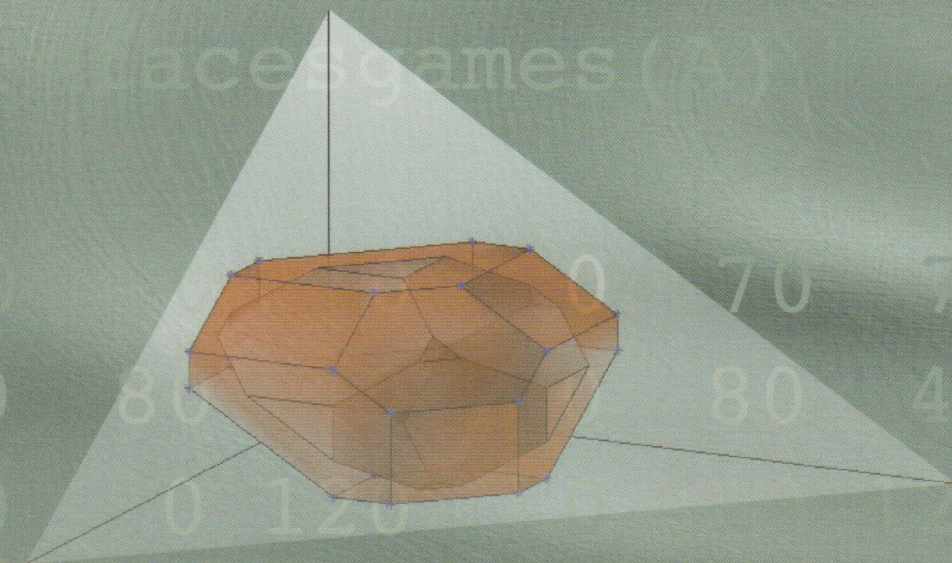




Juegos cooperativos con utilidad transferible usando MATLAB: TUGlab

Miguel Ángel Mirás Calvo
Estela Sánchez Rodríguez

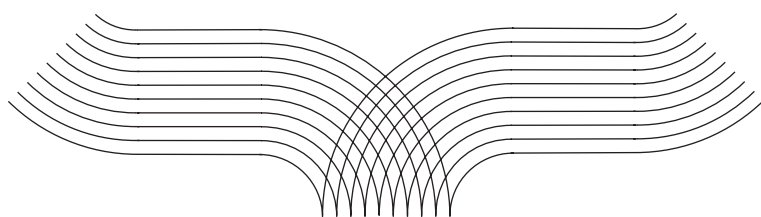
SERVIZO DE PUBLICACIÓNS



UNIVERSIDADE DE VIGO

Servizo de Publicacións

Universidade de Vigo



Monografías

Tecnoloxía e Ciencias Experimentais

n.º 016

El siguiente repositorio de GitHub contiene los scripts de MATLAB, una guía de las funciones del paquete TUGlab y material complementario, como plantillas, simulaciones y ayudas: <https://github.com/mmirascalvo-dev/Juegos-cooperativos-con-utilidad-transferible-usando-MATLAB-TUGlab>

Asimismo, se dispone del paquete TUGlab para R y de la aplicación web TUGlabWEB, accesibles en las siguientes direcciones:

de Prado Saborido, Á., Mirás Calvo, M., Núñez Lugilde, I., Quinteiro Sandomingo, C., & Sánchez Rodríguez, E. (2025). TUGLab: A Laboratory for TU Games. R package version 0.0.1. **CRAN: Package TUGLab**

TUGlabWEB: <https://cran.r-project.org/web/packages/TUGLab/index.html>

Edición

Universidade de Vigo
Servizo de Publicacións
Rúa de Leonardo da Vinci, s/n. 36310 Vigo

Imprime

Plana Artes gráficas, S.L.

ISBN (libro impreso)

978-84-8158-387-8

Depósito legal

C 2250-2008

© Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo, 2008
Printed in Spain - Impreso en España

Sen o permiso escrito do Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo, queda prohibida a reprodución ou a transmisión total e parcial deste libro a través de ningún procedemento electrónico ou mecánico, incluídos a fotocopia, a gravación magnética ou calquera almacenamento de información e sistema de recuperación.

Ao ser esta editorial membro da **une**, garántense a difusión e a comercialización das súas publicacións no ámbito nacional e internacional.



This license enables reusers to distribute, remix, adapt, and build upon the material in any medium or format for noncommercial purposes only if attribution is given to the creator. If you remix, adapt, or build upon the material, you must license the modified material under the same or a compatible license. CC BY-NC-SA includes the following elements:

BY: Credit must be given to the creator.

NC: Only noncommercial use of this work is permitted. *Noncommercial means not primarily intended for or directed towards commercial advantage or monetary compensation.*

SA: Adaptations must be shared under the same terms.

Juegos cooperativos con utilidad
transferible usando MATLAB:
TUGlab

Miguel Ángel Mirás Calvo
Estela Sánchez Rodríguez

A Óscar y Pau.

Juegos cooperativos con utilidad transferible usando MATLAB: TUGlab

Miguel Ángel Mirás Calvo
Profesor titular de Análisis Matemático
Departamento de Matemáticas
Universidade de Vigo

Estela Sánchez Rodríguez
Profesora titular de Estadística e Investigación Operativa
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Universidade de Vigo

Abril, 2008

Agradecimientos

Quisiéramos agradecer al grupo de Teoría de Juegos del Departamento de Estadística e Investigación de Operaciones de la Universidad de Santiago de Compostela (SaGaTh Group) el apoyo y el ánimo recibidos durante la elaboración de esta monografía y, especialmente, las facilidades dadas para permitirnos poner una copia del paquete TUGlab en su página web:

<http://eio.usc.es/pub/io/xogos/index.html>

Los comentarios de Balbina Casas Méndez y de Manuel Alfredo Mosquera Rodríguez han servido para mejorar varias funciones del programa TUGlab.

No queremos dejar de mencionar el interés en TUGlab expresado por Jean Derks y Pierre Dehez, ni las sugerencias recibidas en el I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal e VII Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións celebrado en Guimarães (Portugal) en 2005, donde presentamos una versión preliminar del programa. Agradecemos la buena acogida dispensada al programa en la sesión de “software” matemático del International Congress of Mathematicians, ICM06, celebrado en Madrid.

Una buena parte de los contenidos de este libro son fruto de las reflexiones realizadas tras impartir varios cursos de doctorado sobre juegos cooperativos. Sin duda, los comentarios y sugerencias de los alumnos participantes en estos cursos también han contribuido a mejorar el texto.

Finalmente, no podemos dejar de reconocer el trabajo y resaltar las numerosas y acertadas recomendaciones de dos revisores anónimos que han contribuido enormemente a mejorar la estructura y corrección de la monografía. Cualquier error en el texto definitivo es responsabilidad exclusiva de los autores.

Estela Sánchez Rodríguez agradece la financiación del Ministerio de Educación y Ciencia a través del proyecto SEJ2005-07637-C02-02, y de la Xunta

de Galicia por medio del proyecto PGIDITO6PXIC207038PN.

Miguel Ángel Mirás Calvo agradece la financiación del Ministerio de Educación y Ciencia a través del proyecto SEJ2006-15401-C04-01.

Vigo, abril de 2008

Los autores

Índice general

Agradecimientos	7
Índice general	10
Símbolos y convenciones	11
Introducción	13
1. El modelo TU	23
1.1. Motivaciones y primeros ejemplos	24
1.2. Clasificación y definiciones básicas	27
1.3. Ejemplos clásicos	36
1.4. Reglas de reparto	41
1.5. La extensión multilineal	50
1.6. Un ejemplo de juego NTU	52
1.7. Relación entre juegos cooperativos y no cooperativos	54
2. Conceptos de solución tipo conjunto	67
2.1. El núcleo y conceptos relacionados	72
2.2. El D-núcleo	100
2.3. Conjuntos estables o soluciones de von Neumann-Morgenstern .	103
2.4. El core-cover	107
2.5. El conjunto de Weber	111
2.6. El conjunto de Harsanyi o selectope	118
2.7. El conjunto de regateo	124
2.8. El kernel y el prekernel	127

3. Conceptos de solución puntuales	131
3.1. Propiedades de una regla de reparto	133
3.2. El valor de Shapley	138
3.3. Valores de Shapley ponderados	149
3.4. El valor coalicional	151
3.5. El valor de Myerson	155
3.6. El nucleolo y el prenucleolo	158
3.7. El τ -valor	172
3.8. El core-center	176
4. Aplicaciones	183
4.1. Juegos simples. Índices de poder	184
4.2. Los juegos de bancarrota	197
4.3. Los juegos de mercado	204
4.4. El juego del aeropuerto	210
4.5. Juegos de secuenciación	213
5. El paquete TUGlab	221
5.1. Descripción de TUGlab	222
5.1.1. Las funciones principales de TUGlab	223
5.1.2. Representación gráfica con TUGlab	228
5.2. Ejemplos avanzados usando TUGlab	231
5.2.1. Convexidad	232
5.2.2. Los extremos del conjunto de Weber	233
5.2.3. Comparación de valores	234
5.2.4. Juegos paramétricos	237
5.2.5. El conjunto de Harsanyi	238
5.2.6. La extensión multilineal	239
5.2.7. Un experimento	240
5.3. Ejemplos y ejercicios con TUGlab	242
5.3.1. Juegos de 3 jugadores	243
5.3.2. Juegos de 4 jugadores	249
5.4. Problemas propuestos	255
Índice alfabético	265
Bibliografía	269

Símbolos y convenciones

En este libro hacemos uso de los símbolos usuales de la teoría de conjuntos. En general, los conjuntos (coaliciones) se denotarán con letras mayúsculas: S , T , N , etc. Presentamos, a continuación, una lista de los símbolos y notaciones de uso habitual en el libro:

$\mathbb{R}$	El conjunto de los números reales.
$\mathbb{R}_+$	La semirrecta real positiva, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
$\mathbb{R}_+^n$	El conjunto $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$.
$\mathbb{N}$	El conjunto de los números naturales.
2^N	El conjunto de partes del conjunto N .
$\emptyset$	El conjunto vacío.
$S \setminus T$	Los elementos de S que no pertenecen a T .
$ S $	El cardinal del conjunto S .
$\text{conv}(S)$	La envoltura convexa del conjunto S .
$\Pi(S)$	Las permutaciones de los elementos de S .
G^n	El conjunto de todos los juegos de n jugadores.
G_P^n	Juegos con sistema de coaliciones a priori P .
$I^*(N, v)$	El conjunto de preimputaciones del juego (N, v) .
$I(N, v)$	El conjunto de imputaciones del juego (N, v) .
$C(N, v)$	El núcleo del juego (N, v) .
$C_\varepsilon(N, v)$	El ε -núcleo del juego (N, v) .
$LC(N, v)$	El menor núcleo del juego (N, v) .
$DC(N, v)$	El D-núcleo del juego (N, v) .
$CC(N, v)$	El core-cover del juego (N, v) .
$H(N, v)$	El conjunto de Harsanyi del juego (N, v) .
$\mathcal{M}(N, v)$	El conjunto de regateo del juego (N, v) .
$\mathcal{K}^*(N, v)$	El prekernel del juego (N, v) .
$\mathcal{K}(N, v)$	El kernel del juego (N, v) .

$W(N, v)$	El conjunto de Weber del juego (N, v) .
$Sh(N, v)$	El valor de Shapley del juego (N, v) .
$\psi(N, v, P)$	El valor coalicional del juego $(N, v, P) \in G_P^n$.
$M(N, v, A)$	El valor de Myerson del juego (N, v, A) .
$\tau(N, v)$	El τ -valor del juego (N, v) .
$\mu(N, v)$	El core-center del juego (N, v) .
$PreNu(N, v)$	El prenucleolo del juego (N, v) .
$Nu(N, v)$	El nucleolo del juego (N, v) .

A lo largo de la monografía emplearemos el punto como separador decimal. Así, por ejemplo, $\frac{1}{2} = 0.5$.

En lo que se refiere a la bibliografía recogida en la parte final del libro, hagamos notar que cada referencia bibliográfica incluye entre corchetes la página, o páginas, en la que ha sido citada en el texto.

TUGlab es una aplicación basada en el programa MATLAB[®] creada por los autores de este libro. MATLAB[®] es una marca registrada de The MathWorks, Inc. y se usa con permiso. The MathWorks no garantiza ni la corrección del texto ni la de los ejercicios de este libro. El uso y finalidad que del programa MATLAB[®] u otros productos relacionados se hace en este libro no constituye ningún tipo de apoyo ni patrocinio por parte de The MathWorks a una forma particular de uso pedagógico del programa MATLAB[®].¹ Para más información acerca de MATLAB[®], por favor diríjase a:

The MathWorks, Inc.
 3 Apple Hill Drive
 Natick, MA, 01760-2098 USA
 Tel: 508-647-7000
 Fax: 508-647-7001
 E-mail: info@mathworks.com
 Web: www.mathworks.com

¹MATLAB[®] is a trademark of The MathWorks, Inc. and is used with permission. The MathWorks does not warrant the accuracy of the text or exercises in this book. This book's use or discussion of MATLAB[®] software or related products does not constitute endorsement or sponsorship by The MathWorks of a particular pedagogical approach or particular use of the MATLAB[®] software.

Introducción

El objetivo de este libro es instruir al lector en la teoría de los juegos cooperativos con utilidad transferible. Si ya ha estudiado un curso de teoría de juegos, es posible que conozca el modelo y algunas soluciones tales como el núcleo o el valor de Shapley. En cualquier caso, el libro es autocontenido y, aunque es ventajoso poseer conocimientos previos en la teoría de juegos, no tenerlos no supondrá ninguna merma para el lector.

