuntos estables, *stable sets*, o soluciones de von Neumann-Morgenstern (von Neumann y Morgenstern (1944)) seleccionan subconjuntos del conjunto de imputaciones en base a criterios de dominación. Concretamente, imponen una estabilidad interna que indica que ninguna imputación del conjunto es preferida por otra del mismo conjunto, y una estabilidad externa que garantiza que cualquier imputación no seleccionada es dominada por una del propio conjunto y, por tanto, hay una del conjunto que es preferida por alguna coalición.

Definición 2.45 Dado un juego (N, v) diremos que el conjunto $M \subset I(N, v)$ es estable si cumple las siguientes condiciones:

1. $M \cap \text{dom}(M) = \emptyset$ (Estabilidad interna).
2. $I(N, v) \setminus M \subset \text{dom}(M)$ (Estabilidad externa).

Equivalentemente, podemos decir que el conjunto M es estable si y solo si $M \cap \text{dom}(M) = \emptyset$ y $M \cup \text{dom}(M) = I(N, v)$.

La siguiente proposición indica que las asignaciones del core siempre están contenidas en cualquier conjunto estable. Además, cuando el core es un conjunto estable entonces es el único conjunto estable que existe.

Proposición 2.46 Sea M un conjunto estable para el juego (N, v) . Se verifica que:

- a) $C(N, v) \subset M$.
- b) Si $C(N, v)$ es un conjunto estable, entonces $M = C(N, v)$.

Demostración: a) Sea (N, v) un juego arbitrario. Supongamos que existe $x \in C(N, v) \setminus M$. Sabemos que M es un conjunto estable, por lo que existen $y \in M$ y $S \subset N$ tales que $y \text{ dom}_S x$, es decir, $y_i > x_i$ para todo $i \in S$ y $\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$. Así pues, $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$, lo que supone una contradicción con $x \in C(N, v)$.

b) Ahora, supongamos que el core del juego (N, v) es un conjunto estable. Por a) sabemos que $C(N, v) \subset M$. Sea $x \in M \setminus C(N, v)$. Dado que $C(N, v)$ es estable, existe $y \in C(N, v)$ tal que $y \text{ dom } x$. Ello implica la existencia de dos imputaciones x e y , ambas en M , entre las que hay una relación de dominación. Por tanto, obtenemos una contradicción con la estabilidad interna de M . ■

Ejemplo 2.47 En el juego del dólar (Ejemplo 1.15), el conjunto $M = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$ no es un conjunto estable. Se verifica trivialmente la estabilidad interna porque sólo hay una imputación que no puede dominarse a sí misma; pero no verifica la estabilidad externa: consideremos la imputación $z = (0.5, 0.5, 0)$, claramente el reparto igualitario no domina a z a través de ninguna coalición.

Ejemplo 2.48 Consideremos el juego del dólar (Ejemplo 1.15). Veamos que el conjunto

$$M = \{(0, 0.5, 0.5), (0.5, 0, 0.5), (0.5, 0.5, 0)\}$$

es estable.

1. M es estable internamente. Fácilmente se comprueba que no es posible que una imputación de M domine a otra. Por ejemplo, ¿se cumple que $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ dom}_S (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$? La única posibilidad sería para $S = \{2\}$, pero esto es imposible dado que en el juego del dólar $v(2) = 0$.

2. M es estable externamente. Sea $y \in I(N, v) \setminus M$, entonces existen $i, j \in N$, $i \neq j$, tales que $y_i < \frac{1}{2}$ e $y_j < \frac{1}{2}$. Supongamos $i = 1$, $j = 2$. Es claro que la imputación $x = (0.5, 0.5, 0)$ pertenece a M y $x \underset{S=\{1,2\}}{\text{dom}} y$.

La Figura 2.6 representa el conjunto de imputaciones de este juego. Los vértices del triángulo invertido son las tres imputaciones de M , el triángulo interior (en gris, zona D) está formado por las imputaciones dominadas por todos los elementos de M , el triángulo C son imputaciones dominadas por $(0.5, 0.5, 0)$, el triángulo A son las imputaciones dominadas por $(0, 0.5, 0.5)$ y, finalmente, el triángulo B son imputaciones dominadas por $(0.5, 0, 0.5)$.

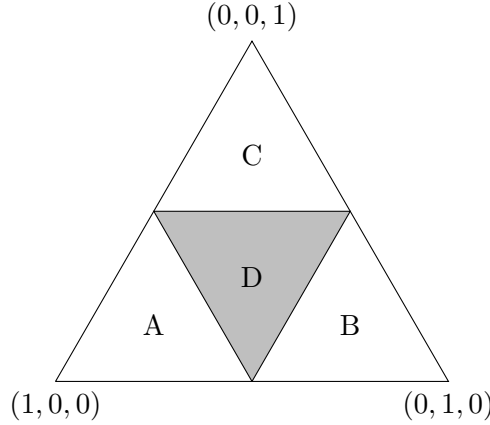


Figura 2.6: Conjuntos dominados.

El siguiente ejemplo muestra que, en general, no hay un único conjunto estable.

Ejemplo 2.49 Sea $0 \leq c < \frac{1}{2}$ y consideremos los conjuntos,

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(c, x_2, x_3) : x_2, x_3 \geq 0, x_2 + x_3 = 1 - c\} \\ M_2 &= \{(x_1, c, x_3) : x_1, x_3 \geq 0, x_1 + x_3 = 1 - c\} \\ M_3 &= \{(x_1, x_2, c) : x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1 - c\}. \end{aligned}$$

Los conjuntos M_1, M_2 y M_3 , denominados conjuntos discriminatorios hacia los jugadores 1, 2 y 3, respectivamente, también son conjuntos estables para el juego del dólar (Ejemplo 1.15).

El siguiente ejemplo ilustra cómo calcular un conjunto estable de un juego cuando tenemos otro estratégicamente equivalente.

Ejemplo 2.50 Consideremos el conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3\}$ y la siguiente función característica:

$$v(i) = -2, i \in N \quad v(i, j) = 2, i, j \in N, i \neq j \quad v(1, 2, 3) = 0.$$

Este juego es estratégicamente equivalente al juego del dólar, con $k = \frac{1}{6}$ y el juego aditivo dado por $a_i = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$. Por tanto, como la relación de dominación se preserva bajo juegos estratégicamente equivalentes, es trivial comprobar que si

$$M = \{(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)\}$$

es un conjunto estable para el juego del dólar (Ejemplo 1.15) entonces

$$M' = \{(-2, 1, 1), (1, -2, 1), (1, 1, -2)\}$$

es un conjunto estable para el juego v .

Sharkey (1982) estudió condiciones bajo las que el core es el único conjunto estable. En su trabajo demuestra que si un juego tiene “large core”, entonces el core es el único conjunto estable. Definimos a continuación este concepto y el resultado formal de Sharkey (1982).

Definición 2.51 Diremos que $(N, v) \in G^N$ tiene large core si para cada $y \in \mathbb{R}^N$ con $y(S) \geq v(S)$ para todo $S \subset N$, hay un elemento $x \in C(N, v)$ con $x \leq y$.

Teorema 2.52 (Sharkey (1982)) Si un juego TU tiene large core, entonces el core es el único conjunto estable.

Demostración: Vamos a demostrar que el core es un conjunto estable, con lo que, teniendo en cuenta la Proposición 2.46, tendríamos que el core es el único conjunto estable. Sea $y \in I(N, v)$ tal que $y \notin C(N, v)$, entonces sabemos que existe $S \subset N$, $S \neq N$, tal que $\sum_{i \in S} y_i < v(S)$ y $\sum_{i \in T} y_i \geq v(T)$ para $T \subset S$, $T \neq S$. Tomemos $z_S \in \mathbb{R}^S$ tal que $z_S > y_S$ con $\sum_{i \in S} z_i = v(S)$. Es claro que podemos extender z_S a $z = (z_S, z_{N \setminus S}) \in \mathbb{R}^N$ tal que $\sum_{i \in T} z_i \geq v(T)$ para $T \subset N$. Dado que (N, v) tiene large core, existe $x \in C(N, v)$ tal que $x \leq z$. Entonces, $v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i \leq \sum_{i \in S} z_i = v(S)$ y $x_S = z_S$. Entonces, x domina a y a través de S . ■

Observación 2.53 A pesar de que durante años se conjetura que la existencia de conjuntos estables estaba garantizada, Lucas (1967) encontró un juego con diez jugadores para el que no existe ningún conjunto estable.

2.4. El core-cover

El core-cover fue introducido por Tijs (1981). Consiste en definir los repartos o pagos que son admisibles. Para ello se definen dos cotas, una superior, denominada pagos de utopía, y otra inferior, que se conoce como derechos mínimos. Cuando el core-cover coincide con el core el juego, el juego se denomina de compromiso estable, y por tanto estudiar su core-cover es equivalente a estudiar su core. Una clase de juegos que están dentro de esta clase son los juegos de bancarrota que serán estudiados en el Capítulo 4.

Definición 2.54 Dado un juego $(N, v) \in G^N$ y un jugador $i \in N$ definimos:

- El pago de utopía del jugador i como el valor

$$M_i(N, v) = v(N) - v(N \setminus i).$$

- El mínimo derecho del jugador i como el valor

$$m_i(N, v) = \max_{S \subset N: i \in S} \left\{ v(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(N, v) \right\}.$$

La cota superior, o pago de utopía de un jugador, es la contribución marginal del jugador a la gran coalición. Representa lo máximo que éste podría pedir, en el sentido de que si pidiera más entonces sería rentable para la gran coalición no tenerlo en cuenta y pasar a formar su subjuego de $n - 1$ jugadores. En cuanto a la cota inferior, parece razonable calcular para cada jugador lo que le queda a cada coalición a la que pertenece si el resto de jugadores de la coalición se llevasen su pago de utopía. Así, como mínimo, cada jugador se puede asegurar el máximo de estas cantidades

sobre todas las coaliciones a las que pertenece. Este valor es la cota inferior o mínimo derecho de un jugador.

El core-cover se corresponde con todas las imputaciones que aseguran a cada jugador su mínimo derecho y no más que su pago de utopía.

Definición 2.55 Sea $(N, v) \in G^N$. Se define el core-cover como el conjunto

$$CC(N, v) = \{x \in I(N, v) : m(N, v) \leq x \leq M(N, v)\}.$$

Se puede comprobar que si el juego (N, v) es convexo, el mínimo derecho de los jugadores se corresponde con la utilidad que pueden conseguir por ellos mismos, esto es, $m_i(N, v) = v(i)$ para cada $i \in N$.

A continuación se presenta una condición necesaria y suficiente para la existencia de asignaciones en el core-cover cuya demostración es inmediata.

Proposición 2.56 El core-cover no es vacío, $CC(N, v) \neq \emptyset$, si y solo si se verifican las siguientes condiciones:

1. $m(N, v) \leq M(N, v)$.
2. $\sum_{i \in N} m_i(N, v) \leq v(N) \leq \sum_{i \in N} M_i(N, v)$.

Demostración: Es inmediata teniendo en cuenta la definición. ■

Ejemplo 2.57 Consideremos el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y función característica:

$$\begin{aligned} v(i) &= 0 \quad \text{para todo } i \in N \\ v(1, 2) &= 3, v(1, 3) = 4, v(1, 4) = 7, v(2, 3) = 4, v(2, 4) = 6, v(3, 4) = 4 \\ v(1, 2, 3) &= 20, v(1, 2, 4) = 14, v(1, 3, 4) = 15, v(2, 3, 4) = 12 \\ v(N) &= 40. \end{aligned}$$

En la Figura 2.7 aparece representado el core y el core-cover de este juego. Se puede comprobar que $m(v) = (0, 0, 0, 0)$ y $M(v) = (28, 25, 26, 20)$.

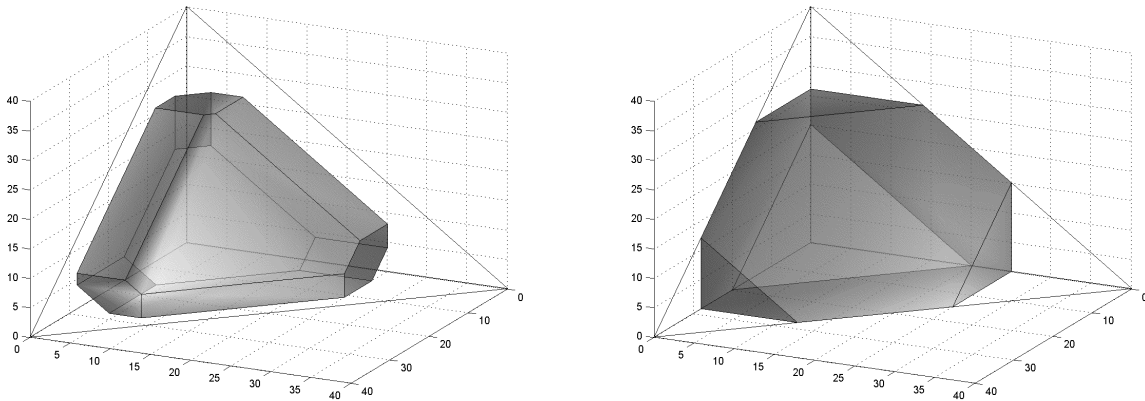


Figura 2.7: Core (izquierda) y core-cover (derecha) del Ejemplo 2.57.

Un juego (N, v) se dice que es de compromiso admisible, o cuasi-equilibrado, si cumple las condiciones de la Proposición 2.56.

En el siguiente teorema veremos que como el propio nombre core-cover indica, el core-cover contiene (“cubre”) al core.

Teorema 2.58 *El core de un juego $(N, v) \in G^N$ está contenido en el core-cover,*

$$C(N, v) \subset CC(N, v).$$

Demostración: Sea $x \in C(N, v)$. Para cada $i \in N$,

$$x_i = \sum_{k \in N} x_k - \sum_{k \in N \setminus i} x_k = v(N) - \sum_{k \in N \setminus i} x_k \leq v(N) - v(N \setminus i) = M_i(N, v).$$

Además, para cada coalición S tal que $i \in S$,

$$x_i = \sum_{k \in S} x_k - \sum_{k \in S \setminus i} x_k \geq v(S) - \sum_{k \in S \setminus i} M_k(N, v).$$

Así pues, $x_i \geq \max_{S: i \in S} \left\{ v(S) - \sum_{k \in S \setminus i} M_k(N, v) \right\}$. Por tanto, para cada jugador $i \in N$, $m_i(N, v) \leq x_i \leq M_i(N, v)$. ■

Teorema 2.59 *Sea $(N, v) \in G^N$ tal que $CC(N, v) \neq \emptyset$. Entonces se tiene que:*

- a) *El core-cover $CC(N, v)$ es un politopo convexo y compacto de $\mathbb{R}^N$.*
- b) *Existen $x_1, \dots, x_k \in CC(N, v)$ tales que cualquier elemento del core-cover $x \in CC(N, v)$ puede escribirse como*

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, \text{ con } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i.$$

Es decir, el core-cover es la envoltura convexa de los puntos $x_1, \dots, x_k$,

$$CC(N, v) = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_k\}).$$

Demostración: La demostración sigue el mismo esquema que la del correspondiente para el core en el Teorema 2.3. ■

2.5. El conjunto de Weber

El conjunto de Weber (Weber (1988)) se define como la envoltura convexa de los $|\Pi^N|$ repartos de contribuciones marginales (véase la Definición 2.13). Es un conjunto que contiene al core y nunca es vacío, dado que tenemos garantizada la existencia de los repartos de contribuciones marginales. Además, para un juego convexo, todos los vectores de contribuciones marginales son puntos extremos del core, y por tanto, el conjunto de Weber coincide exactamente con el core del juego.

Definición 2.60 *Sea $(N, v) \in G^N$. Se define el conjunto de Weber como la envoltura convexa de los vectores de contribuciones marginales,*

$$\begin{aligned} W(N, v) &= \text{conv}(\{m^\pi(N, v) : \pi \in \Pi^N\}) \\ &= \left\{ \sum_{\pi \in \Pi^N} \alpha^\pi m^\pi(N, v) : \alpha^\pi \geq 0, \pi \in \Pi^N, \sum_{\pi \in \Pi^N} \alpha^\pi = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Proposición 2.61 Sea $(N, v) \in G^N$. Se verifica que:

- a) El conjunto de Weber es un conjunto no vacío, $\emptyset \neq W(N, v) \subset \mathbb{R}^N$, que además es compacto y convexo.
- b) $C(N, v) \subset W(N, v)$.

Demostración: a) Dado que los vectores de contribuciones marginales siempre existen, tenemos que $W(N, v) \neq \emptyset$. Además, como es la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos, es compacto y convexo.

b) Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x \in C(N, v)$ tal que $x \notin W(N, v)$. Entonces, por el teorema de separación (véase el Teorem 9.7 en el Apéndice), existen $a \in \mathbb{R}^N$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que el hiperplano

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} a_i y_i = \alpha \right\}$$

separa el punto x y el conjunto de Weber. Equivalentemente, para todo orden $\pi \in \Pi^N$,

$$\sum_{i \in N} x_i a_i < \sum_{i \in N} m_i^\pi(N, v) a_i.$$

Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, podemos suponer $N = \{1, \dots, n\}$ y $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Tomemos la ordenación $\pi^* \in \Pi^N$ definida por $\pi^*(i) = i$ para todo $i \in N$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} x_i a_i &< \sum_{i \in N} m_i^{\pi^*}(v) a_i \\ &= a_1 v(1) + a_2 (v(1, 2) - v(1)) + \dots + a_n (v(N) - v(1, \dots, n-1)) \\ &= v(1)(a_1 - a_2) + v(1, 2)(a_2 - a_3) + \dots + v(N) a_n \\ &\leq x_1(a_1 - a_2) + (x_1 + x_2)(a_2 - a_3) + \dots + x(N) a_n \\ &= x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \\ &= \sum_{i \in N} x_i a_i. \end{aligned}$$

La primera igualdad se obtiene directamente por la elección particular de π^* . Para las demás igualdades basta con reagrupar adecuadamente los términos y la segunda desigualdad se verifica dado que $x \in C(N, v)$. Así, llegamos a un absurdo, como consecuencia de suponer que $x \notin W(N, v)$. Por tanto $C(N, v) \subset W(N, v)$. ■

De la proposición anterior se deduce que todo elemento del core se obtiene por la ponderación de los vectores de contribuciones marginales.

El siguiente resultado indica que todos los repartos del conjunto de Weber son eficientes aunque, en general, no tienen por que ser imputaciones. Sin embargo, para la clase de los juegos 0-monótonos sí son imputaciones. Además probamos que si un juego es convexo, su conjunto de Weber coincide con el core del juego.

Proposición 2.62 Sea $(N, v) \in G^N$. Se verifica que:

- a) $W(N, v) \subset I^*(N, v)$.
- b) $W(N, v) \subset I(N, v)$ si y solo si (N, v) es 0-monótono.

c) Sea (N, v) un juego convexo, entonces $W(N, v) = C(N, v)$.

Demostración: a) Es inmediato ver que para cada $\pi \in \Pi^N$, $\sum_{i \in N} m_i^\pi(v) = v(N)$.

b) Por definición, (N, v) es 0-monótono si y solo si

$$v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(i) \leq v(T) \quad (2.1)$$

para todo $S \subset T$. Veamos que estas condiciones son equivalentes a que para todo $i \in N$ y $S \subset N \setminus i$,

$$v(S \cup i) - v(S) \geq v(i). \quad (2.2)$$

Una vez comprobada la equivalencia, el resultado es inmediato.

Para demostrar que (2.1) implica (2.2) basta con tomar para cada $i \in N$ y $S \subset N \setminus i$ la coalición $T = S \cup i$.

Veamos, ahora, que (2.2) implica (2.1). Sea $S \subsetneq T$, puesto que si $S = T$ la relación es trivial. Supongamos, entonces, que existe $k \geq 1$ tal que $T \setminus S = \{i_1, \dots, i_k\}$. Se verifica la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} v(S \cup i_1) - v(S) &\geq v(i_1) \\ v(S \cup i_1 \cup i_2) - v(S \cup i_1) &\geq v(i_2) \\ &\dots \geq \dots \\ v(S \cup i_1 \cup \dots \cup i_k) - v(S \cup i_1 \cup \dots \cup i_{k-1}) &\geq v(i_k). \end{aligned}$$

Sumando las desigualdades obtenemos $v(T) - v(S) \geq \sum_{i \in T \setminus S} v(i)$.

c) Ya sabemos que $C(N, v) \subset W(N, v)$. Si (N, v) es convexo, de la Proposición 2.14 deducimos que todo vector de contribuciones marginales pertenece al core. Como el core es convexo (Teorema 2.3), tenemos $W(N, v) \subset C(N, v)$. ■

Ejemplo 2.63 Consideremos el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y función característica:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| = 1 \\ 3 & \text{si } |S| = 2 \\ 20 & \text{si } |S| = 3 \\ 30 & \text{si } |S| = 4. \end{cases}$$

En la Figura 2.8 aparece representado el conjunto de Weber y el core del juego.

Ejemplo 2.64 Consideremos el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y función característica:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| = 1 \\ 7 & \text{si } |S| = 2 \\ 12 & \text{si } |S| = 3 \\ 22 & \text{si } |S| = 4. \end{cases}$$

En la Figura 2.9 aparece representado el core, el conjunto de Weber y el core-cover.

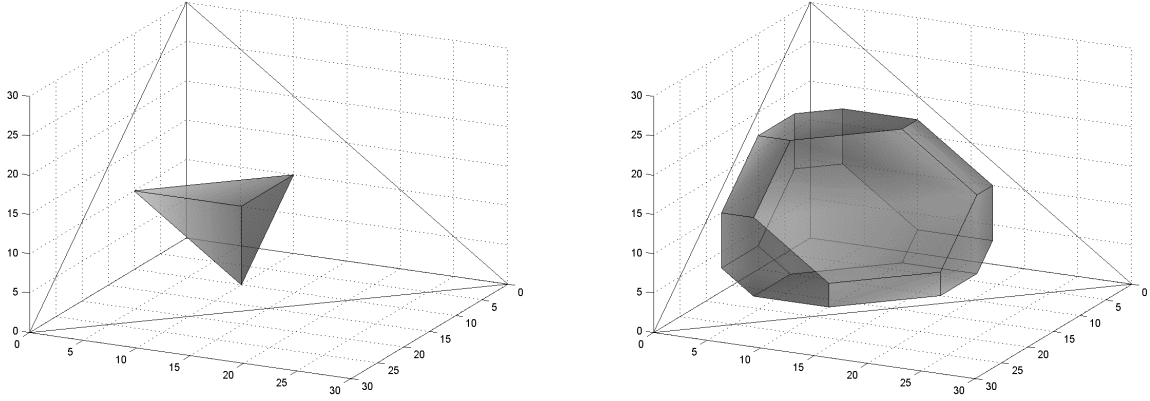


Figura 2.8: Core (izquierda) y Conjunto de Weber (derecha) del Ejemplo 2.63.

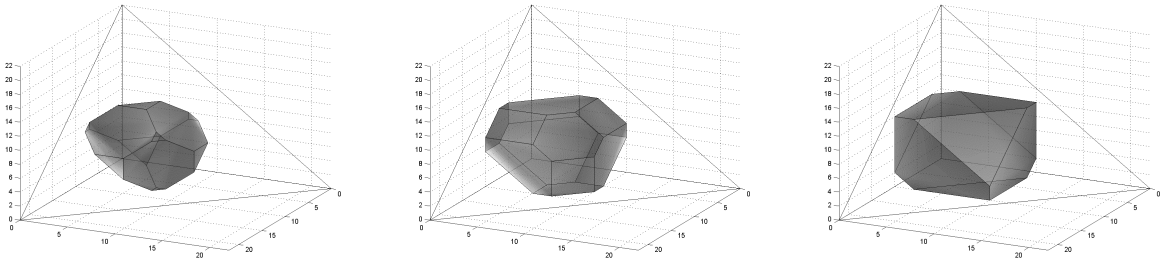


Figura 2.9: Core (izquierda), conjunto de Weber (centro) y core-cover (derecha) del Ejemplo 2.64.

2.5.1. Caracterización de los juegos convexos

La coincidencia del core y el conjunto de Weber caracteriza a la clase de los juegos convexos.

Proposición 2.65 Sea $(N, v) \in G^N$. Se tiene la siguiente equivalencia.

$$(N, v) \text{ es convexo si y solo si } W(N, v) = C(N, v).$$

Demostración: Teniendo en cuenta que si (N, v) es un juego convexo, entonces $W(N, v) = C(N, v)$, sólo nos queda demostrar que si el conjunto de Weber coincide con el core entonces el juego es convexo.

Sea $T \subset S \subset N \setminus i$. Demostraremos que

$$v(S \cup i) - v(S) \geq v(T \cup i) - v(T).$$

Para ello, elegimos $\pi \in \Pi^N$ tal que $\pi = (\pi_T, \pi_{S \setminus T}, i, \pi_{N \setminus (S \cup i)})$. Es decir, π es cualquier ordenación que coloque en primer lugar a los jugadores de T , luego a los de $S \setminus T$, a continuación coloque al jugador i y, finalmente, a los demás jugadores. Sabemos que,

$$\sum_{j \in T} m_j^\pi(v) = v(T) \quad \text{y} \quad m_i^\pi(v) = v(S \cup i) - v(S).$$

Además, dado que $m^\pi(v) \in C(N, v)$,

$$\sum_{j \in T \cup i} m_j^\pi(v) \geq v(T \cup i),$$

o equivalentemente,

$$\sum_{j \in T} m_j^\pi(v) + m_i^\pi(v) \geq v(T \cup i).$$

De las igualdades previas se llega a

$$v(T) + v(S \cup i) - v(S) \geq v(T \cup i),$$

que es la condición de convexidad buscada. ■

La clase de los juegos convexos está ampliamente estudiada por el buen comportamiento que tiene con respecto a las distintas soluciones. Es fácil comprobar que los juegos convexos son una subclase de los totalmente equilibrados, dado que todo subjuego de un juego convexo es a su vez convexo y, por tanto, su core coincide con su conjunto de Weber.

También se puede comprobar sin dificultad que para juegos convexos, dado una ordenación $\pi \in \Pi^N$, si consideramos, para cada coalición $S \subset N$, la ordenación $\pi_S \in \Pi^S$, la distribución dada por los vectores de contribuciones marginales asociados a este orden, $(m_i^{\pi_S})_{\emptyset \neq S \subset N, i \in S}$, es una PMAS (ver Definición 2.26).

Ejercicios

1. Representa y calcula los cores de los siguientes juegos:

- a) $v_1 = [0, 0, 0, 20, 30, 10, 90]$.
- b) $v_2 = [0, 0, 0, 30, 10, 80, 90]$.
- c) $v_3 = [0, 0, 0, 10, 20, 70, 90]$.
- d) $v_4 = [0, 0, 0, 50, 50, 50, 90]$.
- e) $v_5 = [0, 0, 0, 70, 80, 60, 90]$.
- f) $v_6 = [5, 10, 20, 50, 70, 50, 90]$.

2. Representa y calcula para el juego de costes del Ejemplo 1.1.

- a) El core.
- b) El least core.
- c) El conjunto de Weber.

3. Considera el juego de tres jugadores $v = [0, 0, 0, \alpha, \alpha, \alpha, 1]$. Discute el core de este juego para los distintos valores de α .

4. Encuentra juegos de tres jugadores con least core de dimensión 1 ó 0. Justifica la respuesta. ¿Cuál es el least core de un juego con core no vacío y que no tiene dimensión máxima (es decir, menor estrictamente que $|N| - 1$)?

5. Encuentra el least core de los siguientes juegos. Recuerda que si el core es vacío, entonces el least core se obtiene con $\varepsilon > 0$.

- a) $v_1 = [0, 0, 0, 2, 8, 3, 12]$.
- b) $v_2 = [6, 5, 4, 2, 4, 3, 12]$.
- c) $v_3 = [0, 0, 0, 8, 8, 8, 12]$.
- d) $v_4 = [0, 0, 0, 3, 6, 2, 12]$.

e) $v_3 = [0, 0, 0, 12, 15, 12, 12]$.

6. Prueba que si dos juegos (N, v) y (N, w) son estratégicamente equivalentes entonces, $x \text{ dom } y$ si y solo si $(kx + a) \text{ dom } (ky + a)$, siendo $k > 0$ y (N, a) el juego aditivo tal que $w(S) = kv(S) + a(S)$ para todo $S \subset N$.
7. Considera el juego del dólar (Ejemplo 1.15). Demuestra que los conjuntos discriminatorios M_1 , M_2 y M_3 del Ejemplo 2.49 son estables. Representa en el triángulo de imputaciones estos conjuntos e indica, fijado uno de estos conjuntos y una imputación en él, las imputaciones a las que domina. Indica, fijada una imputación, por ejemplo $(0.4, 0.3, 0.3)$, en qué conjuntos discriminatorios se encuentra.
8. Justifica que el juego de cuatro jugadores dado por $v = [0, 2, 2, 0, 5, 5, 0, 5, 2, 2, 9, 5, 5, 5, 11]$ es exacto pero no convexo.

Capítulo 3

Conceptos de solución puntuales

En este capítulo estudiaremos las principales soluciones puntuales, también llamadas valores o *allocation rules* que han sido propuestas en la literatura. Si asumimos que se va a formar la gran coalición N , ¿cómo dividimos el valor de la gran coalición entre sus miembros? Dependiendo del tipo de situación que queramos modelizar, esta pregunta puede replantearse como ¿cuánto podría esperar recibir cada jugador si un juez justo tuviera que dividir el beneficio conjunto entre los jugadores? o, también, ¿cuál es la expectativa racional que un jugador esperaría obtener?

Para poder decidir qué concepto de solución nos parece más apropiado podemos optar por desgranar cada solución en unos principios básicos ó axiomas que servirán para comprender en profundidad las ideas que subyacen en los conceptos de solución puntuales.

La Definición 2.1 recoge la definición de solución puntual como caso particular de solución genérica. La recordamos aquí: una solución puntual, definida en algún subdominio $\Omega \subset G^N$, es una aplicación $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, que asocia a cada juego (N, v) un reparto en $\mathbb{R}^N$.

A continuación presentamos algunas soluciones de tipo puntual indicando la referencia correspondiente.

- Valor de Shapley (Shapley (1953a,b)).
- Nucleolus y prenucleolus (Schmeidler (1969)).
- τ -Valor (Tijs (1981)).
- Core-center (González y Sánchez (2007)).
- Per capita nucleolus (Wallmeier (1983)).
- Valor igualitario (Dutta y Ray (1989)).
- Valor average lexicographic (alexia) (Tijs y otros (2011)).
- Valor solidario (Nowak y Radzik (1994)).
- Valor selectivo (Vidal-Puga (2004)).

En esta monografía, estudiaremos las cuatro primeras. Además, estudiaremos valores que han surgido en torno al valor de Shapley. En concreto, los valores ponderados (Kalai y Samet (1987)), los valores coalicionales (Owen (1995)) y un valor con restricciones en la comunicación, también conocido como valor de Myerson (Myerson (1977)). En el siguiente Capítulo veremos cómo el valor de Shapley aplicado a las Ciencias Políticas nos da una forma de medir el poder de los distintos jugadores involucrados en un comité. Se conoce como índice de poder de Shapley-Shubik. Roth (1988) es un libro monográfico sobre el valor de Shapley que recoge éstas y otras aplicaciones.

3.1. Propiedades de una regla de reparto

Sea $G = \bigcup_{N \subset \mathbb{N}; |N| < \infty} G^N$ la unión de todos los juegos TU con $\mathbb{N}$ como conjunto de jugadores potenciales y $\varphi: G \rightarrow \bigcup_{N \subset \mathbb{N}} \mathbb{R}^N$ una regla de reparto, es decir, una aplicación que a cada juego (N, v) le asocia un vector $|N|$ -dimensional cuyas coordenadas están indexadas por N . La definición puede adaptarse fácilmente si la regla se restringe, o está sólo definida, a una subclase $\Omega \subset G^N$, esto es, si $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. En este caso, simplemente diremos que la regla de reparto φ verifica la correspondiente propiedad para los juegos de la clase Ω . Un típico ejemplo de Ω , que se puede aplicar a casi todas las propiedades, es $\Omega = G^N$ para un N fijo.

Invarianza por traslaciones Dados dos juegos $(N, v), (N, w) \in G^N$, y $\alpha \in \mathbb{R}^N$ tales que $w(S) = v(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i$ para cada $S \subset N$, se verifica que

$$\varphi(N, w) = \varphi(N, v) + \alpha.$$

Invarianza por cambios de escala Dados $(N, v), (N, w) \in G^N$ y $r \in \mathbb{R}_{++}$ tales que $w(S) = rv(S)$ para $S \subset N$, se verifica que

$$\varphi(N, w) = r\varphi(N, v).$$

Covarianza (bajo juegos estratégicamente equivalentes) Dados $(N, v), (N, w) \in G^N$, $r \in \mathbb{R}_{++}$ y $\alpha \in \mathbb{R}^N$ tales que $w(S) = rv(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i$ para todo $S \subset N$, se verifica que

$$\varphi(N, w) = r\varphi(N, v) + \alpha.$$

La propiedad de invarianza por traslaciones (resp. cambios de escala) refleja que si un juego es el trasladado por otro mediante un cambio de origen (resp. de escala), entonces la regla de reparto también se traslada (resp. escala) de la misma forma. La covarianza es una combinación de ambas propiedades.

Eficiencia Para todo $(N, v) \in G^N$,

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v) = v(N).$$

La propiedad de eficiencia nos indica que la suma de las asignaciones que reciben todos los jugadores ha de coincidir con el valor de la gran coalición.

Racionalidad individual Para todo $(N, v) \in G^N$,

$$\varphi_i(N, v) \geq v(i), \text{ para todo } i \in N.$$

La propiedad de racionalidad individual exige a una regla de reparto que asigne a cada jugador al menos su valor individual.

Selección en el core Para todo $(N, v) \in G^N$ con core no vacío,

$$\varphi(N, v) \in C(N, v).$$

La propiedad de selección en el core selecciona reglas de reparto en las que ninguna coalición tenga incentivos de desviarse y formar su propia coalición, es decir, repartos estables, siempre que estos sean posibles.

Definición 3.1 Un jugador $i \in N$ en un juego $(N, v) \in G^N$ se llama *títere* si no aporta beneficio adicional a los demás jugadores, es decir, si $v(S \cup i) = v(S) + v(i)$ para todo $S \subset N \setminus i$.

Si un jugador títere $i \in N$ verifica $v(i) = 0$, se dice además que es un jugador nulo.

Jugador títere Para todo $(N, v) \in G^N$ y cada jugador $i \in N$ que sea títere, se tiene que

$$\varphi_i(N, v) = v(i).$$

Jugador nulo Para todo $(N, v) \in G^N$ e $i \in N$ jugador nulo,

$$\varphi_i(N, v) = 0.$$

La propiedad de jugador títere establece que si un jugador no realiza aportación adicional a los demás jugadores, entonces debe recibir su asignación individual.

Sin embargo, la propiedad de jugador nulo es más débil, ya que permite que un jugador títere, siempre que no sea nulo, pueda recibir algo diferente a su asignación individual. Si el jugador es nulo, entonces sí debe recibir su asignación individual (cero).

Definición 3.2 En un juego $(N, v) \in G^N$, dos jugadores $i, j \in N$ son *simétricos* si $v(S \cup i) = v(S \cup j)$ para todo $S \subset N \setminus \{i, j\}$.

Simetría Para todo $(N, v) \in G^N$ y todo par i, j de jugadores simétricos,

$$\varphi_i(N, v) = \varphi_j(N, v).$$

La propiedad de simetría nos dice que si dos jugadores son intercambiables en el juego, deben recibir el mismo pago.

Una propiedad relacionada con simetría, aunque no equivalente, es la de anonimato. Para definirla, necesitamos la siguiente notación.

Definición 3.3 Dados $N, N' \subset \mathbb{N}$, una función biyectiva $p : N \rightarrow N'$ y $x \in \mathbb{R}^N$, definimos $p(x) \in \mathbb{R}^{N'}$ como el reparto resultante de cambiar las coordenadas de x según p , es decir,

$$p(x)_{p(i)} = x_i$$

para todo $i \in N$.

Análogamente, dado $S \subset N$, definimos $p(S) \subset N'$ como

$$p(S) = \{p(i) : i \in S\} \subset N',$$

es decir, $p(S)$ representa la misma coalición S cambiando el nombre de los jugadores según lo indicado por p .

Si cambiamos el identificador (o nombre) de los jugadores mediante una función biyectiva, una regla anónima no se verá afectada por ello. Más específicamente, si el índice de un jugador cambia, el pago asignado a su nuevo índice será el mismo que el asignado al índice antiguo. Formalmente:

Anonimato Dados $N, N' \subset \mathbb{N}$ conjuntos finitos y $p : N \rightarrow N'$ biyectiva,

$$\varphi(N', p(v)) = p(\varphi(N, v))$$

para todo $(N, v) \in G^N$, donde $(N', p(v)) \in G^{N'}$ es el juego definido por $p(v)(p(S)) = v(S)$ para todo $S \subset N$.

Toda regla anónima es también simétrica, pero el recíproco no es cierto (véase el ejercicio 3).

Continuidad φ es continua como función de $\mathbb{R}^{G^N}$ en $\mathbb{R}^N$.

Una regla de reparto es continua si pequeñas variaciones en la utilidad que reciben los jugadores provocan pequeñas variaciones en los repartos.

Aditividad Para todo $(N, v), (N, w) \in G^N$, se verifica que

$$\varphi(N, v + w) = \varphi(N, v) + \varphi(N, w).$$

La propiedad de aditividad establece que el pago que reciben los jugadores en un juego es igual a la suma de los pagos que recibirían si el juego se descompone en suma de dos.

Monotonía fuerte (o marginalidad) Dados $(N, v), (N, w) \in G^N$ e $i \in N$ tales que para cada $S \subset N \setminus i$, $w(S \cup i) - w(S) \geq v(S \cup i) - v(S)$, entonces

$$\varphi_i(N, w) \geq \varphi_i(N, v).$$

La monotonía fuerte indica que si la contribución marginal de un jugador a todas las coaliciones en un juego dado es superior o igual a la contribución marginal del jugador a todas las coaliciones en otro juego, entonces no debe recibir menos asignación en el primer juego que en el segundo.

Monotonía coalicional Dados $(N, v), (N, w) \in G^N$ y $T \subset N$ tales que $w(T) > v(T)$ y $w(S) = v(S)$ para $S \neq T$, entonces

$$\varphi_i(N, w) \geq \varphi_i(N, v), \text{ para todo } i \in T.$$

La monotonía coalicional establece que si dos juegos se diferencian exclusivamente en el valor de una coalición T ($w(T) > v(T)$), entonces todos los jugadores de la coalición T , individualmente, deben recibir, al menos, el mismo pago con la regla de reparto en el juego w que en el juego v .

Monotonía en el agregado (o monotonía en la gran coalición) Dados $(N, v), (N, w) \in G^N$ con $w(N) > v(N)$ y $w(S) = v(S)$ para $S \neq N$, se tiene que

$$\varphi_i(N, w) \geq \varphi_i(N, v), \text{ para todo } i \in N.$$

La monotonía en el agregado es un caso particular de la monotonía coalicional cuando entre los juegos v y w la única variación está en el valor de la gran coalición.

Monotonía coalicional débil Dados $(N, v), (N, w) \in G^N$ y $T \subset N$ tales que $w(T) > v(T)$ y $w(S) = v(S)$ para $S \neq T$, entonces

$$\sum_{i \in T} \varphi_i(N, w) \geq \sum_{i \in T} \varphi_i(N, v).$$

La monotonía coalicional débil es una versión debilitada de monotonía coalicional, en la que ahora, colectivamente, la coalición T debe recibir, al menos, el mismo pago con la regla de reparto en el juego w que en el juego v .

Contribuciones equilibradas Para todo $(N, v) \in G^N$ y cada par de jugadores $i, j \in N$,

$$\varphi_i(N, v) - \varphi_i(N \setminus j, v_{N \setminus j}) = \varphi_j(N, v) - \varphi_j(N \setminus i, v_{N \setminus i}).$$

Una regla de reparto verifica contribuciones equilibradas si la utilidad que pierde o gana el jugador i si j deja de participar en el juego coincide con la utilidad que pierde o gana el jugador j si se va del juego el jugador i .

Estándar para dos jugadores Para cada uno de los dos jugadores $i \in N$ se tiene que (suponiendo $|N| = 2$)

$$\varphi_i(N, v) = v(i) + \frac{1}{2} \left(v(N) - \sum_{j \in N} v(j) \right).$$

La propiedad de ser estándar para dos jugadores indica, para juegos de dos jugadores, un reparto de la utilidad total a partes iguales una vez se descuentan los valores individuales. Es decir, la asignación que recibe cada jugador se puede descomponer en dos partes o fases: en la primera fase cada jugador recibe lo que se puede garantizar por sí mismo y, en la segunda, se divide el resto a partes iguales.

Consistencia Para cada $(N, v) \in G^N$, $S \subset N$ e $i \in S$ se verifica que

$$\varphi_i(S, v_S^\varphi) = \varphi_i(N, v)$$

siendo (S, v_S^φ) el juego reducido a la coalición S según la regla φ .

El juego reducido (S, v_S^φ) surge cuando los jugadores de $N \setminus S$ reciben el pago establecido para ellos por la regla φ y abandonan el juego, permitiendo a los demás jugadores de S renegociar su pago. Existen distintas formas de definir el juego reducido. Estas son las dos más conocidas:

- Juego reducido de Hart y Mas-Colell (1989):

$$v_S^\varphi(R) = v(R \cup (N \setminus S)) - \sum_{i \in N \setminus S} \varphi_i(R \cup (N \setminus S), v_{R \cup (N \setminus S)}) \quad \text{si } R \subset S.$$

- Juego reducido de Davis y Maschler (1965):

$$\hat{v}_S^\varphi(R) = \begin{cases} 0 & \text{si } R = \emptyset \\ \max \{v(R \cup T) - \varphi(T) : T \subset N \setminus S\} & \text{si } \emptyset \neq R \subsetneq S \\ v(N) - \varphi(N \setminus R) & \text{si } R = S. \end{cases}$$

Veremos el primero de ellos en la caracterización del valor de Shapley y el segundo en la caracterización del prenucleolus.

La propiedad de consistencia establece igualdad (o consistencia) entre la solución en el juego original y la solución en el juego reducido a una coalición.

3.2. El valor de Shapley

El valor de Shapley (Shapley (1953a)) se calcula promediando los vectores de contribuciones marginales asociados a todas las posibles ordenaciones de los jugadores.

Definición 3.4 El valor de Shapley de un juego $(N, v) \in G^N$ es el reparto

$$Sh(N, v) = \frac{1}{|\Pi^N|} \sum_{\pi \in \Pi^N} m^\pi(N, v).$$

Podemos interpretar el valor de Shapley de la siguiente forma. Supongamos que los jugadores van llegando a un lugar de modo aleatorio, y al llegar cada jugador recibe como utilidad su aportación marginal a los jugadores que ya estaban presentes. El valor de Shapley se puede ver como el vector de utilidades esperadas de los jugadores bajo este procedimiento.

A partir de esto, la expresión de $Sh_i(N, v)$ se puede interpretar como la expectativa que el jugador i tiene por participar en el juego (N, v) .

Observación 3.5 *Las siguientes expresiones son equivalentes a la anterior:*

$$\begin{aligned} Sh_i(N, v) &= \frac{1}{|\Pi^N|} \sum_{\pi \in \Pi^N} (v(\text{Pre}^\pi(i) \cup i) - v(\text{Pre}^\pi(i))) \\ &= \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subset N \setminus i} |S|!(|N| - |S| - 1)!(v(S \cup i) - v(S)) \\ &= \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subset N: i \in S} (|S| - 1)!(|N| - |S|)!(v(S) - v(S \setminus i)) \end{aligned}$$

para cada $i \in N$.

Los coeficientes en las fórmulas anteriores indican que todas las coaliciones del mismo tamaño son igualmente probables. De hecho, $(|S| - 1)!(|N| - |S|)!$ es el número de ordenaciones para las cuales los predecesores del jugador i son los jugadores de $S \setminus i$.

Podemos observar que el valor de Shapley no verifica la propiedad de racionalidad individual en el conjunto general de juegos. No obstante, en la clase de los juegos 0-monótonos el valor de Shapley verifica esta propiedad. Además, si un juego es convexo entonces el valor de Shapley está en el core del juego, es decir, verifica la propiedad de selección en el core en la clase de juegos convexos. La demostración de este hecho no es complicada teniendo en cuenta que el core de un juego convexo es la envoltura convexa de los vectores de contribuciones marginales y el valor de Shapley es el promedio de ellos.

Además, el valor de Shapley verifica las propiedades de eficiencia, covarianza, jugador títere, simetría y aditividad. Veremos a continuación la caracterización más clásica del valor de Shapley.

Teorema 3.6 *Existe un único valor en G^N verificando las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad; y es el valor de Shapley. Es decir, si φ es una regla de reparto en G^N que verifica las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad, entonces $\varphi = Sh$.*

Demostración: Es inmediato verificar que el valor de Shapley verifica las propiedades mencionadas, por lo que queda como ejercicio para el lector.

Comprobemos que es la única regla de reparto que las cumple. Supongamos que φ es una regla de reparto que verifica las propiedades del teorema. Sabemos por la Proposición 1.19 que cada juego $(N, v) \in G^N$ se puede expresar como combinación lineal de la base de los juegos de unanimidad: $v = \sum_{\emptyset \neq T \subset N} c_T u_T$.

Por verificarse la propiedad de aditividad, tenemos que

$$\varphi(N, v) = \sum_{\emptyset \neq T \subset N} \varphi(N, c_T u_T).$$

Se observa que todos los jugadores de T son simétricos para el juego $(N, c_T u_T)$, cualquiera que sea la coalición T . Entonces, para cada $i, j \in T, i \neq j$,

$$\varphi_i(N, c_T u_T) = \varphi_j(N, c_T u_T).$$

Además, todos los jugadores que no están en una coalición T son jugadores nulos en el juego $(N, c_T u_T)$, dado que si $i \notin T$ y $S \subset N \setminus i$,

$$c_T u_T(S \cup i) - c_T u_T(S) = 0 = c_T u_T(i).$$

Aplicando las propiedades de eficiencia, jugador nulo y simetría se deduce que

$$\varphi_i(N, c_T u_T) = \begin{cases} \frac{c_T}{|T|} & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Por la aditividad de φ , para cada $i \in N$

$$\varphi_i(N, v) = \sum_{\emptyset \neq T \subset N} \varphi_i(N, c_T u_T) = \sum_{\emptyset \neq T \subset N: i \in T} \frac{c_T}{|T|}.$$

Ahora, dado que el valor de Shapley verifica las propiedades mencionadas, es evidente que $\varphi = Sh$. ■

Observación 3.7 *Comprobamos que las propiedades son lógicamente independientes, es decir, que si eliminamos cualquiera de ellas, perdemos la unicidad del valor.*

- *Regla de reparto sin eficiencia. Definamos $\varphi(N, v) = \delta Sh(N, v)$ para algún $\delta \in [0, 1)$. Esta regla verifica jugador nulo, simetría y aditividad, al igual que el valor de Shapley.*
- *Regla de reparto que no verifica jugador nulo. Definamos $\varphi_i(N, v) = \frac{v(N)}{|N|}$, $i \in N$ (la solución igualitaria). Esta regla verifica eficiencia, simetría y aditividad, al igual que el valor de Shapley.*
- *Regla de reparto que no verifica aditividad. Sea $T(v)$ el conjunto de jugadores títere del juego (N, v) . Tomemos*

$$\varphi_i(N, v) = \begin{cases} v(i) + \frac{1}{|N| - |T(v)|} (v(N) - \sum_{i \in N} v(i)) & \text{si } i \in N \setminus T(v) \\ v(i) & \text{si } i \in T(v). \end{cases}$$

Esta regla verifica eficiencia, jugador nulo y simetría, al igual que el valor de Shapley.

- *Regla de reparto que no verifica simetría. Definamos $\varphi(N, v) = m^\pi(N, v)$ para algún $\pi \in \Pi^N$. Esta regla verifica eficiencia, jugador nulo y aditividad, al igual que el valor de Shapley.*

Ejemplo 3.8 *Sea (N, v) el juego con $N = \{A, B, C\}$ y función característica:*

$$\begin{aligned} v(A) &= v(B) = v(C) = 0 \\ v(A, B) &= 2, \quad v(A, C) = 4, \quad v(B, C) = 6 \\ v(A, B, C) &= 7. \end{aligned}$$

Vamos a calcular el valor de Shapley de este juego de tres formas distintas.

1. *Utilizando la descomposición en juegos de unanimidad. Para ello calculamos los dividendos de Harsanyi.*

$$\begin{aligned} c_{\{A\}} &= v(A) = 0; \quad c_{\{B\}} = v(B) = 0; \quad c_{\{C\}} = v(C) = 0 \\ c_{\{A, B\}} &= v(A, B) - v(A) - v(B) = 2 \\ c_{\{A, C\}} &= v(A, C) - v(A) - v(C) = 4 \\ c_{\{B, C\}} &= v(B, C) - v(B) - v(C) = 6 \\ c_{\{A, B, C\}} &= v(A, B, C) - v(A, B) - v(A, C) - v(B, C) \\ &\quad + v(A) + v(B) + v(C) = 7 - 2 - 4 - 6 = -5. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$v = 2u_{\{A, B\}} + 4u_{\{A, C\}} + 6u_{\{B, C\}} - 5u_{\{A, B, C\}}.$$

Entonces, de acuerdo con la expresión (3.1), el valor de Shapley,

$$Sh(N, v) = (Sh_A(N, v), Sh_B(N, v), Sh_C(N, v)),$$

viene dado por:

$$Sh_A(N, v) = 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} - 5\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$Sh_B(N, v) = 2\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2} - 5\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$Sh_C(N, v) = 4\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2} - 5\frac{1}{3} = \frac{10}{3}.$$

2. Utilizando las distintas ordenaciones de los jugadores y los vectores de contribuciones marginales. Calculamos los vectores de contribuciones marginales, que se recogen en la tabla siguiente.

	Jugador		
Orden	A	B	C
ABC	0	2	5
ACB	0	3	4
BAC	2	0	5
BCA	1	0	6
CAB	4	3	0
CBA	1	6	0
	8	14	20

El valor de Shapley es la media aritmética de los vectores de contribuciones marginales, esto es,

$$Sh(N, v) = \frac{1}{6}(8, 14, 20) = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

3. El siguiente procedimiento fue presentado por Harsanyi. Se trata de un algoritmo que divide el valor de las coaliciones de manera igualitaria¹. Se presenta a continuación el algoritmo que termina en menor número de etapas dividiendo de forma igualitaria los valores de las coaliciones desde las más pequeñas a las mayores. Procedemos por etapas:

- a) Empezamos por las coaliciones individuales. Como $v(A) = 0$, y A es el único jugador de esta coalición, al jugador A le asignamos ese valor, que denotaremos por $x^1(A) = 0$. Procedemos del mismo modo con los otros jugadores, que tampoco recibirían nada en este paso, $x^1(B) = x^1(C) = 0$.
- b) Ahora nos fijamos en las coaliciones de dos jugadores. Dado que $v(A, B) = 2$ y $x^1(A) + x^1(B) = 0$, tenemos $v(A, B) - (x^1(A) + x^1(B)) = 2$ para repartir a partes iguales entre A y B . Luego en este paso A y B , por formar la coalición AB , reciben 1 unidad cada uno, $x_{AB}^2(A) = x_{AB}^2(B) = 1$. Análogamente, para las otras coaliciones de dos jugadores, tendríamos

Coalición	Utilidad	Acumulado	A repartir	Reparto
S	$v(S)$	$x^1(S)$	$v(S) - x^1(S)$	$x_S^2(i), i \in S$
AC	4	0	4	2
BC	6	0	6	3

¹La definición formal se estudiará en el Capítulo 8 (solución de Harsanyi).

c) Finalmente, para la gran coalición $v(A, B, C) = 7$. En las etapas anteriores los jugadores llevan acumulados los siguientes pagos:

Jugador	Etapas 1	Etapas 2	Total
A	0	1 + 2	3
B	0	1 + 3	4
C	0	2 + 3	5
			12

Así pues, en este paso disponemos de $v(A, B, C) - 12 = -5$ unidades a repartir a partes iguales entre los 3 jugadores que forman la coalición. Luego cada uno percibiría $-\frac{5}{3}$.