La aportación más novedosa de la presente monografía es la de complementar el texto con el “software” TUGlab desarrollado por los autores. Los ejercicios, dibujos, diagramas y ejemplos incluidos para ser realizados con TUGlab están cuidadosamente seleccionados para mejorar la comprensión y el cálculo de las principales soluciones y para potenciar la intuición geométrica de los juegos de 3 y 4 jugadores. La combinación de la parte teórica con la práctica usando TUGlab convierte a esta monografía en un excelente instrumento para ser utilizado no sólo en cursos introductorios a la teoría de juegos cooperativos, tanto por profesores como por alumnos, sino también como posible manual de referencia en algunas áreas de investigación.

El libro está pues dirigido a profesores y alumnos universitarios de carreras en las que se imparta un curso de teoría de juegos (Economía, Matemáticas o las diversas Ingenierías), a alumnos de cursos de doctorado y másters con asignaturas de investigación operativa o teoría de juegos y a personal investigador en departamentos de I+D que tengan que resolver problemas de repartos de beneficios o costes entre diversos agentes en los que la cooperación sea determinante.

¿Qué es la teoría de juegos?

La teoría de juegos tiene como principal objetivo analizar situaciones en las que existe un conflicto entre diversos agentes. Estas situaciones incluyen

aquellos juegos que desde siempre se han designado como tales, entre ellos el ajedrez, el parchís, el póker, etc, pero, además, incorpora otras situaciones “menos entretenidas” en las que el conflicto es entre empresas, fuerzas militares, naciones,...

Tal y como se recoge en Davis (1986), podríamos definir a la teoría de juegos como una disciplina matemática que estudia situaciones de conflicto de intereses en las que intervienen dos o más jugadores. La finalidad de la teoría de juegos es investigar de qué modo los individuos racionales deberían comportarse cuando sus intereses se contraponen. La competencia entre líneas aéreas, las coaliciones formadas con ánimo de ejercer presiones políticas, la elección de emplazamientos industriales, las fusiones de empresas, son situaciones en las que sería posible aplicar esta teoría. La teoría de juegos también se utiliza, o se ha utilizado, para optimizar precios, para tomar decisiones en inversiones, para designar jurados o para distribuir los tanques en una batalla. A cada juego se le busca una solución, es decir, una descripción de lo que cada jugador debería hacer y de cuál sería, en consecuencia, el resultado de sus acciones. Hay una mezcla entre intereses enfrentados y objetivos comunes que hace que la teoría de juegos resulte fascinante.

Esta disciplina ganó reconocido prestigio desde la publicación, en 1944, de uno de los grandes libros clásicos en teoría de juegos titulado *The theory of games and economic behavior*,² obra del matemático John von Neumann y del economista Oskar Morgenstern. Sin embargo, los inicios se remontan al siglo XIX gracias, principalmente, a los trabajos de los economistas Cournot (1838), Bertrand (1883) y Edgeworth (1881). Tampoco sería justo olvidarse de los modelos matemáticos de juegos de estrategia que fueron tratados por los matemáticos Borel, Steinhaus y, principalmente en el caso especial del ajedrez, por Zermelo (1913). John von Neumann ya había introducido los fundamentos de la teoría (el teorema fundamental en juegos bipersonales de suma nula, bien conocido como teorema minimax) en un artículo publicado en 1928 (von Neumann (1928)). Sin embargo, no fue hasta que apareció el libro antes mencionado, cuando el mundo se percató del potencial de la teoría como instrumento para estudiar las relaciones humanas. A partir de este momento la teoría alcanzó su mayor apogeo.

En el año 1994 se reconoce la importancia de la teoría de juegos con la concesión del premio Nobel de Economía a tres reconocidos teóricos de juegos: John F. Nash, Reinhard Selten y John C. Harsanyi, por su pionero análisis

²Teoría de juegos y del comportamiento económico.

de los equilibrios en la teoría de juegos no cooperativos. El más conocido por el público en general es John Nash. Su vida, en particular su lucha con la esquizofrenia que padeció, inspiró la biografía *Una mente prodigiosa*, de Nasar (2001), y la película hagiográfica *Una mente maravillosa*, dirigida por Ron Howard, ambas de enorme éxito. Recientemente, la Real Academia Sueca de las Ciencias otorgó otros dos premios Nobel de Economía a teóricos de juegos. En el año 2005 al matemático Robert J. Aumann y al economista Thomas C. Schelling por sus contribuciones al fortalecimiento del conocimiento del conflicto y la cooperación a través del análisis de la teoría de juegos, y en 2007 a Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin y Roger B. Myerson por sentar las bases de la teoría del diseño de mecanismos.

La teoría de juegos analiza las situaciones desde dos perspectivas distintas: aquellas en las que los jugadores no disponen de mecanismos para tomar acuerdos vinculantes, también llamados juegos no cooperativos, y aquellas situaciones en las que los jugadores sí disponen de estos mecanismos, los conocidos como juegos cooperativos. El estudio de una situación conflictiva y su análisis mediante la teoría de juegos no cooperativos permite que cada agente obtenga las “mejores estrategias” adaptadas a cada situación. La posibilidad de la cooperación permite a los agentes coordinar sus estrategias para conseguir la mayor utilidad posible. El hecho de que los agentes cooperen depende de las habilidades y de las interrelaciones entre ellos. Es frecuente encontrar situaciones conflictivas en las que los agentes además de coordinarse para maximizar la utilidad total que pueden conseguir también forman grupos o coaliciones. En estas situaciones el sentido de la cooperación es más amplio. Estos juegos son conocidos como juegos cooperativos en forma característica o juegos coalicionales.

Dentro de los juegos cooperativos podemos encontrar situaciones en las que la utilidad que consiguen los agentes se puede transferir de cualquier modo entre ellos, y situaciones en las que la transferencia de utilidad está sujeta a las restricciones del problema. Siguiendo este criterio los juegos cooperativos se clasifican en juegos TU, o juegos con utilidad transferible, y juegos NTU, o juegos con utilidad no necesariamente transferible. Las abreviaturas proceden del inglés “Transferable Utility” y “Non Transferable Utility”, respectivamente. En esta monografía nos centraremos en los juegos TU.

En su famoso libro, von Neumann y Morgenstern (1944) investigan tanto el planteamiento estratégico o no cooperativo como el planteamiento cooperativo. En el no cooperativo, trabajan con juegos de dos jugadores y de suma nula, es decir, con intereses totalmente contrapuestos. El planteamiento cooperativo

del libro de von Neumann y Morgenstern se centra en clasificar los modelos de formación de coaliciones que son consistentes con conductas racionales considerando, ya en este caso, más de dos jugadores.

Dentro de los juegos no cooperativos, a principio de los años cincuenta, y sin restringirse a juegos de suma nula, John Nash introdujo el concepto de equilibrio que lleva su nombre (el equilibrio de Nash) que ya había sugerido Cournot en 1832. Con ello se rompe una de las barreras que tenían von Neumann y Morgenstern: el análisis de los juegos de suma no nula. Nash, años más tarde, también realizó aportaciones a los modelos cooperativos.

La gran necesidad de modelar situaciones que involucraban a uno o a más decisores en la Segunda Guerra Mundial potenció el desarrollo de técnicas que se estudiaron posteriormente en las décadas de los 50 y los 60. Por tanto, fue un período vital para la investigación de operaciones y, como consecuencia, para la teoría de juegos. La mayor parte de los problemas militares pueden ser modelados como juegos bipersonales de suma nula. Los juegos bipersonales con intereses diametralmente opuestos (juegos de suma nula) han sido plenamente desarrollados y tienen soluciones prácticamente aceptadas por todo el mundo. Los trabajos de Haywood (1954) y de Beresford y Peston (1955) describen algunas aplicaciones de la teoría de juegos a situaciones de conflicto en la Segunda Guerra Mundial. Inicialmente, muchas de las investigaciones en teoría de juegos fueron subvencionadas por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos. Centros de investigación como la Rand Corporation fomentaron el crecimiento de esta disciplina que se acaba encuadrando, definitivamente, dentro del área de la investigación operativa.

A partir de este momento se obtienen grandes logros en esta disciplina. Conceptos como el equilibrio de Nash, el desarrollo de los juegos en forma extensiva, la teoría axiomática de la negociación, el valor de Shapley, el núcleo y sus relaciones con el equilibrio competitivo, los conceptos de solución para juegos cooperativos, los juegos con información incompleta, etc. fueron desarrollados a partir de la década de los 50.

En 1952, Lloyd Shapley introdujo la noción de núcleo en un documento de la Rand Corporation y, al año siguiente, véase Shapley (1953b), caracterizó axiomáticamente el valor que lleva su nombre. Gillies (1953) desarrolla el concepto de núcleo en su tesis doctoral y Aumann (1961) lo extiende para juegos NTU.

Posteriormente, en 1975, Selten introdujo un refinamiento del equilibrio de Nash (el equilibrio perfecto) basado en la idea de que no todos los equilibrios son creíbles. Por ello selecciona aquellos equilibrios de Nash que lo siguen

siendo ante pequeñas tendencias al error por parte de los jugadores. Myerson en 1978 modela las tendencias al error que los jugadores racionales podrían cometer. En aquella época, las herramientas de la teoría de juegos estaban al alcance de cualquiera que quisiera utilizarlas. Fue entonces cuando los economistas comenzaron a usar dichas técnicas y las incorporaron como parte indispensable de su disciplina. Cabe citar la importancia que tiene la teoría de juegos, por ejemplo, en organización industrial o en microeconomía.

Las aplicaciones de la teoría de juegos a la economía son enormes. La herramienta proporcionada por la teoría de juegos ha ayudado a los economistas a entender y a expresar con claridad el monopolio, la competencia perfecta o la competencia imperfecta. Citar la existencia de aplicaciones en microeconomía (los modelos de intercambio); en la economía laboral y la economía financiera (modelos de comportamiento de las empresas en los mercados); en economía internacional (modelos que describen a los países que compiten en sus decisiones arancelarias); y en macroeconomía (análisis de la política monetaria del gobierno para la determinación de los salarios y los precios). Podemos encontrar en Tirole (1990) un gran abanico de aplicaciones de la teoría de juegos en el ámbito de la organización industrial. Véase también Kreps (1995). Littlechild y Thompson (1977) aplican soluciones cooperativas para distribuir los costes asociados a la construcción de una pista de aterrizaje que puede ser utilizada por distintos tipos de aviones.

El uso y aplicación de la teoría de juegos ha crecido y sigue creciendo enormemente. Los politólogos la utilizan para analizar las instituciones y los resultados electorales; los filósofos para estudiar las normas de conducta y los entes sociales; los biólogos para analizar las relaciones entre las diversas especies en la naturaleza. En palabras de Davis (1986), debemos tener siempre presente que, en general, cuanto más complejo es un juego, más aplicaciones suele tener en la vida real y, además, más difícil resulta su análisis. Una de las dificultades con el que nos podemos encontrar al analizar un problema complejo es la de discernir quiénes son los jugadores, las estrategias y, también, los pagos asociados a cada combinación de estrategias dada. Para la teoría de juegos es fundamental la teoría de la utilidad, que permite que las personas expresen sus preferencias en base a un esquema consistente, y que les conduce, en consecuencia, a tomar decisiones racionales. Una de las piedras angulares en las que se apoya la teoría de juegos es la suposición de que los jugadores son racionales y se comportan racionalmente. ¿Es esta suposición “razonable”? Lo mismo que ocurre en otras disciplinas, es importante que, a la hora de aplicar la teoría, seamos conscientes de los supuestos necesarios para que los

resultados que obtengamos gocen de validez.

A lo largo de la historia de cualquier materia, el estudio continuado de la misma proporciona avances notables en la teoría: se abren nuevas vías de conocimiento, se resuelven conjeturas formuladas años atrás y aparecen conexiones con otras ramas de la ciencia. Respecto a las soluciones de von Neumann-Morgenstern para juegos cooperativos, pasaron bastantes años hasta que Lucas en 1967 encontrara un juego de 10 jugadores que no tenía solución en el sentido sugerido por von Neumann y Morgenstern. Un libro clásico en el que se incluyen comentarios en esta línea es *Games and decisions*³ de Luce y Raiffa (1957). En los últimos treinta años, han aparecido muchos libros y artículos sobre teoría de juegos. En 1972, Oskar Morgenstern fundó *International Journal of Game Theory*, la primera revista de investigación dedicada exclusivamente a la teoría de juegos. Diecisiete años más tarde, se publica por primera vez *Games and Economic Behavior*.

El progreso de la teoría es, sin duda, evidente. Por ejemplo, la experimentación (“gaming”) está creciendo cada vez más. Se trata de comparar las actuaciones reales de la gente ante situaciones de conflicto de intereses y las predicciones de la teoría. Otra línea en desarrollo es la de tratar de explicar cómo la gente llega a los resultados que no están respaldados por las conocidas como “buenas” soluciones de la teoría de juegos clásica. Ésta es la idea de los “metagames” introducidos por Howard (1968). Continuamente están apareciendo nuevas aplicaciones; destacar el artículo de Maynard-Smith (1974) en el que se aplica la teoría de juegos a la evolución genética. Véase también Weibull (1996).

Otra línea de investigación actual, que tiene un futuro prometedor, es la de la computación. Como se podrá de manifiesto en este libro, el cálculo práctico de las soluciones da lugar a complejos problemas. Desarrollar algoritmos y establecer el nivel de dificultad computacional que entraña un juego dado será una prioridad en las nuevas publicaciones de investigación.

Para terminar, nos gustaría reseñar algunas obras consideradas claves para el buen conocimiento de la teoría de juegos. Una indispensable selección se encuentra en Kuhn (1997) bajo el título de *Clásicos de la teoría de juegos*. Otros libros que por su interés conviene destacar son los 3 volúmenes titulados *Handbook on game theory with economic applications*,⁴ Aumann y Hart (1992, 1994, 2002). No debemos olvidar a Myerson (1991) y Osborne (2002).

³Juegos y decisiones.

⁴Manual de teoría de juegos con aplicaciones económicas.

Un libro reciente que analiza las principales soluciones de juegos cooperativos que son tratadas en esta monografía, sus propiedades y axiomatizaciones, es Peleg y Sudhölter (2004). En Brânzei et al. (2005) se tratan modelos de juegos cooperativos en los que los jugadores pueden cooperar parcialmente, concretamente estudian juegos “crisp”, “fuzzy” y “multi-choice”. En Brams (2004) se muestra como la utilización de la teoría de juegos puede ayudar a explicar complejas situaciones entre partidos políticos. Diversos capítulos de la colección de artículos recogidos para celebrar el 65 cumpleaños de Stef Tijs en el libro Peters et al. (2002) se centran también en el estudio de juegos cooperativos.

¿Qué es TUGlab?

Siempre es un reto enfrentarse a la tarea de enseñar un curso de introducción de cualquier materia. Por una parte, el profesor intenta atraer la atención y el interés de la audiencia con ejemplos atractivos y sencillos pero, al mismo tiempo, procura poner los cimientos del edificio matemático que sustenta la teoría que, indefectiblemente, suelen ser técnicos y complejos. La teoría de los juegos cooperativos no es una excepción a esta regla. Si uno hojea cualquier libro dedicado a enseñar juegos TU al neófito, tales como la excelente monografía Rafels i Pallarola et al. (1999) o Curiel (1997), encontrará multitud de ejemplos, dibujos, diagramas, tablas y gráficos cuyo propósito es aclarar, enfatizar o consolidar los conceptos básicos de la teoría.

A lo largo de los últimos años, hemos venido haciendo uso de las ventajas que ofrecen las llamadas tecnologías de la información, incorporando el manejo de internet y de diversas aplicaciones informáticas como herramientas complementarias en nuestras actividades docentes con resultados brillantes. Esta experiencia nos ha animado a presentar nuestro trabajo bajo la forma de una “toolbox”⁵ del programa MATLAB[®] que denominamos TUGlab.⁶ MATLAB[®] es un programa de cálculo matemático que permite realizar complejas tareas computacionales y con una excelente capacidad de representación gráfica. TUGlab es un paquete o módulo que extiende las órdenes del MATLAB[®] básico para incluir los conceptos de la teoría de juegos TU.

Que nosotros conozcamos,⁷ existe otro paquete informático, véase Varian (1992), éste basado en el programa Mathematica, que permite realizar algunas

⁵Literalmente, cajón de herramientas.

⁶El nombre TUGlab se forma con las iniciales en inglés de “Transferable Utility Games laboratory”.

⁷Agradecemos a un revisor anónimo el darnos a conocer esta referencia.

operaciones y cálculos con juegos TU. Sin embargo, creemos que TUGlab es el primer paquete informático dedicado exclusivamente a la enseñanza de la teoría de juegos con utilidad transferible. Quisiéramos también mencionar el módulo de MATLAB® diseñado por Jean Derks orientado, principalmente, al cálculo del prenucleolo de un juego TU y, por tanto, más útil al investigador que al instructor. Este material puede descargarse de la página web personal del autor:

<http://www.derks.com>

Conocemos también el programa Gambit, una librería de aplicaciones y herramientas informáticas para la construcción y el análisis de juegos finitos en forma estratégica y en forma extensiva. Puede obtenerse toda la información referente a este programa en la dirección:

<http://econweb.tamu.edu/gambit>

Como se ha puesto de manifiesto en esta introducción, la teoría de juegos está fuertemente impulsada por sus aplicaciones prácticas. No obstante, muchos de los conceptos e ideas centrales de la teoría poseen una vertiente matemática interesante por sí misma. Estos aspectos, digamos más abstractos, se ven normalmente eclipsados por la vertiente aplicada. Creemos que un conocimiento, aunque superficial, de estas propiedades intrínsecamente matemáticas redundará en un entendimiento más profundo de los juegos TU y, por ende, de sus posibilidades como modelos de la realidad. Por ello, nos propusimos como objetivo primordial de TUGlab resaltar los aspectos geométricos de la teoría de juegos cooperativos. Así pues, TUGlab ofrece al profesor y al alumno una serie de instrumentos para calcular, ver y experimentar de primera mano con los conceptos básicos de la teoría de juegos TU. Y ésta es, en nuestra opinión, la ventaja de este paquete informático: su forma directa y flexible de ir al corazón de los conceptos sin preocuparse de la complejidad de los cálculos matemáticos.

TUGlab es fácil de usar y apenas requiere un conocimiento previo de MATLAB® para empezar a experimentar. No obstante, existen numerosos libros y manuales de introducción a MATLAB® de todos los niveles. Para principiantes recomendamos Besada Moráis et al. (2007). Un recuento bastante actual y exhaustivo está disponible en la página web de la empresa que desarrolla el programa:⁸

<http://www.mathworks.com>

En el CD que acompaña a este manual, además de los comandos que se

⁸MATLAB® es una marca registrada de The MathWorks, Inc.

definen en el paquete TUGlab, se incluye diverso material complementario: plantillas, simulaciones y ayudas con muchos ejemplos interesantes de juegos cooperativos y un completo manual del usuario.

A lo largo de los capítulos hemos incorporado, allí donde se define un nuevo concepto, la referencia del comando de TUGlab relacionado. Esperamos que esta estructura anime al lector a “jugar” con TUGlab desde el primer momento, a probar con otros juegos distintos de los que proponemos en el texto, a experimentar, a formular conjeturas o plantear preguntas que, posiblemente, anticipen resultados e ideas que se abordarán en capítulos posteriores. En todo caso, el último capítulo de esta monografía presenta una exposición pormenorizada del programa, de sus funciones, y una selección cuidada de ejemplos avanzados. Nos gustaría que este capítulo sirviera siquiera para dejar entrever el potencial de TUGlab como herramienta para el estudio de los juegos TU.

Estructura de los capítulos

Hemos estructurado la monografía en 5 capítulos. Los 4 primeros constituyen, propiamente, una introducción a la teoría de juegos cooperativos, o coalicionales, con utilidad transferible. En ellos, se definen los comandos principales de TUGlab siempre subordinados al concepto teórico que en cada momento se aborda. El Capítulo 5 está íntegramente dedicado a la descripción y al uso avanzado del paquete TUGlab. A continuación exponemos el contenido básico de cada uno de los capítulos.

En el Capítulo 1 introduciremos el modelo cooperativo TU y la forma característica de un juego junto con las definiciones básicas y varios ejemplos ilustrativos. Presentaremos algunas clases especiales de juegos y hablaremos de soluciones tipo conjunto y soluciones puntuales. Finalmente, estudiaremos la relación entre juegos no cooperativos y juegos cooperativos.

El objetivo del Capítulo 2 es estudiar los conceptos de solución tipo conjunto, entre ellos: el núcleo, el D-núcleo, los conjuntos estables y sus generalizaciones, el core-cover, el conjunto de Weber, el conjunto de Harsanyi, los conjuntos de regateo, el kernel y el prekernel. Buscaremos caracterizaciones de los juegos convexos en términos de estos conjuntos.

Las soluciones puntuales se abordan en el Capítulo 3. Destaca el valor de Shapley del que proporcionaremos caracterizaciones axiomáticas. Analizaremos varias generalizaciones del valor de Shapley, en el caso de situaciones asimétricas (los valores ponderados), de uniones a priori (el valor coalicional) y de situaciones con comunicación restringida (el valor de Myerson). Introdu-

ciremos también otras soluciones: el nucleolo, el τ -valor y el core-center.

El Capítulo 4 está íntegramente dedicado a estudiar aplicaciones de la teoría. Hablaremos de los juegos simples, los juegos de bancarrota, los juegos de mercado, un juego de asignación de costes (el juego del aeropuerto) y un juego que proviene de un problema de investigación operativa (un juego de secuenciación).

Por último, en el Capítulo 5 presentamos de forma pormenorizada el paquete informático TUGlab. Con su ayuda destacamos algunos aspectos geométricos de la teoría. Incluimos, al final del capítulo, una amplia selección de problemas y ejercicios que abarcan todas las nociones y conceptos desarrollados en el texto.

Para finalizar, quisiéramos mencionar que la estructura que seguimos en el libro ha sido ensayada con buenos resultados en varios cursos de teoría de juegos. TUGlab se ha mostrado como un instrumento sencillo de entender y fácil de aplicar. Es nuestro deseo que tanto el paquete informático como estas notas puedan ser útiles al lector, con esa intención las compartimos. Por supuesto, agradecemos de antemano los comentarios y sugerencias que deseen hacernos y, muy especialmente, cualquier información acerca de errores de funcionamiento de TUGlab. Las posibles erratas del presente libro son responsabilidad exclusiva de los autores. Aquellas de las que nos percatemos serán expuestas en la página web

[http://webs.uvigo.es/matematicas/campus_vigo/
profesores/mmiras/TUGlabWeb/TUGlab.html](http://webs.uvigo.es/matematicas/campus_vigo/profesores/mmiras/TUGlabWeb/TUGlab.html)

conjuntamente con posibles futuras versiones del programa.

Capítulo 1

El modelo TU

Conceptos clave: *El modelo TU. La forma característica. Clases especiales de juegos. El conjunto de imputaciones. Soluciones tipo conjunto y soluciones puntuales. Juegos NTU. Relaciones entre juegos no cooperativos y cooperativos*

John von Neumann y Oskar Morgenstern fueron los primeros en definir juegos en los que participan n jugadores con intereses comunes e introducir un concepto de solución para resolverlos en su conocido libro *The theory of games and economic behavior* (von Neumann y Morgenstern (1944)).

En este capítulo comenzaremos nuestro estudio con un primer análisis de los juegos en forma característica, llamados también juegos coalicionales. Después de exponer el modelo y definir la función característica, discutiremos cómo describir matemáticamente la utilidad que puede conseguir una coalición. Daremos las definiciones de juego superaditivo, subaditivo, aditivo, estratégicamente equivalente a otro juego, 0-normalizado, 0-1 normalizado, monótono, convexo y de suma nula. Incluiremos una selección de ejemplos sencillos a los que volveremos repetidamente en los capítulos sucesivos para ilustrar los conceptos y resultados que vayamos estudiando: el juego de dividir el dólar, el juego del guante, el juego de un parlamento y los juegos de costes. Mostraremos, también, un ejemplo de juego NTU basado en las técnicas PERT.

Con el fin de relacionar los juegos cooperativos con los no cooperativos, introduciremos las nociones básicas de juego matricial y equilibrio de Nash que ilustraremos con conocidos ejemplos (los juegos de pares o nones, la batalla

de los sexos y el dilema del prisionero). Veremos cómo se puede asociar a un juego no cooperativo uno coalicional y que propiedades se mantienen después de la transformación.

A la hora de proponer un reparto de los beneficios de la cooperación entre los jugadores, surgen de forma inmediata dos preguntas:

- ¿Qué coalición o coaliciones se van a formar?
- ¿Cómo se dividen las ganancias?

Centraremos nuestra atención en la segunda de ellas. En su pionero libro sobre la teoría de juegos, von Neumann y Morgenstern apuntaron ya que conocer cómo se dividen las ganancias puede condicionar la formación de coaliciones.

Atendiendo a los principios básicos de racionalidad individual y de racionalidad colectiva, definiremos el conjunto de imputaciones. Una imputación es una asignación en la que los jugadores reciben al menos lo que se pueden garantizar por sí mismos y se reparten lo que pueden conseguir entre todos. Si los juegos son superaditivos, el conjunto de imputaciones no es vacío y, salvo en el caso de juegos aditivos, contiene un continuo de asignaciones. Una vez justificada la necesidad de seleccionar asignaciones dentro del conjunto de imputaciones aplazaremos a los Capítulos 2 y 3 el estudio de los conceptos de solución.

1.1. Motivaciones y primeros ejemplos

En muchas facetas de la vida cotidiana nos percatamos de la necesidad de cooperar. No es difícil encontrar ejemplos de cooperación entre países (la Unión Europea), entre partidos políticos (gobiernos en coalición), entre propietarios (comunidades de vecinos), etc. La cooperación puede producir o bien un aumento de las ganancias y beneficios o bien una disminución de los costes, pero nunca está exenta de conflictos y dificultades. Cualquier acuerdo cooperativo plantea un problema crucial: cómo distribuir el beneficio de la cooperación entre los agentes participantes.

Para entender mejor las ideas centrales que nos ocuparán analizaremos, con cierta meticulosidad, un ejemplo ilustrativo de cooperación entre municipios extraído de Rafels i Pallarola et al. (1999). Con él queremos poner de manifiesto que encontrar un reparto que satisfaga las expectativas de todos los jugadores no es una tarea fácil, de ahí la importancia de las reglas de reparto avaladas por la teoría de juegos.

Ejemplo 1.1 (El juego de la depuradora)

Imaginemos que se nos plantea el problema de la construcción de una depuradora para abastecer a 3 municipios, denominados A, B y C, situados en este orden siguiendo el curso de un río. Los pueblos A y B están más cerca que el B y el C. Supongamos, además, que B demanda la mitad de agua que A y C. Según un estudio preliminar, los costes, en miles de euros, en que incurrirían los ayuntamientos si construyesen la depuradora por separado serían

$$c(A) = 5000, \quad c(B) = 3000, \quad c(C) = 5000.$$

En el mismo estudio se concluye que el coste de abastecer a los tres municipios es de 8000, el coste de la canalización de A a B es de 1000 y la canalización de B a C es de 1500. En definitiva, si los tres municipios colaboran para construir la depuradora y las correspondientes infraestructuras necesitarían invertir

$$c(A, B, C) = 8000 + 1000 + 1500 = 10500.$$

Obsérvese que $c(A, B, C) < c(A) + c(B) + c(C)$, es decir, cooperar es más económico que ir por separado. Supongamos ahora que disponemos de más información: el coste de construir la depuradora para A y B es de 5500, para B y C es también de 5500; el coste de canalización de A a B es de 500 y de B a C es de 1500. Además, construir la depuradora para abastecer a los municipios A y C no supone reducción de costes. Podemos resumir esta información mediante

$$c(A, B) = 6000, \quad c(A, C) = c(A) + c(C) = 10000, \quad c(B, C) = 7000.$$

A continuación planteamos algunos posibles repartos de los costes basados en la información disponible del problema. Un reparto es, simplemente, un vector $x = (x_A, x_B, x_C)$ en el que cada componente representa la cantidad asignada al correspondiente municipio.