El total acumulado por cada jugador en el proceso de reparto descrito nos da el valor de Shapley del juego

$$Sh(N, v) = \left(3 - \frac{5}{3}, 4 - \frac{5}{3}, 5 - \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

3.3. Otras caracterizaciones axiomáticas del valor de Shapley

En la caracterización original del valor de Shapley la propiedad de aditividad es la más criticada. Por ello, se han propuesto en la literatura distintas caracterizaciones alternativas. Young (1985) demostró que el valor de Shapley es la única solución puntual que verifica eficiencia, simetría y monotonía fuerte².

Teorema 3.9 (Young (1985)) *Existe un único valor en G^N que verifica las propiedades de eficiencia, simetría y monotonía fuerte, y es el valor de Shapley.*

Demostración: Es claro que el valor de Shapley verifica las tres propiedades. Supongamos que existe otra solución φ que verifica las tres propiedades en G^N . Sea $(N, v) \in G^N$. Sabemos por la Proposición 1.19 que v se puede expresar como combinación lineal de la base de los juegos de unanimidad: $v = \sum_{T \subset N} c_T u_T$. Definimos el índice de v , I , como el mínimo número de términos c_T no nulos, y procedemos por inducción sobre I .

Para $I = 0$, tenemos el juego nulo v_0 con lo que el único reparto eficiente y simétrico es 0_N , que coincide con el valor de Shapley.

Supongamos ahora que φ coincide con el valor de Shapley siempre que su índice sea menor que I . Sea $R = \bigcap_{c_T \neq 0} T$. Dado $i \in N$, debemos probar que $\varphi_i(N, v) = Sh_i(N, v)$. Tenemos dos casos:

1. Si $i \notin R$, definimos el juego $w = \sum_{T \subset N: i \in T} c_T u_T$. Este juego tiene índice menor que I , por lo que sabemos que $\varphi_i(N, w) = Sh_i(N, w)$. Además, $v(S \cup i) - v(S) = w(S \cup i) - w(S)$ para todo $S \subset N \setminus i$ con lo que la monotonía fuerte aplicada en las dos direcciones implica tanto $\varphi_i(N, v) = \varphi_i(N, w)$ como $Sh_i(N, v) = Sh_i(N, w)$ y de ahí $\varphi_i(N, v) = Sh_i(N, v)$.
2. Si $i \in R$, tenemos en cuenta que todos los jugadores de R son simétricos en v . Por la simetría de φ y del valor Shapley, todos reciben lo mismo en cada uno de los dos valores. Como los dos repartos son eficientes (suman $v(N)$) y coinciden para todo $j \notin R$ (aplicando el caso 1), deducimos que son iguales también en R .

■

En Myerson (1980) el valor de Shapley se caracteriza utilizando las propiedades de eficiencia y contribuciones equilibradas.

²Se puede comprobar que eficiencia + simetría + monotonía fuerte $\implies$ jugador nulo.

Teorema 3.10 (Myerson (1980)) *Existe un único valor en G^N que verifica las propiedades de eficiencia y contribuciones equilibradas, y es el valor de Shapley.*

Demostración: Procedemos por inducción sobre el número de jugadores. Para $|N| = 1$, este resultado se verifica trivialmente. Supongamos, por tanto, que se verifica para juegos con menos de $|N|$ jugadores, con $|N| \geq 2$.

Es claro que el valor de Shapley es eficiente. Veamos que verifica contribuciones equilibradas. Utilizamos la fórmula del valor de Shapley como promedio de contribuciones marginales,

$$Sh(N, v) = \frac{1}{|\Pi^N|} \sum_{\pi \in \Pi^N} m^\pi(N, v)$$

Por simplicidad, dado $S \subset N$, escribimos en el resto de la demostración $Sh(S)$ en lugar de $Sh(S, v_S)$. Debemos entonces demostrar que dados $i, j \in N$,

$$Sh_i(N) - Sh_i(N \setminus j) = Sh_j(N) - Sh_j(N \setminus i). \quad (3.2)$$

Sea $\Pi^N = \bigcup_{k \in N} \Pi_k^N$ donde cada Π_k^N es el conjunto de ordenaciones en las que el jugador $k \in N$ está al final. Para cada $k \in N$, teniendo cuenta que $m_{N \setminus k}^\pi(N) = m_{N \setminus k}^{\pi_{N \setminus k}}(N \setminus k)$ para todo $\pi \in \Pi_k^N$, y la eficiencia de las contribuciones marginales,

$$\begin{aligned} Sh_i(N) &= \frac{1}{|\Pi^N|} \left(\sum_{\pi \in \Pi_i^N} m_i^\pi(N, v) + \sum_{k \in N \setminus i} \sum_{\pi \in \Pi_k^N} m_i^\pi(N, v) \right) \\ &= \frac{1}{|\Pi^N|} \left(\sum_{\pi \in \Pi^{N \setminus i}} \left(v(N) - \sum_{k \in N \setminus i} m_k^\pi(N \setminus i, v) \right) + \sum_{k \in N \setminus i} \sum_{\pi \in \Pi^{N \setminus k}} m_i^\pi(N \setminus k, v) \right) \\ &= \frac{1}{|\Pi^N|} \left(|\Pi^{N \setminus i}| \left(v(N) - \sum_{k \in N \setminus i} Sh_k(N \setminus i) \right) + |\Pi^{N \setminus k}| \sum_{k \in N \setminus i} Sh_i(N \setminus k) \right) \\ &= \frac{1}{|N|} \left(v(N) + \sum_{k \in N \setminus i} (Sh_i(N \setminus k) - Sh_k(N \setminus i)) \right). \end{aligned}$$

Análogamente:

$$Sh_j(N) = \frac{1}{|N|} \left(v(N) + \sum_{k \in N \setminus j} (Sh_j(N \setminus k) - Sh_k(N \setminus j)) \right).$$

Restando ambas expresiones y multiplicando por $|N|$:

$$\begin{aligned} |N|(Sh_i(N) - Sh_j(N)) &= 2Sh_i(N \setminus j) - 2Sh_j(N \setminus i) \\ &\quad + \sum_{k \in N \setminus i, j} (Sh_i(N \setminus k) - Sh_j(N \setminus k) - Sh_k(N \setminus i) + Sh_k(N \setminus j)). \end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción, para cualquier $k \in N \setminus i, j$, sabemos que $Sh_i(N \setminus k) - Sh_k(N \setminus i) = Sh_i(N \setminus k, j) - Sh_k(N \setminus i, j)$ y que $Sh_k(N \setminus j) - Sh_j(N \setminus k) = Sh_k(N \setminus i, j) - Sh_j(N \setminus k, i)$. Eso implica que podemos simplificar los términos dentro del sumatorio:

$$\begin{aligned} |N|(Sh_i(N) - Sh_j(N)) &= 2Sh_i(N \setminus j) - 2Sh_j(N \setminus i) \\ &\quad + \sum_{k \in N \setminus i, j} (Sh_i(N \setminus k, j) - Sh_j(N \setminus k, i)). \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la hipótesis de inducción, tenemos $Sh_i(N \setminus k, j) - Sh_j(N \setminus k, i) = Sh_i(N \setminus j) - Sh_j(N \setminus i)$ y por tanto:

$$\begin{aligned}
 |N|(Sh_i(N) - Sh_j(N)) &= 2Sh_i(N \setminus j) - 2Sh_j(N \setminus i) \\
 &\quad + \sum_{k \in N \setminus i, j} (Sh_i(N \setminus j) - Sh_j(N \setminus i)) \\
 &= 2Sh_i(N \setminus j) - 2Sh_j(N \setminus i) \\
 &\quad + (|N| - 2)(Sh_i(N \setminus j) - Sh_j(N \setminus i)) \\
 &= |N|(Sh_i(N \setminus j) - Sh_j(N \setminus i))
 \end{aligned}$$

que implica la fórmula (3.2) que queríamos demostrar.

Supongamos que existe otra solución φ que verifica las dos propiedades en G^N . Sea $(N, v) \in G^N$ e $i \in N$. Por hipótesis de inducción, $\varphi(S, v_S) = Sh(S)$ para todo $S \subsetneq N$. Por eficiencia y contribuciones equilibradas:

$$\begin{aligned}
 \varphi_i(N, v) &= v(N) - \sum_{j \in N \setminus i} \varphi_j(N) \\
 &= v(N) - \sum_{j \in N \setminus i} (\varphi_i(N, v) - Sh_i(N \setminus j) + Sh_j(N \setminus i)) \\
 &= v(N) - v(N \setminus i) - (|N| - 1)\varphi_i(N, v) + \sum_{j \in N \setminus i} Sh_i(N \setminus j).
 \end{aligned}$$

Reordenando los términos para despejar $\varphi_i(N, v)$:

$$\varphi_i(N, v) = \frac{1}{|N|} \left(v(N) - v(N \setminus i) + \sum_{j \in N \setminus i} Sh_i(N \setminus j) \right)$$

que está unívocamente determinada, por lo que necesariamente debe coincidir con $Sh_i(N)$. ■

Hart y Mas-Colell (1989) caracterizan el valor de Shapley utilizando la propiedad de consistencia y la propiedad de ser estándar para dos. Sea φ una regla de reparto. Para cada grupo de jugadores $S \subset N$ se define el juego reducido (S, v_S^φ) siendo, para $R \subset S$,

$$v_S^\varphi(R) = v(\hat{R}) - \sum_{i \in N \setminus S} \varphi_i(\hat{R}, v_{\hat{R}}) \text{ donde } \hat{R} = R \cup (N \setminus S).$$

En el juego reducido (S, v_S^φ) , la función característica de una subcoalición $R \subset S$ representa la utilidad que queda después de que los miembros de $N \setminus S$ han sido pagados mediante φ .

Teorema 3.11 (Hart y Mas-Colell (1989)) *Existe un único valor que verifica las propiedades de consistencia y estándar para dos, y es el valor de Shapley.*

3.4. Situaciones asimétricas

La simetría es una de las principales propiedades que caracteriza el valor de Shapley. Sin embargo, en ocasiones no parece razonable exigir esta propiedad. Pensemos, por ejemplo, que no siempre los esfuerzos de los jugadores son iguales a la hora de formar una coalición, o bien que, a menudo, los

jugadores tienen diferentes características, lo que supone que inicialmente partan de una situación no simétrica. También podemos pensar en situaciones no simétricas cuando cada jugador representa a su vez a otros agentes, pudiendo ser el número o el tipo de agentes representados por cada jugador distinto. En su tesis doctoral, Shapley (1953a) ya introdujo los valores de Shapley ponderados y, a partir de este momento, se han estudiado distintos valores no simétricos.

Comenzamos definiendo un sistema de pesos de un conjunto de jugadores. A continuación, definimos los valores de Shapley ponderados de los juegos de unanimidad y, en general, los valores de Shapley ponderados de cualquier juego.

3.4.1. Los valores ponderados

Definición 3.12 *Un sistema ordenado de pesos $p = (\omega, \Omega)$, consiste en:*

1. *Un vector de pesos estrictamente positivos, $\omega \in \mathbb{R}_{++}^N$.*
2. *Una partición ordenada de N , $\Omega = \{S_1, \dots, S_m\}$, es decir, una partición en la que cuenta el orden en el que se escriben las coaliciones. Diremos que los jugadores de S_1 pertenecen al primer nivel, o nivel inferior, y que los jugadores de S_m son jugadores del nivel m , o nivel superior.*

Así pues, la partición ordenada $(\{1\}, \{2\}, \{3\})$ de $N = \{1, 2, 3\}$ es distinta de la partición ordenada $(\{2\}, \{1\}, \{3\})$. Una partición ordenada permite considerar los pesos relativos a grupos de jugadores. Si $\Omega = \{N\}$, consiste simplemente en considerar un sistema de pesos para los jugadores.

Definición 3.13 *Sean $S \subset N$, (N, u_S) el juego de unanimidad de la coalición S y (ω, Ω) con $\Omega = (S_1, \dots, S_m)$ un sistema ordenado de coaliciones. Definimos el valor de Shapley ponderado por el sistema de pesos p del juego de unanimidad (N, u_S) mediante*

$$Sh_i^{(\omega, \Omega)}(N, u_S) = \begin{cases} \frac{\omega_i}{\sum_{j \in S \cap S_k} \omega_j} & \text{si } i \in S \cap S_k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

con $k = \max\{j : S_j \cap S \neq \emptyset\}$ e $i \in N$.

Como podemos observar en la definición precedente, para cada juego de unanimidad, la partición ordenada divide a los jugadores en distintos niveles de forma que los jugadores del nivel más alto se reparten la utilidad proporcionalmente a sus pesos y el resto se lleva cero.

Aplicando la aditividad del valor de Shapley obtenemos la definición de valor de Shapley ponderado de un juego $(N, v) \in G^N$.

Definición 3.14 *Sean $(N, v) \in G^N$ y (ω, Ω) un sistema ordenado de pesos. Se define el valor de Shapley ponderado con sistema de pesos (ω, Ω) como el valor que a cada $i \in N$ le asigna*

$$Sh_i^{(\omega, \Omega)}(N, v) = \sum_{S \subset N} c_S Sh_i^{(\omega, \Omega)}(N, u_S),$$

siendo c_S , $S \subset N$, los correspondientes dividendos de Harsanyi del juego (N, v) .

Naturalmente, si $\omega_i = \omega_j$ para todo $i \neq j$ y $\Omega = \{N\}$, entonces $Sh = Sh^{(\omega, \Omega)}$.

Ejemplo 3.15 Consideremos el juego del guante (Ejemplo 1.17) con $L = \{1\}$ y $R = \{2, 3\}$. Calculamos el valor de Shapley ponderado para distintos sistemas ordenados de pesos.

Sistema de pesos	$Sh^{(\omega, \Omega)}$
$\omega = (1, 2, 3)$ $\Omega = \{N\}$	$(\frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$
$\omega = (1, 2, 3)$ $\Omega = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	$(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$
$\omega = (2, 2, 2)$ $\Omega = \{N\}$	$(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

Para el cálculo de los valores ponderados cuando $\Omega = \{N\}$,³ se puede proceder de la siguiente manera. Se calculan los vectores de contribuciones marginales y se calcula su media ponderada siendo las ponderaciones los números que se describen a continuación.

Sea $\pi = i_1 \dots i_{|N|} \in \Pi^N$. Definimos

$$P_\omega(\pi) = \prod_{j=1}^{|N|} \frac{\omega_{i_j}}{\sum_{k=1}^j \omega_{i_k}}.$$

Para $N = \{1, 2, 3\}$ y el orden $\pi = 123$, el peso del vector de contribuciones marginales $m^{123}(N, v)$ es $\frac{\omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}$. Los demás se construyen de modo análogo.

Veamos el cálculo en un par de ejemplos.

Ejemplo 3.16 El juego del guante considerado en el Ejemplo 3.15 es $v = [0, 0, 0, 1, 1, 0, 1]$. Si consideramos el sistema de pesos $\omega = (1, 2, 3)$ y lo normalizamos obtenemos $\omega' = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$:

	Jugador			
Orden	1	2	3	Ponderación
123	0	1	0	1/3
132	0	0	1	1/4
213	1	0	0	1/6
231	1	0	0	1/10
312	1	0	0	1/12
321	1	0	0	1/15

La media ponderada de los vectores de contribuciones marginales da el reparto $(5/12, 1/3, 1/4)$, que se corresponde con el valor de Shapley ponderado con los pesos $(1, 2, 3)$.

Ejemplo 3.17 Consideremos el juego $v = [0, 0, 100, 100, 200, 200, 300, 400]$ y $\omega = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

	Jugador			
Orden	1	2	3	Ponderación
123	0	100	300	1/12
132	0	200	200	1/12
213	100	0	300	1/6
231	100	0	300	1/4
312	100	200	100	1/6
321	100	200	100	1/4

³Para $\Omega \neq \{N\}$, el cálculo es análogo operando en cada coalición S_i por separado, y calculando la probabilidad final asociada a cada orden como el producto de las probabilidades previamente calculadas.

El valor de Shapley ponderado se corresponde con $(250/3, 325/3, 625/3)$.

A continuación, definimos el concepto de coalición de socios para proceder a dar dos propiedades que, conjuntamente con eficiencia, jugador nulo y aditividad, caracterizan los valores de Shapley ponderados.

Definición 3.18 *Una coalición S es una coalición de socios (partnership) en $(N, v) \in G^N$ si $v(T \cup R) = v(R)$ para todo $T \subsetneq S$ y $R \subset N \setminus S$.*

Una coalición de socios S se comporta como si fuera un único jugador de tal forma que cualquier coalición que no contenga a ningún socio no varía su utilidad si se une a un subgrupo propio de socios.

Definimos ahora las propiedades. Sea φ una regla de reparto en G^N .

Positividad Para todo juego monótono $(N, v) \in G^N$, $\varphi(N, v) \geq 0_N$.

La propiedad de positividad indica que si un juego es monótono, la regla de reparto no puede darle valores negativos a ningún jugador.

Compañerismo (Partnership) ⁴ Dada una coalición de socios S en $(N, v) \in G^N$, se verifica que

$$\varphi_i(N, v) = \varphi_i \left(S, \left(\sum_{j \in S} \varphi_j(N, v) \right) u_S \right)$$

para todo $i \in S$.

La propiedad de compañerismo nos indica que la utilidad total que consiguen en el juego (N, v) los miembros de cada coalición de socios, $\sum_{j \in S} \varphi_j(N, v)$, se la reparten los jugadores de S del mismo modo que si jugasen el juego de unanimidad u_S entre ellos solos.

Teorema 3.19 (Kalai y Samet (1987)) *Un valor φ verifica eficiencia, jugador nulo, aditividad, positividad y compañerismo si y solo si es un valor de Shapley ponderado $Sh^{(\omega, \Omega)}$ para algún sistema ordenado de pesos (ω, Ω) .*

3.5. Uniones a priori: el valor coalicional de Owen

Puede ocurrir que, por mecanismos externos al propio juego, no contemplados en la función característica, se sepa que ciertos jugadores tienen afinidades (de tipo personal, político, etc.) que provocan una mayor tendencia a cooperar entre ellos. De esta forma, el juego se modifica sustancialmente y se parte de un estado inicial en el que los jugadores que tienen afinidades aparecen agrupados en un sistema de coaliciones “a priori”. Owen (1977) estudia este problema para juegos con utilidad transferible, e introduce un valor llamado valor coalicional, o valor de Owen, que proporciona un reparto de la utilidad en juego. El proceso que realiza, básicamente, es el siguiente: la estructura coalicional induce un juego entre éstas (juego cociente), a cada coalición “a priori” le asigna el valor de Shapley del juego entre coaliciones y distribuye este valor entre los miembros de la coalición teniendo en cuenta las posibilidades de que estos entren a formar parte de otras coaliciones. Owen da una caracterización de su valor utilizando las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría entre jugadores de una misma coalición “a priori”, simetría en el juego cociente y aditividad. Pasamos a definir formalmente los conceptos que necesitamos.

⁴Nótese que el nombre en inglés (*partnership*) es el mismo para la coalición de socios y para el axioma de compañerismo.

Definición 3.20 Un sistema de coaliciones “a priori”⁵ $P = \{P_1, \dots, P_m\}$ es una partición de N . Una ordenación $\pi \in \Pi^N$ se dice admisible con respecto a P si es un ordenación de N tal que los elementos de las coaliciones “a priori” aparecen consecutivos. Denotaremos por Π_P^N el conjunto de ordenaciones admisibles con respecto a P .

Consideremos un juego (N, v) con sistema de coaliciones “a priori” P , que lo denotamos por (N, v, P) . Definimos a continuación el juego cociente, que desempeñará un papel importante en la definición del valor coalicional.

Definición 3.21 Sean $(N, v) \in G^N$ y $P = \{P_1, \dots, P_m\}$ un sistema de coaliciones “a priori”. Definimos el juego cociente, o juego entre coaliciones, (M, v_P) , como aquel con conjunto de jugadores $M = \{1, \dots, m\}$ y función característica

$$v_P(T) = v\left(\bigcup_{k \in T} P_k\right)$$

para todo $T \in 2^M$.

Como observamos, el juego cociente tiene tantos jugadores como elementos hay en la partición (representantes) y el valor que obtiene una coalición de representantes es el valor en el juego original de todos los jugadores que son representados por la coalición de representantes.

Denotaremos por G_P^N al conjunto de juegos con sistema de coaliciones “a priori” con N como conjunto de jugadores. Tras efectuar una serie de cuentas que aquí se omiten, se puede obtener el valor coalicional de la siguiente forma: primero, calculamos el juego cociente inducido por la partición de los jugadores; en segundo lugar, obtenemos el valor de Shapley del juego cociente que realiza un reparto entre las coaliciones “a priori”; finalmente, el valor asignado a cada coalición se distribuye entre sus miembros teniendo en cuenta las posibilidades de que dichos jugadores entren a formar parte de otras coaliciones.

Definición 3.22 Para cada $(N, v, P) \in G_P^N$, se define el valor coalicional, o valor de Owen, como

$$\psi(N, v, P) = \frac{1}{|\Pi_P^N|} \sum_{\pi \in \Pi_P^N} m^\pi(N, v).$$

El valor coalicional puede ser visto como la media de las contribuciones marginales, dándoles probabilidad cero a aquellas ordenaciones en las cuales entre dos jugadores de una coalición “a priori” hay jugadores de otras coaliciones “a priori”, e igual probabilidad al resto de ordenaciones, es decir, a aquellas en las que los jugadores de cada coalición “a priori” aparecen consecutivos. Además, $\psi(N, v, P) = Sh(N, v)$ si $P = \{N\}$ ó $P = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$.

Observación 3.23 Se puede comprobar que la expresión anterior es equivalente a

$$\psi_i(N, v, P) = \sum_{S \subset M: j \notin S} \sum_{K \subset P_j: i \notin K} \frac{k!(p_j - k - 1)!s!(m - s - 1)!}{p_j!m!} (v(Q \cup K \cup i) - v(Q \cup K))$$

para todo $i \in N$, siendo $k = |K|$, $s = |S|$, $m = |M|$, $p_j = |P_j|$ y $P_j \in P$ la única coalición para la que $i \in P_j$ y $Q = \bigcup_{k \in S} P_k$.

⁵También llamado *estructura coalicional*, ya que, formalmente, coincide con la presentada en la Definición 1.27.

Ejemplo 3.24 En el juego del guante (Ejemplo 3.15) calculamos el valor coalicional si los dos agentes con el guante de la mano derecha se coaligan. Es decir, consideremos el sistema $P = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$. Los vectores de contribuciones marginales de las permutaciones admisibles se recogen en la tabla:

	Jugador		
Orden	1	2	3
123	0	1	0
132	0	0	1
231	1	0	0
321	1	0	0
	2	1	1

Entonces, el valor coalicional es $\psi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Si tomamos $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, entonces el valor coalicional coincide con el valor de Shapley, $\psi = Sh = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.

Definimos ahora nuevos axiomas o propiedades básicas de una regla de reparto con el propósito de dar una caracterización del valor coalicional, similar a la dada para el valor de Shapley, a través de eficiencia, simetría, jugador nulo y aditividad.

Sea φ una regla de reparto en G_P^N .

Simetría individual Para todo $(N, v, P) \in G_P^N$, $i, j \in P_k$, tales que $v(S \cup i) = v(S \cup j)$ para todo $S \subset N \setminus \{i, j\}$,

$$\varphi_i(N, v, P) = \varphi_j(N, v, P).$$

Simetría en el cociente Para cada par $P_k, P_l \in P$ tales que $v_P(S \cup k) = v_P(S \cup l)$ con $S \subset M \setminus \{k, l\}$,

$$\sum_{i \in P_k} \varphi_i(N, v, P) = \sum_{i \in P_l} \varphi_i(N, v, P).$$

Teorema 3.25 (Owen (1977)) Existe un único valor en G_P^N verificando las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría individual, simetría en el cociente y aditividad; y es el valor coalicional de Owen.

Observación 3.26 Existen otras caracterizaciones del valor coalicional de Owen, en la misma línea que las alternativas del valor de Shapley, por ejemplo utilizando la propiedad de consistencia o mediante la propiedad de contribuciones equilibradas.

3.6. Situaciones con comunicación restringida: el valor de Myerson

En determinadas situaciones pueden existir limitaciones en la comunicación que no permitan que los jugadores cooperen libremente. Los dos principales valores estudiados en este contexto son el valor de Myerson (Myerson (1980)) y el valor posicional (Borm, Owen y otros (1992)). Este último valor no será tratado en esta monografía.

Myerson estudia situaciones de comunicación restringida y modeliza la restricción en la cooperación mediante un grafo. Si dos jugadores están unidos mediante un arco del grafo pueden comunicarse directamente y, por tanto, formar una coalición, pudiendo también comunicarse por medio de otros jugadores si éstos sirven de enlace en el grafo.

El valor de Myerson es el valor de Shapley del juego restringido por el grafo. Este juego representa el valor que puede obtener cada coalición si la restricción en la cooperación viene dada por un grafo. Comenzamos, pues, definiendo el concepto de grafo no orientado.

Definición 3.27 Un grafo no orientado en N es un conjunto de arcos o pares no ordenados de elementos distintos de N . Si denotamos por $[i : j]$ el arco que une a dos jugadores distintos $i, j \in N$ (por lo que $[i : j] = [j : i]$, ya que son pares no ordenados), entonces un grafo no orientado es cualquier subconjunto del conjunto

$$\{[i : j] : i, j \in N, i \neq j\}.$$

Denotamos por $g(N)$ el conjunto de grafos no orientados en N . Para cada $S \in 2^N$ y cada $A \in g(N)$, $i, j \in S$ están conectados en S a través de A si existe una secuencia de jugadores distintos $\{n^k\}_{k=0}^{k'} \subset S$ tal que $n^0 = i$, $n^{k'} = j$ y $[n^{k-1} : n^k] \in A$ para todo $k = 1, \dots, k'$. Una componente conexa es un subconjunto maximal de jugadores conectados a través de un grafo no orientado. Denotamos por $S|A$ la clase de las componentes conexas inducidas por A en S .

Ejemplo 3.28 Consideremos el grafo no orientado de la Figura 3.1, para el que $N = \{1, 2, 3\}$ y $A = \{[1 : 2], [1 : 3]\}$.

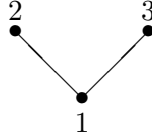


Figura 3.1: Un grafo no orientado.

Los jugadores 2 y 3 están conectados en $\{1, 2, 3\}$ a través de A , pero no lo están en $\{2, 3\}$. En el ejemplo,

$$\{1, 2, 3\}|A = \{\{1, 2, 3\}\}, \quad \{2, 3\}|A = \{\{2\}, \{3\}\}.$$

Definición 3.29 Una terna (N, v, A) , en la que $(N, v) \in G^N$ y $A \in g(N)$, se denomina un juego con comunicación restringida. Denotaremos por G_C^N al conjunto de los juegos con comunicación restringida con N como conjunto de jugadores.

Estamos ya en condiciones de definir formalmente el valor de Myerson en la clase de los juegos con comunicación restringida.

Definición 3.30 Sea $(N, v, A) \in G_C^N$, se define el valor de Myerson como

$$\varphi^M(N, v, A) = Sh(N, v^A)$$

siendo (N, v^A) el denominado juego de comunicación, dado por

$$v^A(S) = \sum_{T \in S|A} v(T)$$

para todo $S \subset N$.

El valor de Myerson es una generalización del valor de Shapley, puesto que cuando la comunicación entre los jugadores es completa, ambos valores coinciden. Esto es, si todos los pares de jugadores están conectados, entonces

$$\varphi^M(N, v, A) = Sh(N, v).$$

Las tres propiedades que definimos a continuación serán claves para caracterizar el valor de Myerson. Sea φ una regla de reparto en G_C^N .

Eficiencia en componentes Para todo $(N, v, A) \in G_C^N$ y $S \in N|A$,

$$\sum_{i \in S} \varphi_i(N, v, A) = v(S).$$

La propiedad de eficiencia en componentes nos indica que cada componente conexa S del grafo g se reparte la utilidad que puede conseguir.

Justicia (fairness) Para todo $(N, v, A) \in G_C^N$ y para todo $[i : j] \in A$,

$$\varphi_i(N, v, A) - \varphi_i(N, v, A \setminus [i : j]) = \varphi_j(N, v, A) - \varphi_j(N, v, A \setminus [i : j]).$$

La propiedad de justicia establece que si el arco que une a los jugadores i y j desaparece y, por tanto, estos jugadores no se pueden comunicar directamente, ambos jugadores se ven afectados de la misma forma.

Estabilidad Para todo $(N, v, A) \in G_C^N$ y para todo $[i : j] \in A$,

$$\begin{aligned} \varphi_i(N, v, A) &\geq \varphi_i(N, v, A \setminus [i : j]) \\ \varphi_j(N, v, A) &\geq \varphi_j(N, v, A \setminus [i : j]). \end{aligned}$$

La propiedad de estabilidad se refiere a que nunca puede ser perjudicial para los jugadores comunicarse directamente.

Enunciamos, sin demostración, una caracterización axiomática del valor de Myerson.

Teorema 3.31 (Myerson (1977)) *Existe un único valor en G_C^N que verifica las propiedades de eficiencia en componentes y justicia, y es el valor de Myerson. Además, en la subclase de juegos superaditivos, el valor de Myerson verifica estabilidad.*

Ejemplo 3.32 *Consideremos el grafo del Ejemplo 3.28 y el juego del dólar (Ejemplo 1.15). En este caso, la función característica del juego (N, v^A) es*

$$\begin{aligned} v^A(1) &= v^A(2) = v^A(3) = v^A(2, 3) = 0 \\ v^A(1, 2) &= v^A(1, 3) = v^A(1, 2, 3) = 1. \end{aligned}$$

El juego (N, v^A) es el juego del guante (Ejemplo 3.15), para el que ya hemos calculado su valor de Shapley:

$$\varphi_M(N, v, A) = Sh(N, v^A) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right).$$

3.7. El nucleolus y el prenucleolus

La noción básica para entender el nucleolus es la de exceso de una coalición. El exceso de una coalición S para un vector x es la diferencia entre el valor de la coalición y lo que le da la asignación x , matemáticamente, $e(S, x) = v(S) - x(S)$. Si es positivo, es decir si $x(S) < v(S)$, los miembros de S no estarán contentos con lo que reciben en x porque consiguen menos que lo que pueden obtener por ellos mismos. En este sentido, podríamos decir que el exceso mide la queja (o infelicidad) de la coalición frente a un posible reparto y que cada coalición estará mejor cuanto menor sea ese número. Cuanto mayor sea, más “infeliz” está la coalición S . Si $S = N$ o bien $S = \emptyset$, $e(S, x) = 0$. Por tanto,

a cada posible reparto x le asociaremos un vector de excesos que tendrá tantas coordenadas como coaliciones ($2^{|N|} - 2$ si descontamos la coalición vacía y la total).

El nucleolus (Schmeidler (1969)) es el reparto que hace que las quejas de las coaliciones sean lo más pequeñas posible en el sentido lexicográfico (que describiremos más adelante). Podríamos decir que el nucleolus se ocupa, en primer lugar, de contentar a las coaliciones más inestables. El prenucleolus se diferencia del nucleolus en que, en general, es una preimputación. Si el prenucleolus resulta ser racionalmente individual entonces va a coincidir con el nucleolus. En esto se basan muchos algoritmos de programación, que calculan en primer lugar el prenucleolus dado que es más fácil de obtener.

Schmeidler demostró la existencia del nucleolus utilizando funciones continuas y conjuntos no vacíos compactos. Por su parte, Maschler y otros (1979) dieron una caracterización geométrica de este valor.

En general, no hay una fórmula explícita para el cálculo del nucleolus sino que es necesario recurrir a resolver un número finito de problemas de programación lineal, aunque hay clases específicas de juegos para los que se dispone de una fórmula. El criterio de Kohlberg nos permite conocer si una imputación dada es, o no, el nucleolus de un juego.

Antes de definir formalmente el nucleolus, recordemos, brevemente, la definición de orden lexicográfico entre vectores:

Definición 3.33 Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

- Decimos que $x <_L y$ si existe $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, tal que

$$\begin{aligned} x_i &= y_i, 1 \leq i < k \\ x_k &< y_k. \end{aligned}$$

- Decimos que $x \leq_L y$ si $x = y$ ó $x <_L y$.

Dado un reparto $x \in \mathbb{R}^{|N|}$, sea $\theta(x)$ la $2^{|N|}$ -tupla cuyas componentes son los excesos, del valor de todas las coaliciones con respecto a x , ordenados de mayor a menor, es decir,

$$\theta_i(x) \geq \theta_j(x) \text{ si } 1 \leq i \leq j \leq 2^{|N|}.$$

Ahora ya estamos en condiciones de presentar el nucleolus de un juego como las asignaciones que minimizan lexicográficamente los vectores de excesos. El nucleolus es una solución que un árbitro podría recomendar para dividir $v(N)$ entre los jugadores si usa el siguiente procedimiento: primero se buscan las imputaciones que hacen que $\theta_1(x)$ sea mínimo (ésta es la máxima queja en contra de x , que se pretende minimizar). Después, entre los vectores que minimizan la máxima queja, el árbitro busca aquellos que minimizan la segunda máxima queja, y así sucesivamente.

Definición 3.34 Sea $(N, v) \in G^N$.

- Definimos el nucleolus del juego (N, v) como

$$Nu(N, v) = \{x \in I(N, v) : \theta(x) \leq_L \theta(y), \text{ para todo } y \in I(N, v)\}.$$

- Definimos el prenucleolus del juego (N, v) como

$$PreNu(N, v) = \{x \in I^*(N, v) : \theta(x) \leq_L \theta(y), \text{ para todo } y \in I^*(N, v)\}.$$

Los elementos del core verifican que $e(S, x) \leq 0$ para todo $S \subset N$. Por tanto, es evidente que los vectores de excesos de los elementos del core son lexicográficamente menores que los de cualquier punto de fuera del core. Esto implica, directamente, que si el core de un juego no es vacío entonces el nucleolus está contenido en el core. El prenucleolus de un juego consiste en un único reparto. Si el conjunto de imputaciones es no vacío, entonces el nucleolus existe y también consiste en una única imputación. El nucleolus y el prenucleolus pueden no coincidir, pero cuando el prenucleolus es una imputación, entonces coinciden. El nucleolus coincide con el prenucleolus en la clase de los juegos 0-monótonos (y, por tanto, en la de los superaditivos y en la de los convexos).

Es sencillo demostrar que, cuando se trabaja con imputaciones, la suma de las coordenadas del vector de excesos es constante. Matemáticamente, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{S \subset N} e(S, x) = k$$

para todo $x \in I(N, v)$.

También se verifica que para todo $x \in I(N, v)$,

$$e(S, x) + e(N \setminus S, x) = v(S) + v(N \setminus S) - v(N).$$

Ello implica que si disminuimos un exceso es a costa de aumentar el de la coalición complementaria. Enunciamos y demostramos un resultado más general.

Proposición 3.35 Sean $(N, v) \in G^N$, $x \in I^*(N, v)$ y $\mathcal{F}$ una colección equilibrada con pesos asociados $(\delta_S)_{S \in \mathcal{F}}$. Entonces existe $k_{\mathcal{F}} \in \mathbb{R}$, una constante que sólo depende de la familia $\mathcal{F}$, tal que:

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S e(S, x) = k_{\mathcal{F}}.$$

Demostración: Sean $(N, v) \in G^N$, $x \in I^*(N, v)$ y $\mathcal{F}$ una colección equilibrada con pesos asociados $(\delta_S)_{S \in \mathcal{F}}$. Se tiene que,

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S e(S, x) &= \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S (v(S) - x(S)) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S v(S) - \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S x(S) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S v(S) - v(N). \end{aligned}$$

Por tanto, $k_{\mathcal{F}} = \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S v(S) - v(N)$. ■

Como vemos en la siguiente definición, se puede definir el nucleolus de cualquier conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$.

Definición 3.36 Sea $X \subset \mathbb{R}^N$. El nucleolus del conjunto X es el conjunto

$$Nu(X) = \{x \in X : \theta(x) \leq_L \theta(y) \text{ para todo } y \in X\}.$$

Observemos que $Nu(N, v) = Nu(I(N, v))$. Procedemos a comentar, sin demostración, algunos resultados acerca del nucleolus.

Teorema 3.37 Sea $X \subset \mathbb{R}^N$, $X \neq \emptyset$ y X compacto. Entonces, $Nu(X) \neq \emptyset$ y es un conjunto compacto.

Del Teorema 3.37 deducimos que el nucleolus de cualquier conjunto compacto que no sea vacío también es un conjunto compacto que no es vacío. Si el conjunto, además, es convexo entonces el nucleolus se reduce a un punto.

Teorema 3.38 *Sea $X \subset \mathbb{R}^N$, $X \neq \emptyset$, convexo y compacto. Entonces $Nu(X)$ es un conjunto unitario.*

Como corolario del Teorema 3.38 deducimos que el nucleolus de un juego TU esencial es un punto, que pertenecerá al core si el juego es equilibrado.

Ejemplo 3.39 *Consideremos el juego del guante, siendo el jugador 1 el poseedor del guante único. Sabemos que $C(N, v) = \{(1, 0, 0)\}$. Luego $Nu(N, v) = (1, 0, 0)$.*

Existe otro resultado que indica que si el conjunto X es no vacío y cerrado y existe c un número real tal que $\sum_{i \in N} x_i = c$ (como es el caso del conjunto de preimputaciones) entonces $Nu(X)$ es un conjunto no vacío y compacto. Si el conjunto no es convexo, el nucleolus podría tener más de un punto.

Naturalmente, el prenucleolus de un juego consiste en un único punto, ya que $PreNu(N, v) = Nu(I^*(N, v))$.

Teorema 3.40 *El nucleolus de un juego esencial $(N, v) \in G^N$ consiste en un único punto. Si $C(N, v) \neq \emptyset$ entonces $Nu(N, v) \in C(N, v)$.*

Se puede comprobar que el nucleolus de un juego verifica las propiedades de jugador títere, jugador nulo y simetría.

Ejemplo 3.41 *Sabemos que el juego del dólar no es equilibrado, es decir, el core es el conjunto vacío, $C(N, v) = \emptyset$. Comprobaremos que $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es el nucleolus. Por una parte, dado que todos los jugadores son simétricos, el nucleolus ha de asignarles el mismo pago, digamos a . Pero, para que el valor sea eficiente ha de cumplirse que $a + a + a = 3a = v(N) = 1$. Luego, en efecto, x ha de ser el nucleolus. Ahora, calculamos los excesos del nucleolus*

$$\begin{aligned} e(N, x) &= 0 \\ e(\{1, 2\}, x) &= v(1, 2) - x_1 - x_2 = \frac{1}{3} \\ e(\{1, 3\}, x) &= v(1, 3) - x_1 - x_3 = \frac{1}{3} \\ e(\{2, 3\}, x) &= v(2, 3) - x_2 - x_3 = \frac{1}{3} \\ e(\{1\}, x) &= v(1) - x_1 = -\frac{1}{3} \\ e(\{2\}, x) &= v(2) - x_2 = -\frac{1}{3} \\ e(\{3\}, x) &= v(3) - x_3 = -\frac{1}{3} \\ e(\emptyset, x) &= 0 \end{aligned}$$

y escribimos el correspondiente vector de excesos

$$\theta(x) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

También es fácil deducir, de la propia definición, que el nucleolus de un juego transformado por cambios de origen y escala se corresponde con la transformación del nucleolus original, es decir, verifica la propiedad de covarianza.

Sobolev (1975) caracteriza el prenucleolus utilizando la propiedad de consistencia. Sea φ una regla de reparto. Para cada coalición $S \subset N$ se define el juego reducido $(S, \hat{v}_S^\varphi)$ siendo

$$\hat{v}_S^\varphi(R) = \begin{cases} 0 & \text{si } R = \emptyset \\ \max \{v(R \cup T) - \varphi(T) : T \subset N \setminus S\} & \text{si } \emptyset \neq R \subsetneq S \\ v(N) - \varphi(N \setminus R) & \text{si } R = S. \end{cases}$$

En el juego reducido $(S, \hat{v}_S^\varphi)$, la función característica de una subcoalición $R \subsetneq S$ representa la utilidad de los jugadores de R suponiendo que pueden “comprar” los recursos de algunos miembros de $N \setminus S$ mediante el pago de φ . Los jugadores de S , como gran coalición, deben comprar los recursos de todos los miembros de $N \setminus S$ también mediante el pago de φ .

Teorema 3.42 (Sobolev (1975)) *Existe una única regla de reparto que verifica covarianza, simetría y consistencia; y es el prenucleolus.*

El nucleolus no verifica la propiedad de aditividad (por la caracterización clásica de Shapley o considerando un contraejemplo). Una propiedad que diferencia al nucleolus y el prenucleolus de otros conceptos de solución es que ambos están en el core (si éste es no vacío), lo que no le ocurre, por ejemplo, al valor de Shapley. Por añadidura, el nucleolus verifica la propiedad de monotonía coalicional débil (Zhou (1991)), si bien falla en las otras tres propiedades de monotonía estudiadas: monotonía fuerte, monotonía coalicional y monotonía en el agregado.

Se puede calcular el nucleolus resolviendo una secuencia de programas lineales. En cualquier caso, la complejidad del algoritmo es exponencial en el número de jugadores y, por tanto, sólo es útil para juegos con pocos jugadores.

A continuación, presentamos una forma constructiva para el cálculo del nucleolus cuyos detalles y justificación teórica pueden verse en el trabajo de Maschler y otros (1979). En este trabajo se describe un método geométrico para el cálculo del nucleolus fácil de aplicar a juegos de tres jugadores.

Primeramente calculamos el least core del juego (que se corresponde con resolver el primer problema de programación lineal que veremos más adelante). A continuación, no modificamos los valores de aquellas coaliciones que nos darían un ε -core vacío, pero continuamos haciendo lo mismo con el resto, calculando el nuevo ε -core con esa condición. El proceso finaliza al encontrar un punto que será el nucleolus del juego. Sea $(N, v) \in G^N$ un juego esencial y consideremos los conjuntos,

$$X^0 = I(N, v) \text{ y } \Sigma^0 = \{S \subset N : S \neq N, S \neq \emptyset\}.$$

Se define de forma recursiva

$$\begin{aligned} \epsilon^j &= \min_{x \in X^{j-1}} \max_{S \in \Sigma^{j-1}} e(S, x) \\ X^j &= \{x \in X^{j-1} : \max_{S \in \Sigma^{j-1}} e(S, x) = \epsilon^j\} \\ \Sigma_j &= \{S \in \Sigma^{j-1} : e(S, x) = \epsilon^j, \text{ para todo } x \in X^j\} \\ \Sigma^j &= \Sigma^{j-1} \setminus \Sigma_j, \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, s$, con $s = \min\{j : j \geq 1, \Sigma^j = \emptyset\}$. El nucleolus coincide con el conjunto final X^s .

Ejemplo 3.43 Sea (N, v) el juego con $N = \{A, B, C\}$ y función característica,

$$\begin{aligned} v(A) &= v(B) = v(C) = 0 \\ v(A, B) &= 4, \quad v(A, C) = 0, \quad v(B, C) = 3 \\ v(A, B, C) &= 6. \end{aligned}$$

Consideremos la imputación $x = (2, 3, 1)$ y calculemos los correspondientes excesos.

$$\begin{aligned} e(N, x) &= 0 \\ e(\{A, B\}, x) &= -1, \quad e(\{A, C\}, x) = -3, \quad e(\{B, C\}, x) = -1 \\ e(\{A\}, x) &= -2, \quad e(\{B\}, x) = -3, \quad e(\{C\}, x) = -1 \\ e(\emptyset, x) &= 0. \end{aligned}$$

Observamos que en las coaliciones $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ y $\{C\}$, el exceso es de -1 . Traspasamos de A a B la cantidad $\frac{1}{2}$ y consideramos la nueva imputación $y = (1.5, 3.5, 1)$. De nuevo, calculamos los excesos,

$$\begin{aligned} e(N, y) &= 0 \\ e(\{A, B\}, y) &= -1, \quad e(\{A, C\}, y) = -2.5, \quad e(\{B, C\}, y) = -1.5 \\ e(\{A\}, y) &= -1.5, \quad e(\{B\}, y) = -3.5, \quad e(\{C\}, y) = -1 \\ e(\emptyset, y) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, $Nu(N, v) = (1.5, 3.5, 1)$, dado que no podemos disminuir el exceso -1 de las coaliciones $\{A, B\}$ y $\{C\}$ al mismo tiempo. Si calculamos el core del juego, obtenemos

$$C(N, v) = \text{conv}\{(0, 4, 2), (0, 6, 0), ((3, 3, 0), (3, 1, 2)\}.$$

Calculamos el least core que se obtiene con $\varepsilon_1 = -1$.

$$LC(N, v) = C_{-1}(N, v) = \text{conv}\{(2, 3, 1), (1, 4, 1)\}.$$

Observamos que se han saturado las restricciones $x_1 + x_2 = 5$ y $x_3 = 1$. Procedemos, por tanto, a considerar el siguiente juego:

$$\begin{aligned} w_{\varepsilon_2}(A) &= w_{\varepsilon_2}(B) = -\varepsilon_2, \quad w_{\varepsilon_2}(C) = 0 \\ w_{\varepsilon_2}(A, B) &= 4, \quad w_{\varepsilon_2}(A, C) = -\varepsilon_2, \quad w_{\varepsilon_2}(B, C) = 3 - \varepsilon_2 \\ w_{\varepsilon_2}(A, B, C) &= 6. \end{aligned}$$

Calculamos ε_2 para forzar la siguiente saturación, que se obtiene para $\varepsilon_2 = -1.5$. El core del juego w_{ε_2} se corresponde con el nucleolus $Nu(N, v) = (1.5, 3.5, 1)$. Podemos observar que el primer exceso es $\varepsilon_1 = -1$ y el segundo es $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = -0.5$.

Observación 3.44 Aplicando programación lineal, dado un reparto $x = (x_1, x_2, x_3)$, la primera coordenada del vector de excesos sería:

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \max_{S \in \Sigma^0} e(S, x) \\ &= \max\{-x_1, -x_2, -x_3, 4 - x_1 - x_2, -x_1 - x_3, 3 - x_2 - x_3\}. \end{aligned}$$

Por tanto, la primera coordenada del vector de excesos del nucleolus vendría dada por el valor óptimo del siguiente programa:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \theta_1(x_1, x_2, x_3) \\ \text{sujeto a:} \quad & \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Claramente, la función objetivo $\theta_1(x_1, x_2, x_3)$ no tiene por que ser lineal. No obstante, este problema es equivalente al siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \varepsilon_1 \\ \text{sujeto a :} & \left\{ \begin{array}{l} -x_1 \leq \varepsilon_1 \\ -x_2 \leq \varepsilon_1 \\ -x_3 \leq \varepsilon_1 \\ 4 - x_1 - x_2 \leq \varepsilon_1 \\ -x_1 - x_3 \leq \varepsilon_1 \\ 3 - x_2 - x_3 \leq \varepsilon_1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{array} \right. \end{array}$$

La solución de este problema es $\varepsilon_1 = -1$. Sustituyendo tenemos que $x_1 + x_2 \geq 5$, $x_3 \geq 1$, y $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Es decir, $x_3 = 1$ y $x_1 + x_2 = 5$. En el segundo paso resolveríamos el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \varepsilon_2 \\ \text{sujeto a :} & \left\{ \begin{array}{l} -x_1 \leq \varepsilon_2 \\ -x_2 \leq \varepsilon_2 \\ -x_1 - 1 \leq \varepsilon_2 \\ 2 - x_2 \leq \varepsilon_2 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{array} \right. \end{array}$$

La solución de este problema es $\varepsilon_2 = -1.5$.

Las siguientes proposiciones nos dan condiciones para comprobar si una asignación es el prenucleolus o el nucleolus de un juego. Recordemos que si el juego es 0-monótono el prenucleolus coincide con el nucleolus y no habría que hacer distinción. Se conocen como criterios de Kohlberg.

Proposición 3.45 (Criterio de Kohlberg para el prenucleolus) Consideremos un juego con utilidad transferible $(N, v) \in G^N$ y una preimputación $x \in I^*(N, v)$. Denotemos por $k(x)$ el número de excesos distintos de la preimputación x . El reparto x es el prenucleolus del juego si y solo si para $1 \leq j \leq k(x)$ se verifica que $\bigcup_{t=1}^j F^t$ es una familia equilibrada, siendo F^t el conjunto de coaliciones asociadas al t -ésimo exceso en el orden no decreciente.

Proposición 3.46 (Criterio de Kohlberg para el nucleolus) Consideremos un juego con utilidad transferible $(N, v) \in G^N$ y una imputación $x \in I(N, v)$. Sea $F^0 = \{\{i\} : i \in N\}$. Denotemos por $k(x)$ el número de excesos distintos de la imputación x . El reparto x es el nucleolus del juego si y solo si para $1 \leq j \leq k(x)$ se verifica que $\bigcup_{t=1}^j F^t \cup F^0$ es una familia equilibrada débilmente⁶, siendo F^t el conjunto de coaliciones asociadas al t -ésimo exceso en el orden no decreciente.

Puede consultarse la demostración en el artículo original de Kohlberg (1971).

Ejemplo 3.47 Sea el juego (N, v) donde

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = 0, v(3) = 20 \\ v(1, 2) &= 5, v(1, 3) = 25, v(2, 3) = 25 \\ v(1, 2, 3) &= 30. \end{aligned}$$

Comprobemos que $x = (\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{70}{3})$ es el nucleolus del juego. Los excesos asociados a las coaliciones son

⁶Los δ_S asociados a las coaliciones de F^t tienen que ser estrictamente positivos pero los pesos asociados a las coaliciones individuales pueden ser 0; es decir, $\delta_i \geq 0$ para todo $i \in N$.

Excesos	Familia
$-5/3$	$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$
$-10/3$	$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

Dado que la primera familia es equilibrada y la unión de la primera con la segunda también lo es, x es el nucleolus del juego.

Ejemplo 3.48 Sea el juego (N, v) dado por

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) &= 4, v(1, 3) = 9, v(2, 3) = 2 \\ v(1, 2, 3) &= 10. \end{aligned}$$

Veamos si $x = (5, 1, 4)$ es el nucleolus del juego. El exceso mayor se obtiene para la coalición $\{1, 3\}$ y, dado que no es equilibrada, x no es el nucleolus del juego. ¿Y la imputación $y = (5.75, 0.5, 3.75)$? Los excesos asociados a las coaliciones son:

Excesos	Familia
-0.5	$\{\{2\}, \{1, 3\}\}$
-2.25	$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$
-3.75	$\{\{3\}\}$
-5.75	$\{\{1\}\}$

Se puede comprobar que las familias

$$\begin{aligned} &\{\{2\}, \{1, 3\}\}; \{\{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\} \\ &\{\{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3\}\}; \{\{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3\}, \{1\}\} \end{aligned}$$

son equilibradas. Por tanto, la imputación $y = (5.75, 0.5, 3.75)$ es el nucleolus.