1. **Igualitario:** $x_A = x_B = x_C = \frac{10500}{3} = 3500$. Fijémonos en que el coste asignado al pueblo B en este reparto supera al coste en que incurriría este municipio si construyese la depuradora en solitario, $x_B = 3500 > c(B) = 3000$. Naturalmente, el municipio B no estaría dispuesto a cooperar si se propone este reparto.

2. **Proporcional a las demandas de agua:** Teniendo en cuenta que B demanda la mitad de agua que cada uno de los otros municipios, el coste $c(A, B, C)$ debería repartirse en proporción $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{5}$ entre A , B y C , respectivamente. Tendríamos entonces

$$x_A = x_C = \frac{2}{5}c(A, B, C) = 4200$$

$$x_B = \frac{1}{5}c(A, B, C) = 2100$$

Fijémonos en que $x_A \leq c(A)$, $x_B \leq c(B)$ y $x_C \leq c(C)$. Sin embargo $x_A + x_B = 4200 + 2100 = 6300 > c(A, B)$, esto es, el reparto exige de los municipios A y B , conjuntamente, un esfuerzo económico superior que el que tendrían que realizar si cooperaran, prescindiendo de C , para construir la depuradora.

3. **Proporcional al uso del bien:** Dado que B demanda la mitad de agua que A y C , el coste de suministro, 8000, debería repartirse en proporción $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{5}$ entre los municipios. Como la canalización de A a B , con coste 1000, la usarán B y C y recordando de nuevo que B consume la mitad que C , este coste se repartiría en proporción $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ entre B y C . Finalmente, C que se beneficia en exclusiva de la canalización de B a C pagaría todo el coste. En consecuencia, el reparto propuesto sería

$$x_A = \frac{2}{5}8000 = 3200$$

$$x_B = \frac{1}{5}8000 + \frac{1}{3}1000 = 1933.33$$

$$x_C = \frac{2}{5}8000 + \frac{2}{3}1000 + 1500 = 5366.67$$

Ahora, $x_C > c(C)$ y C no tendría incentivos para cooperar.

4. **Proporcional a los costes individuales:** En nuestro caso los costes individuales son $c(A)$, $c(B)$ y $c(C)$, con lo que tendríamos el reparto

$$x_A = x_C = \frac{5}{13}c(A, B, C) = 4038.46$$

$$x_B = \frac{3}{13}c(A, B, C) = 2423.08$$

De nuevo, $x_A + x_B > c(A, B)$.

5. **Proporcional a los costes marginales:** Los costes marginales vienen dados por las diferencias

$$m_A = c(A, B, C) - c(B, C) = 3500$$

$$m_B = c(A, B, C) - c(A, C) = 500$$

$$m_C = c(A, B, C) - c(A, B) = 4500$$

Dado que $m_A + m_B + m_C = 8500 < c(A, B, C) = 10500$, el reparto proporcional a los costes marginales sería

$$x_A = \frac{3500}{8500} 10500 = 4323.53$$

$$x_B = \frac{500}{8500} 10500 = 617.65$$

$$x_C = \frac{4500}{8500} 10500 = 5558.82$$

En este reparto, $x_C > c(C)$.

El ejemplo anterior muestra que al analizar un juego cooperativo se pone de manifiesto el problema de distribuir el beneficio de la cooperación entre los jugadores. Los teóricos de juegos han propuesto diversas formas de reparto atendiendo a distintos criterios que iremos revisando a lo largo del libro.

1.2. Clasificación y definiciones básicas

La teoría de juegos proporciona instrumentos matemáticos que permiten un análisis profundo y sistemático de situaciones en las que existe un conflicto entre varios agentes. La técnica para el análisis de estas situaciones fue puesta a punto por el matemático John von Neumann y el economista Oskar Morgenstern en el libro, publicado en 1944, *The theory of games and economic behavior*. Desde entonces la teoría de juegos ha alcanzado un alto grado de sofisticación matemática y ha demostrado una gran versatilidad en la resolución de problemas aplicados.

Fundamentalmente, hay dos clases de juegos que plantean una concepción muy diferente y requieren una forma de análisis distinta. Si los jugadores pueden comunicarse entre ellos, negociar y llegar a acuerdos vinculantes, hablaremos de juegos cooperativos. En caso contrario, esto es, cuando los jugadores

no pueden llegar a acuerdos previos, tratamos con juegos no cooperativos.

$$\text{Juegos} \begin{cases} \text{No cooperativos} \\ \text{Cooperativos} \begin{cases} \text{TU} \\ \text{NTU} \end{cases} \end{cases}$$

Dentro de los juegos cooperativos, y atendiendo a si la utilidad puede ser o no transferida de cualquier forma entre los jugadores, dividiremos los juegos en juegos TU o juegos NTU. Si suponemos que lo que una coalición puede garantizarse se puede repartir de cualquier forma entre sus miembros, estaremos en el contexto de juegos TU. Sin embargo, si existen ciertas restricciones endógenas que condicionan los pagos, hablamos de juegos NTU.

Llamaremos juegos cooperativos con utilidad transferible, o juegos TU, a aquellos juegos cooperativos en los que la utilidad puede repartirse de cualquier modo entre los jugadores. Se supone que los jugadores negocian con un bien infinitamente divisible, o en caso de que no lo sea, hay un bien compensatorio que sí lo es (en inglés se habla de “side payments”). Del Ejemplo 1.1 se desprende que los elementos esenciales de un juego TU son:

1. N , el conjunto finito de jugadores.
2. 2^N , el conjunto de todos los subconjuntos de N cuyos elementos, en este contexto, se llaman coaliciones.
3. v , la función característica que asigna a cada coalición el valor de la cooperación.
4. La utilidad es transferible. Esto implica que los jugadores negocian con un bien infinitamente divisible.

Veamos cómo se modelan matemáticamente los juegos TU.

Definición 1.2 *Un juego cooperativo, o coalicional, con utilidad transferible, o juego TU, es un par (N, v) siendo $N = \{1, \dots, n\}$ un conjunto finito y v una función*

$$v: 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $v(\emptyset) = 0$. Los elementos de N se llaman jugadores, los subconjuntos de N coaliciones y v se denomina la función característica. El número de jugadores de la coalición $S \subset N$ se denotará por $|S|$.

Con el fin de no recargar la notación en ocasiones escribiremos, por ejemplo, $v(125)$ o $v(1, 2, 5)$ en lugar de $v(\{1, 2, 5\})$ para referirnos al valor asignado por la función característica v a la coalición $S = \{1, 2, 5\}$.

Denotaremos por G^n a la clase de todos los juegos de n jugadores. De forma natural, en el conjunto G^n podemos definir una operación interna, la suma de juegos, y una operación externa, el producto de un juego por un escalar. Sean $v_1, v_2 \in G^n$ dos juegos TU, $S \in 2^N$ una coalición arbitraria y $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar:

$$\begin{aligned} \text{Suma de juegos:} & \quad (v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S) \\ \text{Producto de un juego por un escalar:} & \quad (\lambda v_1)(S) = \lambda v_1(S). \end{aligned}$$

La clase de juegos G^n con la operación interna, suma, y la externa, producto por un escalar, tiene estructura de espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$. El juego $v_0(S) = 0$ para todo $S \in 2^N$ se llama el juego nulo y es el elemento neutro para la suma. Así, por ejemplo, el espacio G^2 puede identificarse con $\mathbb{R}^3$, G^3 con $\mathbb{R}^7$ y G^4 con $\mathbb{R}^{15}$.

TUGlab: En la “toolbox” TUGlab, la función característica debe ser introducida para juegos de 3 jugadores como un vector de 7 componentes, $A=[v(1) \ v(2) \ v(3) \ v(12) \ v(13) \ v(23) \ v(123)]$, o como un vector de 15 componentes $A=[v(1) \ v(2) \ v(3) \ v(4) \ v(12) \ v(13) \ v(14) \ v(23) \ v(24) \ v(34) \ v(123) \ v(124) \ v(134) \ v(234) \ v(1234)]$, para juegos de 4 jugadores. Así, el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica: $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = 3$, $v(13) = 2$, $v(23) = 5$ y $v(123) = 10$, se introduciría como:

```
>> A=[0 0 0 3 2 5 10]
```

El concepto de subjuego surge de modo natural si pensamos en que una coalición juega su propio juego, es decir, aquel que involucra a la coalición y a sus subcoaliciones propias.

Definición 1.3 Sea $(N, v) \in G^n$. Un subjuego de (N, v) es un par (R, v_R) donde $R \subset N$ y $v_R(S) = v(S)$ para cada $S \subset R$.

En otras palabras, el subjuego determinado por una coalición $S \subset N$ es el juego (N, v) restringido a los jugadores de S .

Especialmente interesantes son aquellos juegos en los que, o bien el beneficio de la unión de dos coaliciones disjuntas no es inferior a la suma de los beneficios individuales, o bien el coste que debe afrontar la unión de dos coaliciones disjuntas es menor o igual que la suma de los costes individuales.

Definición 1.4 Sea (N, v) un juego TU.

- Diremos que (N, v) es superaditivo si

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \text{ para todo } S, T \in 2^N, S \cap T = \emptyset.$$

- Diremos que (N, v) es subaditivo si

$$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T), \text{ para todo } S, T \in 2^N, S \cap T = \emptyset.$$

- El juego (N, v) es aditivo si

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T), \text{ para todo } S, T \in 2^N, S \cap T = \emptyset.$$

Naturalmente, un juego (N, v) es subaditivo si, y sólo si, el juego $(N, -v)$ es superaditivo. El juego de costes del Ejemplo 1.1 es subaditivo.

Observación 1.5 Sea (N, v) un juego superaditivo. Entonces, para toda coalición $S \subset N$,

$$v(N) \geq v(S) + v(N \setminus S).$$

Además, aplicando repetidamente la condición de superaditividad, se puede demostrar que, para cada $S \subset N$,

$$v(S) \geq \sum_{i \in S} v(i).$$

Concluimos de esta última observación que si un juego es superaditivo los jugadores tienen incentivos para formar la gran coalición, esto es, la coalición N de todos los jugadores.

TUGlab: Las órdenes de TUGlab que permiten comprobar si un juego es superaditivo o aditivo son, respectivamente, SUPERADDITIVEGAME y ADDITIVEGAME. En ambos casos tanto la sintaxis como la información que devuelven las órdenes es idéntica. Así, si tecleamos en la ventana de comandos de MATLAB®

```
>> A=[1 2 3 2 4 5 6];
>> [super,info]=superadditivegame(A)
```

estamos, por una parte, guardando en el vector A la función característica del juego y , por otra, preguntando si este juego es superaditivo. El programa nos devolverá dos tipos de información que guardamos en dos variables cuyos nombres podemos elegir a nuestro antojo, en el ejemplo `super` e `info`. La primera variable puede valer 0, si el juego no es superaditivo, o 1, si lo es. Cuando el juego no es superaditivo, la segunda variable proporciona un caso en el que se viola la superaditividad, mientras que si el juego es superaditivo devuelve una matriz vacía. Para nuestro juego, la respuesta de TUGlab es

```
super = 0
info = (v12-v2)<v1
```

de modo que el juego de 3 jugadores determinado por el vector A no es superaditivo ya que $v(12) - v(2) < v(1)$.

Definición 1.6 *Un juego (N, v) es estratégicamente equivalente a otro juego (N, w) si existen $k > 0$ y un juego aditivo (N, a) tales que*

$$w(S) = kv(S) + \sum_{i \in S} a_i, \quad \text{para todo } S \in 2^N.$$

Fácilmente se observa que ser estratégicamente equivalente es una relación de equivalencia en G^n y, por tanto, genera una partición del conjunto de juegos en clases de equivalencia. Como veremos más adelante, ser estratégicamente equivalente va a preservar importantes conceptos de solución. Intuitivamente, podríamos decir que si dos juegos son estratégicamente equivalentes, deberían ser jugados del mismo modo. La constante k es el factor de cambio de escala. Multiplicar todos los pagos por una cantidad positiva es cambiar las escalas de utilidad para todos los jugadores. El juego aditivo $a(S) = \sum_{i \in S} a_i$ supone la agregación de los recursos de los jugadores. Si $a_i > 0$ se puede interpretar como que el jugador i recibe un bono antes de que comience el juego mientras que si $a_i < 0$, el jugador i paga un impuesto.

Definición 1.7 *Diremos que el juego coalicional (N, v) es 0-normalizado si $v(i) = 0$ para todo $i \in N$. El juego (N, v) es 0-1 normalizado si $v(i) = 0$ para todo $i \in N$ y $v(N) = 1$.*

Dado un juego (N, v) se puede obtener su 0-normalización, (N, w) , sin más que definir para cada coalición $S \subset N$, $w(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(i)$.

Ejemplo 1.8 *Los siguientes juegos de 2 jugadores, (N, v) y $(N, \bar{v})$, dan lugar al mismo juego 0-normalizado (N, w) .*

$$\begin{array}{lll} v(1) = 10 & v(2) = 100 & v(1, 2) = 120 \\ \bar{v}(1) = 55 & \bar{v}(2) = 55 & \bar{v}(1, 2) = 120 \\ w(1) = 0 & w(2) = 0 & w(1, 2) = 10 \end{array}$$

Más adelante, véanse la Proposición 1.26 y la Observación 1.27, analizaremos el problema de la existencia de la 0-1 normalización de un juego.

TUGlab: La orden de TUGlab que permite calcular la 0-normalización y la 0-1 normalización de un juego es NORMALIZEDGAME. Obsérvese cómo funciona en el siguiente ejemplo:

```
>> A=[2 1 0 9 2 1 6];
>> [normalizado0, normalizado01]=normalizedgame(A)
normalizado0 =
    0    0    0    6    0    0    3
normalizado01 =
    0    0    0    2    0    0    1
```

Dado un juego TU podemos asociarle el juego, que denominaremos dual, que a cada coalición le hace corresponder lo que queda del valor de la gran coalición si satisfacemos a la coalición complementaria.

Definición 1.9 *El juego dual (N, w) del juego (N, v) viene dado por $w(S) = v(N) - v(N \setminus S)$, para cada coalición $S \subset N$.*

Los Ejercicios 13 y 41 del Capítulo 5 describen algunas relaciones de interés existentes entre un juego y su dual.

TUGlab: El comando que calcula el dual de un juego dado es DUALGAME. Su sencilla utilización se resume en el siguiente ejemplo:

```
>> A=[0 0 0 2 4 4 23];
>> dual=dualgame(A)
dual =
    19    19    21    23    23    23    23
```

Un juego es monótono siempre que el agregar jugadores a una coalición dada no implique una disminución de la utilidad.

Definición 1.10 Diremos que el juego (N, v) es monótono si $v(S) \leq v(T)$ para todas las coaliciones $S, T \in 2^N$ tales que $S \subset T$.

Trivialmente se comprueba que si un juego (N, v) es monótono entonces $v(S) \geq 0$ para toda $S \in 2^N$, y $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq 0$ para todo $i \in N$ y $S \subset N \setminus \{i\}$.

Definición 1.11 Diremos que el juego (N, v) es 0-monótono si el juego 0-normalizado (N, w) asociado a él es monótono o, equivalentemente, si

$$v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(i) \leq v(T), \text{ para todo } S \subset T.$$

Animamos al lector a que encuentre un ejemplo de un juego monótono que no sea 0-monótono y otro de un juego 0-monótono que no sea monótono.

TUGlab: La orden de TUGlab que sirve para comprobar si un juego es monótono es MONOTONICGAME. Si el juego introducido es monótono la función devolverá el valor 1, en caso contrario, devolverá el valor 0.

```
>> A=[4 0 0 3 3 1 12];
[monotono,info]=monotonicgame(A)
monotono = 0
info = v{1}>v{12}
```

Como se aprecia en el ejemplo, el comando MONOTONICGAME también proporciona un caso en el que no se cumplen las condiciones de monotonía.

La orden que permite saber si un juego es 0-monótono se denomina ZEROMONOTONICGAME. Si el juego introducido es 0-monótono la función devolverá el valor 1, en caso contrario, devolverá el valor 0.

```
>> A=[1 0 0 1 1 1 1];
>> M=zeromonotonicgame(A)
M = 0
```

Definimos a continuación una de las clases más importantes de juegos, los denominados juegos convexos.

Definición 1.12 *Un juego (N, v) es convexo si*

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$$

para todo par de coaliciones $S, T \in 2^N$.

Cuando una función de conjuntos con valores reales, como la función característica v , verifica la condición de la Definición 1.12 se dice que es supermodular. Esta propiedad puede relacionarse con la convexidad de cierta “función de producción” asociada que resulta ser convexa en el sentido clásico de las funciones reales de variable real. En el contexto de la teoría de juegos se prefiere el término convexidad al de supermodularidad. Remitimos al lector interesado en los pormenores a Driessen (1988). Por otra parte, Shapley (1971) justifica el término “convexo” aplicado a un juego estableciendo la siguiente analogía. Para cada coalición $R \in 2^N$ definimos el operador de diferencias $\Delta_R: G^n \rightarrow G^n$, que a cada juego (N, v) le hace corresponder el juego $(N, \Delta_R v)$, con $\Delta_R v(S) = v(S \cup R) - v(S \setminus R)$, $S \in 2^N$. Denotamos las “diferencias de segundo orden” $\Delta_R(\Delta_T)$ por Δ_{RT} . Es un buen ejercicio comprobar que la Definición 1.12 es equivalente a afirmar que todas las diferencias de segundo orden son siempre no-negativas, esto es, $\Delta_{RT}v(S) \geq 0$ para todo $R, T, S \in 2^N$. La analogía se establece de forma natural con la condición de no-negatividad de la derivada segunda asociada a las funciones reales de variable real convexas.

Fácilmente se observa que si un juego es convexo entonces es superaditivo. La condición de convexidad de la Definición 1.12 puede formularse de otro modo quizás más intuitivo. Dada una coalición S y un jugador i que no pertenezca a dicha coalición, el incremento $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ mide la contribución de i a S . El siguiente resultado establece que un juego es convexo si la contribución de un jugador a una coalición no decrece cuantos más jugadores tenga dicha coalición (efecto bola de nieve).

Proposición 1.13 *Un juego (N, v) es convexo si, y sólo si,*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

para todo par de coaliciones $S, T \in 2^N$ tales que $T \subset S \subset N \setminus \{i\}$.

Demostración: Supongamos que el juego (N, v) es convexo y, por tanto, $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ para todo $S, T \in 2^N$. Consideremos $T \subset S \subset N \setminus \{i\}$, $A = T \cup \{i\}$ y $B = S$. Entonces, $A \cup B = S \cup \{i\}$ y $A \cap B = T$. Aplicando la definición de convexidad a las coaliciones A y B obtenemos la condición $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(T \cup \{i\}) - v(T)$.

Para probar el recíproco, consideremos $|S \setminus T| \geq 1$ (el caso $S \subset T$ es trivial). Entonces, $S \setminus T = \{i_1, \dots, i_k\}$, siendo $k \geq 1$.

Si $k = 1$, tomemos $A_1 = S \cap T$ y $B_1 = T$. Claramente observamos que $A_1 \subset B_1 \subset N \setminus \{i_1\}$. Por hipótesis,

$$v(A_1 \cup \{i_1\}) - v(A_1) \leq v(B_1 \cup \{i_1\}) - v(B_1), \quad (1.1)$$

y dado que $v(S) = v(A_1 \cup \{i_1\})$, $v(S \cap T) = v(A_1)$, $v(S \cup T) = v(B_1 \cup \{i_1\})$ y $v(T) = v(B_1)$, se tiene directamente que

$$v(S) - v(S \cap T) \leq v(S \cup T) - v(T).$$

Si $k = 2$, definimos $A_2 = A_1 \cup \{i_1\}$ y $B_2 = B_1 \cup \{i_1\}$. De forma análoga al caso anterior obtendríamos $v(S) - v(A_2) \leq v(T) - v(B_2)$, o equivalentemente $v(S) - v(T) \leq v(A_2) - v(B_2)$. Aplicando la desigualdad (1.1) se llega a la relación buscada. Un proceso reiterativo hasta terminar el número finito de jugadores completa la demostración. ■

Definición 1.14 *Un juego (N, v) es estrictamente convexo si*

$$v(S) + v(T) < v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

para todo $S, T \in 2^N$, o, equivalentemente,

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) > v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

para todo par de coaliciones $S, T \in 2^N$ tales que $T \subset S \subset N \setminus \{i\}$.

Naturalmente, un juego (N, v) es cóncavo, o estrictamente cóncavo, si el juego $(N, -v)$ es convexo, o estrictamente convexo, respectivamente.

TUGlab: La orden CONVEXGAME permite conocer si un juego es, o no, convexo: devolverá el valor 1 si el juego introducido es convexo y 0 si no lo es. Así, la siguiente sucesión de comandos

```
>> A=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,6,5,5,5,10];
>> [convexo,info]=convexgame(A)
convexo = 0
info = v{1234}-v{234}<v{123}-v{23}
```

nos lleva a concluir que el juego determinado por el vector A no es convexo, ya que se verifica la desigualdad dada en info.

Finalizamos esta breve introducción de las clases de juegos más relevantes con los denominados juegos de suma nula, que son aquellos en los que una coalición y su complementaria (la formada por los jugadores que no pertenecen a la coalición) tienen utilidades opuestas: lo que una coalición gana lo pierde su complementaria, y viceversa.

Definición 1.15 *El juego (N, v) es de suma nula si $v(S) + v(N \setminus S) = 0$ para todo $S \in 2^N$.*

1.3. Ejemplos clásicos

Presentamos en esta sección una selección de ejemplos de juegos coalicionales que se han hecho imprescindibles como juegos de referencia en la literatura. A nosotros nos servirán para ilustrar distintas formas de utilizar el marco de los juegos TU como modelo matemático donde plantear y resolver problemas reales.

Ejemplo 1.16 (El juego del dólar) *von Neumann y Morgenstern (1944).*
Tres amigos se plantean el problema de repartirse un dólar.¹ Pero sólo

¹Mantenemos la cantidad unitaria clásica aunque somos conscientes de que, hoy en día, pocos amigos se plantearían en serio repartir un único dólar, o un euro. Substituya el lector, pues, el dólar por un millón, o la cantidad que considere adecuada y tentadora.

podrán conseguirlo los grupos de dos o los tres conjuntamente, en ningún caso individualmente. Podemos plantear esta situación como un juego cooperativo TU con 3 jugadores (los amigos) y la función característica que no asigna ganancia alguna a las coaliciones individuales mientras que a las coaliciones de 2 jugadores y a la gran coalición de los 3 jugadores les asigna una ganancia de 1 dólar.

- Conjunto de jugadores: $N = \{1, 2, 3\}$
- Función característica:

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) &= v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.17 (“The cattle drive”) Shapley (1987).²

Un ganadero A tiene ganado para vender en el mercado a un precio de 1000 dólares. Para acceder al mercado debe cruzar por los terrenos de al menos uno de sus dos vecinos, también ganaderos, B y C, que pueden negarse a permitirle el paso. Esto es, A necesita la colaboración de al menos uno de sus vecinos para vender su ganado y obtener el beneficio esperado ¿Cómo podemos modelar esta situación mediante un juego cooperativo? De nuevo, tenemos 3 jugadores y una función característica que mide la ganancia por la cooperación.

- Conjunto de jugadores: $N = \{A, B, C\}$
- Función característica:

$$\begin{aligned} v(A) &= v(B) = v(C) = 0 \\ v(A, B) &= v(A, C) = v(A, B, C) = 1000 \\ v(B, C) &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.18 (El juego de los guantes)

Supongamos que tenemos $n = |N|$ jugadores de los cuales $\ell = |L|$ tienen un guante izquierdo y $r = |R|$ tienen un guante derecho. Si por cada pareja de guantes (derecho e izquierdo) obtenemos una unidad de utilidad, ¿qué juego que modele esta situación podemos formalizar? Dejamos al lector la tarea de comprobar que la respuesta es la recogida a continuación.

²El paso del ganado

- *Conjunto de jugadores:* $N = L \cup R$
- *Función característica:*

$$v(S) = \min\{|L \cap S|, |R \cap S|\}, \text{ para todo } S \in 2^N.$$

Como caso particular consideremos que el jugador 1 tiene un guante izquierdo y los jugadores 2 y 3 tienen, cada uno, un guante derecho. En este caso, el juego de los guantes es análogo al juego “the cattle drive”, descrito en el Ejemplo 1.17. En efecto, si escribimos $L = \{1\}$ y $R = \{2, 3\}$ entonces

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) &= v(1, 3) = v(1, 2, 3) = 1 \\ v(2, 3) &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.19 (El juego de un parlamento)

Imaginemos un parlamento con 130 escaños en el que las decisiones se toman por mayoría absoluta, esto es, por 66 votos o más. Supongamos que los escaños se han repartido entre los distintos partidos de la siguiente forma:

Partido	Escaños
A	48
B	32
C	20
D	16
E	14

¿Cómo se puede modelar un juego que nos revele si una coalición determinada tiene poder de decisión? Podemos describir el juego del parlamento del siguiente modo:

- *Conjunto de jugadores:* $N = \{A, B, C, D, E\}$.
- *Función característica:*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \in \mathcal{W} \\ 0 & \text{si } S \notin \mathcal{W} \end{cases}$$

siendo $\mathcal{W}$ el conjunto de las coaliciones ganadoras, entendiendo por ganadora cualquier coalición que supere los 65 escaños.

Volveremos a ocuparnos de este tipo de juegos en la Sección 4.1.

Ejemplo 1.20 (Los juegos de costes)

Los juegos de costes aparecen frecuentemente en situaciones reales. Por ejemplo en problemas en los que existen redes de comunicación entre diversos agentes: conexiones a redes eléctricas, depósitos de agua, aeropuertos con distintos tipos de aviones,... En un juego de costes (N, c) , N es el conjunto de agentes entre los cuales deben ser divididos los costes y $c: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina la función de costes. Para cada coalición $S \in 2^N$, $c(S)$ representa el mínimo coste en que incurren los miembros de la coalición S .

El Ejemplo 1.1 es un caso sencillo de un juego de costes. Estudiemos otro. Tres empresas de un polígono industrial quieren conectarse mediante una línea de alta tensión a la central eléctrica más cercana. En la Figura 1.1 se reflejan los costes asociados a las líneas que conectarían las empresas entre sí y con la central.