Ejemplo 3.49 Consideremos el siguiente juego en el que nucleolus y prenucleolus son distintos. Sea el juego (N, v) dado por

$$\begin{aligned} v(1) &= 2, v(2) = 1, v(3) = 0 \\ v(1, 2) &= 9, v(1, 3) = 2, v(2, 3) = 1 \\ v(1, 2, 3) &= 6. \end{aligned}$$

Comprobamos que $Nu(N, v) = (3.5, 2.5, 0)$ y $PreNu(N, v) = (4.25, 3.25, -1.5)$. El vector de excesos asociado al nucleolus es el siguiente:

Excesos	Coaliciones
3	$\{1, 2\}$
0	$\{3\}$
-1.5	$\{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

Se puede comprobar fácilmente el criterio de Kolhberg, la primera familia a considerar sería

$$\{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

dado que tenemos que añadir las coaliciones individuales a la coalición $\{1, 2\}$. Dicha familia es débilmente equilibrada con pesos $\delta_{(1,2)} = 1, \delta_1 = \delta_2 = 0$ y $\delta_3 = 1$. La segunda familia a considerar coincide con la primera, con lo que ya es equilibrada. Por último, la familia de todas las coaliciones siempre es equilibrada.

Las comprobaciones para el prenucleolo son las siguientes:

<i>Excesos</i>	<i>Coaliciones</i>
1.5	$\{3\}, \{1, 2\}$
-0.75	$\{1, 3\}, \{2, 3\}$
-2.25	$\{1\}, \{2\}$

En este caso verificaríamos que las familias $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$ y $\{\{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ son equilibradas (la primera es una partición y la segunda lo es, por ejemplo, con pesos $\delta_{(3)} = \frac{1}{2}, \delta_{(1,2)} = \frac{3}{4}, \delta_{(1,3)} = \frac{1}{4}$ y $\delta_{(2,3)} = \frac{1}{4}$).

El siguiente resultado es un teorema de imposibilidad en relación a dos propiedades deseables para una solución puntual: selección en el core y monotonía coalicional.

Teorema 3.50 (Young (1985)) Para $n \geq 5$ no existen reglas eficientes en G^N que verifiquen simultáneamente selección en el core y monotonía coalicional.

Observación 3.51 Housman y Clark (1998) probaron que para cuatro jugadores también se tiene el teorema de imposibilidad, mientras que para tres jugadores existen infinitas reglas eficientes que verifican ambas propiedades. Recordemos que el valor de Shapley verifica monotonía coalicional (dado que verifica monotonía fuerte, y esta propiedad implica monotonía coalicional) pero, en general, no está en el core. El nucleolus y el prenucleolus verifican selección en el core, sin embargo, no verifican monotonía coalicional.

3.8. El τ -valor

En esta sección estudiaremos el τ -valor (léase *tau-valor*), definido para los juegos cuasi-equilibrados o de compromiso admisible.

Definición 3.52 Sean $(N, v) \in G^N$ un juego TU de compromiso admisible, $m(N, v)$ el vector de mínimos derechos y $M(N, v)$ el vector de los pagos de utopía de los jugadores. Se define el τ -valor como el reparto que verifica

$$\tau(N, v) = m(N, v) + \alpha(M(N, v) - m(N, v))$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i \in N} \tau_i(N, v) = v(N)$.

El τ -valor elige un elemento en el core-cover de tal forma que cada jugador reciba su mínimo derecho más una cantidad añadida que depende de su pago de utopía, véase la Figura 3.2. Obviamente, el τ -valor no tiene por que ser un elemento del core.

El Teorema 2.58 (Capítulo 2) prueba que los juegos equilibrados o de core no vacío son de compromiso admisible.

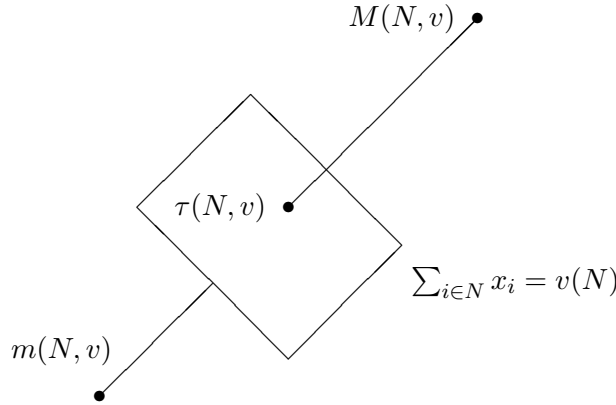
Ejemplo 3.53 Consideremos el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica,

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) &= 100, v(1, 3) = 200, v(2, 3) = 300 \\ v(1, 2, 3) &= 400. \end{aligned}$$

Se puede comprobar que $m(N, v) = (0, 0, 100)$ y $M(N, v) = (100, 200, 300)$. Entonces,

$$\tau(N, v) = (0, 0, 100) + \alpha(100, 200, 200)$$

con α verificando que $\sum_{i \in N} \tau_i(N, v) = 400$. De estas relaciones obtenemos $\alpha = \frac{3}{5}$ y $\tau(N, v) = (60, 120, 220)$.

Figura 3.2: Esquema de la definición del τ -valor.

3.9. El core-center

En González y Sánchez (2007) se define el core-center (*centro del núcleo*) de un juego con núcleo no vacío. La idea es muy simple: supongamos que todos los jugadores quieren obtener un reparto en el core del juego. Es evidente que en el core hay asignaciones que benefician más a unos jugadores que a otros. Un árbitro imparcial podría optar por promediar todas las asignaciones del core. El core-center se define como el centro de gravedad del core si consideramos que su “masa” está uniformemente distribuida.

Supongamos $|N| = n$. Dado $1 \leq r \leq n$, sea m_r la medida de Lebesgue r -dimensional. La medida $(n-1)$ -dimensional del core viene dada por

$$m_{n-1}(C(N, v)) = \int_{C(N, v)} dm_{n-1}.$$

Definición 3.54 Sea $(N, v) \in G^N$ un juego equilibrado con $|N| = n$. El core-center del juego (N, v) , $\mu(N, v)$, asigna a cada jugador $i \in N$,

$$\mu_i(N, v) = \frac{1}{m_{n-1}(C(N, v))} \int_{C(N, v)} x_i dm_{n-1}.$$

Proposición 3.55 Sea $(N, v) \in G^N$ un juego equilibrado con $|N| = n$. El core-center del juego (N, v) se puede calcular para cada $i \in N$ como

$$\mu_i(N, v) = \frac{1}{m_{n-1}(\hat{C}(N, v))} \int_{\hat{C}(N, v)} x_i dm_{n-1},$$

siendo $\hat{C}(N, v)$ la proyección del core $C(N, v)$ sobre $\mathbb{R}^{N \setminus i_0}$ para algún $i_0 \in N$.

Demostración: Sea $i_0 \in N$. El core del juego (N, v) tiene dimensión $n-1$ y está contenido en el hiperplano eficiente $x(N) = v(N)$, cuyo vector normal tiene módulo $\sqrt{n}$. La transformación $g: \mathbb{R}^{N \setminus i_0} \rightarrow \mathbb{R}^N$ dada por $g(x_i) = x_i$ para todo $i \neq i_0$ y $g(x_{i_0}) = v(N) - x(N \setminus i_0)$ define un sistema de coordenadas para $C(N, v)$, de tal forma que $g^{-1}(C(N, v))$ es la proyección del core sobre $\mathbb{R}^{N \setminus i_0}$ que suprime la coordenada i_0 . Sea $\hat{C}(N, v) = g^{-1}(C(N, v)) \subset \mathbb{R}^{N \setminus i_0}$. Entonces:

$$m_{n-1}(C(N, v)) = \int_{C(N, v)} dm_{n-1} = \int_{g^{-1}(C(N, v))} \sqrt{n} dm_{n-1} = \sqrt{n} m_{n-1}(\hat{C}(N, v)).$$

Así, el volumen del core como subconjunto de $\mathbb{R}^N$ es $\sqrt{n}$ veces el volumen de su proyección en $\mathbb{R}^{N \setminus i_0}$. Procediendo de forma análoga con el numerador obtenemos que, para cada $i \in N$,

$$\begin{aligned}\mu_i(N, v) &= \frac{1}{m_{n-1}(C(N, v))} \int_{C(N, v)} x_i \, dm_{n-1} \\ &= \frac{1}{m_{n-1}(C(N, v))} \int_{\hat{C}(N, v)} \sqrt{n} x_i \, dm_{n-1} \\ &= \frac{1}{m_{n-1}(\hat{C}(N, v))} \int_{\hat{C}(N, v)} x_i \, dm_{n-1}.\end{aligned}$$

■

Proposición 3.56 *El core-center verifica las propiedades de eficiencia, selección en el core, simetría, covarianza, jugador nulo, jugador títere y monotonía coalicional débil.*

Demostración: Es sencillo probar que el core-center verifica las propiedades de eficiencia, selección en el core, simetría, covarianza, jugador nulo y jugador títere, bien porque son propiedades intrínsecas del propio core o como consecuencia de las propiedades de la esperanza matemática. Demostramos en detalle que también verifica monotonía coalicional débil.

Sean (N, v) y (N, w) dos juegos con core no vacío que verifican las hipótesis de monotonía coalicional débil, es decir, sólo difieren en que para cierta coalición T , $w(T) > v(T)$. Si $T = N$ el resultado se sigue directamente de eficiencia. Por tanto, supongamos que $T \subsetneq N$. Si $C(N, w) = C(N, v)$ entonces $\mu(N, w) = \mu(N, v)$ y $\sum_{i \in T} \mu_i(N, w) \geq \sum_{i \in T} \mu_i(N, v)$. Por tanto, podemos suponer que $C(N, w) \subsetneq C(N, v)$. Sea $x \in C(N, v) \setminus C(N, w)$ e $y \in C(N, w)$, con lo que $\sum_{i \in T} y_i \geq w(T) > \sum_{i \in T} x_i$. Por tanto, por la propia definición del core-center como esperanza de la distribución uniforme sobre el core, tenemos que $\sum_{i \in T} \mu_i(N, w) \geq \sum_{i \in T} \mu_i(N, v)$. ■

Observación 3.57 *En general el core-center no verifica monotonía fuerte, monotonía coalicional ni monotonía en la gran coalición. Tal y como hemos visto en la anterior proposición sí verifica monotonía coalicional débil. Por tanto, podemos decir que, en cuanto a las monotonías, tiene un comportamiento similar al nucleolus.*

Ejemplo 3.58 *Sea el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica*

$$\begin{aligned}v(1) &= v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) &= 0, v(1, 3) = 12, v(2, 3) = 6 \\ v(1, 2, 3) &= 30.\end{aligned}$$

Consideremos $i_0 = 3$. En la Figura 3.3 aparece representado el core sobre el que tenemos que integrar. Calculamos en primer lugar el volumen del core proyectado:

$$m_{n-1}(\hat{C}(N, v)) = \int_0^{12} \int_0^{18} 1 dx_2 dx_1 + \int_{12}^{24} \int_0^{30-x_1} 1 dx_2 dx_1 = 360.$$

La primera coordenada del core-center:

$$\begin{aligned}\mu_1(N, v) &= \frac{1}{m_{n-1}(C(N, v))} \int_{C(N, v)} x_1 \, dm_{n-1} = \frac{1}{d} \int_0^{12} \int_0^{18} x_1 dx_2 dx_1 + \int_{12}^{24} \int_0^{30-x_1} x_1 dx_2 dx_1 \\ &= \frac{3744}{360} = 10.4.\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\mu_2(N, v) &= \frac{1}{m_{n-1}(C(N, v))} \int_{C(N, v)} x_2 \, dm_{n-1} = \frac{1}{d} \int_0^{12} \int_0^{18} x_2 dx_2 dx_1 + \int_{12}^{24} \int_0^{30-x_1} x_2 dx_2 dx_1 \\ &= \frac{2880}{360} = 8.\end{aligned}$$

La tercera coordenada la podemos obtener por eficiencia, $\mu_3(N, v) = 30 - 10.4 - 8 = 11.6$.

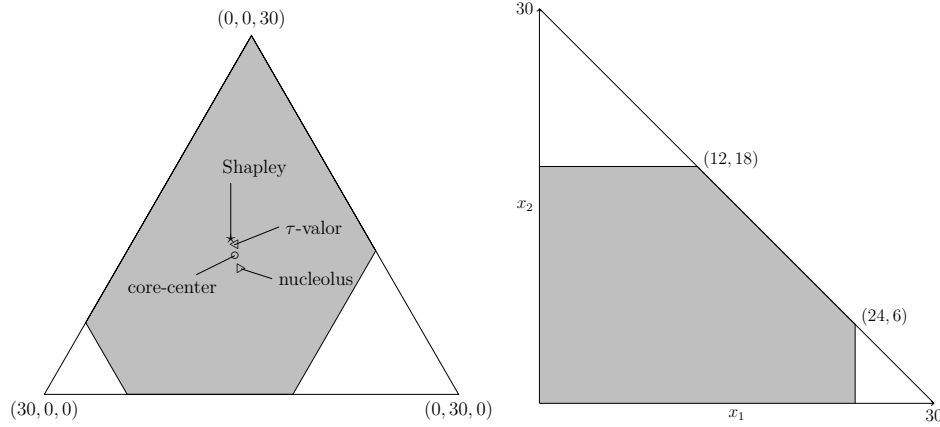


Figura 3.3: Izquierda: core (gris) y distintas soluciones. Derecha: core proyectado (gris).

En la siguiente tabla aparecen las soluciones puntuales estudiadas y en la Figura 3.3 (izquierda) están representadas.

Solución puntual	Reparto
valor de Shapley	(10, 7, 13)
nucleolus	(10.5, 9, 10.5)
τ -valor	(10, 7.5, 12.5)
core-center	(10.4, 8, 11.6)

3.10. Programación y recursos informáticos

Las dificultades computacionales asociadas a los juegos TU son evidentes. La propia función característica (datos de entrada) viene determinada por $2^{|N|} - 1$ valores coalicionales y, por tanto, la complejidad de los juegos TU es, al menos, de orden exponencial en el número de jugadores.

En el artículo Mirás Calvo y Sánchez Rodríguez (2010) aparecen recogidos los aspectos computacionales generales de los juegos coalicionales TU, además de encontrar una revisión sobre las herramientas disponibles en Internet para el cálculo de las distintas soluciones de tipo conjunto y puntuales. Los mismos autores han desarrollado el paquete TUGlab, Mirás Calvo y Sánchez Rodríguez (2008), disponible en código abierto en la página del grupo SaGaTh (Santiago Game Theory Group):

<http://eio.usc.es/pub/io/xogos>

Además, en la siguiente dirección se puede utilizar una aplicación online de TUGlab registrándose previamente, que se denomina TUGlabWeb.

<http://www.tuglabweb.co.nr/>

Ejercicios

1. Calcula el valor de Shapley de los juegos (N, v) y (N, w) y da las correspondientes interpretaciones.
 - a) $v = [0, 0, 0, 4, 7, 15, 20]$
 - b) $w = [0, 0, 0, 6, 5, 5, 10]$.
2. Demuestra que las propiedades de eficiencia, simetría y marginalidad implican la propiedad de jugador nulo (utiliza el juego nulo $v_0(S) = 0, S \subset N$).
3. Considera la regla φ definida como sigue:

$$\varphi_i(N, v) = \begin{cases} v(N) & \text{si } i = 1 \text{ y no existen jugadores simétricos en } (N, v) \\ 0 & \text{si } 1 \in N \setminus i \text{ y no existen jugadores simétricos en } (N, v). \\ Sh_i(N, v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Comprueba que φ verifica simetría pero no anonimato.

4. Calcula el valor de Shapley en un juego de mayoría simple de n jugadores.
5. Comprueba si el algoritmo de Harsanyi para calcular el valor de Shapley que reparte los valores de las coaliciones de las más pequeñas a las más grandes se puede aplicar (con la correspondiente modificación ponderada) para los valores de Shapley ponderados.
6. Calcula el nucleolus para los juegos asociados a los tres problemas del Talmud
 - a) $v = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 100]$
 - b) $w = [0, 0, 0, 0, 0, 100, 200]$
 - c) $s = [0, 0, 0, 0, 100, 200, 300]$.
7. Calcula el valor de Myerson, el valor coalicional de Owen y un valor ponderado de Shapley para el juego $v = [0, 0, 0, 4, 7, 15, 20]$. Por ello, motiva adecuadamente tres situaciones concretas en la que proceda su cálculo (una para cada valor) y compara las soluciones con el valor de Shapley. Calcula también el nucleolus y el core-center. Representa las soluciones calculadas dentro del triángulo de imputaciones.
8. Calcula el nucleolus de los juegos estudiados en el ejercicio 5 del capítulo 2.
9. Consideremos el juego del guante, siendo el jugador 3 el poseedor del guante único. Calcula los excesos correspondientes a los vectores $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $y = (0, 0, 1)$, $z = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, y $w = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$. Comprueba que $\theta(y) <_L \theta(z) <_L \theta(x) <_L \theta(w)$.
10. ¿Cuándo está garantizada la existencia del nucleolus? Considera el juego $v = [6, 5, 4, 2, 4, 3, 12]$. ¿Cuánto vale su prenucleolus? ¿Coincide con el nucleolus?
11. Considera el juego $v = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$. Calcula su prenucleolus y su nucleolus.
12. Calcula el nucleolus y el prenucleolus del juego $v = [2, 1, 0, 9, 2, 1, 6]$.
13. Considera el juego $v = [0, 0, 0, 0, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 2]$. Calcula el least-core y el nucleolus. Considera ahora el juego (N, w) tal que $w(1, 2, 3) = \frac{5}{4}$ y $w(S) = v(S)$ para todo $S \neq \{1, 2, 3\}$. ¿Cuál es ahora el nucleolus? ¿Y si consideramos el juego (N, v_α) (con $1 \leq \alpha \leq \frac{5}{4}$) siendo $v_\alpha(1, 2, 3) = \alpha$ y $v_\alpha(S) = v(S)$ para todo $S \neq \{1, 2, 3\}$?

Capítulo 4

Aplicaciones

Presentamos a continuación una pequeña muestra de juegos asociados a problemas concretos que tienen aplicación práctica a situaciones reales. En concreto,

- Juegos simples.
- Mercados de intercambio.
- Problemas del aeropuerto.
- Problemas de bancarrota.
- Problemas de árbol de expansión de coste mínimo.
- Problemas de flujo máximo.

Además de presentar cada modelo formalmente, indicaremos algunas particularidades de cada uno en relación a las principales soluciones que han sido estudiadas en los capítulos previos.

4.1. Juegos simples

Los juegos simples tienen como ámbito primordial de aplicación la “politología”. Por poner un ejemplo, se utilizan para describir todas las posibilidades de formar gobierno una vez que tenemos el reparto de escaños en un parlamento. En este contexto, el concepto de índice de poder es el equivalente a solución puntual. Estudiaremos el índice de Shapley-Shubik (Shapley y Shubik (1954)) que se corresponde con el valor de Shapley del juego asociado, el índice de Banzhaf normalizado (Banzhaf (1964-65)) y el índice de poder de Banzhaf absoluto (Penrose (1946) y Dubey y Shapley (1979)). En <http://powerslave.val.utu.fi/index.html> puede encontrarse un completo recopilatorio de las soluciones en los juegos simples, incluyendo software para su cálculo.

Definición 4.1 *Un juego simple es un par $(N, \mathcal{W})$ donde $N \subset \mathbb{N}$ es un conjunto finito de jugadores y $\mathcal{W} \subset 2^N$ es un subconjunto de conjuntos de N .*

Un conjunto perteneciente a $\mathcal{W}$ se denomina *coalición ganadora*. En un juego simple, se alcanza un acuerdo cuando lo apoya una coalición ganadora.

Esta interpretación obliga a exigir las siguientes condiciones:

- $\emptyset \notin \mathcal{W}$.
- $N \in \mathcal{W}$.

- Si $S \in \mathcal{W}$ y $S \subset T$, entonces $T \in \mathcal{W}$.

Bajo estas condiciones, un juego simple $(N, \mathcal{W})$ se puede expresar como un juego TU (N, v) tal que

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \in \mathcal{W} \\ 0 & \text{si } S \notin \mathcal{W}. \end{cases}$$

Un juego simple, expresado como juego TU (N, v) , siempre será monotónico (véase Definición 1.10) y, además, $v(N) = 1$ y $v(S) \in \{0, 1\}$ para todo $S \subset N$. Recíprocamente, si un juego TU (N, v) es monótono y, además, $v(N) = 1$ y $v(S) \in \{0, 1\}$ para todo $S \subset N$, entonces es equivalente al juego simple $(N, \mathcal{W})$ con

$$\mathcal{W} = \{S \subset N : v(S) = 1\}.$$

Definición 4.2 Sea $(N, v) \in G^N$ equivalente a un juego simple $(N, \mathcal{W})$.

- Una coalición $S \subset N$ se llama coalición ganadora si $S \in \mathcal{W}$ o, equivalentemente, $v(S) = 1$.
- Una coalición $S \subset N$ se llama coalición perdedora si $S \notin \mathcal{W}$ o, equivalentemente, $v(S) = 0$.
- Diremos que $S \in \mathcal{W}$ es una coalición ganadora minimal si no contiene propiamente a otra coalición ganadora; es decir, si $T \notin \mathcal{W}$ (equivalentemente, $v(T) = 0$), para toda $T \subsetneq S$.
- Un jugador $i \in N$ es:
 - Dictador si $S \in \mathcal{W} \iff i \in S$.
 - Veto si $S \in \mathcal{W} \implies i \in S$.

Denotaremos por $\mathcal{W}^m$ al conjunto de coaliciones ganadoras minimales. Es decir,

$$\mathcal{W}^m = \{S \in \mathcal{W} : T \notin \mathcal{W} \text{ si } T \subsetneq S\}.$$

Definición 4.3 Dado un juego simple $(N, \mathcal{W})$ y un jugador $i \in N$, un “swing”(cambio) para el jugador i se define como una coalición $S \subset N$ tal que $i \in S$, S es una coalición ganadora y $S \setminus i$ es perdedora. Decimos entonces que i es pivote en S .

Denotamos como $\mathcal{W}^i$ el conjunto de cambios para el jugador $i \in N$.

Proposición 4.4 Dado un juego simple $(N, \mathcal{W})$, un jugador $i \in N$ es

- Dictador si y solo si $\mathcal{W} = \mathcal{W}^i$.
- Veto si y solo si $\mathcal{W}^m \subset \mathcal{W}^i$.

Demostración: Es claro que las dos condiciones son suficientes. Veamos que también son necesarias.

a) Si i es un dictador, entonces una coalición es ganadora si y solo si i pertenece a ella, por lo que $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}^i$. Por otro lado, $\mathcal{W} \supset \mathcal{W}^i$ por definición.

b) Si i es veto, entonces pertenece a todas las coaliciones ganadoras, por lo que, en particular, pertenecerá a todas las coaliciones ganadoras minimales. De ahí se deduce que $\mathcal{W}^m \subset \mathcal{W}^i$. ■

A continuación veremos como a partir de los juegos simples, se modelizan tanto la conocida como *regla de mayoría absoluta* como el *poder* en el juego de un Parlamento.

Definición 4.5 (Juego de mayoría absoluta) Supongamos una situación en la que tenemos un conjunto finito N de votantes (o jugadores) y que cada uno dispone de un único voto. Un juego de mayoría absoluta es el juego simple $(N, \mathcal{W})$ que tiene como coaliciones ganadoras, $S \in \mathcal{W}$, aquellas tales que $|S| > \frac{|N|}{2}$.

El juego de mayoría absoluta es aquel en el que son ganadoras las coaliciones que suman, al menos, la mitad más uno de los votos.

De forma sencilla podemos extender los juegos de mayoría absoluta para abarcar la situación en la que los votantes pueden disponer de más de un voto, siendo, de nuevo, el criterio de “la mitad más uno” el que determina las coaliciones ganadoras.

Definición 4.6 (Juego de mayoría ponderada) Consideremos un conjunto finito N de votantes (o jugadores). Para $i \in N$, sea $w_i \in \mathbb{R}_{++}^N$ con w_i el número de votos del jugador i y denotemos por $w(N) = \sum_{i \in N} w_i$ el número total de votos. El juego $(N, \mathcal{W})$ de mayoría ponderada asociado al esquema de votos w es el juego simple de conjunto de jugadores N para el que una coalición S es ganadora, $S \in \mathcal{W}$, si

$$\sum_{i \in S} w_i > \left\lfloor \frac{w(N)}{2} \right\rfloor.$$

Otra generalización del juego de mayoría ponderada consiste en cambiar la cuota de la mayoría.

Definición 4.7 Un juego de mayoría ponderada con cuota, que denotaremos $[q; w]$, donde $w \in \mathbb{N}^N$ es el vector que indica el número de votos de cada votante y $0 < q \leq \sum_{i \in N} w_i$ la cuota, es el juego simple $(N, \mathcal{W})$ tal que

$$S \in \mathcal{W} \text{ si } \sum_{i \in S} w_i \geq q.$$

El juego de mayoría absoluta con N como conjunto de jugadores se corresponde con

$$\left[\left\lfloor \frac{|N|}{2} \right\rfloor + 1; 1_N \right].$$

Asimismo, el juego de mayoría ponderada con pesos $w \in \mathbb{R}^N$ se corresponde con $\left[\left\lfloor \frac{w(N)}{2} \right\rfloor + 1; w \right]$.

Proposición 4.8 Sea $(N, v) \in G^N$ equivalente a un juego simple $(N, \mathcal{W})$. El juego $TU(N, v)$ es equilibrado si y sólo si, $(N, \mathcal{W})$ tiene un jugador veto. Es decir,

$$C(N, v) \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{veto}(N, \mathcal{W}) \neq \emptyset$$

donde $\text{veto}(N, \mathcal{W})$ es el conjunto de jugadores veto de $(N, \mathcal{W})$. Además, el core está formado por los repartos no negativos de $v(N) = 1$ entre los jugadores veto. Es decir,

$$C(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^N : \sum_{i \in \text{veto}(N, \mathcal{W})} x_i = 1 \right\}.$$

Demostración: Probamos primero que es una condición necesaria. Sabemos que todo jugador veto $i \in N$ verifica $v(N \setminus i) = 0$. Supongamos que no existen jugadores veto. Entonces, para todo $i \in N$, $v(N \setminus i) = 1$. Dado $x \in C(N, v)$ esto implica que

$$\sum_{j \in N \setminus i} x_j \geq v(N \setminus i) = 1$$

para todo $i \in N$, lo que a su vez implica que $x_i = 0$ para todo $i \in N$. Por tanto, $C(N, v) = \emptyset$.

Probamos ahora que es una condición suficiente. Supongamos que el conjunto de jugadores veto no es vacío y tomemos $S = \text{veto}(N, \mathcal{W})$. Consideremos las asignaciones $x \in \mathbb{R}_+^N$ tales que $\sum_{i \in S} x_i = 1$. Veamos que $x \in C(N, v)$. Sea cualquier coalición ganadora $T \supset S$. Entonces $\sum_{i \in T} x_i \geq \sum_{i \in S} x_i = 1 = v(T)$. Análogamente, $\sum_{i \in N} x_i \geq 0 = v(T)$ para toda coalición perdedora $T \subset N$. Por otro lado, ningún reparto $x \notin \mathbb{R}_+^N$ puede pertenecer al core porque cualquier coalición individual lo bloquearía, y un reparto $x \in I(N, v) \cap \mathbb{R}_+^N$ con $\sum_{i \in S} x_i < 1$ implicaría $x_i > 0$ para algún $i \notin S$, con lo que sería bloqueado por la coalición ganadora $N \setminus i$. ■

Proposición 4.9 Sea $(N, v) \in G^N$ equivalente a un juego simple $(N, \mathcal{W})$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- a) (N, v) es equilibrado.
- b) (N, v) es totalmente equilibrado.
- c) (N, v) tiene PMAS.

Demostración: Primero probamos que a) implica b). Dado $S \subset N$, hay dos posibilidades para el subjuego (S, v_S) :

- Es el juego nulo $v_S(T) = 0$ para todo $T \subset S$ que, trivialmente, tiene core no vacío.
- Es equivalente a un juego simple $(S, \mathcal{W}')$. Por la Proposición 4.8 sabemos que $(N, \mathcal{W})$ tiene jugadores veto. Además, todo jugador veto en $(N, \mathcal{W})$ lo es también en $(S, \mathcal{W}')$, con lo que aplicando de nuevo la Proposición 4.8 tenemos que el subjuego tiene core no vacío.

Probamos que b) implica c). Sea $x \in C(N, v)$, definimos para cada $\emptyset \neq S \subset N$, $x_{i,S} = x_i v(S)$ si $i \in S$. Dado que un juego simple es siempre monótono, tenemos garantizado que $(x_{i,S})_{\emptyset \neq S \subset N, i \in S}$ es PMAS de (N, v) .

Finalmente c) implica a) se obtiene de la Proposición 2.27 y de que b) implica a). ■

Definición 4.10 Un índice de poder es una función φ que asigna a cada juego simple $(N, \mathcal{W})$ un vector $\varphi(N, \mathcal{W}) \in \mathbb{R}^N$.

4.1.1. Índice de poder de Shapley-Shubik

Shapley y Shubik (1954) definieron el índice de poder que lleva sus nombres.

Definición 4.11 Sea $(N, \mathcal{W})$ un juego simple. Se define el índice de poder de Shapley-Shubik como

$$\mathfrak{S}_i(N, \mathcal{W}) = \sum_{S \in \mathcal{W}^i} \frac{(|S| - 1)! (|N| - |S|)!}{|N|!}$$

para todo $i \in N$.

Ejemplo 4.12 Consideramos el juego de mayoría ponderada $[6; 4, 3, 2, 1]$. Para cada permutación de los jugadores, en la tabla que sigue resaltamos, en letra negrita, el jugador pivote, es decir, aquel que se lleva la contribución en la permutación correspondiente. Por ejemplo, en la primera permutación, ABCD, el primer jugador solo tiene 4 votos, pero cuando se incorpora el segundo ya tienen 7 entre los dos, y Por tanto el segundo jugador es el pivote en ese orden.

<i>ABCD</i>	<i>BACD</i>	<i>CABD</i>	<i>DABC</i>
<i>ABDC</i>	<i>BADC</i>	<i>CADB</i>	<i>DACB</i>
<i>ACBD</i>	<i>BCAD</i>	<i>CBAD</i>	<i>DBAC</i>
<i>ACDB</i>	<i>BCDA</i>	<i>CBDA</i>	<i>DBCA</i>
<i>ADBC</i>	<i>BDAC</i>	<i>CDAB</i>	<i>DCAB</i>
<i>ADCB</i>	<i>BDCA</i>	<i>CDBA</i>	<i>DCBA</i>

Aplicamos la definición 4.11 y calculamos el índice de poder de Shapley-Shubik contando el número de veces que cada jugador es pivote, obteniendo

$$\mathfrak{S}(N, \mathcal{W}) = \frac{1}{24}(10, 6, 6, 2) = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right).$$

Ejemplo 4.13 En los siguientes juegos de mayoría ponderada indicamos las coaliciones ganadoras minimales y la tipología de los jugadores.

Cuota	$[3; 2, 2, 1]$
Coaliciones minimales ganadoras	$\mathcal{W}^m = \{AB, AC, BC, \}$
Tipo de jugadores	A, B, C son simétricos

Cuota	$[4; 2, 2, 2, 1]$
Coaliciones minimales ganadoras	$\mathcal{W}^m = \{AB, AC, BC\}$
Tipo de jugadores	D es nulo; A, B, C son simétricos

Cuota	$[3; 3, 1, 1]$
Coaliciones minimales ganadoras	$\mathcal{W}^m = \{A\}$
Tipo de jugadores	A es dictador

Los índices de poder de Shapley-Shubik para los tres juegos son, respectivamente,

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \text{ y } (1, 0, 0).$$

Ejemplo 4.14 El congreso de los Estados Unidos consta de 537 votantes: el presidente, 101 senadores (incluido el vicepresidente) y 435 diputados.

Una coalición es ganadora si contiene:

- Al presidente y la mayoría de senadores y diputados.
- $\frac{2}{3}$ de senadores y diputados.

Observamos que este juego se puede modelizar como un juego simple en el que, además, el presidente no tiene poder de veto.

Ejemplo 4.15 Vamos a calcular y analizar el índice de Shapley-Shubik correspondiente al Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas. Para ello, aplicaremos la propiedad de simetría que verifica el índice, dado que todos los miembros permanentes del Consejo son simétricos y todos los no permanentes también lo son. En primer lugar, describimos cómo varió la formación del Consejo en los años 1954 y 1965.

- Año 1954. El Consejo estaba formado por 5 miembros permanentes (Estados Unidos, URSS, Reino Unido, Francia y China) y por 6 no permanentes. Para que una propuesta fuese aceptada, 7 miembros tenían que apoyarla, pero los miembros permanentes tenían poder de veto.

- Año 1965. El Consejo estaba formado por 5 miembros permanentes y por 10 no permanentes. Para que una propuesta fuese aprobada tenía que ser apoyada por 9 miembros (los miembros permanentes seguían teniendo poder de veto). En otro tipo de decisiones, las de procedimiento, se necesitaban solo 9 votos afirmativos.

Calculamos primeramente el índice de Shapley-Shubik correspondiente a la situación del año 1954. Denotemos por P a los miembros permanentes y por $\bar{P}$ a los no permanentes. Aplicamos la simetría entre los miembros permanentes y entre los no permanentes. Vamos a calcular primeramente el poder conjunto de los permanentes y el poder conjunto de los no permanentes. El número de ordenaciones distintas es $\frac{11!}{5!6!} = 462$.

Un miembro no permanente $\bar{P}$ es pivote en las ordenaciones de la forma

$$(PPPP\bar{P})\bar{P}(\bar{P}\bar{P}\bar{P}\bar{P})$$

que suman $\frac{6!}{5!1!} = 6$. Por tanto, el índice correspondiente al conjunto de todos los miembros no permanentes es $\frac{6}{462} = 0.013$, y el de los miembros permanentes es de $\frac{456}{462} = 0.987$. Aplicando la simetría tenemos que:

$$\mathfrak{S}_P(N, \mathcal{W}) = \frac{1}{5} \frac{456}{462} = 0.1974$$

$$\mathfrak{S}_{\bar{P}}(N, \mathcal{W}) = \frac{1}{6} \frac{6}{462} = 0.0022.$$

Con ello, la razón de poder entre un miembro permanente y uno no permanente es de 90 : 1. El poder conjunto de los permanentes es de 0.9870.

Procedemos ahora a efectuar las cuentas en el año 1965. El número de ordenaciones distintas es $\frac{15!}{5!10!} = 3003$. $\bar{P}$ es pivote en las siguientes permutaciones:

$$(PPPP\bar{P}\bar{P}\bar{P})\bar{P}(\bar{P}\bar{P}\bar{P}\bar{P}\bar{P})$$

que suman $\frac{8!}{5!3!} = 56$ ordenaciones.

$$\mathfrak{S}_P(N, \mathcal{W}) = \frac{1}{5} \frac{2947}{3003} = 0.1962$$

$$\mathfrak{S}_{\bar{P}}(N, \mathcal{W}) = \frac{1}{10} \frac{56}{3003} = 0.0018.$$

Por tanto, la razón de poder entre un miembro permanente y uno no permanente es de 105 : 1. El poder otorgado a los permanentes es $\frac{2947}{3003} = 0.9813$. Observamos que, con respecto a la situación anterior, los miembros permanentes bajan un poco su poder conjunto, aunque ahora la razón de poder entre un permanente y un no permanente ha aumentado.

4.1.2. Índice de poder de Banzhaf normalizado

El índice de poder de Shapley-Shubik para cada jugador $i \in N$ puede interpretarse como la probabilidad de que una coalición $S \subset N$ tomada al azar sea un cambio para el jugador i . Esto es lo mismo que decir que el índice de poder de Shapley-Shubik asigna a cada votante la probabilidad de ser pivote, si se toma una coalición al azar. Para ello, la probabilidad de escoger una coalición no debe ser la misma para todas ellas, sino que debe depender de su tamaño. En concreto, la probabilidad de tomar una coalición $S \subset N$ debe ser $\frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}$. Es decir, coaliciones de tamaño intermedio tienen más probabilidad de salir que las coaliciones más grandes o más pequeñas.

Dada esta interpretación, parece razonable considerar el caso en el que todas las coaliciones son equiprobables. Esta situación surge cuando, a falta de otra información acerca del comportamiento

de los votantes, cada uno de ellos decide con igual probabilidad (0.5) pertenecer a la coalición (lo que sería “votar a favor”) o no (lo que sería “votar en contra”).

Esta medida es el índice de poder definido por Banzhaf (1964-65) para la clase de los juegos simples¹, y que formalizamos a continuación.

Sea $\theta_i = |\mathcal{W}^i|$ el número de cambios para el jugador i . Se define el índice de Banzhaf normalizado como el porcentaje del número total de cambios para cada jugador.

Definición 4.16 *El índice de poder de Banzhaf normalizado, o índice de poder de Banzhaf-Coleman, $\hat{\beta}$, de un juego simple $(N, \mathcal{W})$ viene dado como*

$$\hat{\beta}_i(N, \mathcal{W}) = \frac{\theta_i}{\sum_{j \in N} \theta_j}$$

para todo $i \in N$.

Ejemplo 4.17 *Consideremos el juego de mayoría ponderada $[6; 4, 3, 2, 1]$ y sea $\mathcal{W}$ el conjunto de coaliciones ganadoras. En cada coalición ganadora resaltamos, en letra negrita, a aquellos jugadores para los que dicha coalición es cambio.*

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{ABC}, \mathbf{ABD}, \mathbf{ACD}, \mathbf{BCD}, \mathbf{ABCD}\}.$$

El índice de poder de Banzhaf normalizado del juego es

$$\hat{\beta}(N, \mathcal{W}) = \left(\frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12} \right).$$

Ejemplo 4.18 *Considera el juego de mayoría ponderada $[3; 2, 1, 1]$. El valor de Shapley-Shubik de este juego es:*

$$\mathfrak{S}(N, \mathcal{W}) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right).$$

Las coaliciones ganadoras y los jugadores para los que son cambios son:

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{ABC}\}.$$

Finalmente, calculamos el índice de Banzhaf normalizado:

$$\hat{\beta}(N, \mathcal{W}) = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right).$$

Observamos que para este juego los índices de poder de Shapley-Shubik y de Banzhaf normalizado no coinciden.

Ejemplo 4.19 *Analizamos cómo calcular el índice de Banzhaf normalizado correspondiente al Ejemplo 4.15 del Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas. Efectuamos los cálculos para el año 1954:*

Coaliciones ganadoras	Repeticiones	$\theta(P)$	$\theta(\bar{P})$
PPPPPP$\bar{P}$	$\binom{5}{5} \binom{6}{2} = 15$	75	30
PPPPPP$\bar{P}\bar{P}$	$\binom{5}{5} \binom{6}{3} = 20$	100	0
PPPPPP$\bar{P}\bar{P}\bar{P}$	15	75	0
PPPPPP$\bar{P}\bar{P}\bar{P}\bar{P}$	6	30	0
PPPPPP$\bar{P}\bar{P}\bar{P}\bar{P}\bar{P}$	1	5	0
		285	30

¹Posteriormente Owen (1975) propuso una generalización a la clase de todos los juegos TU.

Teniendo en cuenta la simetría de los miembros permanentes y los no permanentes tenemos que el índice de poder de Banzhaf normalizado de cada miembro permanente y cada uno no permanente es:

$$\widehat{\beta}_P(N, \mathcal{W}) = \frac{285}{315} \frac{1}{5} = 0.1810$$

$$\widehat{\beta}_{\bar{P}}(N, \mathcal{W}) = \frac{30}{315} \frac{1}{6} = 0.0159.$$

Por tanto, la razón de poder entre un miembro permanente y uno no permanente es de 11 : 1. Conjuntamente, el poder de los permanentes es de 0.9047.

4.1.3. Índice de poder de Banzhaf absoluto

La definición del índice de poder de Banzhaf normalizado asume que todas las coaliciones son equiprobables, y nos proporciona un índice como medida de la probabilidad relativa de ser pivote de cada votante *con respecto al resto de votantes*. Una alternativa es considerar como medida de poder de un votante la probabilidad de ser pivote en una coalición tomada al azar de forma equiprobable. Con este cambio, lo que se pierde es la normalización, ya que la suma de los índices no tienen por qué sumar 1, pero a cambio nos proporciona una medida agregada de la facilidad para llegar a acuerdos en cada juego simple.

Penrose (1946) fue el primero en presentar esta idea que fue redescubierta de forma independiente por Dubey y Shapley (1979), dando lugar al índice de poder de Banzhaf absoluto, también llamado índice de Penrose, y que definimos a continuación.

Definición 4.20 *El índice de poder de Banzhaf absoluto, o índice de poder de Penrose, β , de un juego simple $(N, \mathcal{W})$ viene dado, para cada $i \in N$, como la probabilidad de ser pivote de una coalición tomada al azar de forma equiprobable:*

$$\beta_i(N, \mathcal{W}) = \frac{\theta_i}{2^{|N|}}.$$

Al fallar la normalización, la suma de los índices de poder de Banzhaf absoluto no siempre es 1, sino una cantidad que se llama *poder total* del juego simple.

Observación 4.21 *Teniendo en cuenta que la suma de dos juegos simples no es, en general, un juego simple, la propiedad de aditividad no es útil en este contexto. Por ello Dubey (1975) caracterizó el índice de poder de Shapley-Shubik con las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría y utilizando una propiedad de aditividad específica para juegos simples que se conoce como transferencia. Posteriormente, Dubey y Shapley (1979) caracterizaron el índice de poder de Banzhaf absoluto por medio de las propiedades de poder total (el pago total de los jugadores es la suma de las medias de las contribuciones marginales de todos los jugadores), jugador nulo, simetría y transferencia.*

Ejemplo 4.22 *Calculamos el índice de Banzhaf absoluto correspondiente al Ejemplo 4.15 del Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas.*

El índice de poder de Banzhaf absoluto de cada miembro permanente y cada uno no permanente para el año 1954 es:

$$\beta_P(N, \mathcal{W}) = \frac{285}{5} \frac{1}{2^{11}} = 0.0278$$

$$\beta_{\bar{P}}(N, \mathcal{W}) = \frac{30}{6} \frac{1}{2^{11}} = 0.0024.$$

Por tanto, la razón de poder entre un miembro permanente y uno no permanente es de 11 : 1, al igual que para el valor de Banzhaf normalizado. El poder total es 0.1538.

El índice de poder de Banzhaf absoluto de cada miembro permanente y cada uno no permanente para el año 1965 es:

$$\beta_P(N, \mathcal{W}) = 0.0259$$

$$\beta_{\bar{P}}(N, \mathcal{W}) = 0.0026.$$

Por tanto, la razón de poder entre un miembro permanente y uno no permanente baja ligeramente con respecto al año 1954, pasando a ser 10 : 1. El poder total (interpretado como la facilidad para alcanzar acuerdos) también cambia con respecto al año anterior, subiendo muy ligeramente hasta 0.1550.

4.2. Mercados de intercambio

Una de las primeras aplicaciones de la teoría de juegos fue la de describir la negociación que tiene lugar en un modelo clásico de Microeconomía: los mercados de intercambio. El modelo más simple fue sugerido por Edgeworth. Posteriormente, los juegos TU equivalentes a mercados de intercambio han sido ampliamente estudiados, referencias fundamentales son los artículos de Shapley y Shubik (1969, 1975).

Los juegos TU equivalentes a juegos de mercado se corresponden con la clase de los juegos totalmente equilibrados.

Un mercado de intercambio está caracterizado por un conjunto de agentes, sus bienes, sus dotaciones iniciales y sus funciones de utilidad. Estas funciones cuantifican la utilidad que les supone a los agentes el intercambio de sus bienes a unos precios determinados. A cada mercado de intercambio se le puede asociar un juego coalicional que resume la información del mercado en la función característica. Los pagos asociados a los equilibrios competitivos del mercado de intercambio seleccionan asignaciones en el core del juego.

Definición 4.23 *Un mercado de intercambio es una tupla $(N, M, (w^i)_{i \in N}, (u^i)_{i \in N})$ donde*

- $N = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de agentes.
- $M = \{1, \dots, m\}$ es el conjunto de bienes.
- Para cada $i \in N$, $(w^i) \in \mathbb{R}_+^M$ representa la dotación inicial de bienes del agente i .²
- Para cada $i \in N$, u^i es la función de utilidad del agente i , medida en términos monetarios, que suponemos continua y cóncava. Es decir, $u^i : A \rightarrow \mathbb{R}$ siendo A el conjunto de reasignaciones factibles de bienes entre los jugadores:

$$A = \left\{ a \in \mathbb{R}_+^{N \times M} : \sum_{i \in N} a_{ij} = \sum_{i \in N} w_j^i \text{ para todo } j \in M \right\}.$$

Cada $a_{ij} \in \mathbb{R}$ indica la cantidad del bien j asignada al jugador i , y para cada agente $i \in N$, $u^i(x)$ representa la utilidad que asigna el agente i a la cesta de bienes $x \in \mathbb{R}_+^M$. Habitualmente se considera que los jugadores son egoístas y, por tanto, se puede definir $u_i : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, la utilidad de un jugador sólo depende del conjunto de bienes que obtiene, independientemente de lo que obtengan los demás.

²Se puede definir alternativamente $(w^i, 0) \in \mathbb{R}_+^M \times \mathbb{R}$, asumiendo que la dotación inicial de dinero es nula para todos los agentes.

Podemos construir la función de utilidad $U^i : \mathbb{R}_+^M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que mide, conjuntamente y en términos monetarios, la utilidad proporcionada por la cesta de bienes y por el dinero obtenido en el intercambio, mediante $U^i(x^i, t^i) = u^i(x^i) + t^i$ para cada $(x^i, t^i) \in \mathbb{R}_+^M \times \mathbb{R}$.

Normalizando la cantidad inicial de dinero de los agentes a cero, tenemos que $\sum_{i \in N} t^i = 0$ y, por tanto, $\sum_{i \in N} U^i(x^i, t^i) = \sum_{i \in N} u^i(x^i)$.

Supongamos que los bienes $1, \dots, m$ se intercambian en el mercado a unos precios fijos $p_1, \dots, p_m$, respectivamente, que conforman el vector de precios $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^M$.

Definición 4.24 Sea $(N, M, (w^i)_{i \in N}, (u^i)_{i \in N})$ un mercado de intercambio.

- La asignación $\bar{x}^i$ es óptima al precio p para el agente i si

$$U^i(\bar{x}^i, p(w^i - \bar{x}^i)) = \max_{x^i \in \mathbb{R}_+^M} U^i(x^i, p(w^i - x^i)).$$

- El vector $(\bar{p}, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$, donde $\bar{p} \in \mathbb{R}^M$, $\bar{x}^i \in \mathbb{R}_+^M$ es un equilibrio competitivo para el mercado M si, para cada agente $i \in N$, $\bar{x}^i$ es óptima al precio $\bar{p}$ y, además, se verifica que

$$\sum_{i \in N} \bar{x}^i = \sum_{i \in N} w^i \text{ (cierre de mercado).}$$

Asociado a cada equilibrio competitivo, $(\bar{p}, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$, existe un vector de pagos, $z = (z^i)_{i \in N}$, donde, para cada $i \in N$,

$$z^i = u^i(\bar{x}^i) + \bar{p}(w^i - \bar{x}^i) = U^i(\bar{x}^i, \bar{p}(w^i - \bar{x}^i))$$

de forma que z^i representa la utilidad que le proporciona al agente i la asignación óptima $\bar{x}^i$, medida en términos monetarios, después de producirse el intercambio de los bienes y el correspondiente pago de los intercambios entre los agentes.

Diversos resultados garantizan la existencia de equilibrio competitivo bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, si se verifican las siguientes tres condiciones, tenemos asegurada la existencia de equilibrio competitivo en el mercado.

1. u^i es de clase 1 en su dominio, para todo $i \in N$.
2. $u^i(x + a) \geq u^i(x)$, para todo $i \in N$ y para todos $x, a \in \mathbb{R}_+^m$.
3. $\sum_{i \in N} w_j^i > 0$, para todo $j \in M$.

Un mercado de intercambio $M = (N, \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}, (w^i, 0)_{i \in N}, (u^i)_{i \in N})$ se puede expresar como el juego TU (N, v) , siendo v la función característica definida para cada $S \subset N$, por

$$v(S) = \max_{A_S} \sum_{i \in S} u^i(x^i)$$

siendo $A_S = \{(x^i)_{i \in S} : x^i \in \mathbb{R}_+^M, \sum_{i \in S} x^i = \sum_{i \in S} w^i\}$.

Definición 4.25 Un juego de mercado es un juego TU equivalente a un mercado de intercambio.

El conjunto de los pagos asociados a los equilibrios competitivos está contenido en el core. Por lo tanto, el core del juego de mercado es no vacío si existe al menos un equilibrio competitivo.

Proposición 4.26 Sean M un mercado de intercambio, z el pago asociado al equilibrio competitivo $(\bar{p}, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ y (N, v) el juego TU equivalente a M . Se tiene que $z \in C(N, v)$.

Utilizando la caracterización de Bondareva-Shapley y trabajando con la función característica del juego de mercado se puede demostrar que el core de un juego de mercado nunca es vacío.

Teorema 4.27 *Los juegos de mercado son equilibrados.*

Teniendo en cuenta que todo subjuego de un juego de mercado es, a su vez, un juego de mercado, deducimos que los juegos de mercado son totalmente equilibrados.

Corolario 4.28 *Los juegos de mercado son totalmente equilibrados.*

El siguiente teorema pone de manifiesto que la clase de los juegos de mercado coincide con la clase de los juegos totalmente equilibrados.

Teorema 4.29 *Una condición necesaria y suficiente para que un juego sea totalmente equilibrado es que sea un juego de mercado.*

Demostración: Ya conocemos que los juegos de mercado son totalmente equilibrados. Basta con probar entonces que dado un juego totalmente equilibrado (N, v) , podemos construir un mercado M_C de tal forma que la función característica del juego asociado al mercado, (N, w) , coincida con la función característica del juego (N, v) ; es decir, $v(S) = w(S)$ para todo $S \subset N$.

Sea (N, v) un juego totalmente equilibrado. Construimos un mercado asociado a este juego (mercado entre coaliciones) de la siguiente forma:

$$M_C = \left(N, \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}, \left(e^{\{i\}}, 0 \right)_{i \in N}, (u^i)_{i \in N} \right)$$

donde: N es el conjunto de jugadores; el conjunto de bienes son los propios jugadores (interpretado como su tiempo, su trabajo, ellos mismos, ...); las dotaciones iniciales son los vectores característicos de cada coalición individual; y, para todo $i \in N$, todos los jugadores tienen la misma utilidad $u^i = u$, dada por

$$u(x) = \max \left\{ \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S v(S) : \delta_S \geq 0, \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S e^S = x \right\}.$$

Fácilmente se comprueba que u es una función continua, cóncava y homogénea de grado uno. Además, u es superaditiva, es decir,

$$u \left(\sum_{i \in N} x^i \right) \geq \sum_{i \in N} u(x^i)$$

para cada $x^i \in \mathbb{R}_+^N$.

Construimos el juego de mercado asociado a M_C , denotado (N, w) , y comprobamos que para todo $S \subset N$, $w(S) = v(S)$. Esta igualdad se prueba demostrando que $w(S) = u(e^S)$ para todo $S \subset N$ y que $v(S) = u(e^S)$ para toda $S \subset N$. ■

El siguiente resultado nos indica que, para los mercados entre coaliciones, el conjunto de pagos asociados a los equilibrios competitivos del mercado coincide exactamente con el core.