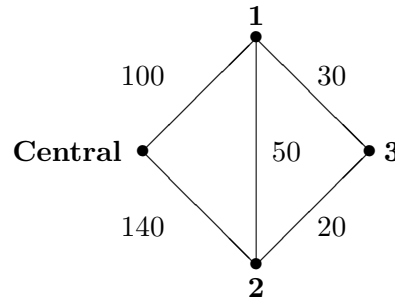


Figura 1.1: Esquema de la conexión entre las empresas y la central eléctrica

Así pues, el juego de costes vendría dado por:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$c(S)$	100	140	130	150	130	150	150

Asociado a un juego de costes (N, c) podemos definir el juego (N, v_c) que modela los ahorros de cada coalición si sus miembros deciden cooperar en lugar de actuar por su cuenta. Matemáticamente,

$$v_c(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S), \text{ para todo } S \in 2^N.$$

Para nuestro problema de las empresas el juego de ahorros sería:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$
$v_c(S)$	0	0	0	90	100	120	220

Naturalmente, el juego de ahorros siempre está 0-normalizado.

Ejemplo 1.21 (Los problemas de bancarrota)

Los problemas de bancarrota aparecen ya en el Talmud.³ Analicemos el siguiente ejemplo recogido en el citado documento: Un hombre tiene 3 esposas. En los contratos de sus matrimonios figura que si muere, sus mujeres deberían recibir 100, 200 y 300 unidades monetarias, respectivamente. En el momento de su defunción su hacienda asciende a 100. ¿Cómo se divide el dinero entre sus esposas? El Talmud recomienda los siguientes repartos dependiendo del montante total:

- Si la hacienda es de 100, recomienda división igualitaria: $(33 + \frac{1}{3}, 33 + \frac{1}{3}, 33 + \frac{1}{3})$
- Si la hacienda es de 300, recomienda división proporcional: (50, 100, 150)
- Si la hacienda es de 200, recomienda la siguiente división (aparentemente misteriosa): (50, 75, 75)

De alguna forma el Talmud anticipó la teoría moderna de juegos cooperativos dado que, como veremos más adelante en la Sección 4.2, estas soluciones se corresponden con un conocido reparto en teoría de juegos: el nucleolo del juego asociado al problema de bancarrota.

Ejemplo 1.22 (Los juegos de asignación) Shapley y Shubik (1971).

Supongamos un mercado con m propietarios o vendedores, cada uno con un bien o casa, y n posibles compradores, interesados en un único bien o casa. El vendedor i valora su casa en c_i unidades monetarias, $i = 1, \dots, m$, mientras que el comprador j valora la casa del vendedor i en h_{ij} unidades monetarias, $j = 1, \dots, n$. Si, finalmente, el vendedor i vende su casa al comprador j al precio p_i se produce una ganancia o beneficio dada por:

- $p_i - c_i$ para el vendedor i .
- $h_{ij} - p_i$ para el comprador j .

³Documento de, aproximadamente, 2000 años de antigüedad que es el libro sagrado de la religión judía.

Observamos que conjuntamente entre el vendedor i y el comprador j se produce un beneficio de $p_i - c_i + h_{ij} - p_i = h_{ij} - c_i$ unidades, que puede ser positivo, negativo o nulo. ¿De qué forma se puede modelar mediante un juego cooperativo esta situación? Aplazaremos la respuesta a esta pregunta al Ejemplo 4.44 de la Sección 4.3 cuando estudiemos los juegos de mercado.

1.4. Reglas de reparto

Como hemos visto en el ejemplo de la depuradora al comienzo del capítulo, al analizar un juego cooperativo surgen, de forma natural, varias preguntas:

¿Qué coalición o coaliciones se van a formar?

¿Cómo se dividen las ganancias entre los jugadores?

Por el propio planteamiento cooperativo inherente a las situaciones modeladas mediante juegos TU, el objetivo implícito de estos juegos es que se forme la gran coalición N y que los jugadores se repartan entre ellos el beneficio de la cooperación. Nos interesa, pues, el problema de distribuir esa ganancia, el valor $v(N)$ del juego, entre los n jugadores, es decir, cómo repartir $v(N)$ entre ellos. Un reparto es simplemente un vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, donde cada componente x_i representa la cantidad asignada al jugador i . Dado un reparto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la suma de las cantidades asignadas a los miembros de una coalición $S \subset N$ se denotará por $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

Nuestro primer objetivo es seleccionar de entre todos los posibles repartos aquellos que satisfacen unos criterios mínimos que se conocen como:

- **Racionalidad individual.** Un reparto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de racionalidad individual si cada jugador recibe un pago que no es inferior a lo que puede garantizarse por sí mismo, o sea, $x_i \geq v(i)$ para todo $i \in N$.
- **Eficiencia.** Un reparto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ será eficiente si distribuye el valor de la gran coalición $v(N)$ entre los jugadores, esto es, si $x(N) = x_1 + \dots + x_n = v(N)$.

Los repartos eficientes que son individualmente racionales se denominan imputaciones.

Definición 1.23 Sea (N, v) un juego TU.

- Se define el conjunto de preimputaciones del juego (N, v) como el conjunto de todos los repartos eficientes.

$$I^*(N, v) = \{x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}.$$

- El conjunto de imputaciones de un juego (N, v) está formado por los repartos eficientes que verifiquen además la propiedad de racionalidad individual.⁴

$$I(N, v) = \{x = (x_i)_{i \in N} \in I^*(N, v) : x_i \geq v(\{i\}), \text{ para todo } i \in N\}.$$

Claramente, el conjunto de imputaciones $I(N, v)$ puede ser vacío. Así ocurre, por ejemplo, en el juego de 3 jugadores con función característica: $v(1) = 1$, $v(2) = 2$, $v(3) = 3$, $v(12) = v(13) = v(23) = 0$ y $v(123) = 5$.

Definición 1.24 Un juego (N, v) es esencial si $v(N) \geq \sum_{i=1}^n v(i)$ y es degenerado si $v(N) = \sum_{i=1}^n v(i)$.

Precisamente, los juegos esenciales son aquellos para los que el conjunto de imputaciones no es vacío.

Proposición 1.25 Sea (N, v) un juego coalicional. Se tiene que:

- El conjunto de imputaciones no es vacío, $I(N, v) \neq \emptyset$, si, y sólo si, el juego (N, v) es esencial.
- Si (N, v) es un juego esencial, entonces $I(N, v)$ es la envoltura convexa de $f^1, \dots, f^n$ siendo, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$f_k^i = \begin{cases} v(\{k\}) & \text{si } k \neq i \\ v(N) - \sum_{k \in N \setminus \{i\}} v(k) & \text{si } k = i \end{cases}$$

⁴En el caso de un juego de costes (N, c) definimos

$$I^r(N, c) = \{x = (x_i)_{i \in N} : \sum_{i \in N} x_i = c(N), x_i \leq c(\{i\}), \text{ para todo } i \in N\}.$$

Se cumple que, $x \in I^r(N, c) \Leftrightarrow -x \in I(N, -c)$.

Demostración: El apartado a) es inmediato. De la Definición 1.23 se desprende que si el conjunto de imputaciones no es vacío entonces es un conjunto compacto y convexo. El teorema de Krein-Milman, véase Krein y Milman (1940), establece que todo subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo y compacto se puede expresar como la envoltura convexa de sus puntos extremos. Queda como ejercicio para el lector comprobar que los puntos extremos del conjunto de imputaciones vienen dados por los vectores $f^1, \dots, f^n$ definidos en el enunciado de la propiedad b). ■

Naturalmente hay muchas relaciones entre las diferentes clases de juegos que llevamos definidas y que pasamos a resumir.

Proposición 1.26 *Sea (N, v) un juego coalicional. Se verifica que:*

- a) *Si (N, v) es aditivo entonces el conjunto de imputaciones se reduce a un único punto, $I(N, v) = \{(v(1), \dots, v(n))\}$.*
- b) *Si (N, v) es un juego superaditivo entonces $I(N, v) \neq \emptyset$. Es decir, todo juego superaditivo es esencial.*
- c) *Sea (N, v) un juego superaditivo. Entonces (N, v) es degenerado si, y sólo si, (N, v) es aditivo.*
- d) *Sea (N, v) un juego superaditivo. Si (N, v) es esencial no degenerado entonces existe un único juego 0-1 normalizado, (N, w) , tal que v y w son estratégicamente equivalentes. Además, (N, w) es superaditivo y, por tanto, $0 \leq w(S) \leq 1$, para toda $S \in 2^N$.*
- e) *Sea (N, v) un juego superaditivo. Si (N, v) es degenerado entonces es estratégicamente equivalente al juego idénticamente nulo.*

Demostración: Los apartados a) y b) son inmediatos. En cuanto al apartado c), es claro que si el juego (N, v) es aditivo entonces es degenerado. Compruébese que si (N, v) es superaditivo y degenerado entonces tiene que ser aditivo. Aplicando la propiedad descrita en la Observación 1.5, consecuencia de la superaditividad, y teniendo en cuenta el carácter degenerado del juego, se obtiene la siguiente cadena de desigualdades, válida para cualesquiera dos coaliciones

disjuntas $S, T \in 2^N$, $S \cap T = \emptyset$,

$$\begin{aligned} v(N) &\geq v(S \cup T) + v(N \setminus (S \cup T)) \\ &\geq v(S) + v(T) + v(N \setminus (S \cup T)) \\ &\geq \sum_{i \in N} v(i) \\ &= v(N). \end{aligned}$$

Por lo tanto, las desigualdades son en realidad igualdades y se obtiene la condición de aditividad.

Para demostrar d), observemos que cualquier juego (N, w) 0-1 normalizado y estratégicamente equivalente a (N, v) debe verificar las ecuaciones:

$$\begin{aligned} w(i) &= kv(i) + a_i = 0, \quad i \in N \\ w(N) &= kv(N) + \sum_{i \in N} a_i = 1. \end{aligned}$$

para algún $k > 0$ y $a = (a_1, \dots, a_n)$. Tenemos pues un sistema lineal de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas, a saber,

$$\begin{pmatrix} v(1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ v(2) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v(n) & 0 & 0 & \dots & 1 \\ v(N) & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Si el juego (N, v) es esencial no degenerado, el sistema (1.2) es compatible determinado y la solución es,⁵

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)} > 0 \\ a_i &= -\frac{v(i)}{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

⁵Si $v(N) = \sum_{i \in N} v(i)$ entonces la última fila de la matriz de coeficientes sería una combinación lineal de las demás, de hecho, la suma de las otras.

La unicidad de la solución garantiza la unicidad de la 0-1 normalización. Además, para $S \in 2^N$, se tiene que

$$w(S) = \frac{1}{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)} \left(v(S) - \sum_{i \in S} v(i) \right).$$

Por tanto, (N, w) es la suma, multiplicada por una constante, del juego superaditivo (N, v) y un juego aditivo, con lo que el juego (N, w) también es superaditivo. Ahora se deduce inmediatamente que $0 \leq w(S) \leq 1$ para toda $S \in 2^N$.

Finalmente, probaremos la afirmación del apartado e). Cualquier juego 0-normalizado (N, w) estratégicamente equivalente al juego degenerado (N, v) debe verificar

$$\begin{aligned} w(i) &= kv(i) + a_i = 0, \quad i \in N \\ w(N) &= kv(N) + \sum_{i \in N} a_i \end{aligned}$$

para algún $k > 0$ y $a = (a_1, \dots, a_n)$. Sumando las primeras n ecuaciones y dado que $\sum_{i \in N} v(i) = v(N)$ obtenemos $\sum_{i \in N} w(i) = w(N)$, es decir, (N, w) también es un juego degenerado. Para cualquier elección arbitraria de $k \in \text{real}$, tomando $a_i = -kv(i)$, obtenemos una forma válida de definir (N, w) . Entonces, para cada $S \subset N$,

$$w(S) = k \left(v(S) - \sum_{i \in S} v(i) \right) = 0$$

dado que, por c), el juego (N, v) es aditivo. Luego, independientemente de k , (N, w) es el juego idénticamente nulo. ■

Observación 1.27 *Analizando el sistema (1.2) se deduce que para que exista la 0-1 normalización de un juego (N, v) es suficiente con que $v(N) \neq \sum_{i \in N} v(i)$.*

Si, por el contrario, $v(N) = \sum_{i \in N} v(i)$ entonces el sistema es incompatible, ya que el rango de la matriz de coeficientes es n mientras que el de la matriz ampliada es $n+1$, y, consecuentemente, no existiría la 0-1 normalización. En particular, el juego idénticamente nulo no es equivalente a ningún juego 0-1

normalizado. Dado que el sistema (1.2) no puede ser compatible indeterminado, la 0-1 normalización, si existe, es única.

El conjunto de imputaciones de un juego esencial no degenerado de n jugadores es un conjunto convexo $n - 1$ dimensional de $\mathbb{R}^n$ contenido en el hiperplano $x_1 + \dots + x_n = v(N)$. Luego, podremos dibujar estos conjuntos tan sólo en el caso de juegos de 2, 3 ó 4 jugadores. Obviando el caso trivial de 2 jugadores para el que se obtiene un segmento, el conjunto de imputaciones de un juego de 3 jugadores es el triángulo equilátero de vértices $(v(123) - v(2) - v(3), v(2), v(3))$, $(v(1), v(123) - v(1) - v(3), v(3))$ y $(v(1), v(2), v(123) - v(1) - v(2))$, mientras que para un juego de 4 jugadores el conjunto de imputaciones es un tetraedro.