Teorema 4.30 *El conjunto de los pagos asociados a los equilibrios competitivos del mercado entre coaliciones M_C coincide con el core del juego de mercado asociado a M_C .*

Demostración: Ya hemos probado que los pagos asociados a los equilibrios competitivos son asignaciones del core. Demostraremos entonces que dada cualquier asignación en el core podemos construir un equilibrio competitivo cuyo pago asociado es, precisamente, ese elemento del core.

Es sencillo comprobar que dado $z \in C(N, v)$, el vector $\left(z, \frac{e^N}{n}, \dots, \frac{e^N}{n}\right)$ es un equilibrio competitivo para el mercado M_C , cuyo pago asociado es, precisamente, z . ■

Estudiamos los juegos de asignación, que ya presentamos en el Ejemplo 1.24, y que surgen al considerar un mercado bilateral.

Ejemplo 4.31 *Describimos en el ejemplo un mercado con m propietarios, que poseen una casa cada uno, y n compradores interesados en adquirir una única vivienda. Denotamos por c_i la valoración que el propietario i hace de su casa y por h_{ij} la valoración que de la vivienda i tiene el comprador j .*

Un problema de asignación entre $m = |M|$ compradores y $n = |N|$ vendedores (o un mercado bilateral) consiste en encontrar las transacciones óptimas que maximicen la utilidad conjunta. Si denotamos por $a_{ij} = \max\{0, h_{ij} - c_i\}$, debemos encontrar $i_1, \dots, i_k \in M$ y $j_1, \dots, j_k \in N$ tales que hagan máxima la suma

$$a_{i_1 j_1} + \dots + a_{i_k j_k}$$

siendo $k = \min\{|M|, |N|\}$.

Construimos entonces el juego de asignación (Shapley y Shubik (1972)), $(M \cup N, v)$ asociado al problema de asignación, de la siguiente forma:

- *Conjunto de jugadores:* $M \cup N$
- *Función característica:*

$$\begin{aligned} v(S) &= 0, \text{ si } S \subset M \text{ ó } S \subset N \\ v(ij) &= \max\{0, h_{ij} - c_i\} = a_{ij}, \text{ si } i \in M, j \in N \\ v(S) &= \max\{a_{i_1 j_1} + \dots + a_{i_k j_k}\}, \text{ en otro caso} \end{aligned}$$

siendo $k = \min\{|S \cap M|, |S \cap N|\}$, $i_1, \dots, i_k \in S \cap M$ y $j_1, \dots, j_k \in S \cap N$.

Fijémonos en que la matriz a_{ij} es suficiente para determinar la función característica v . Por otra parte, el precio al cual se hace la transacción entre cada comprador y cada vendedor no interviene en la función característica.

Estudiemos un caso simple de un juego de asignación. Consideremos dos vendedores 1 y 2 que valoran sus casas en 10 y 20 unidades, respectivamente. Hay dos posibles compradores 3 y 4 siendo sus tasaciones de las casas las recogidas en la tabla:

	<i>Comprador</i>	
<i>Casa</i>	3	4
1	14	18
2	23	25

La matriz de transacciones es

$$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

y la función característica del juego de asignación es

$$\begin{aligned} v(S) &= 0 \quad \text{si } S \subset \{1, 2\} \text{ ó } S \subset \{3, 4\} \\ v(1, 3) &= 4, v(1, 4) = 8, v(2, 3) = 3, v(2, 4) = 5 \\ v(1, 2, 3) &= 4, v(1, 2, 4) = 8, v(1, 3, 4) = 8, v(2, 3, 4) = 5 \\ v(1, 2, 3, 4) &= 11. \end{aligned}$$

En la Figura 4.1 aparecen representados el core y el conjunto de Weber. El core es la envoltura convexa de los siguientes cuatro vértices: $(1, 0, 3, 7)$, $(3, 0, 3, 5)$, $(4, 3, 0, 4)$ y $(6, 3, 0, 2)$.

Además se puede comprobar que, en este caso concreto, nucleolus coincide con el τ -valor y con el core-center.

$$Nu(N, v) = \tau(N, v) = \mu(N, v) = (3.5, 1.5, 1.5, 4.5).$$

$$Sh(N, v) = (3.5, 1.83, 1.67, 4).$$

Puede observarse que $Sh(N, v) \notin C(N, v)$.

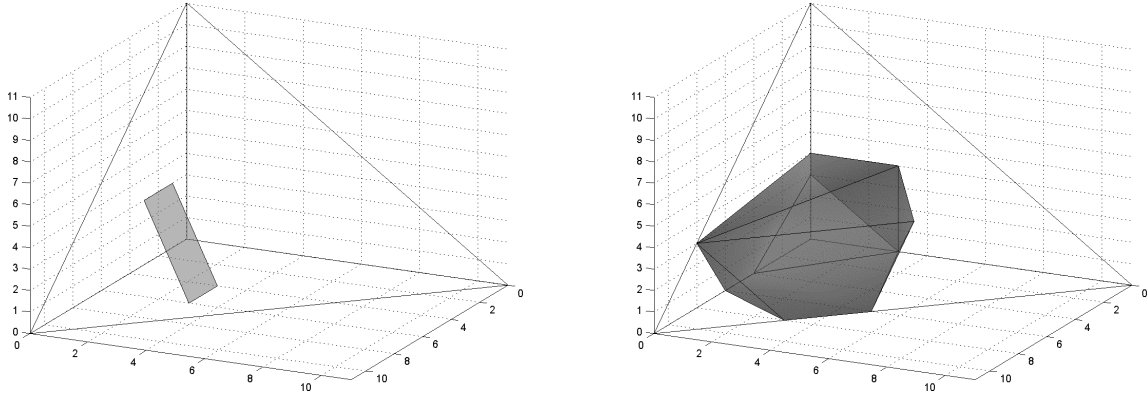


Figura 4.1: Core (izquierda) y conjunto de Weber (derecha) del juego de asignación del Ejemplo 4.31.

4.3. Problema del aeropuerto

En muchas situaciones, los individuos cooperan en un proyecto conjunto y los costes comunes deber ser repartidos entre ellos. El problema del reparto de costes consiste en su distribución de un modo justo entre los individuos. La definición del juego de costes supone conocer el conjunto de jugadores y, para cada coalición $S \subset N$, el coste asociado a dicha coalición.

Un problema de reparto de costes clásico es el problema del aeropuerto presentado por primera vez en Littlechild y Thompson (1977). Este problema consiste en cómo dividir los costes de mantenimiento de una pista de aterrizaje entre las distintas aerolíneas que operan en un aeropuerto. Claramente se puede observar que los aviones pequeños y ligeros necesitan una pista más corta para aterrizar que los aviones grandes.

Como ejemplo, consideremos el caso en el que hay ocho compañías, $N = \{1, \dots, 8\}$, cuyos vuelos utilizan la pista del aeropuerto. Los costes de mantenimiento de los cuatro tramos que se necesitan son los siguientes:

$$(2000, 3200, 4100, 5100).$$

Es decir, el coste total de mantener toda la pista es 5100. Sin embargo, este coste se reduce a 4100 cuando no se utiliza el último tramo. Si solo se utilizan los dos primeros tramos, el coste baja a 3200, y si solo se utiliza el primer tramo de la pista, el coste de mantenimiento queda en 2000.

Supongamos que el tramo primer de la pista lo necesitan los aviones de las compañías 1 y 2. Las compañías 3, 4 y 5 tienen aviones más grandes y necesitan utilizar los dos primeros tramos. La compañía 6 necesita los tres primeros tramos y, por último, las compañías 7 y 8 tienen que hacer uso del total de la pista, con coste 5100. ¿Cuánto debería contribuir cada compañía para pagar el coste de mantenimiento de la pista?

Definición 4.32 *Un problema del aeropuerto es un par (N, C) siendo $N = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de todas las compañías que operan en el aeropuerto, ordenadas de menor a mayor necesidad de pista, y $C \in \mathbb{R}^N$ el vector que indica el coste de mantenimiento de los tramos de pista necesarios para cada compañía.*

Al estar las compañías ordenadas de menor a mayor necesidad de pista, las coordenadas del vector C también seguirán un orden creciente.

Ejemplo 4.33 *En el ejemplo introductorio, tenemos (N, C) dado por:*

$$\begin{aligned} N &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ C &= (2000, 2000, 3200, 3200, 3200, 4100, 5100, 5100). \end{aligned}$$

Cada problema del aeropuerto (N, C) tiene asociado un juego de costes equivalente (N, c) , de forma que $c(S)$ representa el coste de mantener la pista más corta que hace posible el aterrizaje de los aviones de la coalición S . Es decir:

$$c(S) = \max\{C_j : j \in S\}.$$

El coste que debe sufragar una coalición S se corresponde con el coste de construir una pista que puedan utilizar todos los aviones de la coalición. Se puede comprobar fácilmente que los juegos asociados a problemas del aeropuerto son cóncavos.

El valor de Shapley de cada jugador divide el coste del segmento necesario entre el número de aviones que usan ese tramo o segmento. Para $N = \{1, \dots, n\}$, el reparto vendría dado por:

$$\begin{aligned} Sh_1(N, c) &= \frac{C_1}{n} \\ Sh_2(N, c) &= \frac{C_1}{n} + \frac{C_2 - C_1}{n-1} \\ Sh_3(N, c) &= \frac{C_1}{n} + \frac{C_2 - C_1}{n-1} + \frac{C_3 - C_2}{n-2} \\ &\vdots \\ Sh_n(N, c) &= \frac{C_1}{n} + \frac{C_2 - C_1}{n-1} + \frac{C_3 - C_2}{n-2} + \dots + \frac{C_n - C_{n-1}}{1}. \end{aligned}$$

El nucleolus se corresponde con la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} Nu_1(N, c) &= \min \left\{ \frac{C_1}{2}, \frac{C_2}{3}, \frac{C_3}{4}, \dots, \frac{C_{n-1}}{n} \right\} \\ Nu_2(N, c) &= \min \left\{ \frac{C_2 - Nu_1}{2}, \frac{C_3 - Nu_1}{3}, \dots, \frac{C_{n-1} - Nu_1}{n-1} \right\} \\ Nu_3(N, c) &= \min \left\{ \frac{C_3 - Nu_1 - Nu_2}{2}, \dots, \frac{C_{n-1} - Nu_1 - Nu_2}{n-2} \right\} \\ &\vdots \\ Nu_{n-1}(N, c) &= \frac{C_{n-1} - Nu_1 - \dots - Nu_{n-2}}{2} \\ Nu_n(N, c) &= C_n - \sum_{i=1}^{n-1} Nu_i. \end{aligned}$$

Definición 4.34 Dada $T \subset N$, definimos el juego de unanimidad dual asociado a T mediante

$$u_T^d(S) = \begin{cases} 1 & T \cap S \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se verifica que $u_T^d(S) = u_T(N) - u_T(N \setminus S)$. A partir de esta expresión se deduce que el valor de Shapley del juego de unanimidad dual y el valor de Shapley del juego de unanimidad coinciden³ y vienen dados por:

$$Sh_i(N, u_T) = Sh_i(N, u_T^d) = \begin{cases} \frac{1}{|T|} & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \notin T. \end{cases}$$

El juego de unanimidad dual se puede interpretar como el que modeliza el coste de un bien público demandado únicamente por los jugadores de T .

Proposición 4.35 Sea (N, c) el juego de costes equivalente al problema del aeropuerto (N, C) con $N = \{1, \dots, n\}$. Entonces:

a) La función característica c se puede descomponer como

$$c = \sum_{k=1}^n (C_k - C_{k-1}) u_{T_k}^d,$$

siendo $T_k = \{k, \dots, n\}$.

b) $Sh_i(N, c) = \sum_{k=1}^i \frac{C_k - C_{k-1}}{s_k}$ para cada $i \in N$.

La interpretación del valor de Shapley del juego asociado a un problema del aeropuerto es clara: el coste que debe pagar una compañía con aviones de un tipo determinado sólo depende de los costes de los aviones de menor tamaño. El coste de construir la pista para los aviones de tipo 1, C_1 , se divide entre todos los aviones de manera igualitaria; a continuación, el incremento de coste resultante de construir la pista para los aviones del segundo tipo, $C_2 - C_1$, se divide entre todos los aviones exceptuando los de tipo 1, y así sucesivamente.

Ejemplo 4.36 Consideremos el juego asociado al problema del aeropuerto con vector de costes $C = (1, 2, 10, 15)$ y $N = \{1, 2, 3, 4\}$. En la Figura 4.2 se muestra su core y algunas soluciones puntuales.

4.4. Problemas de bancarrota

Los problemas de bancarrota han merecido una gran atención desde su primer estudio en O'Neill (1982). Aumann y Maschler (1985) es otro trabajo referente en este contexto. En Thomson (2003, 2013) y Moulin (2002) se puede encontrar una recopilación de resultados que resume la evolución de la literatura de los problemas de bancarrota a lo largo del tiempo.

En todo problema de bancarrota existe un conjunto de acreedores entre los que hay que repartir un bien o hacienda (perfectamente divisible) que por lo general no es suficiente para cubrir las deudas. A continuación, definimos formalmente un problema de bancarrota y su juego asociado.

Definición 4.37 Un problema de bancarrota es una terna (N, d, E) donde N es un conjunto finito de acreedores, $d \in \mathbb{R}^N$ un vector de las demandas de los acreedores, y $E \in \mathbb{R}$ es el bien (estate) a repartir.

³Esto es cierto en general: El valor de Shapley de un juego TU (N, v) siempre coincide con el de su dual, (N, v^d) , siendo $v^d(S) = v(N) - v(N \setminus S)$ para todo $S \subset N$.

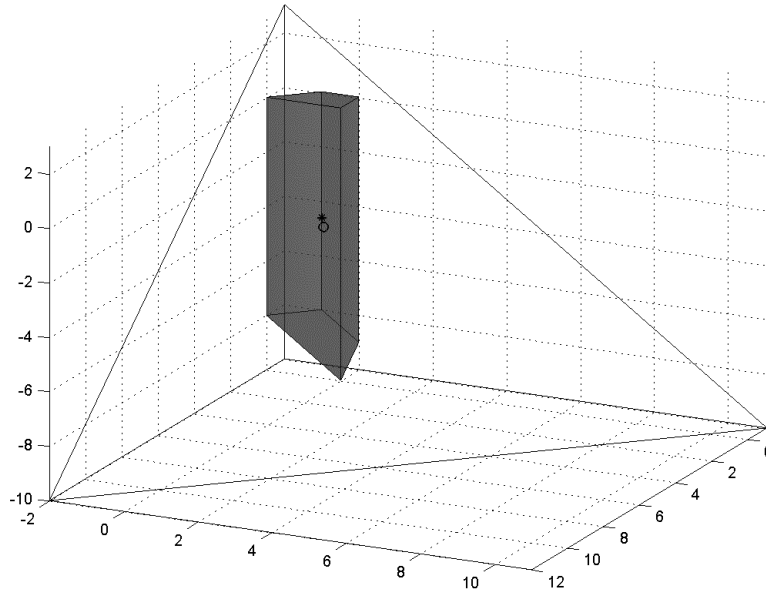


Figura 4.2: Core (en gris), valor de Shapley (o) y nucleolus (*) del juego asociado a un problema del aeropuerto.

Para que un problema de este tipo se ajuste a la interpretación de bancarrota, debemos, además exigir las siguientes condiciones:

- $d \geq 0_N$ (de no cumplirse esta condición, habría acreedores que deberían dinero a la empresa quebrada, por lo que no podrían llamarse acreedores).
- $0 < E$ (de no cumplirse esta condición, estaríamos repartiendo deuda, en lugar del valor de un bien liquidado).

La siguiente propiedad también se suele exigir:

- $E \leq \sum_{i \in N} d_i$ (de no cumplirse esta condición, no habría problema en satisfacer a todos los acreedores).

Cuando no verifica esta última propiedad, decimos que (N, d, E) es un problema de excedentes (*surplus*) en los que debemos repartir cantidades no negativas, o bien un problema de derechos (*rights*) o de distribución (*allocation*) en los que podemos repartir tanto cantidades negativas (deudas) como positivas (excedentes).

Los problemas de excedentes fueron estudiados por Moulin (1987). Los problemas de derechos o de distribución fueron estudiados por Chun (1988b) y Herrero, Maschler y Villar (1999).

En lo sucesivo, supondremos que un problema de bancarrota (N, d, E) siempre verifica las tres propiedades anteriores.

Definición 4.38 Una regla de reparto asociada a un problema de bancarrota es una función f que a cada (N, d, E) le asocia un valor $f(N, d, E) \in \mathbb{R}^N$ tal que

1. $0 \leq f_i(N, d, E) \leq d_i$, para todo $i \in N$.

$$2. \sum_{i \in N} f_i(N, d, E) = E.$$

Por tanto, una regla de reparto es una forma de distribuir la totalidad del bien entre los acreedores con la única condición de no dar a ninguno de ellos una cantidad superior a su demanda⁴.

Un problema de bancarrota (N, d, E) tiene asociado un juego TU (N, v) llamado juego de bancarrota, siendo:

$$v(S) = \max \left\{ 0, E - \sum_{i \in N \setminus S} d_i \right\}$$

para todo $S \subset N$.

El juego de bancarrota asocia a cada coalición lo que queda del bien una vez satisfechas completamente las demandas de los acreedores ajenos a la coalición. Veamos un sencillo caso práctico.

Ejemplo 4.39 (Figura 4.3) Supongamos que el patrimonio de una empresa que se ha declarado en quiebra asciende a 10000 euros. Cuatro acreedores solicitan las siguientes cantidades: $d = (3000, 2000, 5000, 8000)$. El correspondiente juego de bancarrota tendrá cuatro jugadores, por ejemplo $N = \{1, 2, 3, 4\}$, y su función característica vendrá dada por:

$$\begin{aligned} v(N) &= 10000 \\ v(1, 2, 3) &= 2000, \quad v(1, 2, 4) = 5000, \quad v(1, 3, 4) = 8000, \quad v(2, 3, 4) = 7000 \\ v(1, 2) &= v(1, 3) = v(2, 3) = 0, \quad v(1, 4) = 3000, \\ v(2, 4) &= 2000, \quad v(3, 4) = 5000 \\ v(i) &= 0, \text{ para todo } i \in N. \end{aligned}$$

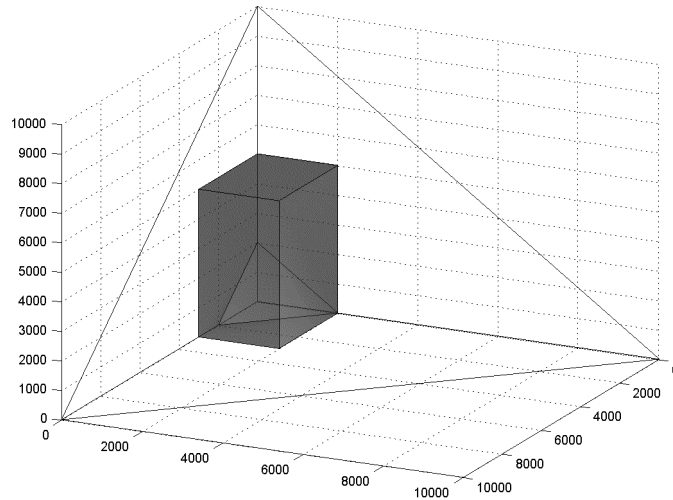


Figura 4.3: Core del problema de bancarrota del Ejemplo 4.39.

A continuación demostramos que los juegos de bancarrota son convexos y, por tanto, el core es no vacío, coincide con el conjunto de Weber, y contiene al valor de Shapley:

Proposición 4.40 *Los juegos de bancarrota son convexos.*

⁴Si quitamos esa restricción, diremos que estamos estudiando problemas de pérdidas, definidos por Bergantiños y Vidal Puga (2004).

Demostración: Dada $R \subset N$, denotemos por $d(R) = \sum_{i \in R} d_i$. No es difícil ver que si $R \subset T$ entonces

$$E - d(N \setminus R) \leq E - d(N \setminus T).$$

Ciertamente, $R \subset T$ implica $N \setminus R \supset N \setminus T$ y, consecuentemente, $d(N \setminus R) \geq d(N \setminus T)$, de donde se sigue inmediatamente la desigualdad buscada.

Sean $S, T \subset N$ tales que $S \subset T \subset N \setminus i$. Se tiene que

$$\begin{aligned} v(S \cup i) + v(T) &= \max\{0, E - d(N \setminus (S \cup i))\} + \max\{0, E - d(N \setminus T)\} \\ &= \max\{0, E - d(N \setminus (S \cup i)), E - d(N \setminus T), 2E - d(N \setminus (S \cup i)) - d(N \setminus T)\}. \end{aligned}$$

Análogamente, obtenemos que

$$v(T \cup i) + v(S) = \max\{0, E - d(N \setminus (T \cup i)), E - d(N \setminus S), 2E - d(N \setminus (T \cup i)) - d(N \setminus S)\}.$$

Teniendo en cuenta que $S \subset T \cup i$ deducimos que

$$E - d(N \setminus S) \leq E - d(N \setminus (T \cup i)).$$

Por tanto, se tiene que

$$v(T \cup i) + v(S) = \max\{0, E - d(N \setminus (T \cup i)), 2E - d(N \setminus (T \cup i)) - d(N \setminus S)\}.$$

Por otra parte, ya que $T \cup i \supset S \cup i$ y $T \cup i \supset T$, entonces

$$\begin{aligned} E - d(N \setminus (T \cup i)) &\geq E - d(N \setminus (S \cup i)) \\ E - d(N \setminus (T \cup i)) &\geq E - d(N \setminus T) \\ 2E - d(N \setminus (T \cup i)) - d(N \setminus S) &= 2E - d(N \setminus (S \cup i)) - d(N \setminus T). \end{aligned}$$

Estas desigualdades implican que el juego (N, v) asociado a un problema de bancarrota es convexo, puesto que $v(S \cup i) + v(T) \leq v(T \cup i) + v(S)$ para todo $S, T \subset N$, $S \subset T \subset N \setminus i$. ■

Han sido propuestas distintas reglas de reparto específicas para los problemas de bancarrota: la solución de igual ganancia, la solución de igual pérdida, el reparto proporcional y el reparto proporcional ajustado, entre otras. Revisamos las principales.

Definición 4.41 Sea (N, d, E) un problema de bancarrota.⁵

- La solución de igual ganancia (CEA) asigna a cada acreedor i el mínimo entre α y su demanda d_i , estando α unívocamente determinado por la propiedad de eficiencia. Formalmente, para cada $i \in N$,

$$CEA_i(N, d, E) = \min\{\alpha, d_i\}$$

donde α es tal que $E = \sum_{i \in N} \min\{\alpha, d_i\}$.

- La solución de igual pérdida (CEL) asigna a cada acreedor i el máximo entre 0 y $d_i - \beta$, estando β unívocamente determinado por la propiedad de eficiencia, es decir, para cada $i \in N$,

$$CEL_i(N, d, E) = \max\{0, d_i - \beta\}$$

donde β es tal que $E = \sum_{i \in N} \max\{0, d_i - \beta\}$.

⁵Las abreviaturas CEA, CEL, PRO, APRO y RA responden a las denominaciones de las soluciones en inglés. En concreto, “Constraint Equal Award”, “Constraint Equal Loss”, “Proportional”, “Adjusted Proportional” y “Random Arrival”.

- El reparto proporcional (PRO) divide el bien de forma proporcional a las demandas de los acreedores, esto es, para cada $i \in N$,

$$PRO_i(N, d, E) = d_i \frac{E}{\sum_{k \in N} d_k}.$$

- El reparto proporcional ajustado (APRO) empieza asignándole a cada acreedor su derecho mínimo, que se corresponde con el máximo entre 0 y la parte del bien no demandada por el resto de los acreedores, es decir,

$$s_i = \max \left\{ 0, E - \sum_{j \in N \setminus i} d_j \right\}.$$

Una vez realizada esta asignación, el bien restante, $E' = E - \sum_{i \in N} s_i$, es dividido de forma proporcional entre los demandantes teniendo en cuenta que las demandas de los jugadores en el bien E' son $d'_i = \min \{d_i - s_i, E'\}$, dado que demandas mayores que E' se consideran irrelevantes. Por tanto, el reparto proporcional ajustado asigna a cada $i \in N$,

$$APRO_i(N, d, E) = s_i + d'_i \frac{E'}{\sum_{k \in N} d'_k}.$$

- El reparto del Talmud (T) divide el bien de la siguiente forma:

1. Si $\sum_{i \in N} \frac{d_i}{2} \geq E$, entonces

$$T_i(N, d, E) = \min \left\{ \frac{d_i}{2}, \lambda \right\}$$

siendo λ tal que $E = \sum_{i \in N} \min \left\{ \frac{d_i}{2}, \lambda \right\}$.

2. Si $\sum_{i \in N} \frac{d_i}{2} \leq E$ entonces

$$T_i(N, d, E) = d_i - \min \left\{ \frac{d_i}{2}, \lambda \right\}$$

siendo λ tal que $E = \sum_{i \in N} \left(d_i - \min \left\{ \frac{d_i}{2}, \lambda \right\} \right)$.

- El reparto de las llegadas aleatorias (RA) divide el bien para cada $i \in N$ de la siguiente forma:

$$RA_i(N, d, E) = \frac{1}{|\Pi^N|} \sum_{\pi \in \Pi^N} \min \left\{ d_i, \max \left\{ E - \sum_{j \in N: \pi(j) < \pi(i)} d_j, 0 \right\} \right\}.$$

Observamos que, en el reparto del Talmud, si el bien coincide con la mitad de las demandas, cada jugador recibe la mitad de su demanda. En caso de que el bien sea menor, se aplica CEA, y si el bien es mayor, se aplica CEL (en ambos casos aplicadas a las mitades de las demandas en lugar de a las demandas).

Para comprender el reparto de llegadas aleatorias, supongamos que los acreedores llegan de uno en uno y se les va asignando el dinero disponible hasta que se termina. El reparto de llegadas aleatorias es el promedio de estas asignaciones en todos los posibles órdenes de llegada.

La siguiente proposición establece fuertes relaciones entre las soluciones descritas previamente y los conceptos de solución para el juego TU equivalente al problema de bancarrota.

Proposición 4.42 Sea (N, d, E) un problema de bancarrota y (N, v) el juego TU equivalente. Se verifica que:

- a) $RA(N, E, d) = Sh(N, v)$ (O'Neill (1982)).
- b) $T(N, E, d) = Nu(N, v)$ (Aumann y Maschler (1985)).
- c) $APRO(N, E, d) = \tau(N, v)$ (Curiel y otros (1987)).
- d) $CEA(N, E, d) = DR(N, v)$ (Dutta y Ray (1989)).

donde DR es la solución de Dutta-Ray que selecciona, para juegos convexos, un vector en el core del juego que es máximo en el orden de Lorenz (Dutta y Ray (1989)).

Observación 4.43 Dado que los juegos de bancarrota son convexos, se simplifica considerablemente el cálculo del valor de Shapley, del nucleolus y del τ -valor. Además, todos ellos están en el core del juego TU asociado.

Ejemplo 4.44 Retomamos los problemas de bancarrota presentados en el ejemplo del Capítulo 1. Un hombre tiene 3 esposas y estipula que a su muerte reciban 100, 200 y 300 unidades monetarias, respectivamente. Veamos, en primer lugar, cuáles serán los juegos de bancarrota asociados si en el momento de su defunción su hacienda es de E unidades, en los casos:

E	Juego = $[v(1), v(2), v(3), v(1, 2), v(1, 3), v(2, 3), v(1, 2, 3)]$
100	$A = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 100]$
200	$A = [0, 0, 0, 0, 0, 100, 200]$
300	$A = [0, 0, 0, 0, 100, 200, 300]$

Los repartos que hemos analizado, para los tres valores considerados, dan los resultados que se recogen en la siguiente tabla.

	Valor de E		
Reparto	100	200	300
CEA	(33.3, 33.3, 33.3)	(66.7, 66.7, 66.7)	(100, 100, 100)
CEL	(0, 0, 100)	(0, 50, 150)	(0, 100, 200)
$APRO$	(33.3, 33.3, 33.3)	(40, 80, 80)	(50, 100, 150)
T	(33.3, 33.3, 33.3)	(50, 75, 75)	(50, 100, 150)
RA	(33.3, 33.3, 33.3)	(33.3, 83.3, 83.3)	(50, 100, 150)

4.5. Problemas de árbol de expansión de coste mínimo

Una buena recopilación de diversos juegos coalicionales que provienen de problemas de optimización se encuentra en el libro Curiel (1997). Entre otros, se estudian los juegos de programación lineal, los juegos de asignación, los juegos de permutación, los juegos de secuenciación, los juegos del viajante y los juegos de rutas, los problemas de árbol de expansión de coste mínimo y los juegos de localización. A continuación, nos centramos en describir dos modelos: los problemas de árbol de expansión de coste mínimo y los problemas de flujo máximo.

Los problemas de árbol de expansión de coste mínimo sirven para modelizar situaciones en las que varios usuarios (ciudades, granjas, hogares, ...) se quieren conectar a una fuente o recurso. Este recurso o fuente podría ser, por ejemplo, una presa de abastecimiento de agua, una central eléctrica, un operador de Internet o un operador por cable. Cada usuario quiere tener acceso al servicio, pero

le es indiferente una conexión directa o a través de otros usuarios, por lo que existe la posibilidad de reducir costes a través de la construcción de una red óptima.

Como dato inicial se debe de disponer de los costes de conexión asociados entre los usuarios y entre cada usuario y el nodo fuente. El problema original fue formulado por Claus y Kleitman (1973) y posteriormente el problema de repartir los costes fue estudiado por Bird (1976) y, posteriormente, por Granot y Huberman (1981).

Definición 4.45 *Un problema de árbol de expansión de coste mínimo (en inglés, minimum cost spanning tree problem) es un par (N_0, C) donde $N_0 = N \cup \{0\}$ es un conjunto de nodos formado por un conjunto finito N de usuarios y una fuente 0 , y $C = (c_{ij})_{i,j \in N_0} \in \mathbb{R}^{N_0 \times N_0}$ es una matriz tal que c_{ij} representa el coste de conexión entre dos nodos $i, j \in N_0$.*

Para que un problema de este tipo se ajuste a la interpretación de costes de conexión debemos, además, exigir las siguientes condiciones:

- $c_{ii} = 0$ para todo $i \in N_0$ (condición básica, ya que cada nodo ya está conectado consigo mismo).
- $c_{ij} \geq 0$ (de no cumplirse esta condición, sería rentable realizar algunas conexiones y la red óptima no tendría necesariamente estructura de árbol).

La siguiente propiedad también se suele exigir:

- $c_{ij} = c_{ji}$ para todo $i, j \in N_0$ (de no cumplirse esta condición, no estaríamos hablando de costes de conexión sino de costes de transporte, que podrían ser diferentes dependiendo del sentido del flujo).

Cuando no se verifica esta última propiedad, decimos que (N_0, C) es un problema de *arborescencias*. Los problemas de arborescencias fueron estudiados por Dutta y Mishra (2012).

Supondremos en lo sucesivo que un problema de árbol de expansión de coste mínimo siempre verifica las tres propiedades anteriores.

Dado un problema (N_0, C) , podemos encontrar un árbol (esto es, un grafo no dirigido sin ciclos) de nodos N_0 que minimiza los costes de conexión a la fuente⁶. Aunque puede haber más de un árbol de este tipo, el coste de construcción es el mismo para todos ellos. Denotamos mediante $m(N_0, C)$ este coste mínimo.

Un problema de árbol de expansión de coste mínimo (N_0, C) se puede expresar como un juego de costes (N, c) con

$$c(S) = m(S_0, C_S)$$

para todo $S \subset N$, siendo $C_S \in \mathbb{R}^{S_0 \times S_0}$ la restricción de C a S_0 .

Por tanto, cada $c(S)$ asocia a la coalición S su coste de conexión a la fuente sin utilizar los nodos de los demás jugadores. De esta forma, $c(S)$ indica el coste mínimo entre los jugadores de S .

Ejemplo 4.46 *En la Figura 4.4 aparece representado el problema de árbol de expansión de coste mínimo (N_0, C) con $N = \{1, 2, 3\}$ y*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 100 & 5 \\ 10 & 0 & 1 & 10 \\ 100 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

El juego de costes asociado (N, c) está caracterizado por $c(1) = 10$, $c(2) = 100$, $c(3) = 5$, $c(1, 2) = 11$, $c(1, 3) = 15$, $c(2, 3) = 10$, $c(N) = 11$.

⁶Un grafo de coste mínimo con ciclos podría ser mejorado al suprimir una de las conexiones ij del ciclo, con lo que tendríamos el mismo coste (si $c_{ij} = 0$) o coste menor, lo cual sería contradictorio.

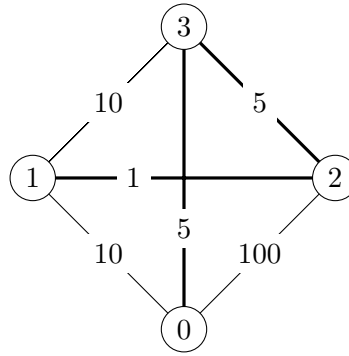


Figura 4.4: Representación de un problema de árbol de expansión de coste mínimo con tres jugadores. El árbol óptimo está marcado con un trazo más grueso y tiene coste 11.

Teorema 4.47 Sea (N, c) el juego de costes asociado a un problema de árbol de expansión de coste mínimo (N_0, C) . Entonces, el core de (N, c) es no vacío. Sea i^0 el primer arco en el camino del vértice i a la fuente en el árbol de mínimo coste para la coalición N . El reparto $x_i = c_{ii^0}$ para cada $i \in N$ está en el core del juego. A esta distribución se la conoce como *distribución de Bird*.

Demostración: Debemos demostrar que $(c_{ii^0})_{i \in N} \in C(N, c)$. Es claro que $\sum_{i \in N} c_{ii^0} = c(N)$, ya que es el coste de un árbol óptimo. Sea ahora una coalición $S \subset N$ y supongamos $c(S) < \sum_{i \in S} c_{ii^0}$. Eso quiere decir que existe un árbol t^S que conecta todos los nodos de S a la fuente a un coste $c(S)$ estrictamente menor que $\sum_{i \in S} c_{ii^0}$. Pero entonces el árbol $t = \{(i, i^0)\}_{i \in N \setminus S} \cup t^S$ conecta todos los nodos de N a la fuente a un coste estrictamente menor que $c(N)$, lo cual es imposible. ■

La distribución de Bird es, además, un punto extremo del core. Se puede ver fácilmente que los subjuegos son nuevamente juegos de conexión a una fuente, con lo que esta clase de juegos son totalmente equilibrados. Además, se puede comprobar que no son cóncavos.

Una crítica a la distribución de Bird es que no es monótona en costes. Consideremos, por ejemplo, $N = \{1, 2\}$ y C definida por $c_{01} = 10$, $c_{12} = 1$ y $c_{02} = 100$. El único árbol óptimo es $(0, 1), (1, 2)$ con lo que el pago propuesto por Bird es $(10, 1)$, penalizando al jugador más cercano a la fuente. Si, por el contrario, aumentamos el coste del arco $(0, 1)$ hasta $c_{01} = 200$, el pago propuesto por Bird pasa a ser $(1, 100)$, con lo que el jugador en el nodo 1 paga menos, favorecido por el encarecimiento de su propia conexión a la fuente.

Además, la distribución de Bird no es monótona en población⁷. En el ejemplo anterior, si añadimos un tercer jugador 3 (Figura 4.4) con $c_{03} = c_{23} = 5$ y $c_{13} = 10$, el pago propuesto por Bird pasa a ser $(1, 5, 5)$, con lo que el jugador 2 empeora al pasar de pagar 1 a pagar 5. Este tipo de situaciones no son deseables ya que pueden provocar que el jugador 2 vete la entrada del jugador 3, pese a las evidentes ventajas de su presencia para reducir costes.

Supongamos ahora que definimos el problema de costes de forma “optimista”. Sea (N, c^+) un juego de costes definido como

$$c^+(S) = m(S_0, C_S^+)$$

para todo $S \subset N$, siendo $C_S^+ \in \mathbb{R}^{S_0 \times S_0}$ la matriz de costes obtenida a partir de C en la que se supone que los nodos de $N \setminus S$ están ya conectados a la fuente, con lo que se pueden conectar a través de ellos. Es decir, $c_{i0}^+ = \min\{c_{ij} : j \in (N \setminus S)_0\}$ para todo $i \in S$, y $c_{ij}^+ = c_{ij}$ para todo $i, j \in S$.

Teorema 4.48 (Bergantiños y Vidal-Puga (2007a,b)) Sean (N, c) y (N, c^+) los juegos de costes asociados a un problema de árbol de expansión de coste mínimo (N_0, C) . Entonces, (N, c^+) es

⁷Lo equivalente a un PMAS en problemas de coste.

un juego de costes cóncavo y su valor de Shapley pertenece al core de (N, c) . Además, es un reparto simétrico, monótono en costes y monótono en población.

4.6. Problemas de flujo máximo

Una red de flujo es un grafo dirigido en el que hay dos nodos importantes, el *nodo inicio* o *fuente* y el *nodo final* o *sumidero*. En el problema clásico de investigación operativa el objetivo es maximizar el flujo que puede pasar de la fuente al nodo final. Se asume que los arcos tienen capacidades limitadas que son datos iniciales del problema. El flujo puede ser desde automóviles en una red de carreteras hasta fluidos viajando por tuberías o bits por un cable de fibra óptica. Un problema de flujo máximo viene dado por un grafo dirigido en el que cada arco tiene una capacidad máxima y es controlado por uno de los jugadores. El objetivo de los jugadores es dirigir el máximo flujo posible de la fuente al nodo final.

Definición 4.49 Un problema de flujo máximo (en inglés, *maximum flow problem*) está definido por un vector $F = (V, E, v^0, v^1, c, N, I)$ tal que,

- (V, E) es un grafo dirigido, siendo V el conjunto de vértices y E el conjunto de arcos dirigidos. El vértice v_0 se corresponde con la fuente y v^1 es el sumidero o nodo final.
- $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función que asocia a cada arco $e \in E$ un número positivo que representa la máxima capacidad del arco.
- N es el conjunto de jugadores.
- $I : E \rightarrow N$ es una función que asigna a cada arco un jugador que lo controla.

Cada problema de flujo máximo puede ser descrito como un juego coalicional en el que el valor de una coalición S es la máxima cantidad de flujo que los miembros de S pueden llevar desde el origen al destino sin la ayuda de los jugadores que no están en S . Si pensamos en un sistema de tráfico, la capacidad sería el número máximo de coches que pueden pasar por cada carretera en una hora en una zona establecida.

Ejemplo 4.50 En el siguiente ejemplo se muestran las capacidades de los arcos que pueden ser distintas vías para transportar del origen al destino. El valor de $v(S)$ puede representar el beneficio que proporciona a la coalición el transporte correspondiente.

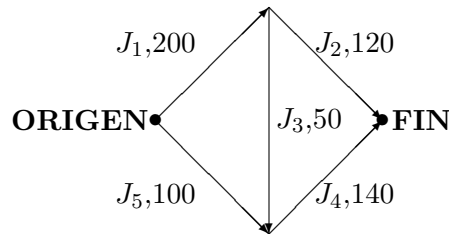


Figura 4.5: Grafo de capacidades.

La función característica ⁸ de este juego es la siguiente:

$$v(S) = 0 \quad \text{si} \quad |S| = 1$$

$$v(S) = 0 \quad \text{si} \quad |S| = 2, S \notin \{(1, 2), (4, 5)\}$$

$$v(1, 2) = 120, v(4, 5) = 100$$

$$v(1, 2, 3) = 120, v(1, 2, 4) = 120, v(1, 2, 5) = 120, v(1, 3, 4) = 50$$

$$v(1, 3, 5) = 0, v(1, 4, 5) = 100, v(2, 3, 4) = 0, v(2, 3, 5) = 0, v(2, 4, 5) = 100, v(3, 4, 5) = 100$$

$$v(1, 2, 3, 4) = 170, v(1, 2, 3, 5) = 120, v(1, 2, 4, 5) = 220$$

$$v(1, 3, 4, 5) = 140, v(2, 3, 4, 5) = 100, v(1, 2, 3, 4, 5) = 260.$$

Los problemas de flujo máximo fueron introducidos por Kalai y Zemel (1982). Mediante el algoritmo de Ford Fulkerson (Ford y Fulkerson (1962)), podemos encontrar el flujo máximo de una red. Existe una conexión entre flujo máximo y corte de mínima capacidad. Un corte en un grafo es un conjunto de arcos de forma que si los eliminamos del grafo, el subgrafo resultante tiene flujo nulo. Se define la capacidad de un corte como la suma de las capacidades de sus arcos. La capacidad de un corte es siempre mayor o igual que el flujo máximo de la red y existe un corte, corte mínimo, para el que la capacidad del corte es exactamente el flujo máximo de la red. En el ejemplo considerado si buscamos los cortes mínimos y sus capacidades obtenemos:

Corte	Capacidad
J_1, J_5	$200 + 100 = 300$
J_1, J_4	$200 + 140 = 340$
J_2, J_4	$120 + 140 = 260$
J_2, J_3, J_5	$120 + 50 + 100 = 270$

En nuestro ejemplo el corte de mínima capacidad es el formado por los jugadores J_2 y J_4 y su capacidad, 260, coincide con el flujo máximo.

A partir de los cortes mínimos, se pueden obtener asignaciones en el core del juego correspondiente (que son extremos del core). Los que no pertenecen al corte mínimo no reciben nada y los demás reciben la capacidad correspondiente. En el ejemplo considerado sería $(0, 120, 0, 140, 0)$.

Teorema 4.51 *Un juego coalicional es totalmente equilibrado si y solo si es equivalente a un problema de flujo máximo.*

⁸La notación J_i del gráfico hace referencia al jugador i .

Ejercicios

1. Considera los siguientes juegos simples: $v_1 = [0, 0, 0, 1, 0, 0, 1]$, $v_2 = [0, 0, 0, 1, 1, 0, 1]$, $v_3 = [1, 0, 0, 1, 1, 0, 1]$ y $v_4 = [0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$. Indica si hay jugadores veto, dictadores, simétricos,... En base a esa información, indica en cada caso el core del juego.
2. El gobierno de una ciudad está formado por dos cámaras. Una de ellas consta de 3 miembros y la otra de 7. Para aprobar una propuesta se necesita mayoría en cada cámara. Calcula el índice de Shapley-Shubik de cada miembro.
3. Comprueba que el índice de Banzhaf referido al año 1965 del Ejemplo 4.14 de un miembro permanente es 0.1669 y el de un no permanente 0.01653. Compáralo con el índice de Shapley-Shubik.
4. Considera un tribunal formado por $2m$ miembros (número par) y un presidente que solo vote en caso de empate. ¿Es el poder del presidente igual al de cualquier otro miembro? Calcula el índice de Shapley-Shubik.
5. Calcula el valor de Shapley y el nucleolus para los siguientes problemas del aeropuerto. Para simplificar, trataremos con el modelo más simple, con solo 4 jugadores, podemos suponer que hay 4 aerolíneas y todas tienen el mismo tránsito, sin embargo, unas usan aviones mayores que otros, tal y como reflejan los siguientes vectores de costes: $c = (1, 2, 3, 4)$ y $c' = (1, 20, 30, 40)$. Trata de defender el reparto de Shapley con argumentos. Ídem para el nucleolus. ¿Qué reparto te parece más razonable?
6. Una empresa quiebra y sus deudas son de 10000, 20000 y 30000 euros con los agentes A, B y C, respectivamente. Compara el valor de Shapley, el nucleolus y el core-center del juego TU asociado si la empresa dispusiera para sufragar sus deudas de:
 - a) 10000 euros.
 - b) 15000 euros.
 - c) 25000 euros.
 - d) 43000 euros.
 - e) 55000 euros.
 - f) 60000 euros.
7. **Compra-venta de una casa.** Los compradores 2 y 3 tienen cada uno 300000 euros. Supongamos que el jugador 2 valora la casa en 200000 euros y el jugador 3 lo valora en 300000 euros. Además, el vendedor la tasa en 100000. Obtén el juego TU asociado, calcula el core del juego y las principales soluciones puntuales e interprétalas.
8. Tres ciudades quieren conectarse a una depuradora ya construida. Sea

$$\begin{array}{cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 0 \rightarrow & \left(\begin{array}{cccc} 0 & 26 & 12 & 17 \\ & 0 & 30 & 21 \\ & & 0 & 44 \\ & & & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

la matriz de costes, de tal modo que a_{ij} representa el coste de conectar la ciudad i y la ciudad j y a_{0j} el coste de conectar la depuradora con la ciudad j . Define la función característica del juego de costes que represente adecuadamente este problema y obtén las principales soluciones para este problema con la correspondiente interpretación.

9. Calcula el juego de costes optimista (N, c^+) asociado al problema de árbol expansión de coste mínimo del Ejemplo 4.46. Calcula y compara los valores de Shapley de los juegos (N, c) y (N, c^+) . ¿Cuál de los dos repartos te parece más justo?

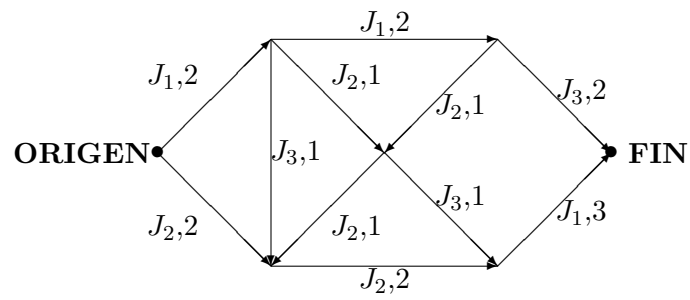


Figura 4.6: Problema de flujo máximo.

10. Comprueba que el juego de flujo asociado al problema de flujo de la Figura 4.6 se corresponde con $v = [0, 0, 0, 2, 2, 0, 4]$.

Parte II

Juegos coalicionales con utilidad no necesariamente transferible

Capítulo 5

El modelo NTU

Los juegos con utilidad no necesariamente transferible, o juegos NTU¹, son más generales que los juegos con utilidad transferible (juegos TU) estudiados en la Parte I. Tanto los juegos TU como los juegos NTU asumen que un conjunto de jugadores pueden alcanzar acuerdos, pero en los juegos NTU la utilidad no puede transferirse libremente, en general, entre los jugadores. Esta limitación puede deberse a diversos factores. Veamos algunos posibles factores en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.1 *Supongamos que tenemos tres jugadores, 1, 2 y 3, que quieren negociar el precio de una tarta que posee el jugador 1. El jugador 1 no quiere la tarta, que valora en 0 euros, pero el jugador 2 la valora en 10 euros y el jugador 3 la valora en 15 euros. Un modelo TU sencillo diría que estamos en el juego TU (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(1, 2) = 10$, $v(1, 3) = 15$, $v(2, 3) = 0$ y $v(N) = 15$. Cualquier reparto (x, y, z) con $x + y + z = 15$ sería posible dando la tarta al jugador 3 y transfiriendo x euros del jugador 3 al jugador 1, e y euros del jugador 3 al jugador 2. Sin embargo, este modelo TU no sería adecuado si se da alguna de las siguientes circunstancias:*

Restricciones presupuestarias *El jugador 2 y el jugador 3 solo tienen disponibles 1 euro cada uno. Aunque $v(N) = 15$, no son posibles los repartos en los que el jugador 1 recibe más de 2. Es decir, solo serían admisibles los repartos (x_1, x_2, x_3) con $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ y $x_1 \leq 2$. Esta situación no sería posible modelizarla mediante un juego TU.*

Distinta valoración de los resultados de la cooperación *Al jugador 1 le da igual tener 2 euros que tener más² de 2. De nuevo, solo serían posibles los repartos (x_1, x_2, x_3) con $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ y $x_1 \leq 2$, ya que no hay forma de que el jugador 1 obtenga una utilidad mayor que 2.*

Algún jugador no es egoísta *Decimos que un jugador es egoísta cuando no influye en su propia valoración lo que obtienen los demás. Podemos también considerar el caso en el que sí influye. Por ejemplo, supongamos que el jugador 1 valora la cantidad de tarta recibida por el jugador 2 tanto como si la hubiera recibido él mismo (podríamos pensar que entre estos jugadores hay vínculos suficientemente fuertes para que esto suceda³). Bajo esta suposición, son posibles repartos tales como $(0, 0, 15)$ dando la tarta al jugador 3, o $(10, 10, 0)$ dando la tarta al jugador 2. Este segundo reparto no sería eficiente, ya que se puede mejorar dando la tarta al jugador 3 y que éste pague al jugador 2 una cantidad $t \in (10, 15)$, resultando en un pago $(t, t, 15 - t)$. En*

¹NTU son las iniciales de *Non-Transferable Utility*.

²Aunque esta situación parezca un tanto inconcebible, lo cierto es que es un caso extremo de situaciones en la que una persona valora más el dinero cuando tiene poco que cuando tiene mucho (lo cual sí es razonable).

³Este sería un caso de jugador altruista. Si la utilidad del jugador 1 disminuye con la cantidad de tarta recibida por el jugador 2, decimos que el jugador 1 es un jugador despechado (en inglés, *spite*). Otra posibilidad es que la utilidad del jugador 1 dependa de la diferencia en la cantidad de tarta que recibe él y la que reciben los demás. En este último caso, decimos que el jugador 1 es competitivo.

general, los repartos óptimos factibles son aquellos (x_1, x_2, x_3) tales que $x_1 = x_2$ y $x_2 + x_3 = 15$. Otros repartos, como por ejemplo el $(8, 8, 8)$, no serían posibles.

Un detalle que es evidente en los dos últimos ejemplos es que $v(S)$ no representa euros, sino la *utilidad* que representan los euros. De hecho, esto también ocurre de forma más sutil en el primer ejemplo, ya que aparte de euros también estamos repartiendo una tarta.

Ejemplo 5.2 Queremos repartir 15 unidades de ancho de banda entre tres usuarios de una red telemática. De nuevo, podemos modelizar esta situación mediante el juego $TU(N, v)$, siendo $v(S) = 15$ para todo $S \subset N$. Con este modelo, asumimos implícitamente que cada usuario valora el ancho de banda de forma lineal e idéntica para todos ellos, pero esto no tiene que ser necesariamente así.

- El jugador 1 necesita ancho de banda para ver un vídeo. La calidad óptima del vídeo se obtiene con 2 unidades de banda ancha. Por tanto, es lo mismo darle 2 unidades que darle más. De nuevo, esta situación no sería posible modelizarla mediante un juego TU .
- Los jugadores 1 y 2 son simétricos y necesitan ancho de banda para comunicarse entre ellos. Cuanto más ancho de banda mejor, pero en todo caso la comunicación irá a la velocidad más lenta de los dos. Es decir, que es lo mismo darles 5 a cada uno que 5 a uno y 10 al otro. En este caso, repartos del tipo (x, y, z) con $x \neq y$ no son factibles.

5.1. La función característica

Los ejemplos que hemos visto pueden modelizarse mediante un juego sin utilidad transferible, cuya definición formal es la siguiente:

Definición 5.3 Un juego coalicional sin utilidad transferible es un par (N, V) donde N es un conjunto finito de jugadores, y V es una función característica que asigna a cada coalición $S \subset N$ un subconjunto de $\mathbb{R}^S$, de forma que $V(S)$ indica las “utilidades admisibles que pueden obtener los jugadores de S cuando cooperan entre ellos, independientemente de lo que hagan los jugadores de $N \setminus S$ ”. Por convención, $V(\emptyset) = \{0\}$.