Por otra parte, es trivial comprobar que se tienen las siguientes cotas para cualquier imputación $x \in I(N, v)$:

$$v(i) \leq x_i \leq v(N) - \sum_{j \in N \setminus i} v(j), \text{ para todo } i \in N.$$

TUGlab: Para determinar si un juego es esencial o degenerado TUGlab dispone del comando ESSENTIALGAME. Esta orden admite dos salidas lógicas: la primera informa de si el juego es esencial y la segunda de si es degenerado. El valor 0 de una variable indica que la propiedad no se cumple; el valor 1 que dicha propiedad se satisface.

```
>> A=[0 0 0 0 1 1 1 2 3 1 3 3 3 3 8];
>> E=essentialgame(A)
E = 1
>> B=[1 1 1 2 3 4 3];
>> [esencial,degenerado]=essentialgame(B)
esencial = 1
degenerado = 1
```

Así pues, el juego A es esencial y el juego B es esencial y degenerado.

En su versión más sencilla, el comando IMPUTATIONVERTICES calcula los extremos del conjunto de imputaciones de un juego esencial.

```
>> A=[0 0 0 0 0 0 0 10 10 10 20 20 20 20 30];
>> vertices=imputationvertices(A)
```

vertices =

0	0	0	30
0	0	30	0
30	0	0	0
0	30	0	0

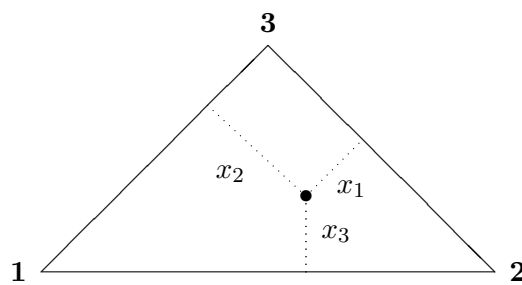


Figura 1.2: El conjunto de imputaciones de un juego de 3 jugadores

Dada una imputación $x = (x_1, x_2, x_3) \in I(N, v)$, la coordenada x_1 es la distancia de x al lado opuesto del vértice 1, es decir, la distancia de x a la recta de ecuación

$$\left. \begin{aligned} x &= v(1) \\ x + y + z &= v(123) \end{aligned} \right\}.$$

Análogamente, las coordenadas x_2 y x_3 representan, respectivamente, la distancia del punto x a las rectas de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} y &= v(2) \\ x + y + z &= v(123) \end{aligned} \right\} \text{ y } \left. \begin{aligned} z &= v(3) \\ x + y + z &= v(123) \end{aligned} \right\}.$$

Animamos al lector a intentar resolver el Ejercicio 9 del Capítulo 5.

TUGlab: El comando `IMPUTATIONSET` dibuja el conjunto de imputaciones

de un juego de 3 ó 4 jugadores. Remitimos al lector a la Sección 5.1.2 para una discusión en profundidad de las gráficas generadas por TUGlab.

En el caso de 3 jugadores el triángulo de imputaciones se mostrará, en una ventana gráfica de MATLAB®, ligeramente sombreado con las coordenadas de los vértices explícitamente indicadas. Las órdenes

```
>> A=[0 1 3 3 3 5];  
>> clf % clear figure      Borra la ventana de dibujo  
>> imputationset(A)
```

generan la gráfica que se muestra en la Figura 1.3.

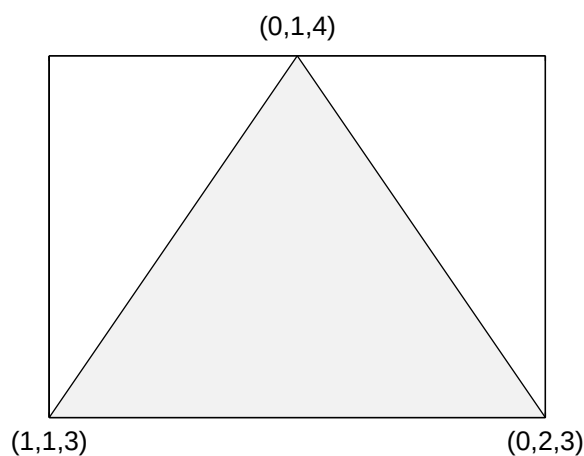


Figura 1.3: Conjunto de imputaciones para 3 jugadores con TUGlab

En la Sección 5.1.2 se explica cómo dibujar imputaciones dentro del triángulo generado por TUGlab.

En el caso de juegos de 4 jugadores, el conjunto de imputaciones es un tetraedro en $\mathbb{R}^4$. No es frecuente encontrar representaciones de estos conjuntos. Nosotros hemos optado por representar con TUGlab no el tetraedro original sino una proyección que no es una isometría. En realidad, sólo representamos las tres primeras coordenadas de las imputaciones. Así, los conjuntos que vemos en nuestros dibujos están ligeramente “achataados”. Discutimos las ventajas e inconvenientes de esta proyección en el Capítulo 5.

TUGlab: Para un juego de 4 jugadores el tetraedro de imputaciones se mostrará, en una ventana gráfica de MATLAB®, con las escalas de los ejes mostrando los valores de las tres primeras coordenadas de las imputaciones. Las órdenes

```
>> A=[0 0 0 0 0 0 0 10 10 10 20 20 20 20 30];
>> clf
>> imputationset(A)
```

generan la gráfica de la Figura 1.4.

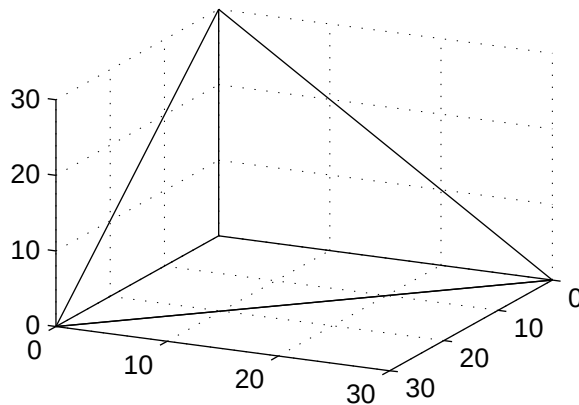


Figura 1.4: Conjunto de imputaciones para 4 jugadores con TUGlab

En la sección 5.1.2 se explica cómo dibujar imputaciones dentro del tetraedro generado por TUGlab.

Los conjuntos de imputaciones de dos juegos estratégicamente equivalentes están relacionados de la forma que cabe esperar.

Proposición 1.28 *Si dos juegos (N, v) y (N, w) son estratégicamente equivalentes, entonces $x \in I(N, v)$ implica que $kx + a \in I(N, w)$, siendo $k > 0$ y (N, a) el juego aditivo tales que $w = kv + a$.*

En los próximos dos capítulos analizaremos las principales soluciones tipo conjunto y las principales soluciones puntuales que se han establecido para resolver un juego cooperativo TU. En general, las soluciones tipo conjunto

establecen criterios para eliminar del conjunto de imputaciones vectores de pagos; mientras que la metodología clásica de las soluciones puntuales establece criterios o propiedades básicas que deben satisfacer las soluciones y que nos garantizan existencia y unicidad de solución en la clase general de juegos o en subclases determinadas. Citar que los conceptos de solución tipo conjunto pueden seleccionar uno, un número finito, un número infinito, o incluso, ningún vector de reparto. Finalmente, formalizamos de forma matemática el concepto de solución de un juego cooperativo.

Definición 1.29 *Una solución, definida en algún subdominio $\Omega \subset G^n$, es una correspondencia Ψ que asocia a cada juego (N, v) un subconjunto $\Psi(N, v) \subset I^*(N, v) = \{x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$.*

$$\Psi: \Omega \subset G^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

En el caso de que la solución sea siempre unitaria hablamos de solución puntual o regla de reparto (o “allocation rule”). En otro caso, se trata de una solución tipo conjunto.

1.5. La extensión multilineal

La utilidad del concepto que estudiaremos en esta sección radica en que, en muchos casos, facilita el cálculo de soluciones puntuales. La idea básica es que podemos establecer una relación entre los vértices del cubo unidad n -dimensional y las coaliciones o partes de N , $2^N = \{0, 1\}^N$, de modo que cada vértice representa una coalición. Así, se puede extender la función característica a todo el cubo $[0, 1]^n = \{(x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_i \leq 1\}$, de forma que en los vértices (o coaliciones) la extensión coincida con la función característica v . Una interpretación probabilística de la extensión multilineal podría ser la siguiente: supongamos que cada jugador $i \in N$, independientemente, decide cooperar con probabilidad x_i , o no cooperar con probabilidad $1 - x_i$. Entonces, la expresión $\prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in N \setminus S} (1 - x_j)$ representa la probabilidad de que la coalición S se forme.

Definición 1.30 *Sea $(N, v) \in G^n$. Se define la extensión multilineal del juego*

(N, v) como la función $f: [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por,⁶

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{S \subset N} \left(\prod_{i \in S} x_i \prod_{j \in N \setminus S} (1 - x_j) \right) v(S).$$

Como se observa, la extensión multilinear representa la suma de utilidades esperadas de las coaliciones con la distribución de probabilidad antes mencionada. Veamos que, en efecto, es una extensión de la función característica. Para cada $S \subset N$, $i \in N$, se define el vector canónico $e^S = (e_i^S)_{i \in N}$ de la forma

$$e_i^S = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{si } i \notin S \end{cases}.$$

Es fácil comprobar que $f(e^S) = v(S)$ y, por lo tanto, la extensión multilinear extiende la función característica v .

TUGlab: La extensión multilinear de un juego tiene asociada la función MLEX-TENSION de TUGlab. Este comando devuelve una expresión simbólica y admite dos salidas: la extensión multilinear escrita en función de los factores x_i y $(1 - x_i)$ o la misma función pero dada como un polinomio con los términos agrupados. Un ejemplo aclarará su sencillo funcionamiento.

```
>> A=[0 0 0 3 3 1 12]; [MLE,MLEpol]=MLExtension(A)
MLE =
3*x*y*(1-z)+3*x*(1-y)*z+(1-x)*y*z+12*x*y*z
MLEpol =
3*x*y+5*x*y*z+3*x*z+y*z
```

Hacemos hincapié en la sintaxis particular del comando `MLExtension` con las letras MLE iniciales escritas en mayúscula.

Observación 1.31 Consideremos dos juegos (N, v) y (N, w) y sus extensiones multilineales f y g , respectivamente. Entonces, para cada α y $\beta \in \mathbb{R}$, el juego $\alpha v + \beta w$ tiene extensión multilinear $\alpha f + \beta g$.

⁶La forma de extender v al cubo unidad no es única. Se utiliza aquella que es lineal en cada variable.

En la Proposición 3.17 y la Sección 5.2.6 comprobaremos que, en efecto, la extensión multilinear de un juego resulta útil para facilitar el cómputo de algunas soluciones puntuales.

1.6. Un ejemplo de juego NTU

Aunque esta monografía está dedicada a los juegos TU, queremos incluir un sencillo ejemplo que ilustre la naturaleza de los juegos NTU introducidos por Aumann y Peleg (1960). Confiamos en que el ejemplo ayude al lector a apreciar las diferencias entre estos dos tipos de juegos.

Consideremos el proyecto PERT⁷ cuyo grafo aparece representado en la Figura 1.5. Consta de cuatro actividades designadas con las letras A, B, C y D cuyas duraciones son de 3, 6, 5 y 10 unidades de tiempo, respectivamente.

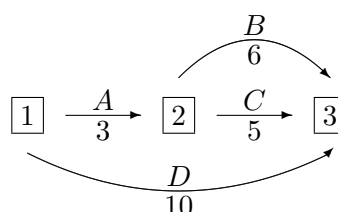


Figura 1.5: El grafo de un proyecto PERT

Existen en este grafo tres caminos: $C_1 = \{A, B\}$, $C_2 = \{A, C\}$ y $C_3 = \{D\}$. El tiempo que lleva realizar las actividades de cada camino se corresponde con la suma de las duraciones de las actividades que lo forman. De esta manera, el tiempo para completar las actividades de los caminos C_1 , C_2 y C_3 , es de 9, 8 y 10 unidades, respectivamente. El tiempo PERT del proyecto es entonces de 10 unidades dado que el camino crítico sería C_3 (es crítico en el sentido de que un retraso de cualquier actividad en ese camino provocaría una demora en la realización del proyecto). Observamos que existe una holgura de 1 unidad de tiempo en C_1 y una holgura de 2 unidades de tiempo en C_2 , que se corresponden con la diferencia entre el tiempo PERT y el tiempo de duración de las actividades involucradas en cada camino.

⁷El nombre PERT procede de las siglas en inglés de “Project Evaluation and Review Technique”, literalmente, técnica de revisión y evaluación de proyectos. Las técnicas PERT se aplican para ayudar a planear y controlar proyectos de investigación y desarrollo, programas de construcción, programación de ordenadores, campañas políticas, etc.

¿Cómo se pueden repartir las holguras existentes entre las actividades no críticas? Si modelamos el problema como un juego NTU, las distintas soluciones para juegos NTU (núcleo, valores de Shapley, etc) responderían a esta pregunta. Más información sobre estos juegos, naturalmente llamados juegos PERT, puede encontrarse en Sánchez-Rodríguez (1999) y Bergantiños y Sánchez-Rodríguez (2002).

Veamos pues como construir un juego NTU que modele nuestro proyecto PERT. Consideramos el conjunto de jugadores N como el conjunto de las actividades no críticas, o sea, $N = \{A, B, C\}$ todas aquéllas que no están en caminos críticos. La función característica $V(S)$ de una coalición $S \subset N$ es el conjunto de repartos factibles para esa coalición, esto es, el conjunto de tiempos extra, u holguras, que tienen los miembros de S si los de $N \setminus S$ han consumido el mayor tiempo posible.