Debido a que trabajaremos con puntos y vectores, y no con números reales, necesitamos ser cuidadosos con la notación en este nuevo contexto. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 5.4 (Juego del café (Owen (1972))) Tres jugadores quieren repartirse café. A todos les gusta el café sin azúcar, pero al jugador 2 le gusta más el café con azúcar que sin azúcar. El jugador 1 tiene granos de café, el jugador 2 tiene agua y el jugador 3 tiene azúcar. Para preparar café (sin azúcar), es necesario y suficiente tener granos de café y agua.

En este caso, la colaboración de los tres jugadores asegura que puedan repartirse el café (con o sin azúcar) de cualquier forma entre ellos. Así, los repartos admisibles vienen dados por el conjunto⁴:

$$V(N) = \{x \in \mathbb{R}_+^N : 1_N \cdot x \leq 1\}.$$

Si faltan los granos de café (jugador 1) o el agua (jugador 2), no es posible preparar café y los repartos admisibles son:

$$\begin{aligned} V(1) &= V(2) = V(3) = \{(0)\} \\ V(1, 3) &= V(2, 3) = \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

⁴Recordemos que $1_N \cdot x \leq 1$ es una forma resumida de escribir $\sum_{i \in N} x_i \leq 1$, que en este caso sería $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$.

Si falta el azúcar (jugador 3), la utilidad del jugador 2 se reduce. Podemos por ejemplo, suponer que el jugador 2 valora el café sin azúcar una cuarta parte que el café con azúcar:

$$V(1, 2) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{\{1,2\}} : (1, 4) \cdot x \leq 1 \right\}.$$

Con esta restricción, el pago máximo (obtenido al recibir todo el café y todo el agua) al jugador 1 es 1 y al jugador 2 es $\frac{1}{4}$.

Ejemplo 5.5 (Roth (1980b)) Tres partidos políticos obtienen 2, 2 y 3 escaños, respectivamente, en un Parlamento. Para formar Gobierno es necesario alcanzar la mayoría absoluta (4 escaños), por lo que se necesita una coalición de dos partidos como mínimo. Debido a la ley electoral, el reparto de Ministerios debe ser proporcional al número de escaños. Suponemos que la utilidad de los partidos se mide únicamente en el número de Ministerios que obtienen. Los repartos admisibles son:

$$\begin{aligned} V(1) &= V(2) = V(3) = \{(0)\} \\ V(1, 2) &= \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\} \\ V(1, 3) &= V(2, 3) = \left\{ \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Los tres partidos pueden también acordar asociarse de forma rotativa entre ellos, de forma que cualquier reparto en la envoltura convexa de los puntos $(0, 0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5})$, $(0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ y $(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7})$ es factible. En el reparto $(0, 0, 0)$ no habría apoyo de ningún partido, mientras que en el reparto $(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7})$ los tres estarían de acuerdo. En el resto de vectores se consideran acuerdos únicamente entre dos partidos. Por tanto:

$$V(N) = \text{conv} \left\{ (0, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5} \right), \left(0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right), \left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7} \right) \right\}.$$

Cualquier función característica no es válida para representar un conjunto de utilidades admisibles. Por eso, debemos exigir ciertas condiciones a V . Para cada coalición $S \subset N$, las más habituales son las siguientes:

- $V(S) \neq \emptyset$, es decir, los jugadores pueden valorar la utilidad que obtienen con la cooperación.
- $V(S)$ es cerrado. Esta condición es más técnica pero facilita mucho el trabajo y es realmente razonable. Si podemos encontrar vectores admisibles todo lo cerca que queramos de un vector x , entonces x debería ser también un vector de utilidades admisibles.
- $V(S)$ es acotado por arriba : Para cada $x \in \mathbb{R}^S$, $V(S) \cap \{y \in \mathbb{R}^S : y \geq x\}$ es acotado. Esta condición exige que no sea posible dar una utilidad ilimitadamente grande a ningún jugador sin perjudicar (al menos) a algún otro.

Estas tres primeras propiedades son imprescindibles para que el par (N, V) constituya un modelo relevante. Las dos siguientes propiedades pueden relajarse en determinadas circunstancias, pero en general son también imprescindibles:

- $V(S)$ es comprensivo : Si $x \in V(S)$, $y \leq x$, entonces $y \in V(S)$. Esta condición parece técnica pero tiene una justificación intuitiva y facilita también mucho el análisis. Indica que si un vector de utilidades x es admisible, entonces cualquier vector por debajo de x también debe ser admisible. Es decir, siempre podemos quitar utilidad a los jugadores. Si tenemos un conjunto $A \subset \mathbb{R}^S$, para forzar la comprensividad del conjunto podemos definir $A - \mathbb{R}_+^S$.

- $V(S)$ es convexo: Si $x, y \in V(S)$, entonces $tx + (1 - t)y \in V(S)$ para cualquier $t \in [0, 1]$. Esta condición surge cuando se pueden hacer loterías y los jugadores tienen funciones de utilidad de von Neumann-Morgenstein, tal como veremos en el próximo capítulo.

También existen propiedades que, si bien no son imprescindibles, sí se pueden pedir en determinados contextos:

- $\partial V(S)$ es suave: Cada punto en la frontera de $V(S)$ tiene un único vector ortogonal con todas sus coordenadas positivas, y que varía de forma continua. Esta condición nos permite trabajar con las derivadas parciales sobre la frontera de $V(S)$ sin problemas de existencia ni unicidad.
- $V(S)$ es acotado superiormente: Para cada $i \in S \subset N$, existe una cota superior c_i tal que $x_i \leq c_i$ para todo $x \in V(S)$. Esta condición nos asegura que no podamos darle a ningún jugador una cantidad indefinidamente grande.

Cuando un conjunto es acotado superiormente, entonces también es acotado por arriba, pero el recíproco no se cumple. En la Figura 5.1 podemos verificar visualmente esta afirmación.

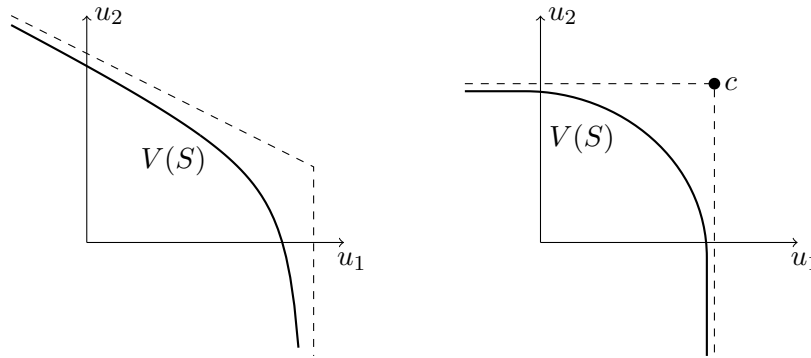


Figura 5.1: Ejemplo de $V(S)$ acotado por arriba pero no acotado superiormente (izquierda) y de $V(S)$ acotado superiormente (derecha).

Por último, las siguientes propiedades tienen su equivalencia natural en juegos TU por lo que comparten su misma justificación:

- Superaditividad : $V(S) \times V(T) \subset V(S \cup T)$ para todo $S, T \subset N$ con $S \cap T = \emptyset$.
- Aditividad: $V(S) \times V(T) = V(S \cup T)$ para todo $S, T \subset N$ con $S \cap T = \emptyset$.
- 0-Normalización: $\max V(i) = 0$ para todo $i \in N$. Si el juego es, además, comprehensivo, esta condición implica que $V(i) = (-\infty, 0]$ para todo $i \in N$.
- Monotonía: $V(S) \times 0_{T \setminus S} \subset V(T)$ para todo $S, T \subset N$ con $S \subset T$.
- 0-Monotonía: $V(S) \times \prod_{i \in T \setminus S} V(i) \subset V(T)$ para todo $S, T \subset N$ con $S \subset T$.
- Convexidad ordinal: $V^N(S) \cap V^N(T) \subset V^N(S \cup T)$ para todo $S, T \subset N$, siendo $V^N(S) = V(S) \times \mathbb{R}^{N \setminus S}$ para todo $S \subset N$.

- Convexidad cardinal: Dados $S, T \subset N$, para todo $x^S \in V(S)$ y $x^T \in V(T)$, existe $x^{S \cup T} \in V(S \cup T)$ y $x^{S \cap T} \in V(S \cap T)$ tales que se verifican las siguientes tres desigualdades:

$$\begin{aligned} x_{S \cap T}^S + x_{S \cap T}^T &\leq x_{S \cap T}^{S \cup T} + x^{S \cap T} \\ x_{S \setminus T}^S &\leq x_{S \setminus T}^{S \cup T} \\ x_{T \setminus S}^T &\leq x_{T \setminus S}^{S \cup T}. \end{aligned}$$

Es claro que aditividad implica superaditividad. No es tan claro que convexidad implica superaditividad:

Proposición 5.6 *Convexidad ordinal implica superaditividad.*

Demostración: Sean $S, T \subset N$ con $S \cap T = \emptyset$. Suponiendo que V es convexo ordinal, debemos probar que $V(S) \times V(T) \subset V(S \cup T)$. Sea $x \in V(S) \times V(T)$. Definimos $x^N \in \mathbb{R}^N$ como $x_{S \cup T}^N = x_{S \cup T}$ y $x_{N \setminus S \cup T}^N = 0_{N \setminus S \cup T}$. Como $S \cap T = \emptyset$, deducimos que $x_S \in V(S)$ y $x_T \in V(T)$, con lo que $x^N \in V^N(S) \cap V^N(T)$. Por convexidad ordinal, tenemos que $x^N \in V^N(S \cup T)$, de lo que se deduce que $x \in V(S \cup T)$. ■

Proposición 5.7 *Comprehensividad y convexidad cardinal implican superaditividad.*

Demostración: Sean $S, T \subset N$ con $S \cap T = \emptyset$. Suponiendo que V es comprehensivo y convexo cardinal, debemos probar que $V(S) \times V(T) \subset V(S \cup T)$. Es decir, dados $x^S \in V(S)$, $x^T \in V(T)$, debemos probar que el vector $z \in \mathbb{R}^{S \cup T}$ con $z_S = x^S$ y $z_T = x^T$, pertenece a $V(S \cup T)$. Como V es convexo cardinal, existe $x^{S \cup T} \in V(S \cup T)$ tal que $x^S \leq x_S^{S \cup T}$ e $x^T \leq x_T^{S \cup T}$. Por tanto, $z \leq x^{S \cup T}$. Por comprehensividad, $z \in V(S \cup T)$. ■

5.2. Soluciones en juegos NTU

Sea $\mathcal{G} = \bigcup_{N \subset \mathbb{N}: |N| < \infty} \mathcal{G}^N$ la unión de todos los juegos TU con $\mathbb{N}$ como conjunto de jugadores potenciales. Una *solución* para $\mathcal{G}$ es una función Φ que asigna a cada juego $(N, V) \in \mathcal{G}$ un subconjunto $\Phi(N, V) \subset \mathbb{R}^N$. Cada reparto $x \in \Phi(N, V)$ indica habitualmente, al igual que para juegos TU, el pago o expectativa de pago, que cada jugador de N recibe en el juego.

Veamos algunas de las propiedades que se le pueden requerir a una solución Φ . Al igual que para juegos TU, estas propiedades pueden adaptarse al caso en que la regla se restringe a una subclase $\Omega \subset \mathcal{G}$:

Admisibilidad (en la gran coalición) $\Phi(N, V) \subset V(N)$ para todo $(N, V) \in \mathcal{G}^N$.

La admisibilidad en la gran coalición es una propiedad básica en juegos NTU. Si no la verifica, puede ser porque la solución no indica pagos ni expectativas de pago, sino algo distinto, como ocurría, por ejemplo, en los índices de poder estudiados en juegos TU.

Otra posibilidad es que el juego no sea superaditivo y se admita la posibilidad de que los jugadores formen particiones óptimas. En este caso, la admisibilidad puede reemplazarse por:

Admisibilidad coalicional Para todo $x \in \Phi(N, V)$, existe una partición P de N tal que $x \in \prod_{S \in P} V(S)$.

La admisibilidad coalicional es equivalente a la admisibilidad en la gran coalición cuando el juego original (N, V) , posiblemente no superaditivo, es sustituido por un juego superaditivo $(N, \hat{V})$, denominado, al igual que en juegos TU, cobertura superaditiva, siendo

$$\hat{V}(S) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}(S)} \prod_{T \in P} V(T)$$

donde $\mathcal{P}(S)$ es el conjunto de particiones de $S \subset N$.

Si permitimos que los jugadores formen particiones óptimas, este nuevo juego $(N, \hat{V})$ sigue con más fidelidad la definición de $V(S)$ como “utilidades admisibles que pueden obtener los jugadores de S cuando cooperan”. Sin embargo, un juego (N, V) no superaditivo modeliza mejor situaciones en las que $V(S)$ indica las utilidades alcanzables por los jugadores de S bajo el uso de una tecnología exclusiva. En esos casos, la definición más razonable de admisibilidad es la de la gran coalición.

La siguiente propiedad no es siempre posible conseguirla en juegos NTU, si bien es importante porque asegura que la solución siempre existe y, además, es única:

Unicidad $|\Phi(N, V)| = 1$ para todo $(N, V) \in \mathcal{G}^N$.

Para simplificar, cuando una solución verifica unicidad, escribiremos $\Phi_i(N, V)$ en lugar de “ x_i siendo x el único reparto en $\Phi(N, V)$ ”.

Las siguientes propiedades serían equivalentes a eficiencia en juegos TU. Para juegos NTU existen dos posibilidades de eficiencia. La eficiencia débil de Pareto indica que no existen pagos mejores para todos los jugadores, mientras que la eficiencia fuerte de Pareto indica que no existen pagos mejores para algún jugador, dejando a los demás indiferentes. Formalmente:

Eficiencia débil de Pareto Para todo $x \in \Phi(N, V)$, no existe ningún $y \in V(N)$ tal que $x \ll y$.

Eficiencia fuerte de Pareto Para todo $x \in \Phi(N, V)$, no existe ningún $y \in V(N)$ tal que $x < y$.

Es claro que la eficiencia fuerte de Pareto implica la eficiencia débil de Pareto. Veamos ahora cómo definir la simetría y el anonimato en este contexto. La siguiente definición complementa la presentada en la Definición 3.3 del Capítulo 3.

Definición 5.8 Dado el conjunto de jugadores N , una función biyectiva $p : N \rightarrow N$ y $X \subset \mathbb{R}^N$, definimos

$$p(X) = \{p(x) : x \in X\} \subset \mathbb{R}^N.$$

Es decir, $p(X)$ representa el mismo conjunto X cambiando el índice (o nombre) de los jugadores según lo indicado por p .

Definición 5.9 Dos jugadores $i, j \in N$ son simétricos en (N, V) si

$$V(S \cup \{i, j\}) = p^{ij}(V(S \cup \{i, j\}))$$

para todo $S \subset N \setminus \{i, j\}$, siendo $p^{ij} : N \rightarrow N$ la función biyectiva que intercambia a los jugadores i y j , es decir: $p^{ij}(i) = j$, $p^{ij}(j) = i$, $p^{ij}(k) = k$ para todo $k \neq i, j$.

Cuando dos o más jugadores son simétricos, cualquier función biyectiva que los intercambie dejará al juego NTU inalterado; es decir, si $T \subset N$ es una coalición de jugadores simétricos entre sí en el juego (N, V) y p es una función biyectiva de N en N que los intercambia dejando a los demás igual, esto es, $p(i) = i$ si $i \notin T$, entonces $p(V(S)) = V(S)$ para todo $S \subset N$. Sea $p(V)$ la función característica definida por $p(V)(p(S)) = V(S)$ para todo $S \subset N$. La siguiente propiedad indica que los jugadores simétricos deben ser tratados igual:

Simetría Jugadores simétricos son tratados simétricamente. Formalmente:

$$p(V) = V \Rightarrow \Phi(N, p(V)) = \Phi(N, V)$$

para toda $p : N \rightarrow N$ función biyectiva.

La propiedad de simetría coincide con la siguiente cuando la solución verifica unicidad:

Simetría puntual Jugadores simétricos reciben los mismo. Formalmente::

$$i, j \text{ simétricos} \Rightarrow \Phi_i(N, V) = \Phi_j(N, V).$$

Por otro lado, aunque dos o más jugadores no sean simétricos, podemos aplicar la aplicación biyectiva p tanto al conjunto N como a la función característica V . Como resultado, obtendríamos el juego $(p(N), p(V))$ que sería casi exactamente el mismo juego que (N, V) pero con los nombres (índices) de los jugadores cambiados. Es entonces razonable suponer que, si toda la información relevante está contenida en (N, V) , entonces $\Phi(p(N), p(V))$ debería coincidir con $p(\Phi(N, V))$; es decir, si permutamos el juego (N, V) mediante p , y luego aplicamos la solución Φ , deberíamos obtener lo mismo que si primero calculamos la solución Φ a (N, V) y luego la permutamos mediante p . Esto sería lo que nos dice la propiedad de anonimato:

Anonimato La solución no se ve afectada si cambiamos el nombre de los jugadores. Formalmente:

$$\Phi(N', p(V)) = p(\Phi(N, V))$$

para toda $p : N \rightarrow N'$ función biyectiva.

5.3. Casos particulares de juegos NTU

5.3.1. Juegos TU

Cualquier juego TU puede ser representado como un juego NTU.

Definición 5.10 *Un juego con utilidad transferible o juego TU es un juego NTU en el que existe una función $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : x(S) \leq v(S)\} \subset \mathbb{R}^S$$

para todo $S \subset N$.

Habitualmente, en estos casos (N, V) se representa simplemente por (N, v) .

Las propiedades básicas que hemos visto para juegos TU y NTU son equivalentes entre los dos modelos, es decir, una solución para juegos TU (N, v) verifica la definición de monotonía, superaditividad, convexidad, etc., dada para los juegos TU, si y solo si su correspondiente forma NTU verifica respectivamente la definición de monotonía, superaditividad, convexidad cardinal, etc., dada para los juegos NTU.

Análogamente, una solución en TU verifica admisibilidad⁵, eficiencia, etc., dada para los juegos TU, si y solo si su correspondiente forma NTU verifica la definición de admisibilidad, eficiencia de Pareto, etc., dada para los juegos NTU.

⁵La admisibilidad y la admisibilidad coalicional no han sido explícitamente definidas en juegos TU. Su interpretación es la misma que para juegos NTU.

5.3.2. Problemas de negociación

Definición 5.11 Un problema de negociación (*en inglés, bargaining problem*), también llamado juego de regateo, es una terna (N, D, d) donde N es un conjunto finito de jugadores, $D \subset \mathbb{R}^N$ y $d \in \mathbb{R}^N$.

En un problema negociación los jugadores pueden alcanzar cualquier acuerdo dentro de D . Si se ponen de acuerdo, se reparten algún $x \in D$ de forma que x_i es la utilidad del jugador i . Si no alcanzan un acuerdo, se llevan d (punto de desacuerdo).

Habitualmente, se exigen algunas condiciones:

- $D \neq \emptyset$.
- D es cerrado.
- D está acotado por arriba: para cualquier $x \in \mathbb{R}^N$, $D \cap \{y \in \mathbb{R}^N : y \geq x\}$ es acotado.
- D es comprensivo.
- d está en el interior del conjunto D .

Bajo estas condiciones, un problema de negociación (N, D, d) se puede expresar como un juego NTU (N, V) tal que V está definida como sigue:

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : x_S \leq d_S\}$$

si $S \neq N$, y

$$V(N) = D \subset \mathbb{R}^N.$$

Un problema de negociación, expresado como un juego NTU, siempre verificará superaditividad, 0-monotonía, convexidad ordinal y convexidad cardinal. Si, además, $d = 0_N$, verificará 0-normalización y monotonía.

Proposición 5.12 Sea (N, V) un juego NTU equivalente a un problema de negociación (N, D, d) . Entonces, (N, V) es superaditivo, 0-monótono, convexo ordinal y convexo cardinal. Además, si $d = 0_N$, entonces (N, V) será 0-normalizado y monótono.

Demostración: Para demostrar las propiedades de convexidad, sean $S, T \subsetneq N$ no vacíos (para S o T vacío o igual a N , el razonamiento es similar sino trivial).

- Convexidad ordinal: Tenemos $V^N(S) \cap V^N(T) = d_{S \cup T} \times 0_{N \setminus S \cup T} - \mathbb{R}_+^N$. Si $S \cup T \neq N$, entonces $V^N(S \cup T) = d_{S \cup T} \times 0_{N \setminus S \cup T} - \mathbb{R}_+^N$ y, por tanto, ambos conjuntos son iguales. Si $S \cup T = N$, entonces $V^N(S \cup T) = V(N)$ y contiene a d en su interior.
- Convexidad cardinal: Sean $x^S \in V(S)$ y $x^T \in V(T)$. Como $S, T \neq N$, tenemos $x^S \leq d_S$ y $x^T \leq d_T$. Por tanto, los puntos $x^{S \cup T} = d_{S \cup T}$ y $x^{S \cap T} = d_{S \cap T}$ cumplen todas las condiciones de la definición.
- Superaditividad: Al ser convexo ordinal, el juego también es superaditivo por la Proposición 5.6.
- 0-monotonía: Sean $S \subset T \subset N$. Si $T \neq N$, entonces $V(S) = d_S - \mathbb{R}_+^S$ con lo que $V(S) \times \prod_{i \in T \setminus S} V(i) = d_T - \mathbb{R}_+^T = V(T)$. Si $S = T = N$, el resultado es trivial. Si $S \subsetneq T = N$, entonces por $d \in V(N)$ y comprensividad, $V(S) \times \prod_{i \in T \setminus S} V(i) = d_T - \mathbb{R}_+^T \subset V(N) = V(T)$.

Supongamos ahora que $d = 0_N$. La monotonía se deduce inmediatamente de la 0-monotonía. La 0-normalización se obtiene de $\max V(i) = d_i = 0$ para todo $i \in N$. ■

5.3.3. Juegos de hiperplano

Los juegos de hiperplano generalizan los juegos TU, es decir, todo juego TU es un juego de hiperplano, aunque no todo juego de hiperplano es un juego TU.

Definición 5.13 (Hart (1994)) *Un juego de hiperplano es un juego NTU (N, V) en el que existen una función $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda^S \in \mathbb{R}_{++}^S$ para cada $S \subset N$ tales que*

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : \lambda^S \cdot x \leq v(S)\}$$

para todo $S \subset N$.

Cuando λ_i^S es constante para cada $S \subset N$ ($\lambda_i^S = \alpha^S$ para todo $i \in S$) el juego de hiperplano es un juego TU (N, w) con $w(S) = \frac{v(S)}{\alpha^S}$ para todo $S \subset N$.

5.3.4. Mercados de intercambio

Los mercados de intercambio tienen una interpretación muy intuitiva y se pueden modelizar mediante juegos NTU. En la Definición 4.23 se encuentran definidos los elementos que intervienen en un mercado de intercambio.

Ejemplo 5.14 *Tenemos tres jugadores $N = \{1, 2, 3\}$. El jugador 1 tiene un guante derecho (R), el jugador 2 tiene un guante izquierdo (L), y solo son útiles los pares de guantes. El jugador 1 valora un par de guantes en 1 euro, mientras que el jugador 2 valora un par de guantes en $\frac{1}{2}$ euros. Ninguno de ellos tiene dinero. El jugador 3 no tiene guantes, pero sí dinero. El jugador 3 valora un par de guantes en $\frac{1}{3}$ euros.*

Modelizamos esta situación mediante el siguiente mercado de intercambio: $N = \{1, 2, 3\}$, $M = \{R, L, E\}$, $w^1 = (1, 0, 0)$, $w^2 = (0, 1, 0)$, $w^3 = (0, 0, 1)$.

En este ejemplo las asignaciones factibles viene dadas por matrices 3×3 , $A = (a_{ij})$ tales que $\sum_{i \in N} a_{ij} = 1$ para cada $j \in M$. Un ejemplo de reasignación factible es:

$$\begin{array}{rcccl} & & R & L & E \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Jugador 1} & \rightarrow & 0 & 0 & 0.5 \\ \text{Jugador 2} & \rightarrow & 0 & 0 & 0.5 \\ \text{Jugador 3} & \rightarrow & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Las funciones de utilidad son:

$$\begin{aligned} u_1(r, l, e) &= e + \min\{r, l\} \\ u_2(r, l, e) &= e + \frac{\min\{r, l\}}{2} \\ u_3(r, l, e) &= e + \frac{\min\{r, l\}}{3}. \end{aligned}$$

A partir de un mercado de intercambio (N, M, w, u) podemos definir un juego NTU (N, V) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V(S) &= \{(u_i(a))_{i \in S} : a \in A\} - \mathbb{R}_+^S \\ &= \left\{ (u_i(a_{i1}, \dots, a_{im}))_{i \in S} : \sum_{i \in S} a_{ij} = \sum_{i \in S} w_j^i \forall j \in M, a_i \in \mathbb{R}_+^M \forall i \in N \right\} - \mathbb{R}_+^S \end{aligned}$$

para todo $S \subset N$.

Ejemplo 5.15 El cálculo de $V(S)$ es sencillo para $|S| = 1$ pero no tanto para cardinalidad mayor. Vamos a comprobarlo con el Ejemplo 5.14. El conjunto $V(1)$ está formado por todas las utilidades alcanzables por el jugador 1 sin ayuda de los demás, es decir:

$$V(1) = \{(u_1(1, 0, 0))\} - \mathbb{R}_+^{\{1\}} = (-\infty, 0]$$

donde $-\mathbb{R}_+^{\{1\}}$ se añade para conseguir la comprehensividad. Análogamente:

$$\begin{aligned} V(2) &= (-\infty, 0], \\ V(3) &= (-\infty, 1]. \end{aligned}$$

Para coaliciones en las que los jugadores 1 y 2 están presentes, lo más eficiente es negociar siempre con pares de guantes. Para la coalición 1, 2, esto da lugar al reparto $(1, 0)$ si le damos los guantes al jugador 1, o al reparto $(0, \frac{1}{2})$ si le damos los guantes al jugador 2.

Cualquier reparto en el segmento que une $(1, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ también es factible, ya que los jugadores se pueden sortear el par de guantes en una lotería. Alternativamente, es también posible interpretar que cada guante se refiere en realidad a un conjunto grande de guantes, de forma que se pueden repartir las unidades individuales entre los jugadores en cualquier proporción. En este último caso, los guantes serían un bien perfectamente divisible como el café y el agua en el juego del café⁶.

En todo caso, el jugador 1 nunca podrá tener una utilidad por encima de 1, ni el jugador 2 una utilidad por encima de $\frac{1}{2}$. Teniendo en cuenta que el segmento que une los repartos $(1, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ está sobre la recta $x_1 + 2x_2 = 1$, obtenemos:

$$V(1, 2) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{\{1,2\}} : x_1 + 2x_2 \leq 1, x \leq \left(1, \frac{1}{2}\right) \right\} - \mathbb{R}_+^{\{1,2\}}.$$

Para $V(1, 3)$ y $V(2, 3)$ no es posible obtener utilidad de pares de guantes, pero sí repartir (de cualquier forma) un euro entre los dos agentes. Por tanto:

$$\begin{aligned} V(1, 3) &= \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{\{1,3\}} : x_1 + x_3 \leq 1, x \leq (1, 1) \right\} - \mathbb{R}_+^{\{1,3\}} \\ V(2, 3) &= \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{\{2,3\}} : x_2 + x_3 \leq 1, x \leq (1, 1) \right\} - \mathbb{R}_+^{\{2,3\}}. \end{aligned}$$

Para la gran coalición N , podemos dar todos los guantes al jugador 1 y repartir el euro de cualquier forma entre los tres. Con ello, son admisibles todos los repartos $x \in \mathbb{R}_+^N$ con $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ siempre que $x_1 \geq 1$ (ya que el jugador 1 tiene, al menos, todos los guantes). Por tanto:

$$V(N) \supset \{x \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + x_2 + x_3 = 2, x \geq (1, 0, 0)\}.$$

Los repartos con $0 \leq x_1 < 1$ también son posibles mediante: a) una lotería en la que el jugador 1 se lleva los guantes con probabilidad x_1 y nada con probabilidad $1 - x_1$, o bien, b) si los guantes son perfectamente divisibles, un reparto en el que el jugador 1 se lleva x_1 pares de guantes.

Por simplicidad, consideremos a partir de ahora solo el caso b) (los guantes son perfectamente divisibles). Entre los jugadores 2 y 3, suponiendo un pago x_1 para el jugador 1, lo eficiente es que, en la medida de lo posible, el jugador 2 se lleve el resto de pares de guantes, mientras que el dinero puede transferirse libremente entre los dos jugadores. Así, el pago admisible más favorable para el jugador 2, de entre los que dan x_1 al jugador 1, es $(x_1, 1 + \frac{1-x_1}{2}, 0)$, que se obtiene dando todo el

⁶En notación económica, se dice que el café y el agua, o los guantes derechos e izquierdos, son bienes complementarios perfectos.

dinero y el resto de los guantes al jugador 2. La transferencia de utilidad del jugador 2 al jugador 3 puede hacerse a través de dinero hasta alcanzar el reparto $(x_1, \frac{1-x_1}{2}, 1)$, que se obtiene dando el resto de los guantes al jugador 2 y todo el dinero al jugador 3. Modificando el valor de x_1 desde 0 hasta 1, son admisibles todos los repartos en la envoltura convexa del cuadrado de vértices $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, 1)$ y $(0, 1 + \frac{1}{2}, 0)$. Por tanto:

$$V(N) \supset \{x \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, x_1, x_3 \leq 1\}.$$

Ya solo nos falta estudiar los pagos admisibles con $x_3 > 1$, que se obtienen dando al jugador 3 todo el dinero y repartiendo los $1 - x_1$ pares de guantes que no han ido al jugador 1 entre los jugadores 2 y 3. Con ello, lo más favorable para el jugador 2 es el reparto $(x_1, \frac{1-x_1}{2}, 1)$, tal como vimos antes, mientras que lo más favorable para el jugador 3 es $(x_1, 0, 1 + \frac{1-x_1}{3})$, que se obtiene dando todo el dinero y el resto de los guantes al jugador 3 y nada al jugador 2. Modificando el valor de x_1 desde 0 hasta 1, son admisibles todos los repartos en la envoltura convexa del triángulo de vértices $(1, 0, 1)$, $(0, \frac{1}{2}, 1)$ y $(0, 0, 1 + \frac{1}{3})$. Por tanto:

$$V(N) \supset \{x \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, x_3 \geq 1\}.$$

Añadiendo comprehensividad, el conjunto $V(N)$ es:

$$V(N) = \{x \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 3, x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 4\} - \mathbb{R}_+^N$$

que aparece representado en la Figura 5.2.

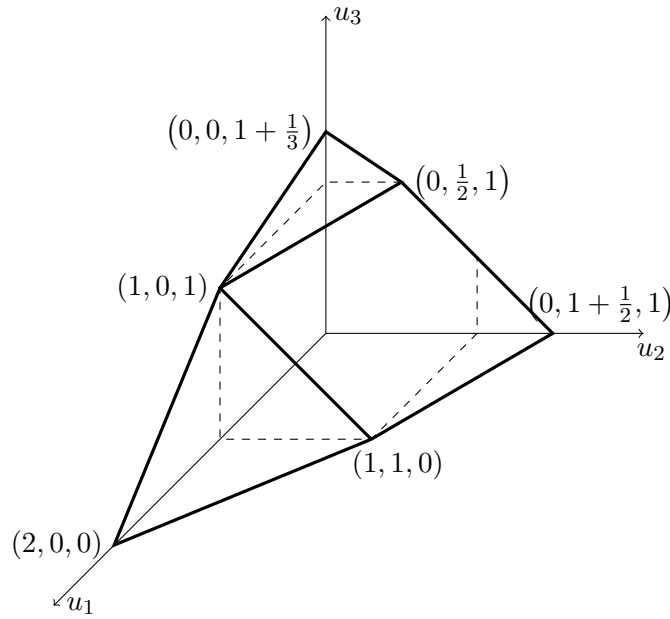


Figura 5.2: $V(N)$ de un posible mercado de intercambio.

Ejemplo 5.16 El juego del café presentado en el Ejemplo 5.4 es también un mercado de intercambio con tres bienes: café (c), agua (a) y azúcar (s). Las asignaciones iniciales son $w^1 = (1, 0, 0)$, $w^2 = (0, 1, 0)$, $w^3 = (0, 0, 1)$ y las funciones de utilidad son:

$$\begin{aligned} u_1(c, a, s) &= \min\{c, a\} \\ u_2(c, a, s) &= \min\{c, a, s\} + \frac{\min\{c, a\} - \min\{c, a, s\}}{4} \\ u_3(c, a, s) &= \min\{c, a\}. \end{aligned}$$

Observamos que en el caso de los jugadores 1 y 3 la función de utilidad modeliza el número de tazas de café (sin azúcar) que pueden conseguir los jugadores. En el caso del jugador 2, el primer sumando indica el número de tazas de café con azúcar que puede conseguir y el segundo sumando el número de tazas de café sin azúcar que aparece ponderado por $\frac{1}{4}$ dado que valora el café sin azúcar una cuarta parte que el café con azúcar. Si suponemos que al jugador 3 le gusta el café con azúcar, su función de utilidad sería semejante a la del jugador 2, si bien, como el jugador 3 es el que tiene el azúcar, el juego NTU resultante sería el mismo.

Ejercicios

1. Modeliza mediante juegos NTU las situaciones descritas en los Ejemplos 5.1 y 5.2.
2. Redefine el juego NTU propuesto en el Ejemplo 5.5 de forma que sea comprensivo.
3. Modeliza mediante un juego NTU la siguiente situación. Dos familias deben repartirse el caudal de 900 litros anuales de agua que les suministra un manantial que tienen en común. Las dos familias valoran el agua (cuanto más, mejor), y tienen que estar de acuerdo las dos en el reparto. Una de las familias valora el agua más cuando tiene poca que cuando tiene mucha. Podemos modelizar esta situación con una función de utilidad $u_1 : [0, 900] \rightarrow \mathbb{R}$, de forma que $u_1(x)$ es la utilidad que tiene el jugador 1 cuando recibe x litros de agua. Por ejemplo, $u_1(x) = \sqrt{x}$. El otro jugador tiene una utilidad $u_2(x) = x$. Se pide:
 - a) Define otras funciones de utilidad en las que la familia 1 valora más el agua cuando tiene poca que cuando tiene mucha.
 - b) Calcula los conjuntos $V(1)$, $V(2)$ y $V(1, 2)$ en los casos del enunciado y del apartado a).
 - c) Representa gráficamente los conjuntos anteriores.
4. Repite la modelización del ejercicio anterior suponiendo que la familia 1 valora más el agua cuando tiene mucha que cuando tiene poca. Por ejemplo, $u_1(x) = x^2$. El otro jugador tiene una utilidad $u_2(x) = x$.
 - a) Define otras funciones de utilidad en las que la familia 1 valora más el agua cuando tiene mucha que cuando tiene poca.
 - b) Calcula los conjuntos $V(1)$, $V(2)$ y $V(1, 2)$.
 - c) Representa gráficamente los conjuntos anteriores.

Capítulo 6

Una revisión de la teoría de la utilidad

6.1. Utilidad ordinal

A la hora de modelizar situaciones conflictivas, siempre hay que tener en cuenta el origen de estas situaciones. Básicamente, este origen está en la diferente valoración que una serie de jugadores tiene sobre un conjunto de alternativas entre las que se tiene que elegir. Una alternativa es cada uno de los resultados de las decisiones posibles de los jugadores. Estudiamos aquí en detalle qué entendemos por alternativas y qué entendemos por valoraciones. Estos son dos conceptos que aparecen reflejados habitualmente en los llamados problemas de decisión.

6.1.1. Problemas de decisión

Supongamos que tenemos un conjunto A de alternativas. Por ejemplo, $A = [0, 1]$ donde $a \in A$, indica que repartimos a unidades de agua al jugador 1 y $1 - a$ al jugador 2. Nótese que esta misma situación puede modelizarse como $A = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{\{1,2\}} : t_1 + t_2 \leq 1, t_1, t_2 \geq 0\}$, aceptando la posibilidad de no repartir todo el agua.

Los problemas de decisión están constituidos por un conjunto de alternativas, un conjunto de jugadores, y las preferencias que los jugadores tienen sobre cada una de esas alternativas. Formalmente:

Definición 6.1 *Un problema de decisión es una terna $(N, A, \succeq)$ donde $N = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores, A es un conjunto (no vacío) de alternativas y la relación $\succeq$ se corresponde con $(\succeq_i)_{i \in N}$ y representa la relación de preferencias de los jugadores. Así, $\succeq_i$ representa las preferencias de $i \in N$ dentro de A . Formalmente, $\succeq_i$ es un subconjunto de $A \times A$, de forma que dados $a, b \in A$*

$a \succeq_i b$ si el jugador i prefiere a antes que b , o bien es indiferente.

Definimos las relaciones de indiferencia $\sim_i$, y de preferencia estricta $\succ_i$.

$a \sim_i b$ si el jugador i $a \succeq_i b$ y $b \succeq_i a$.
 $a \succ_i b$ si $a \succeq_i b$ y no $b \succeq_i a$.

Se define $\preceq_i$ y $\prec_i$ de forma análoga.

Definición 6.2 *Una solución en problemas de decisión es una función que a cada $(N, A, \succeq)$ le asigna un elemento en A .*

Por ejemplo, si $A = [0, 1]$, podemos definir las preferencias del jugador 1 como $a \succeq_1 b$ si y solo si $a \geq b$, es decir, el jugador 1 quiere tener cuanta más agua mejor. Análogamente, el jugador 2

tendría como preferencias $a \succeq_2 b$ si y solo si $a \leq b$ (equivalentemente, $1 - a \geq 1 - b$, cuanto más agua para él, mejor).

Otras preferencias son también posibles. Por ejemplo, podemos modelizar la situación en la que uno de los jugadores quiere tener un óptimo de 0.5 unidades de agua. O, dicho de otro modo, más que 0.5 sería tan malo como menos que 0.5. Una posibilidad sería definir $\succeq_i$ de la siguiente forma: $a \succeq_i b$ si y solo si $|a - 0.5| \leq |b - 0.5|$.

Una definición de A del estilo $A = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{\{1,2\}} : t_1 + t_2 \leq 1, t_1, t_2 \geq 0\}$ permitiría también modelizar situaciones en las que alguno de los jugadores quiere dejar sin agua al otro (pensemos en el caso en que son productores de cierto cultivo y compiten uno con el otro en el mercado). Otras preferencias podrían permitir modelizar situaciones en las que los jugadores están preocupados por el bienestar común, etc.

Sin embargo, cualquier relación de preferencias no es válida, sino que debemos exigirles ciertas propiedades.

6.1.2. Propiedades de las preferencias

A continuación introducimos las propiedades que le vamos a pedir a la relación de preferencias:

Definición 6.3 Una relación de preferencias $\succeq_i$ verifica en un conjunto de alternativas A :

- *Transitividad:* Si dados $a, b, c \in A$, tal que $a \succeq_i b$, y $b \succeq_i c$, entonces $a \succeq_i c$.
- *Complejitud:* Si para cualesquiera $a, b \in A$, $a \succeq_i b$ ó $b \succeq_i a$.

La propiedad de transitividad es básica cuando queremos representar preferencias. Simplemente nos dice que si una persona prefiere a antes que b , y b antes que c , entonces no puede preferir c antes que a .

La propiedad de completitud nos permite, por su parte, asegurarnos que siempre podemos comparar dos alternativas, es decir, cualquier jugador tiene la capacidad de decidir entre dos opciones, si prefiere una, la otra, o es indiferente. Una relación que verifica la propiedad de transitividad y de completitud se denomina *relación de orden*. La relación de indiferencia es una relación de equivalencia (propiedades reflexiva¹, simétrica² y transitiva).

6.1.3. Funciones de utilidad

Utilizar preferencias es complicado, ya que son limitadas en su información. Es más operativo trabajar con funciones de utilidad que son una representación simple y compacta que hace uso del orden de los números reales.

Definición 6.4 Decimos que $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa $\succeq_i$ si se verifica lo siguiente:

$$a \succeq_i b \Leftrightarrow u_i(a) \geq u_i(b).$$

Decimos que en un *contexto ordinal*, lo único relevante es el orden en u_i , es decir, $u_i(a) \geq u_i(b)$, pero la diferencia $u_i(a) - u_i(b)$ es irrelevante. Fácilmente se observa que puede haber infinitos valores ordinales representando las preferencias de un decisor sobre un conjunto. En contraposición al contexto ordinal, si $u_i(a) - u_i(b)$ es también relevante, decimos que estamos en un *contexto cardinal*.

Si sólo existe un decisor, existe siempre una función de utilidad ordinal representando $\succeq_i$. Además, cualquier transformación estrictamente creciente es otra función de utilidad ordinal.

¹Esto es: $a \sim_i a$ para todo $a \in A$.

²Esto es: $a \sim_i b \Leftrightarrow b \sim_i a$ para todo $a, b \in A$.

Teorema 6.5 Sea $(N, A, \succeq)$ un problema de decisión y sea $u = (u_i)_{i \in N}$ un vector de funciones de utilidad que representan $\succeq$. Entonces $u' = (u'_i)_{i \in N}$ es otro vector de funciones de utilidad que representan $\succeq$ si y solo si existe $f = (f_i)_{i \in N}$ con $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente para todo i , tal que $u'_i(a) = f_i(u_i(a))$ para todo $a \in A$.

Ejemplo 6.6 Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Para cierto $i \in N$, tenemos definida $\succeq_i$ como sigue: $a \succ_i b \sim_i c \sim_i d \succ_i e \sim_i f$. Una función de utilidad para i es:

$$u_i(a) = 1, u_i(b) = 0.5, u_i(c) = 0.5, u_i(d) = 0.5, u_i(e) = 0.2, u_i(f) = 0.2.$$

Otra alternativa:

$$u'_i(a) = 2, u'_i(b) = 1, u'_i(c) = 1, u'_i(d) = 1, u'_i(e) = 0, u'_i(f) = 0.$$

El Teorema 6.5 dice que existe una función estrictamente creciente $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que relaciona u_i y u'_i . Es decir: $f_i(1) = 2, f_i(0.5) = 1, f_i(0.2) = 0$.

Cuando $u = (u_i)_{i \in N}$ es un vector de funciones de utilidad que representan $(\succeq_i)_{i \in N}$, podemos representar el problema de decisión mediante la terna (N, A, u) .

6.1.4. Soluciones ordinales

Un juego NTU (N, V) puede definirse a partir de un problema de decisión (N, A, u) y una función $F : 2^N \rightarrow 2^A$ que asigna a cada coalición $S \subset N$ un subconjunto no vacío $F(S) \subset A$ que indica las alternativas que pueden alcanzar los jugadores de S sin ayuda de los jugadores de $N \setminus S$, de forma que $V(S) = \{(u_i(a))_{i \in S} : a \in F(S)\}$ para todo $S \subset N$.

Si transformamos las utilidades de forma ordinal mediante una función estrictamente creciente f , obtenemos un nuevo juego NTU $(N, f(V))$ dado por: $(f(V))(S) = f(V(S)) = \{(f_i(x))_{i \in N} : x \in V(S)\}$ para todo $S \subset N$. Puesto que ambos problemas representan las mismas preferencias, la solución debería ser la misma independientemente de cuál de las dos representaciones de utilidad escojamos. Formalmente:

Definición 6.7 Una solución Φ en juegos NTU es ordinal si para cualquier vector $(f_i)_{i \in N}$ de funciones estrictamente crecientes se verifica:

$$\Phi(N, f(V)) = f(\Phi(N, V)).$$

Ejemplo 6.8 Sea $A = \{t \in \mathbb{R}_+^{\{1,2\}} : t_1 + t_2 \leq 1\}$, $u_1(t_1, t_2) = t_1$, $u_2(t_1, t_2) = t_2$. Sea $F(N) = A$, $F(i) = \{(0, 0)\}$ para $i = 1, 2$. Suponiendo que solo las utilidades son relevantes, esta situación genera un juego NTU equivalente al problema de negociación (N, D, d) donde $D = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 + x_2 \leq 1\}$ y $d = (0, 0)$.

Supongamos ahora que transformamos las utilidades manteniendo las preferencias. Por ejemplo, mediante las funciones estrictamente crecientes $f_1(t) = t + 1$ y $f_2(t) = \sqrt[3]{t}$. Entonces, el problema original (N, D, d) se transforma en $(N, f(D), f(d))$, donde:

$$\begin{aligned} f(D) &= \{(x_1 + 1, \sqrt[3]{x_2}) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1, x \in \mathbb{R}_+^2\} \\ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2^3 \leq 2, y_1 \geq 1, y_2 \geq 0\}. \\ f(d) &= (1, 0). \end{aligned}$$

Supongamos que tenemos una solución Φ ordinal, eficiente y simétrica. Por ser eficiente y simétrica, $\Phi(N, D, d) = (0.5, 0.5)$. Por ser ordinal,

$$\begin{aligned}\Phi(N, f(D), f(d)) &= f(\Phi(N, D, d)) \\ &= f(0.5, 0.5) \\ &= (1.5, \sqrt[3]{0.5}) \\ &= (1.5, 0.7937).\end{aligned}$$

Lamentablemente, la condición de ordinalidad es excesivamente fuerte y no existen soluciones razonables que la verifiquen como muestra el siguiente resultado.

Proposición 6.9 Para $|N| = 2$, no existen soluciones ordinales, eficientes y simétricas.

Demostración: Consideremos el Ejemplo 6.8. Supongamos que existiera Φ ordinal, eficiente y simétrica. Sean las funciones estrictamente crecientes $g_1(t) = 1 + \sqrt[3]{t-2}$, $g_2(t) = t$. Como Φ es ordinal,

$$\begin{aligned}\Phi(N, g(f(D)), g(f(d))) &= g(\Phi(N, f(D), f(d))) \\ &= g(1.5, \sqrt[3]{0.5}) \\ &= (1 + \sqrt[3]{1.5-2}, \sqrt[3]{0.5}) \\ &= (0.2063, 0.7937).\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}g(f(d)) &= d \\ g(f(D)) &= \{(1 + \sqrt[3]{x_1-1}, \sqrt[3]{x_2}) : x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0\} \\ &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^N : (y_1 - 1)^3 + y_2^3 \leq 0, y_1, y_2 \geq 0\} = D'.\end{aligned}$$

Veamos que $D' = D$. Dado $y \in D'$, tenemos $(y_1 - 1)^3 + y_2^3 \leq 0$, lo que implica $y_1 \leq \sqrt[3]{-y_2^3} + 1 = -y_2 + 1$, por lo que $y_1 + y_2 \leq 1$ y, por tanto, $y \in D$; es decir, $D' \subset D$. El recíproco se demuestra de forma análoga.

Pero entonces, por eficiencia y simetría, $\Phi(N, g(f(D)), g(f(d))) = \Phi(N, D, d) = (0.5, 0.5)$, lo cual es una contradicción. ■

6.1.5. Ejemplos

Para $|N| = 2$ existen soluciones ordinales, si bien tiene que fallar alguna de las propiedades: unicidad, simetría o eficiencia. Sea v_1 la máxima utilidad que puede obtener el jugador 1 cuando el jugador 2 recibe su pago individual:

$$v_1 = \max \{x_1 \in \mathbb{R} : (x_1, \max V(2)) \in V(N)\}.$$

A este punto lo llamamos *punto de utopía* del jugador 1. Análogamente, definimos el *punto de utopía* del jugador 2

$$v_2 = \max \{x_2 \in \mathbb{R} : (\max V(1), x_2) \in V(N)\}.$$

Las siguientes soluciones son ordinales:

- $\Phi(N, V) = \{(v_1, v_2)\}$. Esta solución no es admisible porque habitualmente no pertenece a D .

- $\Phi(N, V) = (\max V(1), \max V(2))$. Esta solución no es eficiente porque habitualmente pertenece al interior de $V(N)$.
- $\Phi(N, V) = \{(v_1, \max V(2))\}$, llamada *regla dictatorial* del jugador 1.
- $\Phi(N, V) = \{(\max V(1), v_2)\}$, regla dictatorial del jugador 2.

Las reglas dictatoriales no son simétricas.

- $\Phi(N, V) = \{(v_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : (v_1, y_2) \in V(N)\}$. Esta solución no es puntual ni simétrica ni Pareto eficiente.
- $\Phi(N, V) = V(N)$. Esta solución no es puntual ni Pareto eficiente.
- $\Phi(N, V) = \partial V(N)$ (frontera de $V(N)$). Esta solución no es puntual.

En cambio, sí existen soluciones ordinales puntuales, simétricas y eficientes para más de dos jugadores. El siguiente ejemplo, atribuido a Shapley y Shubik (1974), define una regla para tres jugadores en problemas de negociación.

Ejemplo 6.10 Dado un problema de negociación (N, D, d) con $N = \{1, 2, 3\}$, sea $p^0 \equiv d$ y $p^{0,ij} \equiv d$ para cualquier $i, j \in N$. Para cada $t \in \mathbb{N}$, existe un único $p^t \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\begin{aligned} p^{t,12} &\equiv (p_1^t, p_2^t, p_3^{t-1}) \in \partial D \\ p^{t,13} &\equiv (p_1^t, p_2^{t-1}, p_3^t) \in \partial D \\ p^{t,23} &\equiv (p_1^{t-1}, p_2^t, p_3^t) \in \partial D. \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión $\{p^t\}_{t=0}^\infty$ está bien definida y, además, es convergente. Asimismo, para todo $i, j \in N$ se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p^t = \lim_{t \rightarrow \infty} p^{t,ij}.$$

La solución

$$\Phi(N, D, d) = \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} p^t \right\}$$

es ordinal, eficiente y simétrica (véase la Figura 6.1).

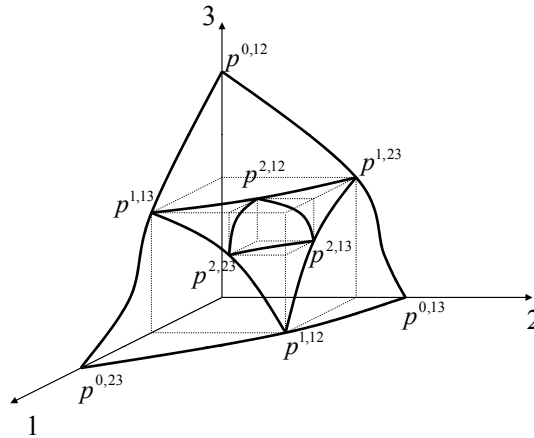


Figura 6.1: Posición de los puntos $p^{t,ij}$ para $t = 0, 1, 2$ en el conjunto D .

6.2. Utilidad cardinal

6.2.1. Loterías

La utilidad cardinal (en la que la diferencia de utilidad es relevante) es más manejable desde el punto de vista matemático y no tiene los problemas de existencia que tienen las soluciones ordinales. Tiene el problema de que es más difícil de justificar, aunque si suponemos que los jugadores pueden trabajar con loterías, tal justificación sí existe.

Supongamos que el conjunto de alternativas no se reduce a A , sino que abarca loterías sobre A . Es decir, es posible que, dados dos sucesos $a, b \in A$, podría ocurrir el suceso en el que con probabilidad t , ocurre a , y con probabilidad $1 - t$ ocurre b , de forma que los jugadores van a tener que clarificar sus preferencias entre sucesos seguros (dentro de A) y loterías de este tipo.

Formalmente, denotamos estas loterías simples como $[ta, (1 - t)b]$, siendo $t \in [0, 1]$ y $a, b \in A$.

$$A_1 = \{[ta, (1 - t)b] : t \in [0, 1], a, b \in A\}.$$

En particular, la propia idea de lotería indica que a debe ser equivalente, a todos los efectos, a $[ta, (1 - t)a]$, y, también, a $[1a, 0b]$ y a $[0b, 1a]$.

Una vez admitidas las loterías simples, también debemos aceptar la posibilidad de loterías sobre loterías, como por ejemplo $[t[t'a, (1 - t')b], (1 - t)c]$ que involucra a tres sucesos $a, b, c \in A$. El conjunto de todas estas loterías, abarcando cualquier número (finito) indefinido de eventos en A , es el siguiente:

$$X = \left\{ p \in [0, 1]^A : \sum_{a \in A} p(a) = 1, |\{a \in A : p(a) > 0\}| < \infty \right\}.$$

Al utilizar este conjunto de alternativas extendido, las preferencias y las funciones de utilidad deben estar definidas sobre X en lugar de solo sobre A . La idea subyacente es que un jugador siempre pueda establecer su preferencia entre dos loterías (alguna de las cuales puede ser un suceso simple).

Definición 6.11 Sea X un conjunto de loterías sobre A y $u_i : X \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que dados $x, y \in X$,

$$x \succeq_i y \Leftrightarrow u_i(x) \geq u_i(y).$$

6.2.2. Linealidad, independencia y continuidad

Empecemos por estudiar una propiedad deseable de las funciones de utilidad, la linealidad.

Linealidad $u([tx, (1 - t)y]) = tu(x) + (1 - t)u(y)$ para todo $x, y \in X$, y para todo $t \in [0, 1]$.

Hay que tener en cuenta varios aspectos acerca de la propiedad de linealidad. La primera es la ventaja que tiene la posibilidad de trabajar sobre una función de utilidad lineal, puesto que solo tenemos que definir u sobre A , el conjunto de sucesos simples. Sin embargo, el que una propiedad sea cómoda de utilizar no implica que sea razonable.

En contraposición, las siguientes propiedades sí son razonables:

Independencia Para cada $x, y, z \in X$ y para cada $t \in (0, 1]$,

$$x \succ_i y \text{ si y solo si } [tx, (1 - t)z] \succ_i [ty, (1 - t)z].$$

Es decir, si un jugador prefiere x antes que y , entonces debe preferir cualquier lotería que le dé x y con probabilidad positiva, antes que otra lotería que le de y con la misma probabilidad, siendo la alternativa (z) la misma en las dos loterías.

Continuidad Para cada $x, y, z \in X$ con $x \succ_i y \succ_i z$, existe algún $t \in (0, 1)$ tal que $y \sim_i [tx, (1-t)z]$.

Es decir, ante tres alternativas (sin indiferencias), siempre podemos encontrar una lotería entre las dos alternativas más extremas (la más preferida y la menos preferida) que deje al jugador indiferente entre esta lotería y la alternativa que está en el medio.

Existe una fuerte relación entre las funciones de utilidad lineal y las preferencias independientes y continuas. En el siguiente resultado se formaliza que linealidad implica independencia y continuidad y en la siguiente sección se formaliza que independencia y continuidad implican linealidad.

Proposición 6.12 Si una función de utilidad lineal representa $\succ_i$, entonces $\succ_i$ es independiente y continua.

Demostración: Sea u_i una función de utilidad lineal que representa $\succ_i$. Demostraremos que es independiente y continua.

- Primer paso: $\succ_i$ verifica independencia. Sean $x, y, z \in X$ y $t \in (0, 1]$. Probaremos que

$$x \succ_i y \Leftrightarrow [tx, (1-t)z] \succ_i [ty, (1-t)z].$$

$$\begin{aligned} x \succ_i y &\stackrel{u_i \text{ representa } \succ_i}{\Leftrightarrow} u_i(x) > u_i(y) \\ &\stackrel{t \neq 0}{\Leftrightarrow} tu_i(x) + (1-t)u_i(z) > tu_i(y) + (1-t)u_i(z) \\ &\stackrel{u_i \text{ lineal}}{\Leftrightarrow} u_i([tx, (1-t)z]) > u_i([ty, (1-t)z]) \\ &\stackrel{u_i \text{ representa } \succ_i}{\Leftrightarrow} [tx, (1-t)z] \succ_i [ty, (1-t)z]. \end{aligned}$$

- Segundo paso: $\succ_i$ verifica continuidad. Sea $x, y, z \in X$ con $x \succ_i y \succ_i z$. Tenemos que encontrar $t \in (0, 1)$ tal que $y \sim_i [tx, (1-t)z]$. Como u_i representa $\succ_i$, esto es equivalente a decir que $u_i(y) = u_i([tx, (1-t)z])$. Como u_i es lineal, $u_i([tx, (1-t)z]) = tu_i(x) + (1-t)u_i(z)$. Entonces:

$$u_i(y) = tu_i(x) + (1-t)u_i(z).$$

Ahora solo tenemos que despejar t y verificar que está en $(0, 1)$:

$$\begin{aligned} u_i(y) &= t(u_i(x) - u_i(z)) + u_i(z) \\ t &= \frac{u_i(y) - u_i(z)}{u_i(x) - u_i(z)}. \end{aligned}$$

El denominador es positivo porque $x \succ_i z$, y eso implica que $u_i(x) > u_i(z)$. El numerador es positivo por el mismo razonamiento. Por tanto, $t > 0$. Además, $t < 1$ si $u_i(y) - u_i(z) < u_i(x) - u_i(z)$. Pero eso es equivalente a $u_i(y) < u_i(x)$, lo cual es cierto porque $x \succ_i y$.

■

6.2.3. Función de utilidad de von Neumann-Morgenstern

Supongamos a partir de ahora que X es un subconjunto convexo de un espacio vectorial real de dimensión finita. Esta condición se verifica trivialmente cuando A es finito.

Teorema 6.13 *Si $\succeq_i$ es independiente y continua, entonces existe una función de utilidad lineal u_i que representa $\succeq_i$. Además, esta función u_i es única bajo transformaciones afines. Formalmente, si $\tilde{u}_i$ es otra función de utilidad lineal que representa $\succeq_i$, entonces existen $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ con $\alpha_i > 0$, tales que $\tilde{u}_i(x) = \alpha_i u_i(x) + \beta_i$ para todo $x \in X$.*

Bajo estas condiciones, decimos que el jugador i tiene una función de utilidad de *von Neumann y Morgenstern*. La demostración del Teorema 6.13 puede encontrarse en el libro de von Neumann y Morgenstern (1944).

En juegos NTU, cuando los jugadores tienen funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern, cualquier utilidad en el segmento entre las utilidades de dos alternativas admisibles, es también admisible a través de una lotería. Por tanto, podemos hacer otra suposición adicional sobre los $V(S)$ (o sobre D en problemas de negociación):

- $V(S)$ es convexa (véase la Figura 6.2).

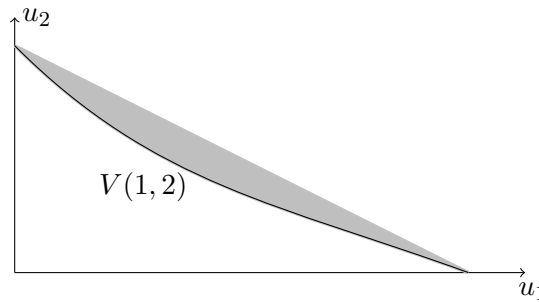


Figura 6.2: Si $V(1,2)$ no es convexo cualquier punto en la parte sombreada podría obtenerse con una lotería entre dos puntos que sí están en $V(1,2)$.

Supongamos que un jugador i tiene una función de utilidad de von Neumann-Morgenstern, es decir, su utilidad de una lotería $[ta, (1-t)b]$ puede expresarse como $tu(a) + (1-t)u(b)$. Con esta suposición todavía podemos modelizar una amplia gama de situaciones tal y como muestra este ejemplo.

Ejemplo 6.14 *Un jugador tiene dos alternativas:*

1. *Ganar un millón de euros de forma segura.*
2. *Ganar 2 millones de euros con probabilidad 0.5 o quedarse sin nada con probabilidad 0.5.*

Veamos qué haría un jugador con preferencias de von Neumann-Morgenstern. Sea $A = \{a, b, c\}$ con $u(a) > u(b) > u(c)$. Siguiendo con nuestro ejemplo, podemos pensar que

a = ganar 2 millones de euros

b = ganar 1 millón de euros

c = quedarse sin nada.

Vamos a suponer que $u(a) = 2$, $u(c) = 0$. En realidad, podemos elegir cualquier otro par de números, pero si $u(a) \neq 2$ ó $u(c) \neq 0$, entonces cambiamos la función de utilidad mediante la transformación afín $f(x) = \alpha x + \beta$ con $\alpha = \frac{2}{u(a)-u(c)}$ y $\beta = \frac{-2u(c)}{u(a)-u(c)}$.

El jugador debe elegir entre b y la lotería $[0.5a, 0.5c]$.

En realidad, no sabemos mucho de la función de utilidad u . Sabemos que $2 = u(a) > u(b) > u(c) = 0$ y también sabemos que es lineal, por lo que

$$u([0.5a, 0.5c]) = 0.5u(a) + 0.5u(c) = 1.$$

Lo que hará el jugador depende de $u(b)$, pero aún tenemos mucha libertad para asignar un valor a $u(b)$ sin romper la linealidad. Tenemos, de hecho, tres posibilidades:

- Primera posibilidad: $u(b) = 1$. Es el resultado de suponer, por ejemplo, $u(\text{"ganar } x\text{"}) = x$. En este caso, el jugador será indiferente entre b ("recibir un millón de euros") y la lotería. Se dice entonces que el jugador es neutral al riesgo.
- Segunda posibilidad: $1 > u(b) > 0$. Por ejemplo, $u(\text{"ganar } x\text{"}) = \frac{x^2}{2}$. En este caso, el jugador preferirá estrictamente la lotería. Se dice entonces que el jugador es amante del riesgo.
- Tercera posibilidad: $u(b) > 1$. Por ejemplo, $u(\text{"ganar } x\text{"}) = \sqrt{2x}$, $u(b) = \sqrt{2} = 1.4142 > 1$. En este caso, el jugador preferirá estrictamente la opción b . Se dice entonces que el jugador es adverso al riesgo.

6.2.4. Equivalencia con juegos TU

Cuando trabajamos con funciones de utilidad de von Neumann y Morgenstern, suponemos implícitamente que cualquier cambio afín en las utilidades de los jugadores lleva esencialmente al mismo problema. Como estos cambios afines son funciones de la forma $\alpha_i u_i(x) + \beta_i$ para cada jugador i , la función característica V se transforma de forma equivalente. Así, cada $V(S)$ se convierte en

$$\begin{aligned} \alpha_S V(S) + \beta &= \{\alpha_S x + \beta : x \in V(S)\} \\ &= \{(\alpha_i x + \beta_i)_{i \in S} : x \in V(S)\}. \end{aligned}$$

donde $\alpha_S = (\alpha_i)_{i \in S}$ y $\alpha_S x = (\alpha_i x_i)_{i \in S}$ representa el producto vectorial, en contraposición al producto escalar $\alpha_S \cdot x = \sum_{i \in S} \alpha_i x_i$.

Llamamos $(N, \alpha V + \beta)$ al juego NTU así definido. Por tanto, (N, V) y $(N, \alpha V + \beta)$ son juegos equivalentes.

Definición 6.15 (N, V) es equivalente a (N, W) si existen $\alpha \in \mathbb{R}_{++}^N$ y $\beta \in \mathbb{R}^N$ tales que

$$W(S) = (\alpha V + \beta)(S)$$

para todo $S \subset N$.

Si (N, V) es un juego TU, entonces la equivalencia estratégica implica esta equivalencia, pero no al revés (necesitaríamos para ello que $\alpha_i = \alpha$ para todo i , es decir que fuera constante para todos los jugadores).

Proposición 6.16 Un juego NTU (N, W) es equivalente a un juego TU (N, v) si existe $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$ tal que

$$W(S) = \{x_S \in \mathbb{R}^S : \lambda_S \cdot x_S \leq v(S)\}$$

para todo $S \subset N$.

Diremos entonces que (N, W) es λ -equivalente a un juego TU.

Demostración: Supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$ tal que $W(S) = \{x_S \in \mathbb{R}^S : \lambda_S \cdot x_S \leq v(S)\}$ para todo $S \subset N$. Sea $V(S) = \{x_S \in \mathbb{R}^S : 1_S \cdot x_S \leq v(S)\}$ el juego (N, v) expresado como juego NTU. Tomando $\alpha = \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)_{i \in N}$ y $\beta = 0$ tenemos para todo $S \subset N$,

$$\begin{aligned} W(S) &= \{(x_i)_{i \in S} \in \mathbb{R}^S : \lambda_S \cdot x_S \leq v(S)\} \\ &= \left\{ \left(\frac{x_i}{\lambda_i} \right)_{i \in S} \in \mathbb{R}^S : 1_S \cdot x_S \leq v(S) \right\} \\ &= \{\alpha_S x \in \mathbb{R}^S : x \in V(S)\} \\ &= \alpha_S V(S) = \alpha_S V(S) + \beta = (\alpha V + \beta)(S). \end{aligned}$$

■

Tal como puede observarse en la demostración de la Proposición 6.16, si $W(S)$ es de la forma $\{x \in \mathbb{R}^S : \lambda_S \cdot x \leq v(S)\}$, entonces un juego TU equivalente es de la forma

$$V(S) = \lambda_S W(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : 1_S \cdot x \leq v(S)\}$$

para todo $S \subset N$.

Ejemplo 6.17 Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y W definido como

$$\begin{aligned} W(i) &= -\mathbb{R}_+^{\{i\}} \text{ para todo } i \in N, \quad W(1, 2) = \{x \in \mathbb{R}^{\{1, 2\}} : (1, 2) \cdot x \leq 1\} \\ W(1, 3) &= \{x \in \mathbb{R}^{\{1, 3\}} : (1, 3) \cdot x \leq 1\}, \quad W(2, 3) = \{x \in \mathbb{R}^{\{2, 3\}} : (2, 3) \cdot x \leq 1\} \\ W(N) &= \{x \in \mathbb{R}^N : (1, 2, 3) \cdot x \leq 3\}. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = (1, 2, 3)$, este juego es λ -equivalente al juego TU (N, v) definido como $v(i) = 0$ para todo $i \in N$, $v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = 1$, $v(N) = 3$.

Por simplicidad, dado $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$, podemos escribir simplemente $V = \lambda W$ entendiendo que $V(S) = \lambda_S W(S)$ para todo $S \subset N$.

Cuando un juego NTU (N, W) es λ -equivalente a un juego TU, podemos calcular cualquier solución de juegos TU mediante el cambio de utilidades dado por λ . En concreto, sea ϕ una solución en juegos TU (por ejemplo el valor de Shapley o el nucleolus). Si (N, W) es λ -equivalente a un juego TU, entonces la solución ϕ aplicada a (N, W) será $\frac{1}{\lambda} \phi(N, \lambda W)$.

Ejemplo 6.18 En el Ejemplo 6.17, cualquier solución TU eficiente y simétrica asignará al juego (N, v) el reparto $(1, 1, 1)$, que claramente no es admisible en (N, W) . Esto es debido a que no hemos rehecho el cambio de utilidades. Este cambio se realiza multiplicando vectorialmente $\frac{1}{\lambda}$, de forma que la solución en (N, W) es $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \in W(N)$.

Ejercicios

1. Calcula razonadamente el reparto propuesto por la regla ordinal de Shapley y Shubik en el problema de negociación (N, D, d) dado por $N = \{1, 2, 3\}$, $D = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 + x_2 + x_3 \leq 3\}$ y $d = (0, 0, 0)$.
2. Calcula el punto $p^{1,12}$ de la definición de la regla ordinal de Shapley y Shubik en el problema de negociación (N, D, d) dado por $N = \{1, 2, 3\}$, $D = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_3 \leq \frac{1}{2}\}$ y $d = (0, 0, 0)$.

3. En el Ejemplo 6.8, supongamos que añadimos un tercer jugador 3 con función de utilidad $u_3(t_1, t_2) = 1 - t_1 - t_2$ si $t_1 + t_2 \geq \frac{1}{2}$ y $u_3(t_1, t_2) = 0$ si $t_1 + t_2 < \frac{1}{2}$. Cambiamos F de forma que $F(\{1, 2, 3\}) = A$ y $F(S) = \{(0, 0)\}$ para todo $S \subsetneq \{1, 2, 3\}$.

- Comprueba que el juego NTU resultante coincide con el problema de negociación propuesto en el ejercicio anterior.
- Dado que $p^{1,12}$ es un punto ordinal que trata de forma simétrica a los jugadores 1 y 2, ¿por qué la demostración de la Proposición 6.9 no es válida en este ejemplo?

4. **Paradoja de Allais** (Allais (1953)). Supongamos que tenemos dos grupos de voluntarios a los que les planteamos dos opciones.

Grupo 1 1) Recibir 1 millón de euros seguro.
 2) Ganar 5 millones con probabilidad 0.1, 1 millón con probabilidad 0.89 y 0 con probabilidad 0.01.

Grupo 2 1) Ganar 1 millón con probabilidad 0.11 y no ganar nada con probabilidad 0.89.
 2) Ganar 5 millones con probabilidad 0.1 y no ganar nada con probabilidad 0.9.

Allais (1953) observó que, de forma significativa, los voluntarios solían elegir la opción 1) en el grupo 1 y la opción 2) en el grupo 2.

- ¿Qué propiedad de las preferencias parece estar en contradicción con estas observaciones y por qué?
- ¿Puede decirse, a partir de estas observaciones, que los voluntarios no actúan racionalmente? Razona tu respuesta.

5. Supongamos que tenemos tres opciones $A = \{a, b, c\}$, donde a es “ganar 1 euro”, b es “no ganar nada” y c es “morir”. Suponiendo $a \succ b \succ c$, ¿qué propiedad de las preferencias nos dice que existe una probabilidad a partir de la cual estamos dispuestos a arriesgarnos a morir por ganar un euro?

6. **Efecto de la incertidumbre** (Gneezy, List y Wu (2006)). En un mercado de cromos de béisbol (muy populares en Estados Unidos) se establecieron tres subastas: una por un valioso cromo del jugador Ken Griffey Jr. de 1989; otra por el mismo cromo, pero de inferior calidad al estar desgastado en una esquina; y otra por una lotería en la que, con una probabilidad del 50 % se obtenía el primer cromo y con una probabilidad del 50 % el segundo. En las subastas, los precios finales promedio de compra fueron de 39 dólares para el cromo de calidad, 28 dólares para el cromo defectuoso y 18 dólares para la lotería. ¿Qué propiedad o propiedades de las preferencias parecen estar en contradicción con estas observaciones? Razona tu respuesta.

7. **Paradoja de San Petersburgo**. Supongamos el siguiente juego infinito: un jugador lanza repetidamente una moneda hasta que aparezca la primera cara. Los premios, sucesión de tiradas y las probabilidades aparecen recogidas a continuación:

Premio	2	4	8	16	...	2^n
Sucesión de tiradas	c	+c	++c	+++c	...	...
Probabilidad	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	$\frac{1}{2^n}$

Justifica que si aplicamos ingenuamente la teoría de decisiones sin tener en cuenta la utilidad, se obtendría que merecería la pena pagar cualquier cuantía inicial para jugar. Sin embargo, en la práctica, ninguna persona racional pagaría cantidades grandes para jugar. ¿Cómo se podría resolver la paradoja?

Capítulo 7

Soluciones en problemas de negociación

En un problema de negociación hay un conjunto de agentes o jugadores, N , que están tratando de elegir una alternativa de un conjunto dado D . Si eligen una alternativa ha de ser por consenso unánime entre los jugadores y, en caso de que no se pongan de acuerdo, obtienen el pago de desacuerdo d . Esta clase de problemas tiene especial interés cuando intervienen dos jugadores (caso bipersonal) dado que no hay coaliciones intermedias. Sin embargo, es totalmente extendible a $|N| > 2$, siempre bajo la suposición de que solamente los acuerdos alcanzables bajo cooperación son aquellos que se obtienen a través de la gran coalición.

Supongamos que en los problemas de negociación (N, D, d) tenemos: D no vacío, cerrado, comprehensivo, acotado por arriba y convexo. Por simplicidad, cuando no haya posibilidad de confusión escribiremos (D, d) en lugar de (N, D, d) .

A continuación, presentamos las principales soluciones para problemas de negociación indicando la referencia correspondiente.

- Solución de Nash (Nash (1950)).
- Solución de Kalai-Smorodinsky (Raiffa (1953) y Kalai y Smorodinsky (1975)).
- Solución igualitaria (Kalai (1977)).
- Solución de Raiffa discreta (Raiffa (1953)).
- Solución de Raiffa continua (Raiffa (1951)).
- Solución ordinal de Shapley-Shubik (Shapley y Shubik (1974)).
- Solución maxmin lexicográfica (Imai (1983)).
- Solución igualitaria lexicográfica (Roth (1979)).
- Solución de Perles-Maschler (Perles y Maschler (1981)).
- Solución de igual área (Dekel (1982)).
- Solución utilitaria (Myerson (1981) y Thomson (1981)).
- Solución de igual pérdida (Chun (1988a)).

En esta monografía, nos limitaremos a estudiar las seis primeras. Una completa revisión de las soluciones para problemas de negociación y sus propiedades puede encontrarse en Thomson (1994).

Para cada $i \in N$, sea $v_i(D, d) = \max \{x_i : (d_1, \dots, d_{i-1}, x_i, d_{i+1}, \dots, d_n) \in D\}$ la máxima utilidad que puede conseguir el jugador i , cuando los demás jugadores reciben su pago de desacuerdo. El vector $v(D, d) \in \mathbb{R}^N$ dado por las coordenadas $(v_i(D, d))_{i \in N}$ se denomina *punto de utopía* de los jugadores. Habitualmente, $v \notin D$. Para cada $i \in N$, sea $v^i(D, d) = (d_1, \dots, d_{i-1}, v_i, d_{i+1}, \dots, d_n) \in D$ el *punto dictatorial* del jugador i . Cuando no haya posibilidad de confusión, escribiremos v y v^i en lugar de $v(D, d)$ y $v^i(D, d)$.

La regla ordinal de Shapley-Shubik definida en el capítulo anterior es un ejemplo de solución en juegos de negociación para más de dos jugadores. En este capítulo suponemos que los jugadores tienen funciones de utilidad de von Neumann-Morgenstern, por lo que la propiedad de ordinalidad puede ser reemplazada por la menos exigente de covarianza de transformaciones afines (definida más adelante), además de permitir la suposición de que D es convexo.

7.1. Solución de Nash

Nash (1950) propuso la siguiente solución:

Solución de Nash Tomaremos el punto $x \in D$ que maximiza $\prod_{i \in N} (x_i - d_i)$, es decir,

$$Nash(D, d) = \arg \max_{x \in D} \prod_{i \in N} (x_i - d_i).$$

La interpretación geométrica de la solución de Nash puede verse en la Figura 7.1.

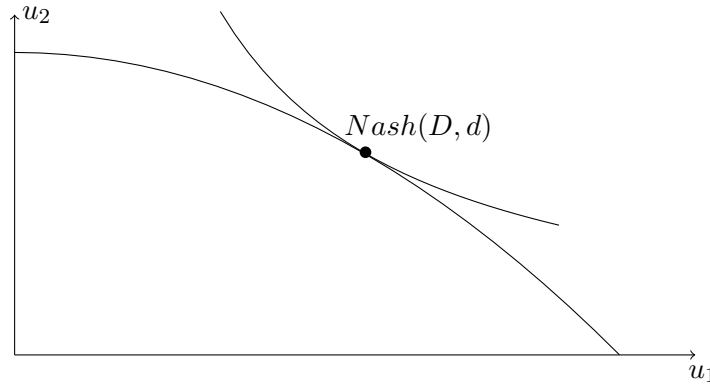


Figura 7.1: Solución de Nash.

La convexidad y el hecho de que D sea cerrado nos aseguran que esta solución verifica unicidad, es decir, $Nash(D, d)$ está formado por un único punto al que llamaremos también $Nash(D, d)$.

Ejemplo 7.1 Consideremos el problema de negociación (N, D, d) con $N = \{1, 2\}$, $d = 0_N$ y

$$D = \{x \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + x_2 \leq 1\} - \mathbb{R}_+^N.$$

Para calcular $Nash(D, d)$, debemos resolver el programa de maximización $\max x_1 x_2$ sujeto a $x_1 + x_2 \leq 1$. Por ejemplo, podemos buscar el máximo de la función $f(t) = (1 - t^2)t$, que está en $t^* = \frac{\sqrt{3}}{3}$, por lo que $Nash(D, d) = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = (0.666667, 0.577350)$.

Ejemplo 7.2 Consideremos ahora el problema de negociación (N, D, d) con $N = \{1, 2\}$, $d = 0_N$ y

$$D = \{x \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + 3x_2 \leq 9, 2x_1 + x_2 \leq 8\}.$$

Para calcular $\text{Nash}(D, d)$, debemos resolver un programa de optimización con restricciones de desigualdad, $\max x_1 x_2$ condicionado a $x_1 + 3x_2 \leq 9$, $2x_1 + x_2 \leq 8$, $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Calculamos la función lagrangiana:

$$L(x_1, x_2) = x_1 x_2 - \lambda_1(x_1 + 3x_2 - 9) - \lambda_2(2x_1 + x_2 - 8).$$

Las derivadas parciales respecto a x_1 y a x_2 son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_1 - 3\lambda_1 - \lambda_2. \end{aligned}$$

Estudiamos las posibilidades para encontrar el máximo:

- No se satura ninguna restricción. ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). No es posible porque el máximo no se puede alcanzar en el interior del conjunto D . Igualando las derivadas parciales a 0 obtenemos $x = (0, 0)$ que va a ser un mínimo.
- Se satura únicamente la primera restricción, es decir, $x_1 + 3x_2 = 9$, entonces $\lambda_2 = 0$. Resolvemos el siguiente sistema: $x_2 - \lambda_1 = 0$, $x_1 - 3\lambda_1 = 0$ y $x_1 + 3x_2 = 9$, obtenemos $x = (\frac{9}{2}, \frac{3}{2})$, $\lambda_1 = \frac{3}{2}$. Dado que $(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}) \notin D$, no es candidato a máximo.
- Se satura únicamente la segunda restricción, es decir, $2x_1 + x_2 = 8$, entonces $\lambda_1 = 0$. Resolvemos el siguiente sistema: $x_2 - 2\lambda_2 = 0$, $x_1 - \lambda_2 = 0$ y $2x_1 + x_2 = 8$, obtenemos $x = (2, 4)$, $\lambda_2 = 2$. Dado que $(2, 4) \notin D$, no es candidato a máximo.
- Se saturan las dos restricciones, es decir, $x_1 + 3x_2 = 9$ y $2x_1 + x_2 = 8$. Resolvemos el siguiente sistema: $x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$, $x_1 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, $x_1 + 3x_2 = 9$ y $2x_1 + x_2 = 8$, obtenemos $x = (3, 2)$, $\lambda_1 = \frac{4}{5}$, $\lambda_2 = \frac{3}{5}$. Dado que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y como solo hay un candidato a máximo, tenemos que $(3, 2) \in \partial D$ y es el máximo.

Como la función $x_1 x_2$ es cuasicóncava y las funciones de las restricciones son convexas (son lineales) la condición de Kuhn-Tucker es necesaria y suficiente. Por tanto, $\text{Nash}(D, d) = (3, 2)$.

En el caso de que los jugadores tengan distintas características no reflejadas en la función característica (por ejemplo, si representan grupos de distintos tamaños) se puede utilizar la solución de Nash con asimetrías.

Definición 7.3 Sea $p \in \mathbb{R}_{++}^N$ un vector de pesos de los jugadores. Se define la solución de Nash ponderada del problema (D, d) como

$$\text{Nash}^p(D, d) = \arg \max_{x \in D} \prod_{i \in N} (x_i - d_i)^{p_i}.$$

7.2. Solución de Kalai-Smorodinsky

Raiffa (1953) y Kalai y Smorodinsky (1975) propusieron la siguiente alternativa a la solución de Nash:

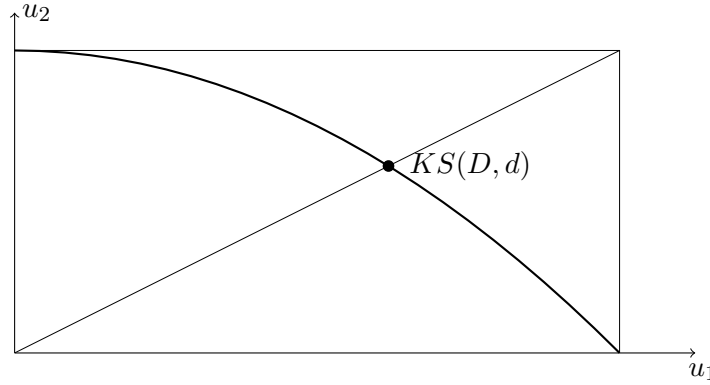


Figura 7.2: Solución de Kalai-Smorodinsky.

Solución de Kalai-Smorodinsky Tomamos la intersección entre la frontera de D y el segmento que une v y d :

$$KS(D, d) = \{d + \lambda(v - d)\}$$

con $\lambda = \max\{\alpha : d + \alpha(v - d) \in D\}$.

La acotación por arriba y que D sea cerrado nos aseguran que esta solución está bien definida (es decir el conjunto $\{\alpha : d + \alpha(v - d) \in D\}$ tiene máximo) y claramente verifica unicidad, es decir, $KS(D, d)$ está formado por un único punto al que llamaremos también $KS(N, d)$. Ver Figura 7.2.

Ejemplo 7.4 Consideremos el problema de negociación (N, D, d) con $N = \{1, 2\}$, $d = 0_N$ y

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + x_2^2 \leq 1\} - \mathbb{R}_+^N.$$

El punto de utopía es $(1, 1)$, por lo que el segmento que une los puntos de desacuerdo y de utopía es $\{(\alpha, \alpha) : \alpha \in [0, 1]\}$. La solución de Kalai-Smorodinsky es entonces un reparto de la forma (λ, λ) con $\lambda + \lambda^2 = 1$, que resulta en $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, por lo que $KS(D, d) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = (0.618034, 0.618034)$.

Ejemplo 7.5 Consideremos ahora el problema de negociación (N, D, d) con $N = \{1, 2\}$, $d = 0_N$ y

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + 3x_2 \leq 9, 2x_1 + x_2 \leq 8\}.$$

El punto de utopía es $(4, 3)$, por lo que el segmento que une los puntos de desacuerdo y de utopía es $\{(4\alpha, 3\alpha) : \alpha \in [0, 1]\}$. La solución de Kalai-Smorodinsky es entonces un reparto de la forma $(4\lambda, 3\lambda)$ verificando $4\lambda + 9\lambda \leq 9$ y $8\lambda + 3\lambda \leq 8$, con igualdad estricta en una de las dos, que resulta en $\lambda = \min\left\{\frac{9}{13}, \frac{8}{11}\right\} = \frac{8}{11}$ por lo que $KS(D, d) = \left(\frac{36}{11}, \frac{27}{11}\right) = (2.76923, 2.07692)$.

7.3. Solución igualitaria

Kalai (1977) propuso la siguiente solución:

Solución igualitaria (en inglés, Egalitarian solution) Tomamos la intersección entre la frontera de D y el segmento que parte de d con dirección 1_N . Véase la Figura 7.3.

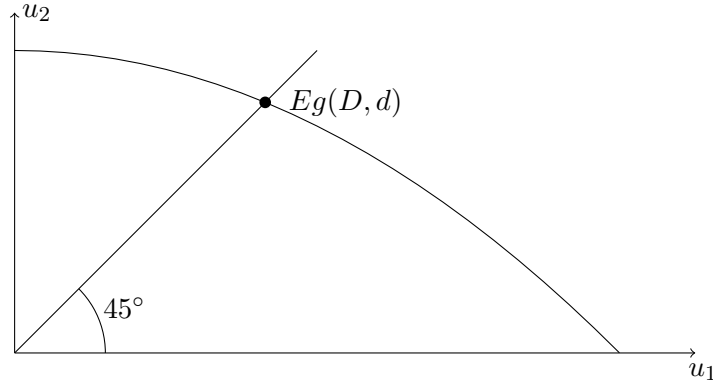


Figura 7.3: Solución igualitaria para dos jugadores.

$$Eg(D, d) = \{d + \lambda 1_N\}$$

con $\lambda = \max \{\alpha : d + \alpha 1_N \in D\}$.

La acotación por arriba y el hecho de que D sea cerrado nos aseguran que esta solución está bien definida (es decir el conjunto $\{\alpha : d + \alpha 1_N \in D\}$ tiene máximo) y claramente verifica unicidad, es decir, $Eg(D, d)$ está formado por un único punto al que llamaremos también $Eg(D, d)$.

Ejemplo 7.6 Consideremos el problema de negociación (N, D, d) con $N = \{1, 2\}$, $d = 0_N$ y

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + x_2^2 \leq 1\} - \mathbb{R}_+^N.$$

La solución igualitaria es un reparto de la forma (λ, λ) con $\lambda + \lambda^2 = 1$, que resulta en $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, por lo que $Eg(D, d) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx (0.618034, 0.618034)$, coincidente con la solución de Kalai-Smorodinsky.

Ejemplo 7.7 Consideremos ahora el problema de negociación (N, D, d) con $N = \{1, 2\}$, $d = 0_N$ y

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + 3x_2 \leq 9, 2x_1 + x_2 \leq 8\}.$$

La solución igualitaria es un reparto de la forma (λ, λ) verificando $\lambda + 3\lambda \leq 9$ y $2\lambda + \lambda \leq 8$, con igualdad estricta en una de las dos, que resulta en $\lambda = \min\left\{\frac{9}{4}, \frac{8}{3}\right\} = \frac{9}{4}$ por lo que $Eg(D, d) = \left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right) = (2.25, 2.25)$.

7.4. Solución de Raiffa

Raiffa (1953) propuso la siguiente solución:

Solución de Raiffa discreta Tomamos $r^0 = d$. Conocido r^{k-1} , definimos r^k como promedio de los puntos $\{v^i(D, r^{k-1})\}_{i \in N}$. Es decir,

$$r^k = \frac{1}{|N|} \sum_{i \in N} v^i(D, r^{k-1}).$$

La solución de Raiffa discreta (??) es el límite de estos puntos:

$$RD(D, d) = \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} r^k \right\}.$$

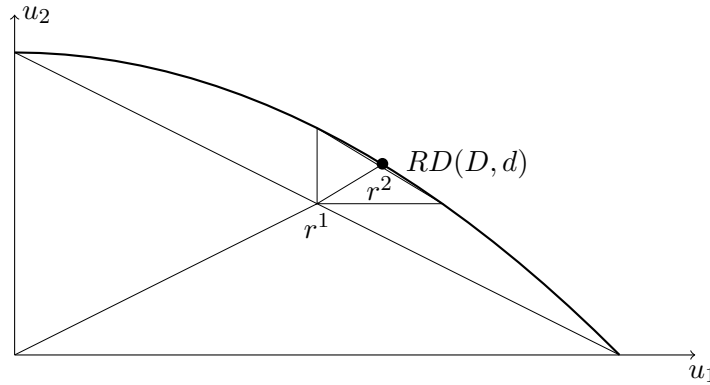


Figura 7.4: Solución de Raiffa discreta.

La convexidad, comprehensividad y el hecho de que D sea cerrado nos aseguran que esta solución está bien definida y claramente verifica unicidad, es decir, $RD(D, d)$ está formado por un único punto al que llamaremos también $RD(D, d)$.

Existe una versión continua de esta solución introducida por Raiffa (1951) que podemos definir como sigue:

Solución de Raiffa continua Para cualquier $\varepsilon > 0$, definimos la sucesión $\{r^k(\varepsilon)\}_{k=0}^{\infty}$ de la siguiente forma: Tomamos $r^0(\varepsilon) = 0$. Conocido $r^{k-1}(\varepsilon)$, sea r^k el promedio de los puntos $\{v^i(D, r^{k-1})\}_{i \in N}$. Definimos $r^k(\varepsilon) = r^{k-1}(\varepsilon) + \varepsilon [r^k - r^{k-1}(\varepsilon)]$.

Ahora, tomamos el límite de esta sucesión cuando k aumenta y ε tiende a cero:

$$RC(D, d) = \left\{ \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} r^k(\varepsilon) \right\}.$$

La convexidad, comprehensividad y el hecho de que D sea cerrado nos aseguran que esta solución está bien definida. Además, verifica unicidad, es decir, $RC(D, d)$ está formado por un único punto al que llamaremos también $RC(D, d)$.

Ejemplo 7.8 Consideremos el problema de negociación (N, D, d) con $N = \{1, 2\}$, $d = 0_N$ y

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + x_2^2 \leq 1\} - \mathbb{R}_+^N.$$

El primer término de la sucesión que define la solución de Raiffa discreta es $r^0 = d = (0, 0)$. Para cada $r^{k-1} = (x_1, x_2)$, el siguiente término de la sucesión es el punto medio del segmento que une los repartos $(x_1, \sqrt{1-x_1})$ y $(1-x_2^2, x_2)$, es decir:

$$r^k = \left(\frac{x_1 + 1 - x_2^2}{2}, \frac{\sqrt{1-x_1} + x_2}{2} \right). \quad (7.1)$$

Este límite puede calcularse de forma aproximada mediante un lenguaje de programación o una hoja de cálculo. El resultado, con seis dígitos de precisión (obtenidos en la cuarta iteración r^4), es $RD(D, d) = (0.630371, 0.607971)$.

Dado $\varepsilon > 0$, el primer término de la sucesión que define la solución de Raiffa continua es $r^0(\varepsilon) = d = (0, 0)$. Para cada $r^{k-1}(\varepsilon) = (x_1, x_2)$, el siguiente término de la sucesión debe obtenerse

apuntando hacia el punto $r^k = \left(\frac{x_1+1-x_2^2}{2}, \frac{\sqrt{1-x_1+x_2}}{2} \right)$, definido igual que en (7.1). Por tanto,

$$\begin{aligned} r^k(\varepsilon) &= \left(x_1 + \varepsilon \left(\frac{x_1+1-x_2^2}{2} - x_1 \right), x_2 + \varepsilon \left(\frac{\sqrt{1-x_1+x_2}}{2} - x_2 \right) \right) \\ &= \left(x_1 + \varepsilon \frac{1-x_1-x_2^2}{2}, x_2 + \varepsilon \frac{\sqrt{1-x_1-x_2}}{2} \right). \end{aligned}$$

De nuevo, este límite puede calcularse de forma aproximada mediante un lenguaje de programación. El resultado, con seis dígitos de precisión (obtenidos para $\varepsilon = 0.00015$ y $k = 187421$), es $RD(D, d) = (0.653908, 0.588296)$.

Ejemplo 7.9 Consideremos ahora el problema de negociación (N, D, d) con $N = \{1, 2\}$, $d = 0_N$ y

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + 3x_2 \leq 9, 2x_1 + x_2 \leq 8\}.$$

El primer término de la sucesión que define la solución de Raiffa discreta es $r^0 = d = (0, 0)$. Para cada $r^{k-1} = (x_1, x_2) \in D$, podemos diferenciar tres posibilidades, correspondientes a tres regiones dentro de D :

- Si $x_1 \geq 3$, entonces $r^k = \left(\frac{x_1+8-x_2}{2}, \frac{x_2+8-2x_1}{2} \right)$ pertenece a la frontera de D por lo que $RD(D, d) = r^k$.
- Si $x_2 \geq 2$, entonces $r^k = \left(\frac{x_1+9-3x_2}{2}, \frac{x_2+9-x_1}{2} \right)$ pertenece a la frontera de D por lo que $RD(D, d) = r^k$.
- Si $r^{k-1} < (3, 2)$, entonces $r^k = \left(\frac{x_1+8-x_2}{2}, \frac{x_2+9-x_1}{2} \right) = \left(\frac{2x_1-x_2+8}{4}, \frac{-x_1+3x_2+9}{6} \right)$.

Con estos datos, partiendo de $r^0 = (0, 0)$, llegamos a

$$RD(D, d) = r^4 = \left(\frac{277}{96}, \frac{587}{288} \right) = (2.88542, 2.03819).$$

Para calcular la versión continua, el conjunto D se divide en las mismas tres regiones que en la versión discreta. El límite puede calcularse de forma aproximada mediante un lenguaje de programación. El resultado, con seis dígitos de precisión (obtenidos para $\varepsilon = 0.0004$ y $k = 14037$), es $RC(D, d) = (2.94773, 2.01742)$.

7.5. Propiedades de las soluciones

Al igual que en juegos TU, es importante conocer qué propiedades verifica una solución para así poder conocer su relevancia en determinadas aplicaciones. Las cinco primeras propiedades son las ya conocidas, y las presentamos en su formato de problemas de negociación:

Unicidad Para cada problema de negociación (D, d) existe una única solución. Formalmente:

$$|\Phi(D)| = 1.$$

Eficiencia débil de Pareto Los jugadores no pueden alcanzar ningún otro acuerdo que sea mejor para todos ellos. Formalmente:

$$\left. \begin{array}{l} x \in \Phi(D) \\ x \ll y \end{array} \right\} \Rightarrow y \notin \Phi(D).$$

Eficiencia fuerte de Pareto Los jugadores no pueden alcanzar ningún otro acuerdo que sea mejor al menos para uno de ellos, e indiferente para el resto. Formalmente:

$$\left. \begin{array}{l} x \in \Phi(D) \\ x < y \end{array} \right\} \Rightarrow y \notin \Phi(D).$$

Definición 7.10 Dos jugadores $i, j \in N$ son simétricos en (D, d) si se verifican dos condiciones:

$$d_i = d_j \quad y \quad D = p^{ij}(D)$$

siendo $p^{ij} : N \rightarrow N$ la función que intercambia a los jugadores i y j , es decir: $p(i) = j$, $p(j) = i$, $p(k) = k$ para todo $k \neq i, j$.

Simetría Jugadores simétricos son tratados de forma simétrica. Formalmente:

$$\left. \begin{array}{l} p : N \rightarrow N \text{ biyectiva} \\ p(D) = D \\ p(d) = d \end{array} \right\} \Rightarrow p(\Phi(D, d)) = \Phi(D, d).$$

Anonimato La solución no se ve afectada si cambiamos el nombre de los jugadores. Formalmente:

$$\Phi(p(D), p(d)) = p(\Phi(D, d))$$

para toda función biyectiva $p : N \rightarrow N'$.

Covarianza de traslaciones La solución se traslada por cambios de origen. Formalmente, para todo $b \in \mathbb{R}^N$:

$$\Phi(D + b, d + b) = \Phi(D, d) + b.$$

Covarianza de transformaciones afines La solución varía según el cambio de origen y escala. Formalmente, para todo $a \in \mathbb{R}_{++}^N$ y $b \in \mathbb{R}^N$:

$$\Phi(aD + b, ad + b) = a\Phi(D, d) + b.$$

siendo $aX + b = \{ax + b : x \in X\}$ para cualquier $X \subset \mathbb{R}^N$.

Independencia de alternativas irrelevantes Si la solución a un problema (D, d) está en un subconjunto $D' \subset D$, entonces seguirá siendo solución en (D', d) (se dice que $D \setminus D'$ son alternativas irrelevantes). Formalmente:

$$D' \subset D \implies D' \cap \Phi(D, d) \subset \Phi(D', d).$$

Independencia de alternativas no individualmente racionales Si se eliminan o se añaden puntos (alternativas) que son peores que el punto de desacuerdo (no individualmente racionales) no varía la selección. Formalmente, dados $D', D \subset \mathbb{R}^N$ con $d \in D \cap D'$:

$$D \cap \{x \in \mathbb{R}^N : d \leq x\} = D' \cap \{x \in \mathbb{R}^N : d \leq x\} \implies \Phi(D, d) = \Phi(D', d).$$

Monotonía Si se incrementa el conjunto de acuerdos posibles, nadie se ve perjudicado. Formalmente:

$$d \in D' \subset D \implies \Phi(D', d) \leq \Phi(D, d).$$

Monotonía individual Si se incrementa el conjunto de acuerdos posibles, pero el valor dictatorial de todos los jugadores, excepto uno, permanece igual, entonces ese jugador no puede verse perjudicado. Formalmente:

$$d \in D' \subset D, v_i(D', d) = v_i(D, d) \forall i \neq j \implies x_j \leq y_j \quad \forall x \in \Phi(D', d), y \in \Phi(D, d).$$

Monotonía restringida Si se incrementa el conjunto de acuerdos posibles, pero el punto de utopía no varía, nadie puede verse perjudicado. Formalmente:

$$d \in D' \subset D, v(D', d) = v(D, d) \implies \Phi(D', d) \leq \Phi(D, d).$$

Dominancia del punto medio Cada jugador debe obtener al menos el punto medio entre su valor mínimo (punto de desacuerdo) y su valor óptimo (punto de utopía). Formalmente:

$$x \geq \frac{d + v(D)}{2} \quad \forall x \in \Phi(D, d).$$

7.6. Relación entre propiedades

Las propiedades vistas en la sección anterior no son independientes unas de otras, sino que están relacionadas. Vemos aquí algunas de estas relaciones.

Proposición 7.11 *Si una solución verifica eficiencia fuerte de Pareto, entonces también verifica eficiencia débil de Pareto.*

Demostración: Supongamos que Φ verifica eficiencia fuerte de Pareto. Queremos demostrar que también verifica eficiencia débil de Pareto. Para ello, consideramos $x \in \Phi(D)$ con $x \ll y$. Esto implica $x < y$ y por eficiencia fuerte de Pareto, $y \notin \Phi(D)$. ■

La eficiencia débil de Pareto no implica la eficiencia fuerte. Consideremos, por ejemplo, la regla igualitaria en el juego (D, d) con $N = \{1, 2\}$, $d = (0, 0)$ y $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^N : x_1 \leq 2, x_2 \leq 1\}$. La solución igualitaria propone el pago $(1, 1)$, que es eficiente débil de Pareto pero no fuerte, ya que el reparto $(2, 1)$ es admisible y mejora el pago del jugador 1 dejando al jugador 2 indiferente.

Proposición 7.12 *Si una solución verifica monotonía individual, entonces verifica también monotonía restringida.*

Demostración: Supongamos que Φ verifica monotonía individual. Queremos demostrar que verifica monotonía restringida. Supongamos que $d \in D' \subset D$ y $v(D') = v(D)$. Veamos que $\Phi(D') \leq \Phi(D)$. Como, en particular, tenemos que $D' \subset D$ y $v_i(D') = v_i(D) \forall i \neq j$ para cualquier $j \in N$, la monotonía individual aplicada a cada $j \in N$ implica que $\Phi_j(D') \leq \Phi_j(D)$, por lo que $\Phi(D') \leq \Phi(D)$, por definición. ■

Proposición 7.13 *Si una solución verifica monotonía, entonces verifica también monotonía individual y restringida.*

Demostración: Supongamos que Φ verifica monotonía. Vamos a comprobar que verifica monotonía individual. Supongamos $D' \subset D$ y $v_i(D') = v_i(D) \forall i \neq j$. Como en particular tenemos que $D' \subset D$, la monotonía implica $\Phi(D') \leq \Phi(D)$, y por tanto Φ verifica monotonía individual.

Aplicando ahora la Proposición 7.12, obtenemos que también verifica monotonía restringida. ■

Proposición 7.14 *Si una solución verifica anonimato, entonces verifica simetría.*

Demostración: Supongamos que Φ verifica anonimato. Queremos comprobar si verifica simetría, es decir, que si

$$D = p(D) \implies \Phi_{p(i)}(D) = \Phi_i(D) \quad \forall i \in N.$$

Supongamos que $D = p(D)$, queremos probar que $\Phi_{p(i)}(D) = \Phi_i(D)$. Por anonimato,

$$\Phi_{p(i)}(p(D)) = \Phi_i(D) \quad \forall i \in N$$

como $D = p(D)$:

$$\Phi_{p(i)}(D) = \Phi_i(D) \quad \forall i \in N.$$

■

Simetría es una propiedad muy relacionada con anonimato, aunque no son totalmente equivalentes. Al igual que para juegos TU, pueden encontrarse reglas simétricas pero no anónimas. Consideremos una regla anónima, como puede ser por ejemplo la regla de Nash, *Nash*. Consideremos ahora una regla no anónima, como puede ser por ejemplo la regla lexicográfica, que asigna el máximo valor posible a los jugadores de N que estén primero en una ordenación $\pi \in \Pi^N$. Formalmente, decimos un punto $x \in \mathbb{R}^N$ es *lexicográficamente menor* que $y \in \mathbb{R}^N$ según π , y lo denotamos por $x \prec_\pi y$, si existe un índice $i \in N$ tal que $x_j = y_j$ para todo $j \in \text{Pre}^\pi(i)$ y $x_i < y_i$. Además, denotamos $D^d = \{x \in D : x \geq d\}$ como el conjunto de puntos de D que asignan a cada jugador $i \in N$ al menos su valor de desacuerdo d_i . La *regla lexicográfica* asigna el punto de D^d lexicográficamente más grande según π . Formalmente:

$$\text{Lex}^\pi(D, d) = \left\{ x \in D^d : x \prec_\pi y \implies y \notin D^d \right\}.$$

Es fácil comprobar que *Nash* es una regla anónima mientras que *Lex* $^\pi$ no lo es, ya que se fija en el nombre (índice) de los jugadores. Definimos entonces la regla Φ de la siguiente forma: $\Phi(D, d) = \text{Nash}(D, d)$ cuando existen al menos dos jugadores simétricos en (D, d) , y $\Phi(D, d) = \text{Lex}^\pi(D, d)$ cuando no existen jugadores simétricos en (D, d) . Esta regla Φ así definida es simétrica, pero no anónima.

7.7. Caracterizaciones axiomáticas

Teorema 7.15 (Nash (1950)) *La solución de Nash es la única en problemas de negociación que verifica unicidad, eficiencia débil de Pareto¹, simetría, covarianza de transformaciones afines, e independencia de alternativas irrelevantes.*

Demostración: Por definición, *Nash* verifica las cinco propiedades. Sea F otra solución que verifica las cinco propiedades. Por la propiedad de covarianza de transformaciones afines, podemos suponer que la solución de Nash es 1_N y que $d = 0_N$. Incrementamos D de forma que creamos un nuevo problema de negociación $D' = \{x \in \mathbb{R}^N : 1_N \cdot x \leq |N|\} \supset D$. Por simetría y eficiencia débil de Pareto, $F(D') = 1_N$. Por independencia de alternativas irrelevantes, $F(D) = F(D') = 1_N = \text{Nash}(D, d)$ (véase la Figura 7.5).

■

En el siguiente ejemplo se calcula la solución de Nash utilizando propiedades que tiene que cumplir y se compara con la solución de Kalai-Smorodinsky.

¹ La solución de Nash también verifica eficiencia fuerte de Pareto.

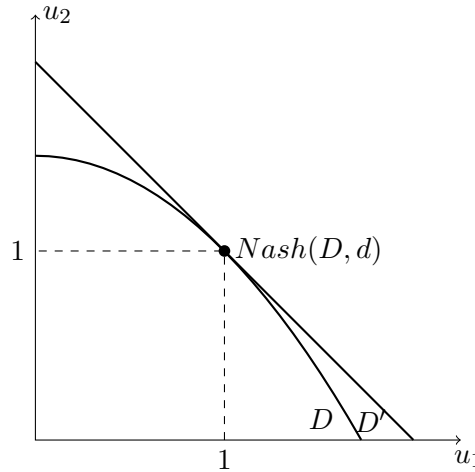


Figura 7.5: Caracterización de la solución de Nash: Independencia de alternativas irrelevantes implica que la solución para D coincide con la solución para D' .

Ejemplo 7.16 Consideremos el problema de negociación (N, D_1, d) con $N = \{1, 2\}$, $d = 0_N$ y

$$D_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \leq 2, x_2 \leq 2\}.$$

Como D_1 es simétrico la solución de Nash se corresponde con la intersección de la recta $x_1 = x_2$ y la frontera de Pareto $x_1 + x_2 = 2$, es decir $\text{Nash}(D_1, d) = (1, 1)$.

Consideremos ahora el problema (N, D_2, d) con $N = \{1, 2\}$, $d = 0_N$ y

$$D_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \leq 2, x_2 \leq 1\}.$$

Como $D_2 \subset D_1$ y $(1, 1) \in D_2$, por la propiedad de independencia de alternativas irrelevantes,

$$\text{Nash}(D_2, d) = \text{Nash}(D_1, d) = (1, 1).$$

Observamos que la máxima aspiración del jugador 2 en el problema D_2 es ahora 1, mientras que la del jugador 1 sigue siendo de 2. La solución de Kalai-Smorodinsky tiene en cuenta este factor. Así, fácilmente se puede comprobar que $KS(D_1, d) = (1, 1)$ mientras que $KS(D_2, d) = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.

Teorema 7.17 (Kalai (1977)) La solución igualitaria es la única solución en problemas de negociación que verifica unicidad, eficiencia débil de Pareto, simetría, covarianza de traslaciones y monotonía.

Demostración: Por definición, Eg verifica las cinco propiedades. Sea F otra solución que verifica las cinco propiedades. Por la propiedad de covarianza de traslaciones, podemos suponer $d = 0_N$, lo que implica que $Eg(D) = e1_N$ para algún $e \in \mathbb{R}$. Definimos un nuevo $D' = \{x \in \mathbb{R}^N : x \leq e1_N\} \subset D$ (contenido en D por comprehensividad). En D' todos los jugadores son simétricos, por simetría y eficiencia de F , tenemos que $F(D') = Eg(D)$. Por monotonía, $F(D) \geq Eg(D)$. Si en D la frontera débil de Pareto coincide con la frontera fuerte de Pareto, entonces la eficiencia débil de Pareto implica la fuerte y no puede suceder $F(D) > Eg(D)$. Por tanto, $F(D) = Eg(D)$. Para el caso en el que en D la frontera débil de Pareto no coincida con la fuerte, podemos definir para todo $\varepsilon > 0$ un conjunto $D^\varepsilon \supset D$ con esa propiedad, y además $\inf \{\|x - y\| : y \in D\} < \varepsilon$ para todo $x \in D^\varepsilon$. Por monotonía, $Eg(D) \leq F(D) \leq F(D^\varepsilon) = Eg(D^\varepsilon)$. Como esto es cierto para cualquier $\varepsilon > 0$, deducimos que $F(D) = Eg(D)$ (véase la Figura 7.6). ■

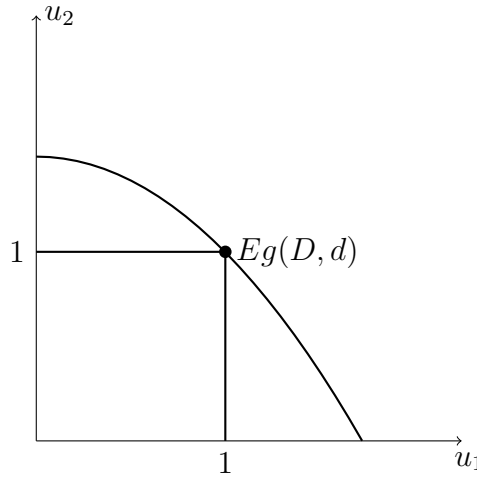


Figura 7.6: Caracterización de la solución igualitaria: Monotonía y eficiencia implican que la solución para D coincide con la solución para $D' = \{e1_N\} - \mathbb{R}_+^N$.

Tal y como se vio en la sección anterior, la regla igualitaria no verifica eficiencia fuerte de Pareto. Tampoco verifica covarianza de transformaciones afines, pero sí independencia de alternativas irrelevantes.

Teorema 7.18 (Roth (1980a)) *La solución de Kalai-Smorodinsky es la única solución en problemas de negociación que verifica unicidad, eficiencia débil de Pareto, simetría, covarianza de transformaciones afines y monotonía restringida.*

Demostración: Por definición, KS verifica las cinco propiedades. Sea F una solución que verifica las cinco propiedades. Por la propiedad de covarianza de transformaciones afines, podemos suponer que el punto de utopía es $v(D) = 1_N$ y que $d = 0_N$, lo que implica que $KS(D) = \kappa 1_N$ para algún $\kappa \in \mathbb{R}$. Definimos un nuevo $D' = \text{conv} [\{\kappa 1_N\} \cup \{(d_1, \dots, d_{i-1}, v_i, d_{i+1}, \dots, d_n)\}_{i \in N}] \subset D$ (contenido en D por convexidad y comprehensividad). En (D', d) todos los jugadores son simétricos y además $v(D') = v(D)$. Por simetría y eficiencia de F , tenemos que $F(D') = KS(D)$. Por monotonía restringida, $F(D) \geq F(D') = KS(D)$. En D' la frontera débil de Pareto coincide con la frontera fuerte de Pareto, por lo que la eficiencia de Pareto débil implica la fuerte y no puede suceder $F(D) > KS(D)$. Por tanto, $F(D) = KS(D)$ (véase la Figura 7.7). ■

Corolario 7.19 (Thomson (1980)) *La solución de Kalai-Smorodinsky es la única solución en problemas de negociación que verifica unicidad, eficiencia débil de Pareto, simetría, covarianza de transformaciones afines y monotonía individual.*

Demostración: Por definición, KS verifica las cinco propiedades. La unicidad se deduce del Teorema 7.18 y de la Proposición 7.12. ■

Ejercicios

1. Calcula la solución de Nash, de Kalai-Smorodinsky, igualitaria y Raiffa discreta para el problema de negociación (N, D, d) dado por $N = \{1, 2\}$, $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{\{1,2\}} : x_1 \leq 2, x_2 \leq 1, x_1 + 3x_2 \leq 3\}$ y $d = (0, 0)$.

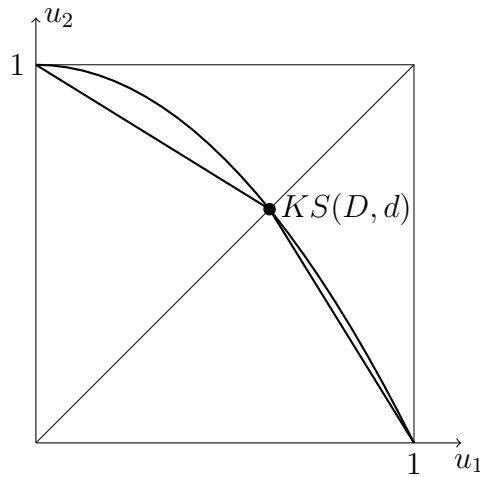


Figura 7.7: Caracterización de la solución de Kalai-Smorodinsky: Monotonía restringida y eficiencia implican que la solución para D coincide con la solución para el subconjunto delimitado por los dos segmentos de la figura.

2. Calcula la solución de Nash, de Kalai-Smorodinsky, igualitaria, Raiffa discreta y Raiffa continua para el problema de negociación (N, D, d) dado por $N = \{1, 2\}$, $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{\{1,2\}} : x_1 \leq 4, x_2 \leq 4, x_1 + 2x_2 \leq 10\}$ y $d = (0, 0)$.
3. Calcula la solución de Nash, de Kalai-Smorodinsky, igualitaria y Raiffa discreta para el problema de negociación (N, D, d) dado por $N = \{1, 2\}$, $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{\{1,2\}} : x_1 \leq 4, x_2 \leq 4, x_1 + 2x_2 \leq 10\}$ y $d = (1, 0)$.
4. Calcula la solución de Nash ponderada en el problema de negociación en el que dos jugadores se tienen que repartir un dólar y el vector de ponderaciones es $p = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
5. Calcula la solución de Nash en el problema de negociación (N, D, d) con $N = \{1, 2\}$, $d = 0_N$ y

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + 3x_2 \leq 100, 2x_1 + x_2 \leq 8\}.$$

6. Define una solución para problemas de negociación que no verifique la propiedad de independencia de alternativas no individualmente racionales.

Capítulo 8

Soluciones en juegos NTU generales

Los juegos NTU fueron introducidos en Aumann y Peleg (1960) y, como ya hemos visto, los juegos TU son una clase particular de juegos NTU. Además, la clase de los juegos TU constituyen un subconjunto muy relevante y, por lo visto en la Sección 6.2.4, son fácilmente alcanzables con solo añadir un bien perfectamente divisible (dinero) y una utilidad separable y lineal sobre él. Por tanto, una propiedad importante de las soluciones en juegos NTU generales es que se comporten bien cuando se aplican a juegos TU. Es por ello, que muchas estas soluciones generalizan las soluciones y reglas de reparto ya conocidas de los juegos TU, como por ejemplo el core, el valor de Shapley o el nucleolus. Análogamente, estas soluciones también pueden generalizar (y de hecho, lo hacen) las soluciones más conocidas en problemas de negociación, como por ejemplo la solución de Nash o la solución igualitaria.

En juegos NTU, siguiendo la misma motivación que caracteriza a cada una de las soluciones dadas en juegos TU o en problemas de negociación, la generalización puede hacerse de varias formas. Por ejemplo, existen dos extensiones posibles del core. Además, algunas de las propiedades que cumplen las soluciones pueden no mantenerse en los juegos NTU. Por ejemplo, existen juegos NTU en el que las dos extensiones del core dan lugar a conjuntos no convexos. Otra de las propiedades que se suele perder es la unicidad, al menos en la clase más general de juegos NTU. Es por ello que en esta parte de la monografía no distinguimos entre soluciones tipo conjunto y tipo puntual.

A continuación, enumeramos algunas de las principales soluciones en juegos NTU, indicando la referencia correspondiente.

- Core (Aumann (1961)).
- Valor de Harsanyi (Harsanyi (1963)).
- Valor de Shapley lambda-transferible (Shapley (1969)).
- Valor consistente (Maschler y Owen (1989, 1992)).
- Solución igualitaria simétrica (Kalai y Samet (1985)).
- Valor de compromiso (Borm, Keiding y otros (1992)).
- ε -Core NTU (Kalai (1975)).
- Kernel NTU (Kalai (1975)).
- Nucleolus NTU de Kalai (Kalai (1975)).
- Nucleolus NTU de Nakayama (Nakayama (1983)).

- Nucleolus lambda-transferible (Chang y Chen (2011)).
- Core interno o *inner core* (Shapley y Shubik (1975)).

En esta monografía, nos limitaremos a estudiar las cuatro primeras.

8.1. El core en juegos NTU

El core de un juego *NTU* (N, V) se define como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^N$ admisibles y estables. Diremos que una asignación $x \in \mathbb{R}^N$ es:

- *Admisible* si $x \in V(N)$.
- *Estable fuerte* si para todo $S \subset N$, los jugadores de S no pueden mejorar por su cuenta, es decir, no existe $y \in V(S)$ con $y > x_S$.
- *Estable débil* si para todo $S \subset N$, los jugadores de S no pueden mejorar todos por su cuenta, es decir, no existe $y \in V(S)$ con $y \gg x_S$.

Observamos que si x es estable fuerte entonces x es también estable débil. En base a las anteriores definiciones y, teniendo en cuenta que el core es el conjunto de asignaciones admisibles y estables, existen dos posibles definiciones de core en juegos NTU.

Definición 8.1 Sea (N, V) un juego NTU. Se define:

Strong core (núcleo fuerte):

$$SC(N, V) = V(N) \cap \bigcap_{S \subset N} \{x \in \mathbb{R}^N : \nexists y \in V(S), y > x_S\}.$$

Weak core (núcleo débil):

$$WC(N, V) = V(N) \cap \bigcap_{S \subset N} \{x \in \mathbb{R}^N : \nexists y \in V(S), y \gg x_S\}.$$

Al igual que ocurre en juegos TU, el core de un juego puede ser vacío o contener distintos elementos. Cuando cada $V(S)$ tiene un único vector ortogonal en cada punto de su superficie con todas las coordenadas positivas (como ocurre en los juegos TU), el weak core y el strong core coinciden, por lo que es suficiente hablar de un único core. Es inmediato comprobar que $SC(N, V) \subset WC(N, V)$.

Ejemplo 8.2 Sea (N, V) un juego NTU con $N = \{1, 2\}$, $V(i) = (-\infty, 0]$ para todo $i \in N$ y $V(N) = \{x \in \mathbb{R}^N : x \leq (2, 1)\}$. El strong core de este juego es $SC(N, V) = \{(2, 1)\}$, distinto del weak core, que es $WC(N, V) = \{(x_1, 1) : x_1 \leq 2\} \cup \{(2, x_2) : x_2 \leq 1\}$.

Ejemplo 8.3 El core del juego correspondiente al mercado de intercambio visto en los ejemplos 5.14 y 5.15 es el siguiente:

$$\begin{aligned} SC(N, V) = WC(N, V) &= \{x \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, x_1 + 2x_2 \geq 1, x_3 \geq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + 2x_2 = 1, x_3 = 1\}. \end{aligned}$$

Es decir, el core es el segmento que une los repartos $(1, 0, 1)$ y $(0, \frac{1}{2}, 1)$, y que se obtienen repartiendo los pares de guantes entre los jugadores 1 y 2 de forma arbitraria, mientras que el jugador 3 se queda con su dinero. No hay compra de guantes porque el jugador 3, que es el que tiene dinero, valora los guantes menos que cualquiera de los otros dos jugadores. Esto convierte al jugador 3 en un jugador títere de este juego.

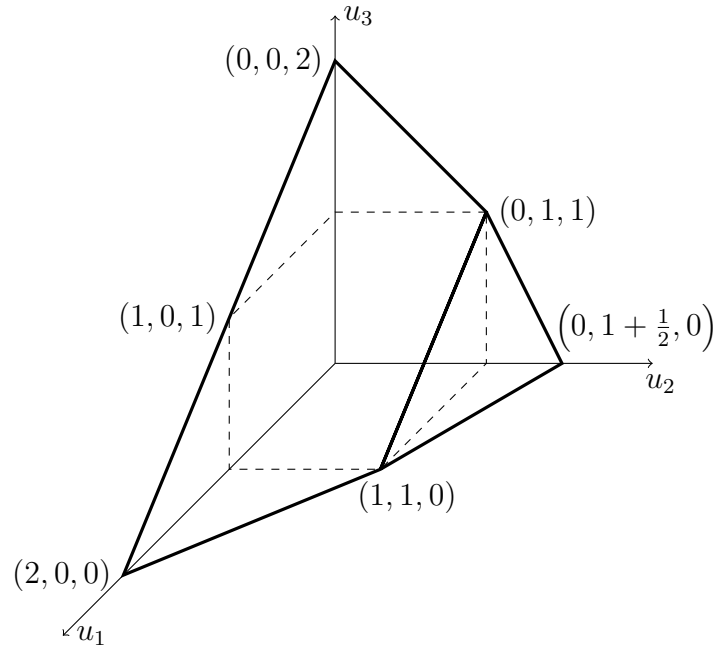


Figura 8.1: $V(N)$ de un mercado de intercambio después de aumentar la valoración del jugador 3 por el par de guantes.

Ejemplo 8.4 Supongamos que en el mercado de intercambio del ejemplo 5.14 el jugador 3 sube su valoración de los pares de guantes a 1 euro, al igual que el jugador 1, mientras que el jugador 2 mantiene su valoración en $\frac{1}{2}$ euro.

Con este cambio, siguiendo los mismos razonamientos que en el ejemplo 5.15, los conjuntos $V(S)$ con $S \subsetneq N$ serán los mismos, mientras que el conjunto $V(N)$ se amplía (véase la Figura 8.1):

$$V(N) = \{x \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 3\} - \mathbb{R}_+^N.$$

Ahora, cualquier reparto de la forma $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ con $x_2 \leq 1$ es factible dando x_2 euros al jugador 2 y dejando que los jugadores 1 y 3 se repartan arbitrariamente los pares de guantes y el resto del dinero ($1 - x_2$ euros). Para $x_2 > 1$ se pierde eficiencia porque el jugador 2 debe recibir pares de guantes, que valora menos, hasta alcanzar su pago más favorable, que es $(0, 1 + \frac{1}{2}, 0)$.

El core del juego es:

$$SC(N, V) = WC(N, V) = \{x \in \mathbb{R}_+^N : x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1 + 2x_2 \geq 1, x_3 \geq 1\}.$$

El core no es vacío porque $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}) \in SC(N, V)$ (véase la Figura 8.2).

- Óptimo para el jugador 1: $(1, 0, 1)$: el jugador 1 se lleva el par guantes, el jugador 2 no se lleva nada y el jugador 3 se queda con su dinero. En este caso, el guante derecho no se ha vendido mientras que el izquierdo se ha vendido por 0 euros (ha salido gratis). Otro reparto posible es: el jugador 1 se lleva todo el dinero, el jugador 2 no se lleva nada y el jugador 3 se queda con el par de guantes. En este caso, el par de guantes se ha vendido por 1 euro después de que el guante izquierdo fuera vendido por 0 euros, al igual que antes.
- Óptimo para el jugador 2: $(0, 1, 1)$: el jugador 1 no lleva nada, el jugador 2 recibe 1 euro y el jugador 3 se queda con el par de guantes. En este caso, el par de guantes se ha vendido por 1 euro después de que el guante derecho fuera vendido por 0 euros.

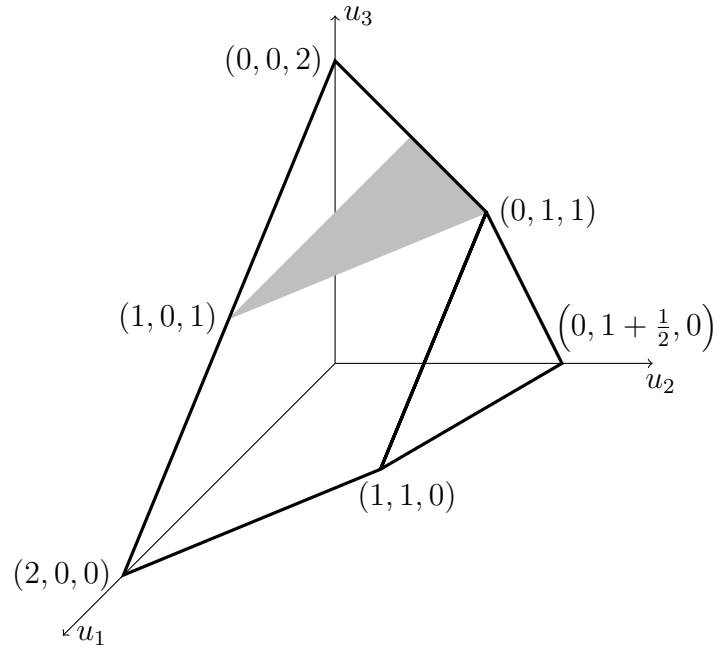


Figura 8.2: La zona sombreada representa el core de un mercado de intercambio.

- *Óptimo para el jugador 3: $(0, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2})$: el jugador 1 no se lleva nada, el jugador 2 recibe 0.5 euros y el jugador 3 se queda con 0.5 euros y el par de guantes. En este caso, el par de guantes se ha vendido por 0.5 euros después de que el guante derecho fuera vendido por 0 euros.*

8.2. El valor de Harsanyi

Harsanyi (1959, 1963) definió un valor en juegos NTU que ofrece resultados satisfactorios al aplicarlo tanto en la clase de juegos TU como en el clase de problemas de negociación. El valor de Harsanyi insiste en el concepto de equidad. Con objeto de comprender mejor la idea subyacente en su definición, lo estudiaremos primero en el contexto de problemas de negociación, para luego interpretarlo en los juegos TU y, finalmente, extenderlo a juegos NTU generales.

8.2.1. El valor de Harsanyi en problemas de negociación

Sea (D, d) un problema de negociación. Supongamos que buscamos un valor $\phi \in D$ que sea una solución razonable. Para ello, necesitamos que $\phi \in \partial D$ y $\phi \geq d$. Esto implica que existe un vector $\lambda \in \mathbb{R}_+^N$ ortogonal a ∂D en ϕ . Supondremos, por simplicidad, que todas las coordenadas de λ son positivas. Supondremos también que el conjunto de jugadores es $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

Localmente, la superficie ∂D es equivalente a la superficie plana del hiperplano de soporte de ∂D en ϕ :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^N : \lambda \cdot x = \lambda \cdot \phi\}.$$

Supongamos que le quitamos algo de utilidad al jugador 1 para dársela al jugador 2. Sea $\varepsilon > 0$, entonces claramente la asignación

$$(\phi_1 - \varepsilon, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n)$$

pertenece al interior de D :

$$\lambda_1 (\phi_1 - \varepsilon) + \lambda_2 \phi_2 + \dots + \lambda_n \phi_n = \lambda \cdot \phi - \lambda_1 \varepsilon.$$

Ahora aprovechamos este margen para darle al jugador 2 toda la utilidad que podamos. Como suponemos $\lambda_2 > 0$, llegamos al punto:

$$\left(\phi_1 - \varepsilon, \phi_2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \varepsilon, \phi_3, \dots, \phi_n \right) \in H.$$

Ahora le damos un extra de utilidad ε al jugador 1 y luego le quitamos al jugador 2 para obtener un punto admisible. Llegamos así al punto:

$$\left(\phi_1 + \varepsilon, \phi_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \varepsilon, \phi_3, \dots, \phi_n \right) \in H.$$

Esto nos permite comparar la utilidad de los jugadores 1 y 2. Por cada unidad de utilidad que quitemos/demos al jugador 1, debemos dar/quitar $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ unidades al jugador 2.

En general, si le damos $\frac{1}{\lambda_i}$ unidades de utilidad al jugador i , debemos quitar al jugador j $\frac{1}{\lambda_j}$ unidades.

Si queremos repartir utilidad, lo “justo” o “equitativo” sería que por cada $\frac{1}{\lambda_i}$ unidades que le demos al jugador i , debemos darle $\frac{1}{\lambda_j}$ unidades al jugador j . Por tanto, partiendo de d , aumentamos la utilidad de los jugadores siguiendo el vector $\frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right)$ (véase la Figura 8.3).

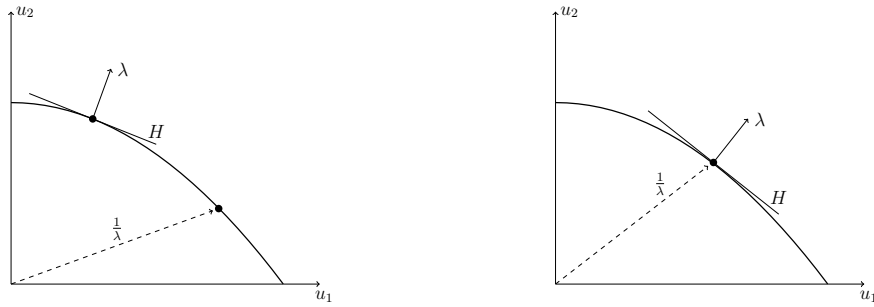


Figura 8.3: Partiendo de un reparto de la frontera de Pareto con vector ortogonal λ y moviéndonos a lo largo del vector $\frac{1}{\lambda}$ desde el punto de desacuerdo, podemos llegar a un reparto distinto (izquierda) o al mismo (derecha).

Definición 8.5 Sea (D, d) un problema de negociación. Sea $\phi \in \partial D$ y $H = \{x \in \mathbb{R}^N : \lambda \cdot x = \lambda \cdot \phi\}$ el hiperplano de soporte de ∂D en ϕ . Decimos que ϕ es una solución de Harsanyi si $d + \xi \frac{1}{\lambda} = \phi$ siendo ξ tal que $d + \xi \frac{1}{\lambda} \in \partial D$.

Resumiendo, partimos de d , y le damos a cada jugador $d_i + \xi \frac{1}{\lambda_i}$ de forma que $d + \xi \frac{1}{\lambda} \in \partial D$. Si el punto que alcanzamos es ϕ , entonces ϕ es una solución de Harsanyi. De igual modo, todo $\phi \in \partial D$ tal que $d + \xi \frac{1}{\lambda} = \phi$ es una solución de Harsanyi.

Algo muy relevante de la solución de Harsanyi es que coincide con la solución de Nash. Para demostrarlo, utilizaremos el siguiente lema:

Lema 8.6 Dado $\alpha \in \mathbb{R}_{++}^N$, $H = \{x \in \mathbb{R}^N : \frac{1}{\alpha} \cdot x = |N|\}$ es un hiperplano de soporte de

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}_{++}^N : \prod_{i \in N} x_i = \prod_{i \in N} \alpha_i \right\}.$$

Demostración: Es evidente que $\alpha \in H \cap S$. Por tanto, basta demostrar que $\frac{1}{\alpha} \cdot x \geq |N|$ cuando $x \in S$. Según la desigualdad aritmético-geométrica, $\frac{1}{|N|} \sum_{i \in N} z_i \geq \sqrt[|N|]{\prod_{i \in N} z_i}$ para cualquier $z \in \mathbb{R}_{++}^N$, por lo que tomando $z = \left(\frac{x_i}{\alpha_i}\right)_{i \in N}$, tenemos

$$\frac{1}{\alpha} \cdot x = \sum_{i \in N} \frac{x_i}{\alpha_i} \geq |N| \sqrt[|N|]{\prod_{i \in N} \frac{x_i}{\alpha_i}} = |N| \sqrt[|N|]{\frac{\prod_{i \in N} x_i}{\prod_{i \in N} \alpha_i}} = |N| \sqrt[|N|]{1} = |N|.$$

■

Teorema 8.7 *En problemas de negociación, la solución de Harsanyi existe y es única, y coincide con la solución de Nash.*

Demostración: Por simplicidad, suponemos $d = 0_N$.

1. Demostramos que si realizamos el proceso con la solución de Nash, volvemos a la solución de Nash. Sea $\phi = \text{Nash}(D, d)$. El hiperplano de soporte de ∂D en ϕ es también hiperplano de soporte de la superficie $\{x \in \mathbb{R}^N : \prod_{i \in N} x_i = \prod_{i \in N} \phi_i\}$. Por el Lema 8.6, un vector ortogonal a ∂D en ϕ es $\frac{1}{\phi} = \left(\frac{1}{\phi_i}\right)_{i \in N}$. Partiendo de $d = 0_N$ y moviéndonos a lo largo del vector $\frac{1}{\phi} = \phi$, es obvio que llegamos a ϕ , por lo que ϕ es un valor de Harsanyi.
2. Demostramos que la solución de Harsanyi es única. Partimos de $d = 0_N$ y nos movemos a lo largo del vector $\frac{1}{\lambda}$ hasta llegar a la frontera de D . Esto significa que existe un $\xi > 0$ tal que $h = \left(\frac{\xi}{\lambda_i}\right)_{i \in N} \in \partial D$.

Como h es una solución de Harsanyi, el hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^N : \lambda \cdot x = \lambda \cdot h\}$ es de soporte de D . Como $\lambda \cdot h = |N|\xi$, tenemos $H = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \frac{\lambda}{\xi} \cdot x = |N|\right\}$. Por el Lema 8.6, este hiperplano también es de soporte de la superficie $\left\{x \in \mathbb{R}_{++}^N : \prod_{i \in N} x_i = \prod_{i \in N} \frac{\xi}{\lambda_i}\right\}$. Esto significa que $\prod_{i \in N} x_i \leq \prod_{i \in N} h_i$ para todo $x \in D$. Como $h \in \partial D$, $\prod_{i \in N} h_i = \max_{x \in D} \prod_{i \in N} x_i$ con lo que h es, por definición, la solución de Nash.

■

8.2.2. El valor de Harsanyi en juegos TU

La idea que hemos visto en la sección anterior relativa al valor de Harsanyi en problemas de negociación también puede aplicarse a juegos TU . Como la utilidad es transferible, si quitamos x a un jugador, podemos dar x íntegramente a cualquier otro jugador. Esto significa que $\lambda = 1_N$.

Vamos a calcular el valor de Harsanyi en un ejemplo, antes de dar la definición formal:

Ejemplo 8.8 *Sea (N, v) el juego TU tal que $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(1, 2) = 1$, $v(1, 3) = 1$, $v(2, 3) = 0$, $v(N) = 1$.*

Para la coalición $\{1, 2\}$, partimos del punto $(0, 0)$ y nos movemos a lo largo del vector $(1, 1, -)$ hasta alcanzar un punto en la frontera de $V(1, 2) = \{x \in \mathbb{R}^{\{1, 2\}} : x_1 + x_2 \leq 1\}$. Este punto es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -)$, que se corresponde con $\frac{1}{2}(1, 1, -)$. Llamemos $\xi_{\{1, 2\}} = \frac{1}{2}$, de forma que el punto alcanzado sea $\xi_{\{1, 2\}}(1, 1, -)$.

Análogamente, obtenemos $\xi_{\{1, 3\}} = \frac{1}{2}$ y $\xi_{\{2, 3\}} = 0$.

Para la coalición N , el jugador 1 ha ganado $\xi_{\{1,2\}} + \xi_{\{1,3\}} = 1$ en su participación con cada uno de los otros dos jugadores. Análogamente, el jugador 2 ha ganado $\xi_{\{1,2\}} + \xi_{\{2,3\}} = \frac{1}{2}$ y el jugador 3 ha ganado $\xi_{\{1,3\}} + \xi_{\{2,3\}} = \frac{1}{2}$. En total, los jugadores han ganado $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, y nos movemos en la dirección dada por $(1, 1, 1)$ hasta llegar a la frontera de $V(N)$. Como la suma de las coordenadas de $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es mayor que $v(N)$, en este caso nos debemos mover “hacia atrás”. El valor de Harsanyi es $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \xi_N(1, 1, 1)$, siendo $\xi_N = -\frac{1}{3}$.

La definición formal en juegos TU es la siguiente:

Definición 8.9 Dado un juego $TU(N, v)$, la solución de Harsanyi de (N, v) es el punto $\phi^N \in \mathbb{R}^N$, siendo $(\phi^S)_{S \subset N}$ y $(\xi_S)_{S \subset N}$ con $\phi^S \in \mathbb{R}^S$ y $\xi_S \in \mathbb{R}$ para todo $S \subset N$ definidos inductivamente sobre $|S|$ como sigue: Primero, $\phi_i^\emptyset = (0)$ y $\xi_\emptyset = 0$. Supongamos definidos ϕ^T y ξ_T para $T \subset N$ con $|T| < |S|$. Definimos entonces ϕ^S y ξ_S como la (única) solución al sistema lineal de $|S| + 1$ ecuaciones y $|S| + 1$ incógnitas dado por

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \phi_i^S &= v(S) \\ \phi_i^S &= \sum_{T \subset S: i \in T} \xi_T, \quad i \in S. \end{aligned}$$

En particular,

$$\phi_i = \phi_i^N = \sum_{T \subset N: i \in T} \xi_T$$

para todo $i \in N$.

Teorema 8.10 En juegos TU , la solución de Harsanyi existe y es única, y coincide con el valor de Shapley.

Demostración: Sabemos que el valor de Shapley es la única solución en TU que verifica eficiencia y contribuciones equilibradas:

$$Sh_i(N, v) - Sh_i(N \setminus \{j\}, v) = Sh_j(N, v) - Sh_j(N \setminus \{i\}, v)$$

para todo $i, j \in N$. Por tanto, basta demostrar que la solución de Harsanyi verifica ambas propiedades.

La solución de Harsanyi verifica eficiencia dado que, por definición, $\sum_{i \in N} \phi_i^N = v(N)$. También verifica contribuciones equilibradas. Dados, $i, j \in N$,

$$\begin{aligned} \phi_i^N - \phi_i^{N \setminus \{j\}} &= \sum_{T \subset N: i \in T} \xi_T - \sum_{T \subset N \setminus \{j\}: i \in T} \xi_T = \sum_{T \subset N: i, j \in T} \xi_T \\ \phi_j^N - \phi_j^{N \setminus \{i\}} &= \sum_{T \subset N: j \in T} \xi_T - \sum_{T \subset N \setminus \{i\}: j \in T} \xi_T = \sum_{T \subset N: i, j \in T} \xi_T. \end{aligned}$$

■

8.2.3. El valor de Harsanyi en juegos NTU

En general (en juegos NTU), podemos seguir el mismo razonamiento que hemos visto previamente para juegos de negociación y juegos TU . Primero buscamos un punto ϕ en la frontera de Pareto de $V(N)$ y tomamos un vector $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$ ortogonal a él. Para cada $i \in N$, tomamos $\xi_{\{i\}} = \lambda_i \max \{x_i : x_i \in V(i)\}$. Luego partimos de cada punto $(\frac{1}{\lambda_i} \xi_{\{i\}}, \frac{1}{\lambda_j} \xi_{\{j\}})$ hasta alcanzar

la frontera de Pareto de $V(i, j)$ siguiendo el vector $\left(\frac{1}{\lambda_i}, \frac{1}{\lambda_j}\right)$. Por tanto, este punto será de la forma $\left(\frac{1}{\lambda_i}\xi_{\{i\}} + \frac{1}{\lambda_i}\xi_{\{i,j\}}, \frac{1}{\lambda_j}\xi_{\{j\}} + \frac{1}{\lambda_j}\xi_{\{i,j\}}\right)$ para algún $\xi_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}$. Luego partimos de cada punto $\left(\frac{1}{\lambda_i}\sum_{T \not\subset \{j,k\}} \xi_{T \cup \{i\}}, \frac{1}{\lambda_j}\sum_{T \not\subset \{i,k\}} \xi_{T \cup \{j\}}, \frac{1}{\lambda_k}\sum_{T \not\subset \{i,j\}} \xi_{T \cup \{k\}}\right)$ hasta alcanzar la frontera de Pareto de $V(i, j, k)$ siguiendo el vector $\left(\frac{1}{\lambda_i}, \frac{1}{\lambda_j}, \frac{1}{\lambda_k}\right)$. Por tanto, este punto será de la forma

$$\left(\frac{1}{\lambda_i}\sum_{T \subset \{j,k\}} \xi_{T \cup \{i\}}, \frac{1}{\lambda_j}\sum_{T \subset \{i,k\}} \xi_{T \cup \{j\}}, \frac{1}{\lambda_k}\sum_{T \subset \{i,j\}} \xi_{T \cup \{k\}}\right)$$

para algún $\xi_{\{i,j,k\}} \in \mathbb{R}$. Repetimos iterativamente este procedimiento para coaliciones de tamaño $4, \dots, |N|$ hasta llegar a un punto ϕ' en la frontera de Pareto de $V(N)$. Obsérvese que

$$\lambda_i \phi'_i = \sum_{T \subset N \setminus \{i\}} \xi_{T \cup \{i\}} = \sum_{T \subset N: i \in T} \xi_T.$$

Si $\phi = \phi'$, entonces es una solución de Harsanyi. La definición formal es la siguiente:

Definición 8.11 Dado un juego NTU (N, V) , la solución de Harsanyi de (N, V) es un punto $\phi \in \partial V(N)$ tal que existe un vector $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$, ortogonal a la superficie de $V(N)$ en x , un punto ϕ^S y un número $\xi_S \in \mathbb{R}$ para cada coalición $S \subset N$, tal que $\phi_i^S \in \partial V(S)$ para todo $S \subset N$ y $\lambda_i \phi_i^S = \sum_{T \subset S: i \in T} \xi_T$ para todo $i \in S \subset N$, y en particular

$$\phi_i = \phi_i^N = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{T \subset N: i \in T} \xi_T$$

para todo $i \in N$.

En el caso general, la solución de Harsanyi no tiene por qué existir (puede no existir un λ apropiado) ni ser única (puede haber más de un λ apropiado). Sin embargo, como ya hemos visto, existe y es única en problemas de negociación y en juegos TU. En problemas de negociación coincide con la solución de Nash y en juegos TU coincide con el valor de Shapley. En general, la solución de Harsanyi también existe y es única cuando la frontera de $V(N)$ es un hiperplano.

Vemos a continuación un ejemplo que ilustra la computación del valor de Harsanyi.

Ejemplo 8.12 Consideremos el siguiente juego NTU,

$$V(1) = V(2) = (-\infty, 0], \quad V(3) = (-\infty, 1]$$

$$V(1, 2) = \{x \in \mathbb{R}^{\{1,2\}} : (1, 4) \cdot x \leq 1\}, \quad V(1, 3) = \{x \in \mathbb{R}^{\{1,3\}} : (1, 1) \cdot x \leq 1\}$$

$$V(2, 3) = \{x \in \mathbb{R}^{\{2,3\}} : (1, 1) \cdot x \leq 1\}, \quad V(N) = \left\{x \in \mathbb{R}^{\{1,2,3\}} : (1, 2, 2) \cdot x \leq 3\right\}.$$

Tomamos un punto en la frontera de Pareto de $V(N)$. Por tanto, $\lambda = (1, 2, 2)$. Tomamos $\xi_{\{1\}} = \xi_{\{2\}} = 0$, $\xi_{\{3\}} = 2$ y partimos del punto $\left(\frac{\xi_{\{1\}}}{\lambda_1}, \frac{\xi_{\{2\}}}{\lambda_2}, \frac{\xi_{\{3\}}}{\lambda_3}\right) = (0, 0, 1)$. Nos movemos a lo largo del vector $\frac{1}{\lambda} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ hasta alcanzar la frontera de Pareto de cada subcoalición de dos jugadores:

En la coalición $\{1, 2\}$, partimos de $(0, 0)$ y nos movemos a lo largo del vector $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ hasta llegar a $V(1, 2)$, es decir, llegamos al punto $(0, 0) + \xi_{\{1,2\}} \left(1, \frac{1}{2}\right)$ tal que $\left(\xi_{\{1,2\}}, \frac{\xi_{\{1,2\}}}{2}\right) \in V(1, 2)$, es decir, $\xi_{\{1,2\}} + \frac{4\xi_{\{1,2\}}}{2} = 1$. Llegamos así al punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\right)$.

En la coalición $\{1, 3\}$, partimos de $(0, 1)$ y nos movemos a lo largo del vector $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ hasta llegar a $V(\{1, 3\})$, es decir, llegamos al punto $(0, 0) + \xi_{\{1,3\}} \left(1, \frac{1}{2}\right)$ tal que $\left(\xi_{\{1,3\}}, 1 + \frac{\xi_{\{1,3\}}}{2}\right) \in V(\{1, 3\})$, es decir, $\xi_{\{1,3\}} + 1 + \frac{\xi_{\{1,3\}}}{2} = 1$. Por tanto, $\xi_{\{1,3\}} = 0$. Llegamos al punto $(0, -, 1)$.

Análogamente, en la coalición $\{2, 3\}$, llegamos al punto $(-, 0, 1)$.

- El jugador 1 gana $\frac{1}{3}$ cuando juega con el jugador 2, 0 cuando juega con el 3 y 0 cuando está solo. Por tanto, su ganancia agregada es $\frac{1}{3}$.
- El jugador 2 gana $\frac{1}{6}$, 0 y 0. Por tanto, su ganancia agregada es $\frac{1}{6}$.
- El jugador 3 gana 0, 0 y 1. Por tanto, su ganancia agregada es 1.

Partimos ahora del punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 1)$ y nos movemos a lo largo del vector $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ hasta llegar a un punto $(\frac{1}{3} + \xi_N, \frac{1}{6} + \frac{\xi_N}{2}, 1 + \frac{\xi_N}{2})$ que verifica $\frac{1}{3} + \xi_N + 2(\frac{1}{6} + \frac{\xi_N}{2}) + 2(1 + \frac{\xi_N}{2}) = 3$. Por tanto, $\xi_N = \frac{1}{9}$, y el punto es $(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{19}{18})$. Éste es el (único) valor de Harsanyi.

8.3. El valor de Shapley lambda-transferible

Consideremos un juego NTU y supongamos que aplicamos una transformación de escala, si suponemos que las funciones de utilidad de los jugadores son de Neumann-Morgenstern, la situación no debería cambiar respecto al punto de partida. Para cada coalición $S \subset N$, vamos a definir un juego TU, calcularemos su valor de Shapley y veremos si es admisible en el juego transformado NTU.

Supongamos que tenemos un juego NTU (N, V) que parte de un problema de decisión (N, A, u) donde N es el conjunto (finito) de jugadores, $A(S)$ es el conjunto de alternativas admisibles para los jugadores de S , y $u = (u_i)_{i \in N}$ es el vector de funciones de utilidad $u_i : \bigcup_{S \subset N} A(S) \rightarrow \mathbb{R}$. El conjunto $V(S)$ para cualquier $S \subset N$ se define como:

$$V(S) = \{(u_i(a))_{i \in S} \in \mathbb{R}^S : a \in A(S)\} - \mathbb{R}_+^S.$$

La dificultad de trabajar con juegos NTU se debe, precisamente, a la falta de una utilidad transferible. Esta utilidad suele identificarse con una unidad monetaria (dinero). De hecho, supongamos que el conjunto de alternativas para cada coalición S es de la forma $\mathbb{O}^S \times A(S)$ donde $\mathbb{O}^S = \{x \in \mathbb{R}^S : \sum_{i \in S} x_i = 0\}$. Cualquier $x \in \mathbb{O}^S$ se puede identificar como un intercambio de dinero entre los jugadores de S , de forma que lo que ganan unos se compensa con lo que pierden otros. En base a esto, supongamos que la utilidad de un jugador i varía de forma aditiva y lineal con la cantidad de dinero x_i que recibe (si $x_i > 0$) o cede (si $x_i < 0$), es decir:

$$u_i^{\alpha_i}(x, a) = \alpha_i x_i + u_i(a)$$

para algún valor $\alpha_i > 0$ (dependiente de i).

Sea $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. El juego (N, V^λ) se define a partir de esta λ :

$$V^\lambda(S) = \left\{ (u_i^\lambda(x, a))_{i \in S} \in \mathbb{R}^S : (x, a) \in \mathbb{O}^S \times A(S) \right\} - \mathbb{R}_+^S$$

para todo $S \subset N$.

En general, $V^\lambda(S)$ siempre es de la forma

$$V^\lambda(S) = \left\{ x \in \mathbb{R}^S : \sum_{i \in S} \lambda_i x_i \leq \max \left\{ \sum_{i \in S} \lambda_i y_i : y \in V(S) \right\} \right\}.$$

Veamos en un ejemplo como se calcula el juego λ transferible.

Ejemplo 8.13 Sea $N = \{1, 2\}$, con $A(i) = \{0\}$ para $i = 1, 2$ y $A(N) = [0, 1]$. Sea $u_1(a) = u_2(a) = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. El juego (N, V) correspondiente es: $V(i) = (-\infty, 0]$ para $i = 1, 2$ y $V(N) = \{x \in \mathbb{R}^N : x \leq (1, 1)\}$.

Tomando $\alpha \in \mathbb{R}_{++}^N$ y $\lambda = \frac{1}{\alpha}$,

$$\begin{aligned}
 V^\lambda(N) &= \{(u_1^{\alpha_1}(x, a), u_2^{\alpha_2}(x, a)) \in \mathbb{R}^N : (x, a) \in \mathbb{O}^N \times A(N)\} - \mathbb{R}_+^N \\
 &= \{(\alpha_1 x_1 + a, \alpha_2 x_2 + a) : x_1 = -x_2, a \in \{0, 1\}\} - \mathbb{R}_+^N \\
 &= \{(\alpha_1 x_1 + 1, \alpha_2 x_2 + 1) : x_1 = -x_2\} - \mathbb{R}_+^N \\
 &= \{(\alpha_1 t + 1, -\alpha_2 t + 1) : t \in \mathbb{R}\} - \mathbb{R}_+^N \\
 &= \left\{x \in \mathbb{R}^N : \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{x_2}{\alpha_2} \leq \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R}^N : \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2\}.
 \end{aligned}$$

No siempre este juego (N, V^λ) está bien definido, aunque (N, V) sí lo esté. Veámoslo en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8.14 Sea $N = \{1, 2\}$, con $A(i) = \{0\}$ para $i = 1, 2$ y $A(N) = \mathbb{R}$. Sea $u_1(a) = a$ y $u_2(a) = 1 - a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. El juego (N, V) está bien definido: $V(i) = \{0\}$ para $i = 1, 2$ y $V(N) = \{(a, 1 - a) : a \in \mathbb{R}\}$. Sin embargo, tomando $\alpha = (1, 2)$ y $\lambda = (1, \frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned}
 V^\lambda(N) &= \{(u_1^1(x, a), u_2^2(x, a)) \in \mathbb{R}^N : (x, a) \in \mathbb{O}^N \times A(N)\} - \mathbb{R}_+^N \\
 &= \{(x_1 + a, 2x_2 + 1 - a) : x_1 = -x_2, a \in \mathbb{R}\} - \mathbb{R}_+^N \\
 &= \{(b + a, -2b + 1 - a) : a, b \in \mathbb{R}\} - \mathbb{R}_+^N.
 \end{aligned}$$

Ahora bien, cualquier $x \in \mathbb{R}^{\{1, 2\}}$ puede escribirse de la forma $(b + a, -2b + 1 - a)$ (tomando $a = 2x_1 + x_2 - 1$ y $b = 1 - x_1 - x_2$). Por tanto, $V^\lambda(N) = \mathbb{R}^{\{1, 2\}}$ es un conjunto no acotado por arriba, que es una de las condiciones indispensables que deben exigirse a la función característica.

Cuando el juego (N, V^λ) está bien definido, lo que tenemos es utilidad transferible:

Proposición 8.15 Cuando el juego (N, V^λ) está bien definido, es λ -equivalente al juego $TU(N, v^\lambda)$ dado por

$$v^\lambda(S) = \max \left\{ \sum_{i \in S} \lambda_i x_i : x \in V(S) \right\}$$

para todo $S \subset N$.

Demostración: Tenemos que demostrar que V^λ es λ -equivalente a (N, v^λ) . Sea $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ y sea $S \subset N$. La función característica v^λ puede reescribirse como:

$$v^\lambda(S) = \max \left\{ \sum_{i \in S} \lambda_i u_i(a) : a \in A(S) \right\}.$$

Por la Proposición 6.16, basta demostrar que $V^\lambda(S)$ coincide con el conjunto

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^S : \sum_{i \in S} \lambda_i x_i \leq v^\lambda(S) \right\}.$$

($\subset$) Sea $x \in V^\lambda(S)$, es decir, $x \leq (u_i^{\alpha_i}(y, a))_{i \in S}$ para algún $(y, a) \in \mathbb{O}^S \times A(S)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in S} \lambda_i x_i &\leq \sum_{i \in S} \lambda_i u_i^{\alpha_i}(y, a) = \sum_{i \in S} \lambda_i (\alpha_i y_i + u_i(a)) \\
 &= \sum_{i \in S} y_i + \sum_{i \in S} \lambda_i u_i(a) \stackrel{y \in \mathbb{O}^S}{=} \sum_{i \in S} \lambda_i u_i(a) \leq v^\lambda(S)
 \end{aligned}$$

siendo cierta la última desigualdad por la definición de $v^\lambda(S)$.

($\supset$) Sea $x \in \mathbb{R}^S$ con $\sum_{i \in S} \lambda_i x_i \leq v^\lambda(S)$. Debemos demostrar que existe algún $(y, a) \in \mathbb{O}^S \times A(S)$ tal que $x \leq (u_i^{\alpha_i}(y, a))_{i \in S}$. Sea $a^* \in \arg \max \{ \sum_{i \in S} \lambda_i u_i(a) : a \in A(S) \}$ de forma que $\sum_{i \in S} \lambda_i u_i(a^*) = v^\lambda(S)$. Definimos

$$y_i = \lambda_i(x_i - u_i(a^*)) + \frac{v^\lambda(S) - \sum_{j \in S} \lambda_j x_j}{|S|}$$

para todo $i \in S$.

Efectuando cuentas y dado que $v^\lambda(S) - \sum_{i \in S} \lambda_i x_i \geq 0$, tenemos que $x \leq (u_i^{\alpha_i}(y, a^*))_{i \in S}$ y, además, $\sum_{i \in S} y_i = 0$, por lo que $y \in \mathbb{O}^S$. ■

En juegos TU disponemos de una amplia variedad de soluciones. Podemos entonces utilizar cualquiera de ellas y obtener un vector de pagos $\phi \in \mathbb{R}^N$. Por supuesto, este vector ϕ dependerá de V pero también de λ , es decir, $\phi = \phi(V, \lambda)$.

Ejemplo 8.16 Sea $N = \{1, 2\}$ y V definido por

$$V(1) = V(2) = (-\infty, 0], \quad V(N) = \{x \in \mathbb{R}^N : x \leq (1, 1), x_1 + 2x_2 \leq 2\}.$$

Si tomamos $\lambda = (2, 3)$,

$$V^\lambda(1) = V^\lambda(2) = (-\infty, 0], \quad V^\lambda(N) = \left\{x \in \mathbb{R}^N : 2x_1 + 3x_2 \leq \frac{7}{2}\right\},$$

que, con el cambio de escala $(y_1, y_2) = (2x_1, 3x_2)$, es equivalente al juego TU (N, v^λ) con $v^\lambda(1) = v^\lambda(2) = 0$, $v^\lambda(N) = \frac{7}{2}$. El valor de Shapley de (N, v^λ) es $(\frac{7}{4}, \frac{7}{4})$. Rehaciendo el cambio de escala, obtenemos $(\frac{7}{8}, \frac{7}{12})$. Este pago es admisible en V^λ pero no en el juego original, ya que $(\frac{7}{8}, \frac{7}{12}) \notin V(N)$.

Ejemplo 8.17 En el juego (N, V) definido en el ejemplo anterior, tomamos $\lambda = (1, 1)$. Ahora, $V^\lambda(1) = V^\lambda(2) = (-\infty, 0]$, $V^\lambda(N) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^N : x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2}\}$, que es exactamente el juego TU (N, v^λ) con $v^\lambda(1) = v^\lambda(2) = 0$, $v^\lambda(N) = \frac{3}{2}$. El valor de Shapley de este (N, v^λ) es $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. De nuevo, este pago es admisible en V^λ pero no en el juego original: $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) \notin V(N)$.

Ejemplo 8.18 En el juego (N, V) definido en los ejemplos anteriores, tomamos $\lambda = (1, 2)$. Ahora, $V^\lambda(1) = V^\lambda(2) = (-\infty, 0]$, $V^\lambda(N) = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 + 2x_2 \leq 2\}$, que con el cambio de escala $(y_1, y_2) = (x_1, 2x_2)$, es equivalente al juego TU (N, v^λ) con $v^\lambda(1) = v^\lambda(2) = 0$, $v^\lambda(N) = 2$. El valor de Shapley de (N, v^λ) es $(1, 1)$. Rehaciendo el cambio de escala, obtenemos $(1, \frac{1}{2})$. Este pago es admisible en V^λ y en el juego original: $(1, \frac{1}{2}) \in V(N)$.

Observamos en el último ejemplo que una elección apropiada de λ nos lleva a una solución que es admisible en el juego original, es decir, introducimos utilidad transferible con tasa de cambio $\frac{1}{\lambda}$ entre los agentes (uno puede interpretar esta utilidad transferible como “dinero”), de forma que el reparto de beneficio consensuado puede, en términos de utilidad ser alcanzado sin la ayuda de esa operación. Esto no ocurre para cualquier λ arbitrario, como en los dos primeros ejemplos.

Si existe un λ para el que la solución del juego V^λ pertenece a $V(N)$, como en el último ejemplo, entonces este reparto será una solución del juego NTU original. Además, como tal λ depende de V , este procedimiento mediante lambda-transferencias depende únicamente de V (el término “lambda” en el nombre no se refiere a ningún λ específico).

Aunque en el procedimiento de lambda-transferencia podemos utilizar cualquier solución TU, en la práctica siempre se utiliza el valor de Shapley, y la solución resultante se llama valor de Shapley lambda-transferible. También se conoce como valor de Shapley NTU, ya que el procedimiento fue presentado por Lloyd Shapley y utiliza el valor de Shapley TU tradicional.

Definición 8.19 Dado un juego NTU (N, V) , un reparto $\phi \in V(N)$ es una solución de Shapley lambda-transferible de (N, V) si existe un vector $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$, tal que V^λ está bien definido y $\lambda\phi$ es el valor de Shapley del juego TU (N, v^λ) .

No tenemos garantía de que el valor de Shapley lambda-transferible exista (puede no existir ningún λ apropiado) o sea único (puede existir más de un λ apropiado). Sin embargo, al igual que el valor de Harsanyi, el valor de Shapley lambda-transferible generaliza la solución de Nash y el valor de Shapley.

Teorema 8.20 a) Si (N, V) es equivalente a un juego TU, el valor de Shapley lambda-transferible existe, es único con $\lambda = 1_N$ y coincide con el valor de Shapley.

b) Si (N, V) es equivalente a un problema de negociación, el valor de Shapley lambda-transferible existe, es único y coincide con la solución de Nash.

Demostración: a) Si (N, V) es equivalente a un juego TU, entonces el resultado es cierto por definición, ya que tomamos el valor de Shapley del juego TU.

b) Supongamos que (N, V) es equivalente a un problema de negociación (D, d) con $D = V(N)$ y $d = (\max\{V(\{i\})\})_{i \in N}$. Supondremos por simplicidad que $d = 0_N$. Entonces el juego TU v^λ asociado es $v^\lambda(N) = \max\{\lambda \cdot y : y \in V(N)\}$, y $v^\lambda(S) = 0$ en otro caso. El valor de Shapley de (N, v^λ) es $\left(\frac{v^\lambda(N)}{|N|}\right)_{i \in N}$ y, por tanto, los valores de Shapley lambda-transferible son los puntos $\phi^\lambda = \left(\frac{v^\lambda(N)}{\lambda_i |N|}\right)_{i \in N}$ tales que $\phi^\lambda \in V(N)$ y $\lambda \cdot x \leq v^\lambda(N)$ para todo $x \in V(S)$. Sabemos que la solución de Nash, $Nash(D, d) = \eta$, pertenece a $\partial V(N) = \partial D$ y además un vector ortogonal a η en ∂D es $\frac{1}{\eta}$. El valor de Shapley $\frac{1}{\eta}$ -transferible del juego $(N, V^{\frac{1}{\eta}})$ es

$$\begin{aligned} \phi^{\frac{1}{\eta}} &= \left(\frac{v^{\frac{1}{\eta}}(N)}{\frac{1}{\eta_i} |N|}\right)_{i \in N} = \left(\frac{\eta_i v^{\frac{1}{\eta}}(N)}{|N|}\right)_{i \in N} \\ &= \frac{\eta}{|N|} \max\left\{\frac{1}{\eta} \cdot y : y \in V(N)\right\} \\ &= \eta \max\left\{\frac{1}{|N|} \sum_{i \in N} \frac{y_i}{\eta_i} : y \in V(N)\right\} \\ &= \eta \max\left\{\sqrt[|N|]{\prod_{i \in N} \frac{y_i}{\eta_i}} : y \in V(N)\right\} = \eta. \end{aligned}$$

Como $\eta \in V(N)$, deducimos que la solución de Nash es una solución lambda-transferible.

Supongamos ahora que tenemos un valor de Shapley λ -transferible $\phi^\lambda = \left(\frac{v^\lambda(N)}{\lambda_i |N|}\right)_{i \in N}$ con $\phi^\lambda \in V(N)$ y $\lambda \cdot x \leq \lambda \cdot \phi^\lambda$ para todo $x \in V(S)$. Como $H = \{x \in \mathbb{R}^N : \lambda \cdot x = \lambda \cdot \phi^\lambda\}$ es un hiperplano de soporte, por el Lema 8.6, $\prod_{i \in N} x_i \leq \prod_{i \in N} \frac{\lambda \cdot \phi^\lambda}{|N| \lambda^i}$ para todo $x \in V(N)$. Pero

$$\prod_{i \in N} \frac{\lambda \cdot \phi^\lambda}{|N| \lambda^i} = \prod_{i \in N} \frac{v^\lambda(N)}{|N| \lambda^i} = \prod_{i \in N} \phi_i^\lambda$$

por lo que ϕ^λ es precisamente la solución de Nash. ■

En los ejemplos siguientes se ilustra la computación del valor de Shapley lambda-transferible.

Ejemplo 8.21 (Juego del café) Sea el juego (N, V) con

$$\begin{aligned} V(i) &= -\mathbb{R}_+^{\{i\}}, \quad V(1, 2) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{\{1,2\}} : x_1 \leq 1, 4x_2 \leq 1, x_1 + 4x_2 \leq 1 \right\} \\ V(1, 3) &= \left\{ (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^{\{1,3\}} : x_1 + x_3 \leq 0 \right\}, \quad V(2, 3) = \left\{ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{\{2,3\}} : x_2 + x_3 \leq 0 \right\} \\ V(N) &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{\{1,2,3\}} : x_1, x_2, x_3 \leq 1, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

El único vector ortogonal a la frontera de $V(N)$ es $\lambda = (1, 1, 1)$ y, por tanto, v^λ está definido por $v(i) = 0$ para todo $i \in N$; $v(1, 2) = 1$, $v(1, 3) = v(2, 3) = 0$, $v(N) = 1$. El valor de Shapley λ -transferible es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Esto significa que el jugador 3 cede gratuitamente su azúcar al jugador 2, mientras los jugadores 1 y 2 se reparten equitativamente el café y el agua.

Ejemplo 8.22 (Bergantiños y Sánchez (2002)) Sea el juego (N, V) con

$$\begin{aligned} V(1) &= (-\infty, 0], \quad V(2) = (-\infty, 0], \quad V(3) = (-\infty, 1] \\ V(1, 2) &= \{x \in \mathbb{R}^{\{1,2\}} : x \leq (0, 1)\} \\ V(1, 3) &= \{x \in \mathbb{R}^{\{1,3\}} : x \leq (0, 2)\} \\ V(2, 3) &= \{x \in \mathbb{R}^{\{2,3\}} : x \leq (0, 1)\} \\ V(N) &= \{x \in \mathbb{R}^N : x \leq (1, 1, 2), x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_3 \leq 2\}. \end{aligned}$$

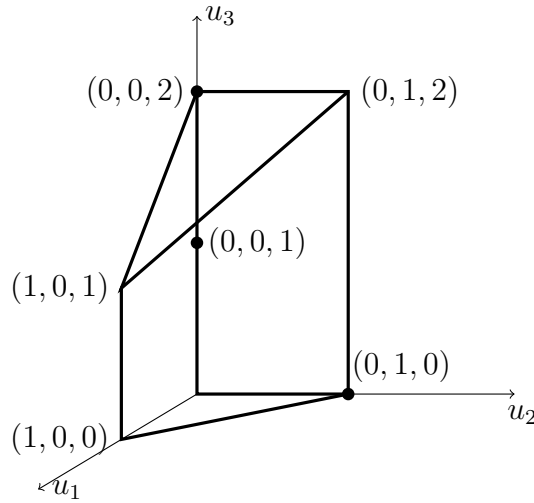


Figura 8.4: Juego NTU delimitado por hiperplanos.

En este juego (véase la Figura 8.4), existe más de un vector ortogonal a la frontera de $V(N)$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$. Entonces, el juego (N, V^λ) viene dado por

$$\begin{aligned} V^\lambda(1) &= (-\infty, 0], \quad V^\lambda(2) = (-\infty, 0], \quad V^\lambda(3) = (-\infty, 1] \\ V^\lambda(1, 2) &= \{x \in \mathbb{R}^{\{1,2\}} : \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \leq \max\{\lambda_1, \lambda_2\}\} \\ V^\lambda(1, 3) &= \{x \in \mathbb{R}^{\{1,3\}} : \lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3 \leq \max\{\lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_3\}\} \\ V^\lambda(2, 3) &= \{x \in \mathbb{R}^{\{2,3\}} : \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \leq \lambda_2 + 2\lambda_3\} \end{aligned}$$

$$V^\lambda(N) = \{x \in \mathbb{R}^N : \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \leq \max\{\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + 2\lambda_3\}\}.$$

Por tanto, v^λ está definido por $v^\lambda(1) = v^\lambda(2) = 0$, $v^\lambda(3) = \frac{1}{\lambda_3}$, $v^\lambda(1, 2) = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $v^\lambda(1, 3) = \max\{\lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_3\}$, $v^\lambda(2, 3) = \lambda_2 + 2\lambda_3$ y $v^\lambda(N) = \max\{\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + 2\lambda_3\}$.

Por otro lado, cualquier plano de soporte de $V(N)$ debe apoyarse sobre algún punto del segmento que une los puntos $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 2)$. Esto nos deja tres posibilidades: Que solo se apoye en el punto $(1, 0, 1)$, que solo se apoye en el punto $(0, 1, 2)$, o que se apoye sobre todo el segmento.

Si se apoya solo en el punto $(1, 0, 1)$, entonces λ debe verificar $\lambda_1 > \lambda_2 + \lambda_3$. Normalizando $\lambda_3 = 1$, tenemos: $v^\lambda(1) = v^\lambda(2) = 0$, $v^\lambda(3) = 1$, $v^\lambda(1, 2) = \lambda_1$, $v^\lambda(1, 3) = \lambda_1 + 1$, $v^\lambda(2, 3) = \lambda_2 + 2$ y $v^\lambda(N) = \lambda_1 + 1$.

Como este juego es monótono y la contribución marginal del jugador 2 es estrictamente positiva, deducimos que $Sh_2(N, v^\lambda) > 0$ con lo que su transformada por λ , $\frac{Sh_2(N, v^\lambda)}{\lambda_2}$, también será positiva, por lo que no es posible que coincida con el reparto $(1, 0, 1)$.

Si se apoya solo en el punto $(0, 1, 2)$, entonces λ debe verificar $\lambda_1 < \lambda_2 + \lambda_3$. Normalizando $\lambda_3 = 1$, tenemos: $v^\lambda(1) = v^\lambda(2) = 0$, $v^\lambda(3) = 1$, $v^\lambda(1, 2) = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $v^\lambda(1, 3) = \max\{\lambda_1 + 1, 2\}$, $v^\lambda(2, 3) = \lambda_2 + 1$ y $v^\lambda(N) = \lambda_2 + 2$.

Como este juego es monótono y la contribución marginal del jugador 1 es estrictamente positiva, deducimos que $Sh_1(N, v^\lambda) > 0$ con lo que su transformada por λ , $\frac{Sh_1(N, v^\lambda)}{\lambda_1}$, también será positiva, por lo que no es posible que coincida con el reparto $(0, 1, 2)$.

Si se apoya en todo el segmento, entonces λ debe verificar $\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3$. Normalizando $\lambda = (t+1, t, 1)$ para algún $t > 0$, tenemos: $v^\lambda(1) = v^\lambda(2) = 0$, $v^\lambda(3) = 1$, $v^\lambda(1, 2) = t+1$, $v^\lambda(1, 3) = t+2$, $v^\lambda(2, 3) = t+2$ y $v^\lambda(N) = t+2$.

El valor de Shapley de (N, v^λ) es entonces:

$$Sh(N, v^\lambda) = \left(\frac{t+1}{3}, \frac{t+1}{3}, \frac{t+4}{3}\right).$$

Un valor de Shapley λ -transferible $\phi \in V(N)$ debe verificar $\lambda\phi = Sh(N, v^\lambda)$, por tanto

$$\phi = \left(\frac{1}{3}, \frac{t+1}{3t}, \frac{t+4}{3}\right).$$

Existe un único $t > 0$ para el que ϕ pertenece al segmento, y es $t = 1$. Por tanto, el único valor de Shapley λ -transferible es

$$\phi = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

al que se llega con $\lambda = (2, 1, 1)$.

8.4. El valor consistente de Maschler-Owen

En el cálculo del valor de Harsanyi ϕ , debemos utilizar el vector λ para calcular cada punto ϕ^S en la frontera de Pareto de cada uno de los conjuntos $V(S)$. Sin embargo, existe cierta inconsistencia en este procedimiento, ya que λ debe ser ortogonal a ϕ^N en la frontera de $V(N)$, mientras que el resto de los ϕ^S no tienen en general a λ como vector ortogonal a $V(S)$. En el caso del valor de Shapley λ -transferible, los valores de Shapley de los subjuegos del juego TU asociado no tienen por qué ser ni admisibles.

Por ejemplo, en el juego del café, si el jugador 3 no estuviese presente, el valor de Harsanyi y el valor de Shapley λ -transferible coinciden con el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$. Sin embargo, cuando el jugador 3 está presente, el único valor de Harsanyi supone que los jugadores 1 y 2 tienen como expectativa, mediante cooperación, el punto $\phi^{\{1,2\}} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, y no el $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$. El valor de Shapley

lambda-transferible, por su parte, utiliza el juego TU asociado (N, v) con $v(N) = v(1, 2) = 1$ y $v(S) = 0$ en otro caso. Para el subjuego $(\{1, 2\}, v)$, el valor de Shapley es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, también diferente de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ y que, además, es un pago no admisible en $V(1, 2)$.

Como alternativa, Maschler y Owen (1989) propusieron un nuevo valor, de forma que cada coalición S tiene asociado un punto en la frontera de Pareto de $V(S)$ y un vector ortogonal a ese punto en $\partial V(S)$. La idea es que cada coalición tenga asociado un punto en su frontera que no dependa de los jugadores que no pertenecen a esa coalición.

Esta asociación es evidente cuando tenemos un juego de hiperplano, en el que existe un único vector ortogonal a la frontera de cada $V(S)$. En particular, Maschler y Owen definen su valor para juegos de hiperplano utilizando contribuciones marginales. En concreto, supongamos que tenemos el juego de hiperplano (N, V) con $N = \{1, 2, 3\}$, con función característica:

$$V(i) = -\mathbb{R}_+^{\{i\}}, \quad i \in N$$

$$\begin{aligned} V(1, 2) &= \left\{x \in \mathbb{R}_+^{\{1,2\}} : (1, 4) \cdot x \leq 1\right\}, \quad V(1, 3) = \left\{x \in \mathbb{R}_+^{\{1,3\}} : (2, 3) \cdot x \leq 2\right\} \\ V(2, 3) &= \left\{x \in \mathbb{R}_+^{\{2,3\}} : (1, 1) \cdot x \leq 3\right\}, \quad V(N) = \left\{x \in \mathbb{R}_+^{\{1,2,3\}} : (1, 2, 1) \cdot x \leq 5\right\}. \end{aligned}$$

Tomamos un orden cualquiera de los tres jugadores, por ejemplo [123]. El vector de contribuciones marginales con respecto a este orden es $(0, \frac{1}{4}, \frac{9}{2})$, ya que:

- 0 es lo máximo que 1 puede conseguir en $V(1)$.
- $\frac{1}{4}$ es lo máximo que 2 puede conseguir en $V(1, 2)$, una vez que hemos asignado 0 al jugador 1.
- $\frac{9}{2}$ es lo máximo que 3 puede conseguir en $V(N)$ una vez que hemos asignado 0 al jugador 1 y $\frac{1}{4}$ al jugador 2.

Análogamente, el vector de contribuciones marginales con respecto al orden [132] es $(0, \frac{13}{3}, \frac{2}{3})$. El vector de contribuciones marginales con respecto al orden [213] es $(1, 0, 4)$. Y así sucesivamente. Como la frontera de $V(N)$ es un hiperplano, el promedio de todos los vectores de contribuciones marginales pertenecerá también a la frontera de $V(N)$, y será el (único) valor consistente de este juego de hiperplano. La definición formal es la siguiente:

Definición 8.23 Sea (N, H) un juego de hiperplano con $H(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : \lambda^S \cdot x \leq v(S)\}$ con $\lambda^S \in \mathbb{R}_{++}^S$ y $v(S) \in \mathbb{R}$ para todo $S \subset N$. Sea Π^N el conjunto de todas las ordenaciones de los jugadores de N . Para cada $\pi \in \Pi^N$, el vector de contribuciones marginales de (N, H) con respecto a π es el punto $\sigma^\pi \in \mathbb{R}^N$ definido inductivamente como:

$$\begin{aligned} \sigma_{\pi_i}^\pi &= \max \{x_{\pi_i} : (x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, \dots, x_{\pi_i}) \in H(\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i\})\} \\ &= \frac{v(\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i\}) - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{\pi_j}^{\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i\}} \sigma_{\pi_j}^\pi}{\lambda_{\pi_i}^{\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i\}}}. \end{aligned}$$

El valor consistente de (N, H) es el punto

$$\sigma = \frac{1}{|\Pi^N|} \sigma^\pi.$$

Para un juego (N, V) general, seleccionamos un punto en cada una de las fronteras de Pareto de los conjuntos $V(S)$, junto con un vector λ^S ortogonal a $V(S)$ en cada uno de los puntos. Sea $H(S)$ el hiperespacio de $\mathbb{R}^S$ delimitado por el plano de soporte en cada uno de los puntos. Formalmente,

$$H(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : \lambda^S \cdot x \leq \max \{\lambda^S \cdot y : y \in V(S)\}\}.$$

Claramente, el juego (N, H) es un juego de hiperplano. Si al calcular el valor consistente en cada uno de los subjuegos $(S, H(S))$, obtenemos un punto que pertenece a $(S, V(S))$, entonces el punto correspondiente a $H(N)$, y que también pertenece a $V(N)$, es un valor consistente de (N, V) . Formalmente:

Definición 8.24 Sea (N, V) un juego NTU y sea $\lambda = (\lambda^S)_{S \subset N}$ con $\lambda^S \in \mathbb{R}_{++}^S$ para cada $S \subset N$, de forma que el juego de hiperplano $(N, H^{V, \lambda})$ dado por

$$H^{V, \lambda}(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : \lambda^S \cdot x \leq \max \{ \lambda^S \cdot y : y \in V(S) \} \}$$

está bien definido.

Sea σ^S el valor consistente de $(S, H^{V, \lambda})$. Si $\sigma^S \in V(S)$ para todo $S \subset N$, entonces decimos que σ^N es un valor consistente de (N, V) .

De nuevo, no tenemos garantía de que el valor consistente exista (puede no existir ningún λ apropiado) o sea único (puede existir más de un λ apropiado). Sin embargo, al igual que el valor de Harsanyi y el valor de Shapley lambda-trasferible, el valor consistente generaliza la solución de Nash y el valor de Shapley.

Teorema 8.25 a) Si (N, V) es equivalente a un juego TU, el valor consistente existe, es único y coincide con el valor de Shapley.

b) Si (N, V) es equivalente a un problema de negociación, el valor consistente existe, es único y coincide con la solución de Nash.

Demostración: a) Si (N, V) es equivalente a un juego TU, entonces es un juego de hiperplano con $\lambda^S = 1_S$ para cada $V(S)$ y además $V^\lambda = V$. Además, las contribuciones marginales coinciden con las definidas para juegos TU y, por tanto, su promedio coincide el valor de Shapley en juegos TU.

b) Supongamos que (N, V) es equivalente a un problema de negociación (D, d) con $D = V(N)$ y $d = (\max \{V(i)\})_{i \in N}$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$, el juego de hiperplano $(N, H^{V, \lambda})$ asociado está dado por

$$H^{V, \lambda}(N) = \{x \in \mathbb{R}^N : \lambda \cdot x \leq \max \{ \lambda \cdot y : y \in D \} \}$$

y $H^{V, \lambda}(S) = \{d_S\} - \mathbb{R}_+^S$ en otro caso. Para la solución de Nash, $\eta = \text{Nash}(D, d)$, el vector $\lambda = \frac{1}{\eta - d}$ es ortogonal a la frontera de D en η , por lo que $H^{V, \lambda}(D)$ está bien definido y $\eta \in H^{V, \lambda}(N)$. Además, la frontera de $H^{V, \lambda}(D)$ es un hiperplano de soporte de $\{x \in \mathbb{R}^N : \prod_{i \in N} \eta_i \leq \prod_{i \in N} x_i\}$. Para cada $\pi \in \Pi^N$, el vector de contribuciones marginales es $\sigma^\pi \in \mathbb{R}^N$ con $\sigma_i^\pi = d_i$ para todo $i \neq \pi(n)$ y

$$\sigma_{\pi(n)}^\pi = \frac{\lambda \cdot \eta - \sum_{i \neq \pi(n)} \lambda_i d_i}{\lambda_{\pi(n)}},$$

con lo que el promedio de todos los posibles σ^π con $\pi \in \Pi^N$ es

$$\sigma_i = \frac{\lambda \cdot \eta - \sum_{j \neq i} \lambda_j d_j}{n \lambda_i} + \frac{(n-1) d_i}{n} = \eta_i$$

para todo $i \in N$. Esto prueba que la solución de Nash es un valor consistente.

Para demostrar la unicidad, sea $c \in \partial D$ un valor consistente cualquiera y sea $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$ un vector ortogonal a ∂D en c . Al tratarse de un valor consistente, c debe coincidir con el promedio de los vectores de contribuciones marginales de $(N, H^{V, \lambda})$. Es decir, $c = \frac{1}{|\Pi^N|} \sum_{\pi \in \Pi^N} \sigma^\pi$. Para cada $\pi \in \Pi^N$, el vector de contribuciones marginales es $\sigma^\pi \in \mathbb{R}^N$ con $\sigma_i^\pi = d_i$ para todo $i \neq \pi(n)$ y

$$\sigma_{\pi(n)}^\pi = \frac{\lambda \cdot c - \sum_{i \neq \pi(n)} \lambda_i d_i}{\lambda_{\pi(n)}},$$

con lo que el promedio de todos los posibles σ^π con $\pi \in \Pi^N$ es

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{\lambda \cdot c - \sum_{j \neq i} \lambda_j d_j}{n \lambda_i} + \frac{(n-1) d_i}{n} \\ &= \frac{\lambda \cdot (c-d)}{n \lambda_i} + d_i = c_i\end{aligned}$$

para todo $i \in N$. Esto implica $\frac{\lambda \cdot (c-d)}{n} = \lambda_i (c_i - d_i)$ para todo $i \in N$, con lo que $\lambda_i (c_i - d_i) = \lambda_j (c_j - d_j)$ para todo $i, j \in N$ y, por tanto, λ es proporcional al vector $\frac{1}{c-d}$, lo que solo puede suceder si c es la solución de Nash. ■

Ejercicios

1. (Asscher (1976)) El core de un juego NTU no tiene por qué ser convexo. Sea $N = \{1, 2, 3\}$ tal que

$$\begin{aligned}V(i) &= \{x_i \in \mathbb{R}^{\{i\}} : x_i \leq 0\} \\ V(i, j) &= \{x \in \mathbb{R}^{\{i, j\}} : x_i + x_j \leq 21, 3x_i + x_j \leq 45, x_i + 3x_j \leq 45\} \\ V(N) &= \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 + x_2 + x_3 \leq 30\}.\end{aligned}$$

Calcula el core de este juego y comprueba que no es convexo.

2. Calcula el core de un problema de negociación (N, D, d) .
3. Calcula la función característica del juego correspondiente al mercado de intercambio del Ejemplo 5.14 suponiendo que el jugador 1 valora el par de guantes en 1 euro, el jugador 2 en 0.25 euros, y el jugador 3 en 0.5 euros. Calcula el core de este juego y determina, dentro del core, cuáles son los pagos más favorables para cada jugador y cómo deben repartirse los guantes y el dinero para obtenerlos.
4. Calcula el core, el valor de Harsanyi, el valor de Shapley lambda-transferible y el valor consistente para el juego NTU (N, V) definido por $N = \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned}V(i) &= -\mathbb{R}^{\{i\}}, \quad V(1, 2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{\{1, 2\}} : 2x_1 + 3x_2 \leq 1\} \\ V(1, 3) &= \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^{\{1, 3\}} : x_1, x_3 \leq 0\}, \quad V(2, 3) = \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{\{2, 3\}} : x_2, x_3 \leq 0\} \\ V(N) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{\{1, 2, 3\}} : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}.\end{aligned}$$

5. Calcula el valor de Harsanyi en el siguiente mercado de intercambio: $N = \{1, 2, 3\}$. El jugador 1 tiene guantes derechos, el jugador 2 tiene guantes izquierdos, y los dos valoran lo mismo los pares de guantes. El jugador 3 no quiere pares de guantes, sino solo la tela de la que están hechos. El jugador 3 tiene dinero, los jugadores 1 y 2 no.
6. Modeliza el siguiente mercado de intercambio mediante un juego NTU: Tres jugadores; uno de ellos tiene guantes derechos, el otro tiene guantes izquierdos, y los dos valoran lo mismo cada par de guantes. El tercer jugador no quiere pares de guantes, sino solo la tela de la que están hechos. El tercer jugador tiene dinero, los otros dos jugadores no. Calcula el core, el valor de Harsanyi, el valor de Shapley lambda-transferible y el valor consistente de este juego.

7. Calcula el core, el valor de Harsanyi, el valor de Shapley lambda-transferible y el valor consistente del juego del café presentado en el Ejemplo 5.4.
8. Calcula el core, el valor de Harsanyi, el valor de Shapley lambda-transferible y el valor consistente del juego del Parlamento presentado en el Ejemplo 5.5.
9. Calcula el valor de Shapley lambda-transferible en el siguiente mercado de intercambio: $N = \{1, 2, 3\}$. El jugador 1 tiene guantes derechos, el jugador 2 tiene guantes izquierdos, y los dos valoran lo mismo los pares de guantes. El jugador 3 no quiere pares de guantes, sino solo la tela de la que están hechos. El jugador 3 tiene dinero, los jugadores 1 y 2 no.
10. Calcula el core, el valor de Harsanyi y el valor consistente del juego presentado en el Ejemplo 8.22.
11. El valor de Harsanyi, de Shapley lambda-transferible y consistente no verifican unicidad. Sea (N, V) con $N = \{1, 2\}$, $V(1) = V(2) = 1$ y

$$V(N) = \{x \in \mathbb{R}^N : x \leq (1, 1), (x_1 - 1)(x_2 - 1) = \varepsilon\} - \mathbb{R}_+^N$$

siendo $\varepsilon > 0$. Comprueba que todos los puntos de la frontera de $V(N)$ son valores de Harsanyi, valores de Shapley lambda-transferibles y valores consistentes.

Apéndice

Definición 9.1 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. A es convexo si dados $a, b \in A$ entonces $(1-t)a + tb \in A$ para todo $t \in [0, 1]$.

Definición 9.2 Se llama combinación lineal convexa de los puntos $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, a todo punto de la forma $\sum_{i=1}^k t_i x_i$ con $t_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^k t_i = 1$.

Teorema 9.3 (Teorema de Krein-Milman) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Entonces A es la envoltura convexa cerrada de sus puntos extremos.

Teorema 9.4 (Teorema de dualidad en programación lineal) Consideremos el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^t x \\ \text{sujeto a:} \quad & Ax \geq b, \end{aligned} \tag{Primal}$$

siendo $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. El correspondiente problema dual viene dado por

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & b^t y \\ \text{sujeto a:} \quad & A^t y = c \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{Dual}$$

siendo $y \in \mathbb{R}^m$. Si uno de los problemas (Primal) o (Dual) es resoluble (tiene solución óptima finita), entonces el otro problema, (Dual) o (Primal), también es resoluble y los correspondientes valores de la función objetivo de ambos problemas coinciden. Si uno de los problemas tiene solución no acotada, el otro no tiene soluciones factibles.

Definición 9.5 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y no vacío, $x_0 \in \partial(A)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}$.

- Un hiperplano H en $\mathbb{R}^n$ se define como $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \alpha = \beta\}$.
- H es un hiperplano soporte en x_0 a $\partial(A)$ si $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \alpha = x_0 \cdot \alpha\}$ y $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \alpha \leq x_0 \cdot \alpha\}$ ó $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \alpha \geq x_0 \cdot \alpha\}$.
- Sea $\lambda \in \mathbb{R}^n$, λ es ortogonal a $x_0 \in \partial(A)$ si $\lambda \cdot x_0 = 0$.

Un vector se dice ortogonal a una superficie en un punto si es perpendicular al plano tangente en dicho punto de la superficie.

Teorema 9.6 (Teorema del hiperplano soporte) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, cerrado y $x_0 \in \partial(A)$, entonces existe un hiperplano soporte de A en x_0 .

Recíprocamente, si A es un conjunto cerrado con interior no vacío tal que cada punto de la frontera tiene un hiperplano soporte, entonces A es convexo.

Teorema 9.7 (Teorema de separación) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado, convexo y no vacío, y $x^* \notin A$ entonces existe un hiperplano $H_a^k = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i = k\}$ que separa estrictamente x^* y A ; esto es, $\sum_{i=1}^n a_i x_i^* < k < \sum_{i=1}^n a_i x_i$, para todo $x \in A$.

Índice alfabético

Asignación

- admisible, 150
- eficiente, 22
- estable, 28
- estable débil, 150
- estable fuerte, 150

Coalición

- de socios, 66
- ganadora, 84
 - minimal, 84
- perdedora, 84
- swing, 84

Cobertura superaditiva, 39

Conjunto

- acotado por arriba, 113
- acotado superiormente, 114
- comprehensivo, 113
- convexo, 114
- de imputaciones, 23
- de preimputaciones, 22
- de Weber, 46
- estable, 42

Core, 28, 150

- ε -core, 37
- del juego de costes, 31
- con estructura coalicional, 39
- del juego de ahorros, 31
- strong core, 150
- weak core, 150

Core-center, 79

Core-cover, 45

Criterio de Kohlberg

- para el nucleolus, 76
- para el prenucleolus, 76

D-core, 40

Dividendos de Harsanyi, 19

Dominancia, 40

Equilibrio competitivo, 92

Estabilidad

- externa, 42

- interna, 42

Estructura coalicional, 23

Familia equilibrada, 33

Función

- de utilidad de NM, 130
- de utilidad, 124

Grafo no orientado, 69

Índice de poder

- de Banzhaf-Coleman, 89
- de Banzhaf absoluto o de Penrose, 90
- de Banzhaf normalizado, 89
- de Shapley-Shubik, 86

Juego

- 0-(-1) normalizado, 15
- 0-0 normalizado, 15
- 0-1 normalizado, 15
- 0-monótono, 16, 114
- 0-normalizado, 15, 114
- aditivo, 14, 114
- cóncavo, 16
- cociente, 67
- con comunicación restringida, 69
- con large core, 44
- convexo, 16, 49, 99
 - cardinal, 115
 - ordinal, 114
- de ahorros, 21
- de asignación, 94
- de bancarrota, 99
- de compromiso admisible, 46
- de comunicación, 69
- de costes, 20
- de estructura completa, 33
- de flujo, 105
- de hiperplano, 119
- de los guantes, 17
- de mayoría

- absoluta, 85
- ponderada, 85
- ponderada con cuota, 85
- de suma constante, 31
- de unanimidad, 18
 - dual, 97
- degenerado, 23
- del café, 112, 161
- del dólar, 17
- del Parlamento, 20
- El paso del ganado, 17
- equilibrado, 34, 86
- esencial, 23
- estratégicamente equivalente, 14, 131
- estrictamente cóncavo, 16
- estrictamente convexo, 16
- exacto, 33
- monótono, 16, 114
- NTU, 112
- reducido, 63, 74
- simple, 83
- subaditivo, 14
- superaditivo, 14, 114
- totalmente equilibrado, 35
- Jugador
 - dictador, 84
 - nulo, 55
 - títere, 55
 - veto, 84
- Jugadores
 - conectados por un grafo, 69
 - simétricos, 117, 142
- Least Core, 38
- Lotería, 128
- Mínimo derecho, 44
- Mercado de intercambio, 91, 119
- Nucleolus, 71
- Orden admisible, 67
- Orden lexicográfico, 71
- Pago de utopía, 44
- Paradoja
 - de Allais, 133
 - de San Petersburgo, 133
- PMAS, 36, 86
- Prenucleolus, 71
- Problema
 - de árbol de expansión mínima, 103
 - de asignación, 94
 - de bancarrota, 97
 - de decisión, 123
 - de flujo máximo, 105
 - de negociación, 118
 - del aeropuerto, 96
- Propiedad
 - de aditividad, 56
 - de admisibilidad coalicional, 115
 - de admisibilidad en la gran coalición, 115
 - de anonimato, 117, 142
 - de compañerismo, 66
 - de consistencia, 57
 - de continuidad, 56, 129
 - de contribuciones equilibradas, 56
 - de covarianza, 54
 - de transformaciones afines, 142
 - de traslaciones, 142
 - de dominancia del punto medio, 143
 - de eficiencia, 54
 - débil de Pareto, 116, 141
 - en componentes, 70
 - fuerte de Pareto, 116, 142
 - de estándar para dos, 57
 - de estabilidad, 70
 - de independencia, 128
 - de alternativas irrelevantes, 142
 - de alternativas no individualmente racionales, 142
 - de invarianza
 - por cambios de escala, 54
 - por traslaciones, 54
 - de jugadores
 - nulos, 55
 - títeres, 55
 - de justicia o fairness, 70
 - de linealidad, 128
 - de monotonía, 142
 - coalicional, 56
 - coalicional débil, 56
 - en el agregado, 56
 - fuerte, 56
 - individual, 143
 - restringida, 143
 - de positividad, 66
 - de racionalidad individual, 54
 - de selección en el core, 54
 - de simetría, 55, 142

- puntual, 117
 - en el cociente, 68
 - individual, 68
 - de unicidad, 116, 141
- Racionalidad
 - coalicional, 28
 - individual, 22
- Regla
 - de reparto, 27
- Sistema
 - de coaliciones a priori, 67
 - ordenado de pesos, 64
- Solución
 - de Harsanyi, 153, 155, 156
 - de igual ganancia, 100
 - de igual perdida, 100
 - de Kalai-Smorodinsky, 138
 - de llegadas aleatorias, 101
 - de Nash, 136
 - de Raiffa
 - continua, 140
 - discreta, 139
 - de Shapley lambda-transferible, 160
 - del Talmud, 101
 - igualitaria, 138
 - ordinal, 125
 - proporcional, 101
 - proporcional ajustada, 101
 - puntual, 27
 - tipo conjunto, 27
- Subjuego, 14
- Superficie
 - suave, 114
- Teorema
 - de Bondareva-Shapley, 34
 - de dualidad en programación lineal, 167
 - de imposibilidad, 78
 - de Krein-Milman, 167
 - de separación, 167
 - del hiperplano soporte, 167
- Valor
 - coalicional o de Owen, 67
 - consistente de Maschler-Owen, 163
 - de Myerson, 69
 - de Shapley, 57
 - de Shapley ponderado, 64
 - τ -valor, 78
- Vector
 - de contribuciones marginales, 32
 - de excesos, 71

Bibliografía

- Allais M. (1953). *Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école Américaine*. *Econometrica* 21(4), 503-546. 133
- Asscher N. (1976). *An ordinal bargaining set for games without side payments*. *Mathematics of Operations Research* 1, 381-389. 165
- Aumann R. y Peleg, B. (1960). *Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments*. *Bulletin of the American Mathematical Society* 66, 173-179. 149
- Aumann R. (1961). *The core of a cooperative game without side payments*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 98, 539-552. 149
- Aumann R.J. y Hart S. (1992). *Handbook of game theory*. Volumen 1. 2
- Aumann R.J. y Hart S. (1994). *Handbook of game theory*. Volumen 2. 2
- Aumann R.J. y Hart S. (2002). *Handbook of game theory*. Volumen 3. 2
- Aumann R.J. y Maschler M. (1965). *The bargaining set for cooperative games*. *Advances in Game Theory* 19, 443-477. 28
- Aumann R.J. y Maschler M. (1985). *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud*. *Journal of Economic Theory* 36, 195-213. 97, 102
- Banzhaf, J.F. (1964-65). *Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis*. *Rutgers Law Review* 317-343. 83, 89
- Bergantiños G. y Sánchez, E. (2002). *NTU PERT games*. *Operations Research Letters* 30(2), 130-140. 161
- Bergantiños, G. y Vidal-Puga, J. (2004). *Additive rule in bankruptcy problems and other related problems*. *Mathematical Social Sciences* 47, 87-101. 99
- Bergantiños, G. y Vidal-Puga, J. (2007a). *A fair rule in minimum cost spanning tree problems*. *Journal of Economic Theory* 137, 326-352. 104
- Bergantiños, G. y Vidal-Puga, J. (2007b). *The optimistic TU game in minimum cost spanning tree problems*. *International Journal of Game Theory* 36, 223-239. 104
- Bird C.G.(1976). *On cost allocation for a spanning tree: a game-theoretic approach*. *Network* 6, 335-350. 103
- Bondareva, O.N. (1963). *Certain applications of the methods of linear programming to the theory of cooperative games* (en ruso). *Problemy Kibernetiki* 10, 119-139. 34

- Borm, P., Keiding, H., McLean, R.P., Oortwijn, S. y Tijs, S. (1992). *The compromise value for NTU-games*. International Journal of Game Theory 21, 175-189. 149
- Borm, P., Owen, G. y Tijs, S. (1992). *On the position value for communication situations*. SIAM Journal on Discrete Mathematics 5, 305-320. 68
- Chang, C. y Chen, P.A. (2011). *The lambda-nucleolus for non-transferable utility games and Shapley procedure*. Working paper. 150
- Chun, Y. (1988a). *The equal-loss principle for bargaining problems*. Economic Letters 26, 103-106. 135
- Chun, Y. (1988b). *The proportional solution for right problems*. Mathematical Social Sciences 15, 231-246. 98
- Claus, A. y Kleitman, D.J. (1973). *Cost allocation for a spanning tree*. Networks 3, 289-304. 103
- Curiel, I., Maschler, M. y Tijs, S.H. (1987). *Bankruptcy games*. Zeitschrift für Operations Research 31, 143-159. 102
- Curiel, I. (1997). *Cooperative game theory and applications*. Academic Publishers. 102
- Davis, M.D. y Maschler, M. (1965). *The kernel of a cooperative game*. Naval Logistic Quarterly 12, 223-259. 28, 57
- Dekel, E. (1982). Documento de trabajo mencionado en Thomson (1994, p.1245). *Cooperative models of bargaining*. Elsevier. 135
- Dubey, P. (1975). *On the uniqueness of the Shapley value*. International Journal of Game Theory 14, 131-139. 90
- Dubey, P. y Shapley, L.S. (1979). *Mathematical properties of the Banzhaf power index*. Mathematics of Operations Research 4, 99-131. 83, 90
- Dutta, B. y Ray, D. (1989). *A concept of egalitarianism under participation constraints*. Econometrica 57, 615-635. 53, 102
- Dutta, B. y Mishra, D. (2012). *Minimum cost arborescences*. Games and Economic Behavior 74, 120-143. 103
- Edgeworth, F.Y. (1881). *Mathematical psychics*. Keegan Paul, London. 27
- Ford, L.K. y Fulkerson, D.R. (1962). *Flows in networks*. Princeton University Press. 106
- Gillies, D.B. (1953). *Some theorems on n-person games*. Tesis doctoral, Department of Mathematics, Princeton. 27, 40
- Gillies, D.B. (1959). *Solutions to general non-zero-sum games*. Annals of Mathematical Studies 40, 47-85. 27, 40
- Gneezy, U., List, J.A. y Wu, G. (2006). *The uncertainty effect: When a risky prospect is valued less than its worst possible outcome*. Quarterly Journal of Economics 1283-1309. 133
- González-Díaz, J., García-Jurado, I. y Fiestras-Janeiro, G. (2010). *An introductory course on mathematical game theory*, vol. 115 de Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society. 2

- González Díaz, J. y Sánchez Rodríguez, E. (2007). *A natural selection from the core of a TU game: the core-center*. International Journal of Game Theory 36, 27-46. 53, 79
- Granot, D. y Huberman, G. (1981). *Minimal cost spanning tree games*. Mathematical Programming 21, 1-18. 103
- Hammer, P.L., Peled, U.N., y Sorensen, S. (1977). *Pseudo boolean functions and game theory: core elements and shapley value*. Cahiers du CERO 19, 159-176. 28
- Harsanyi, J.C. (1959). *A bargaining model for the cooperative n-person game*. En Tucker y Luce (editores) Contributions to the Theory of Games, IV. Princeton: Princeton University Press, 325-355. 152
- Harsanyi, J.C. (1963). *A simplified bargaining model for the n-person cooperative game*. International Economic Review 4, 194-220. 149, 152
- Hart, S. Mas-Colell, A. (1989). *Potential, value, and consistency*. Econometrica 57, 589-614. 57, 63
- Hart, S. (1994). *On prize games. Essays in game theory*. Ed. by N. Meggido. Berlin. Springer-Verlag, 111-121. 119
- Herrero, C., Maschler, M., y Villar, A. (1999). *Individual rights and collective responsibility: the rights-egalitarian solution*. Mathematical Social Sciences 37, 59-77. 98
- Housman, D. y Clark, L. (1998). *Core and monotonic allocation methods*. International Journal of Game Theory 27, 611-616. 78
- Imai, H. (1983). *Individual monotonicity and lexicographic maxmin solution*. Econometrica 51, 389-401. 135
- Kalai, E. (1975). *Excess function for cooperative games without sidepayments*. Journal of Applied Mathematics 29, 60-71. 149
- Kalai, E. (1977). *Proportional solutions to bargaining situations: Interpersonal utility comparisons*. Econometrica 45 (7), 1623-1630. 135, 138, 145
- Kalai, E. y Samet, D. (1985). *Monotonic solutions to general cooperative games*. Econometrica 53, 307-327. 149
- Kalai, E. y Samet, D. (1987). *On weighted Shapley values*. International Journal of Game Theory 16(3), 205-222. 53, 66
- Kalai, E. y Smorodinsky, M. (1975). *Other solutions to Nash's bargaining problem*. Econometrica 43, 513-518. 135, 137
- Kalai, E. y Zemel, E. (1982). *Totally balanced games and games of flow*. Mathematics of Operations Research 7, 476-479. 106
- Kohlberg, E. (1971). *On the nucleolus of a characteristic function game*. SIAM Journal of Applied Mathematics 20, 62-66. 76
- Krein, M. y Milman, D. (1940). *On extreme points of regular convex sets*. Studia Mathematica 9, 133-138. 23, 29
- Littlechild, S.C. y Thompson, G.F. (1977). *Aircraft landing fees: a game theory approach*. The Bell Journal of Economics 8, 186-204. 95

- Lucas, W.F. (1967). *A counterexample in game theory*. Management Science 13, 766-767. 44
- Maschler, M. y Owen, G. (1989). *The consistent Shapley value for hyperplane games*. International Journal of Game Theory 18, 389-407. 149, 163
- Maschler, M. y Owen, G. (1992). *The consistent Shapley value for games without side payments*. En Selten (editor) Rational iteration. Springer-Verlag. 149
- Maschler, M., Peleg, B. y Shapley, L.S. (1972). *The kernel and bargaining set for convex games*. International Journal of Game Theory 1, 73-93. 28
- Maschler, M., Peleg, B. y Shapley, L.S. (1979). *Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts*. Mathematics of Operations Research 4, 303-338. 27, 71, 74
- Maschler M., Solan E. y Zamir S. (2013). *Game Theory*. Cambridge University Press. 2
- Mirás Calvo, M.A. y Sánchez Rodríguez E. (2008). *Juegos cooperativos con utilidad transferible usando Matlab: TUGlab*. Servicio de Publicaciones de la Universidade de Vigo. 81
- Mirás Calvo, M.A. y Sánchez Rodríguez E. (2010). *Herramientas informáticas de cálculo y representación gráfica para juegos TU*. La Gaceta de la RSME, Vol. 13, núm. 1: 89-108. 81
- Moulin, H. (1987). *Equal or proportional division of a surplus, and other methods*. International Journal of Game Theory 16(3), 161-186. 98
- Moulin, H. (2002). *Axiomatic cost and surplus sharing*. En Arrow, Sen y Suzumura (editores) Handbook of Social Choice and Welfare. Elsevier, Amsterdam, 289-357. 97
- Myerson, R.B. (1977). *Graphs and cooperation in games*. Mathematics of Operation Research 2, 225-229. 53, 70
- Myerson, R.B. (1980). *Conference structures and fair allocation rules*. International Journal of Game Theory 9, 169-182. 61, 62, 68
- Myerson, R.B. (1981). *Utilitarianism, egalitarianism, and the timing effect in social choice problems*. Econometrica 49(4), 883-897. 135
- Nakayama, M. (1950). *A note on a generalization of the nucleolus to games without side payments*. International Journal of Game Theory 12, 115-122. 149
- Nash, J.F. (1950). *The bargaining problem*. Econometrica 18, 155-162. 2, 135, 136, 144
- Nowak, A.S. y Radzik, T. (1994). *A solidarity value for n-person transferable utility games*. International Journal of Game Theory 23, 43-48. 53
- O'Neill, B. (1982). *A problem of rights arbitration from the Talmud*. Mathematical Social Sciences 2, 345-371. 97, 102
- Owen, G. (1972). *Values of games without side payments*. International Journal of Game Theory 1, 95-109. 112
- Owen, G. (1975). *Multilinear extensions and the Banzhaf value*. Naval Research Logistic Quarterly 22, 741-750. 89
- Owen, G. (1977). *Values of games with a priori unions*. En Henn, R. Moeschlin, O. (eds.) Essays in mathematical economics and game theory. Berlin-Heidelberg, New York, 76-88. 66, 68

- Owen, G. (1995). *Game theory*. Academic Press. 53
- Penrose, L.S. (1946). *The Elementary Statistics of Majority Voting*. Journal of the Royal Statistical Society 109, 53-57. 83, 90
- Perles, M.A. y Maschler, M. (1981). *The super-additive solution for the Nash bargaining game*. International Journal of Game Theory 10, 163-193. 135
- Rafels i Pallarola, C., Izquierdo i Aznar, J.M., Marín Solano, J., Martínez de Albéniz Salas, F.J., Núñez Oliva, M. y Ybern Carballo, N. (1999). *Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques*. Edicions de la Universitat de Barcelona. 11
- Raiffa, H. (1951). *Arbitration schemes for generalized two-person games*. Report M720-1, R30. Engineering Research Institute. University of Michigan. 135, 140
- Raiffa, H. (1953). *Arbitration schemes for generalized two-person games*. En Kuhn y Tucker (editores) Contributions to the Theory of Games II. Princeton University Press. 135, 137, 139
- Roth, A.E. (1979). *Axiomatic models of bargaining*. Springer-Verlag. 135
- Roth, A.E. (1980a). *An impossibility result concerning n-person bargaining games*. International Journal of Game Theory 8, 129-132. 146
- Roth, A.E. (1980b). *Values of games without side payments: some difficulties with current concepts*. Econometrica 48, 457-465. 113
- Roth, A.E. (1988). *The Shapley Value. Essays in honor of Lloyd S. Shapley*. Cambridge University Press. 53
- Schmeidler, D. (1969). *The nucleolus of a characteristic function game*. SIAM Journal of Applied Mathematics 17, 1163-1170. 53, 71
- Shapley, L.S. (1953a). *Additive and non-additive set functions*. Tesis doctoral. Department of Mathematics, Princeton. 53, 57, 64
- Shapley, L.S. (1953b). *A value for n-person games*. Vol. II Annals of Mathematics Studies, 28. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 307-317. 53
- Shapley, L.S. (1967). *On balanced sets and cores*. Naval Research Logistics Quarterly 14, 453-460. 34
- Shapley, L.S. (1969). *Utility comparison and the theory of games*. La Decision, Paris: Editions du CNRS, 251-263. Reeditado en Roth (1988): *The Shapley value: Essays in honour of Lloyds S. Shapley*. Cambridge University Press. 149
- Shapley, L.S. (1971). *Cores of convex games*. International Journal of Game Theory 1, 11-26. 30, 33
- Shapley, L.S. y Shubik, M. (1954). *A method for evaluating the distribution of power in a committee system*. American Political Science Review 48, 787-792. Reeditado en Roth (1988) *The Shapley value: Essays in honour of Lloyds S. Shapley*. Cambridge University Press. 83, 86
- Shapley, L.S. y Shubik, M. (1963). *The core of an economy with nonconvex preferences*. Tech. Rep. RM-3518, The Rand Corporation. 27

- Shapley, L.S. y Shubik, M. (1966). *Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences*. *Econometrica* 34, 805-827. 27
- Shapley, L.S. y Shubik, M. (1969). *On Market Games*. *Journal of Economic Theory* 1, 9-25. 91
- Shapley, L.S. y Shubik, M. (1972). *The assignment game I: the core*. *International Journal of Game Theory* 1, 111-130. 94
- Shapley, L.S. y Shubik, M. (1974). Documento de trabajo mencionado en Roth (1979, p.72-73) *Axiomatic models of bargaining*. Springer-Verlag. 127, 135
- Shapley, L.S. y Shubik, M. (1975). *Competitive outcomes in the cores of market games*. *International Journal of Game Theory* 4, 229-237. 91, 150
- Sharkey, W.W. (1982). *Cooperative games with large cores*. *International Journal of Game Theory* 11, 175-182. 44
- Sobolev, A. (1975). *The characterization of optimality principles in cooperative games by functional equations* (en ruso). *Mathematical Methods in Social Sciences* 6, 150-165. 73, 74
- Sprumont, Y. (1990). *Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility*. *Games and Economic Behavior* 2, 378-394. 36
- Thomson, W. (1980). *Two characterizations of the Raiffa solution*. *Economic Letters* 6, 225-231. 146
- Thomson, W. (1981). *Nash's bargaining solution and utilitarian choice rules*. *Econometrica* 49, 535-538. 135
- Thomson, W. (1994). *Cooperative models of bargaining*. Chapter 35 in: *Handbook of game theory with economic applications* (Volume 2). Ed. by R.J. Aumann y S. Hart. Elsevier, 1238-1284. 136
- Thomson, W. (2003). *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey*. *Mathematical Social Sciences* 45, 249-297. 97
- Thomson, W. (2013). *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update*. Working Paper 578. Rochester University. 97
- Tijs, S.H. (1981). *Bounds for the core and the τ -value*. *Game Theory and Mathematical Economics* 123-132. North-Holland Publishing Company. Amsterdam. The Netherlands. 27, 44, 53
- Tijs, S.H., Borm, P., Lohmann, E. y Quant, M. (2011). *An average lexicographic value for cooperative games*. *European Journal of Operational Research* 213(1), 210-220. 53
- Vasil'ev, V. (1980). *On the H-payoff vectors for cooperative games*. *Optimizacija Vyp* 24, 18-32 (en ruso). 28
- Vidal-Puga, J. (2004). *Bargaining with commitments*. *International Journal of Game Theory* 33(1), 129-144. 53
- von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behaviour*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. 2, 27, 42, 130
- Wallmeier, E. (1983). *Der f-nucleolus und ein dynamisches verhandlungsmodell als lösungskonzepte für kooperative n-personenspiele*. Inst. f. Math. Statistik, Münster. 53

- Weber, R.J. (1988). *Probabilistic values for games*. En: Roth, A. E. (Ed.), The Shapley value. Essays in honor of L. S. Shapley. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 101–119. 28, 46
- Young, H.P. (1985). *Monotonic solutions of cooperative games*. International Journal of Game Theory 14, 65-72. 61, 78
- Zhou, L. (1991). *A weak monotonicity property for the nucleolus*. International Journal of Game Theory 19, 407-411. 74