Observemos que, en el problema PERT descrito, las actividades A y B que forman el camino C_1 tienen 1 unidad de holgura, mientras que A y C , que forman el camino C_2 , disponen de 2 unidades de holgura. Así pues,

$$V(A, B, C) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y \leq 1, x + z \leq 2\}.$$

Fijémonos ahora en el camino C_2 . La holgura de 2 unidades no puede ser dividida de cualquier forma entre las actividades A y C . Si A consume las 2 unidades, el proyecto se retrasa. Así, para determinar $V(A, C)$, suponemos que el resto de las actividades consumen la mayor cantidad de tiempo que puedan sin demorar el proyecto. En este caso, si B consume lo máximo, 1 unidad, el tiempo máximo disponible para A en el camino C_1 es la diferencia entre la holgura del camino y el peor escenario que podría plantear la actividad B , es decir, la restricción que se obtiene para la actividad A en el camino C_1 es $x \leq 1 - 1$. En definitiva,

$$V(A, C) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1 - 1, x + z \leq 2\}.$$

Análogamente, para las demás coaliciones tendríamos que:

$$V(A, B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x \leq 2 - 2\}$$

$$V(B, C) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - 1, z \leq 2 - 1\}$$

$$V(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 - 1, x \leq 2 - 2\}$$

$$V(B) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq 1 - 1\}$$

$$V(C) = \{z \in \mathbb{R} : z \leq 2 - 1\}$$

Terminamos esta sección con unas breves pinceladas acerca de la teoría de juegos NTU, que engloba, entre otros, a la clase de los juegos de negociación y a la clases de los juegos TU.

En los juegos de negociación hay un conjunto de pagos sobre el que se negocia y un pago de desacuerdo que será el adoptado si los jugadores no aceptan un pago del conjunto dado. El célebre teorema de Nash (1950) proporciona una caracterización axiomática de la solución de Nash. Otras soluciones como la de Kalai-Smorodinsky (Kalai y Smorodinsky (1975)), las soluciones no simétricas y proporcionales ((Kalai (1977a,b))), la de igual pérdida (Chun (1988)), o las de Nash ponderadas podrían ser estudiadas y caracterizadas.

En los juegos NTU se extienden las propiedades de monotonía, superaditividad, convexidad, dominación, núcleo, conjuntos estables, etc. si bien su extensión no es sencilla y no se mantienen todas las propiedades. Por ejemplo, hay distintas extensiones del valor de Shapley, los valores de Shapley NTU (Shapley (1969)), la aproximación de Harsanyi mediante las λ transferencias o el valor de Shapley consistente (Maschler y Owen (1989, 1992)). Los juegos de mercado tienen especial relevancia en este contexto.

1.7. Relación entre juegos cooperativos y no cooperativos

En esta sección vamos a describir generalidades de los juegos no cooperativos para estudiar un procedimiento que permite obtener un juego cooperativo a partir de uno no cooperativo. Naturalmente, nuestro repaso de la teoría de juegos no cooperativos será breve y sucinta, aunque confiamos en que el lector sea capaz de percibir la esencia del enfoque no cooperativo y pueda establecer un primer contraste con el cooperativo que desarrollamos en la monografía. Nos permitimos aconsejar al lector interesado en indagar con más detalle en los juegos no cooperativos los célebres libros de Davis (1986) y Osborne y Rubinstein (1994), el primero para una aproximación intuitiva y el segundo con un estilo más técnico.

En los juegos no cooperativos uno de los conceptos más importantes es el de estrategia. Una estrategia es un plan de acción que determina la forma en la que cada jugador actuará a lo largo del juego, teniendo en cuenta lo que los otros jugadores podrían hacer en el transcurso del mismo.

Es habitual hablar del concepto de estrategia pura y estrategia mixta. Las estrategias puras de un jugador son todas las posibilidades de actuación que

tiene en un determinado juego, de forma que, una vez analizadas las estrategias puras de todos los jugadores y los pagos asociados a las combinaciones a las que den lugar tendremos especificado completamente el juego a desarrollar.

El concepto de estrategia mixta es más complejo. Se trata de contemplar situaciones en las que los jugadores no eligen una determinada acción, sino que dejan que el azar sea el que determine la estrategia finalmente adoptada. Es fácil comprobar que las estrategias puras están contenidas en las estrategias mixtas (basta con considerar la distribución de probabilidad que otorga peso 1 a una estrategia pura determinada y 0 al resto).

Existen distintas formas de representar un juego no cooperativo. Podemos describirlo como una estructura secuencial de problemas de decisión que aparecerá representada en forma de árbol (juegos en forma extensiva) o bien suponer que los jugadores eligen sus acciones independiente y simultáneamente, sin que el resto de los jugadores sean conocedores de la estrategia elegida (juegos en forma normal o estratégica).

A continuación describimos rigurosamente el concepto de juego no cooperativo en forma normal.

Definición 1.32 *Un juego en forma normal, o estratégica, es una $2n$ -tupla*

$$(X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n) \equiv G$$

siendo, para cada $i = 1, \dots, n$,

- X_i : *El conjunto de estrategias puras (finitas) del jugador i .*
- H_i : *La función de pago del jugador i , de modo que $H_i(x_1, \dots, x_n)$ representa la ganancia de i si el jugador 1 elige la estrategia $x_1 \in X_1$, el jugador 2, la estrategia $x_2 \in X_2$, y el jugador n , la estrategia $x_n \in X_n$.*

Dado un juego en forma normal G denotaremos por $X = X_1 \times \dots \times X_n$ el conjunto de estrategias puras y por $x = (x_1, \dots, x_n)$ un elemento genérico de X . Para ilustrar el concepto de juego en forma normal, presentamos tres ejemplos clásicos: pares o nones,⁸ la batalla de los sexos y el dilema del prisionero.

Ejemplo 1.33 (Pares o nones)

Dos jugadores eligen independientemente entre cara o cruz. Si sus elecciones no coinciden, es decir, eligen una cara y una cruz (nones), entonces el

⁸En la literatura en inglés se suele denominar a este juego “matching pennies”.

jugador 1 pierde y le paga 1 euro al oponente. En el caso de que coincidan las elecciones, dos caras o dos cruces (pares), el jugador 1 gana y recibe 1 euro del jugador 2. Podemos resumir la información del juego en la siguiente tabla.

Jugador 1 / Jugador 2	Cara	Cruz
Cara	1, -1	-1, 1
Cruz	-1, 1	1, -1

Tenemos, pues, un juego de 2 jugadores. Las estrategias de ambos jugadores son: Cara o Cruz. El jugador 1 elige fila y el jugador 2 elige columna. Los valores de la función de pago son los que figuran en las casillas de la tabla: en la casilla intersección de una fila con una columna se indica, por orden, el pago que obtendría cada jugador. Así, por ejemplo, el pago de la combinación de estrategias (Cara, Cara) viene representada por $H_1(\text{Cara}, \text{Cara}) = 1$ y $H_2(\text{Cara}, \text{Cara}) = -1$.

Ejemplo 1.34 (La batalla de los sexos)

Una pareja va a decidir si pasar la tarde yendo al teatro o viendo un partido de baloncesto. Como refleja la tabla que se expone a continuación, la preferencia de la mujer es ir al teatro y la del hombre ver el partido de baloncesto. Sin embargo, ambos prefieren estar juntos que divertirse por separado.

Hombre / Mujer	Teatro	Baloncesto
Teatro	1, 4	0, 0
Baloncesto	0, 0	4, 1

De nuevo estamos ante un juego de 2 jugadores. Las estrategias de ambos jugadores son: Teatro o Baloncesto. La función de pago de, por ejemplo, la combinación (Teatro, Teatro) viene dada por $H_1(\text{Teatro}, \text{Teatro}) = 1$ y $H_2(\text{Teatro}, \text{Teatro}) = 4$.

Ejemplo 1.35 (El dilema del prisionero)

Dos cómplices, sospechosos de cometer un crimen, están aislados en celdas independientes. El juez les da la opción de acusar al cómplice o callar. Si ambos callan serán sentenciados a cumplir una condena de 1 año en prisión. En caso de que uno de ellos acuse a su compinche y el otro no, el que calla será encerrado durante 6 años y el otro quedará libre. Por último, si los dos se acusan mutuamente, cumplirá cada uno una pena de 5 años en prisión. La siguiente tabla refleja los pagos correspondientes a cada par de posibles estrategias.

<i>Jugador 1 / Jugador 2</i>	<i>Acusar</i>	<i>Callar</i>
<i>Acusar</i>	-5, -5	0, -6
<i>Callar</i>	-6, 0	-1, -1

Una vez determinado el juego, ¿cómo podemos aconsejar a los jugadores a la hora de elegir las estrategias que más les convienen? Es de esperar que si los jugadores son racionales, tratarán de maximizar su pago. Como observamos en la siguiente definición, los equilibrios de Nash son las mejores respuestas a las acciones de los otros jugadores.

Definición 1.36 Sea G un juego en forma estratégica. Diremos que $x \in X$ es un equilibrio de Nash (Nash (1951)) si para cada $i \in N$ y cada $y_i \in X_i$,

$$H_i(x) \geq H_i(x \setminus y_i),$$

siendo $x \setminus y_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

En un equilibrio de Nash ningún jugador obtiene beneficio alguno variando unilateralmente su estrategia. Es fácil encontrar ejemplos de juegos que tienen más de un equilibrio de Nash o en los que no existe equilibrio de Nash. Un análisis rápido de las matrices de pagos de los ejemplos anteriores, nos permite deducir que:

1. El juego de pares o nones, Ejemplo 1.33, no tiene equilibrios de Nash.
2. En el juego de la batalla de los sexos, Ejemplo 1.34, hay dos equilibrios de Nash: los dos van al teatro o los dos ven el partido de baloncesto.
3. En el juego del dilema del prisionero, Ejemplo 1.35, hay un único equilibrio de Nash, a saber, ambos se acusan.

Analizando un poco más en detalle el dilema del prisionero, y suponiendo que la preferencia de cada jugador es pasar el menor tiempo posible en prisión, observamos que, en el equilibrio, ambos prefieren tomar la decisión de “acusar” frente a “callar” y, por tanto, acabarán pasando 5 años en prisión. Fijémonos en que si ambos callaran entonces serían sentenciados a una pena menor, de tan sólo 1 año de duración. Esta forma de actuar requiere cierta cooperación entre los prisioneros y son estrategias que adquieren especial relevancia cuando el juego se repite a lo largo del tiempo.

Para poder garantizar la existencia de equilibrios de Nash necesitamos introducir las llamadas estrategias mixtas. Supongamos en el juego de pares

o nones, Ejemplo 1.33, que cada jugador lanza una moneda y elige así entre cara o cruz, o lo que es equivalente, decide entre cara o cruz con la misma probabilidad (si la moneda no está trucada, con probabilidad $\frac{1}{2}$). Procediendo de esta forma, su pago esperado es 0, independientemente de la estrategia elegida por el otro jugador.

Denotemos por $\Delta(X_i) = \{\alpha_i : X_i \rightarrow [0, 1] : \sum_{y \in X_i} \alpha_i(y) = 1\}$ el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre X_i . Cada elemento $\alpha_i \in \Delta(X_i)$ es una estrategia mixta del jugador $i \in N$. La extensión mixta del juego G es el juego en forma estratégica

$$G^* \equiv (\Delta(X_1), \dots, \Delta(X_n), H_1^*, \dots, H_n^*)$$

donde, para cada $i \in N$, la función de pagos $H_i^* : \prod_{j \in N} \Delta(X_j) \rightarrow \mathbb{R}$ asigna a

cada $\alpha \in \prod_{j \in N} \Delta(X_j)$ el valor

$$H_i^*(\alpha) = \sum_{x \in \prod_{j \in N} X_j} \left(\prod_{j \in N} \alpha_j(x_j) \right) H_i(x).$$

En el ejemplo de pares o nones las distribuciones de probabilidad sobre $X_1 = \{Cara, Cruz\}$ son $\Delta(X_1) = \{(p, 1-p) : 0 \leq p \leq 1\}$, siendo p la probabilidad de Cara y $1-p$ la de Cruz. Análogamente, las distribuciones de probabilidad sobre X_2 son $\Delta(X_2) = \{(q, 1-q) : 0 \leq q \leq 1\}$. Para cada $\alpha = ((p, 1-p), (q, 1-q))$, tenemos que $H_1^*(\alpha) = (1-2p)(1-2q) = -H_2^*(\alpha)$.

Definición 1.37 *Un equilibrio de Nash en estrategias mixtas de un juego en forma estratégica es un equilibrio de Nash de su extensión mixta.*

Es fácil comprobar que en el ejemplo de pares o nones, por la simetría de las funciones de pagos, el único punto de equilibrio es $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. Es decir, hemos comprobado que la estrategia óptima, a largo plazo, para cada jugador es elegir con equiprobabilidad entre Cara y Cruz. Además, en media el beneficio del juego será de 0 euros para cada jugador.

En el ejemplo de la batalla de los sexos, aparte de los dos equilibrios de Nash en estrategias puras ya mencionados, hay un equilibrio en estrategias mixtas, $((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}))$.

El siguiente resultado nos asegura la existencia de equilibrios de Nash en la extensión mixta de un juego.

Proposición 1.38 *Todo juego en forma estratégica (finito) tiene un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

Analizaremos, a continuación, un tipo especial de juegos de gran importancia, aquellos en los que las ganancias de unos jugadores se producen a costa de las pérdidas de los demás, de modo que el balance neto global del juego es nulo.

Definición 1.39 *Un juego en forma normal o estratégica es de suma nula (o estrictamente competitivo) si*

$$\sum_{i \in N} H_i(x) = 0, \text{ para todo } x \in X$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{i \in S} H_i(x) = - \sum_{i \in N \setminus S} H_i(x), \text{ para todo } x \in X, S \in 2^N.$$

El juego de pares o nones es un juego de suma nula. Sin embargo, la batalla de los sexos y el dilema del prisionero no son juegos de suma nula.

Se observa que para determinar un juego bipersonal en forma normal de suma nula solamente necesitamos dar una matriz, $A = (a_{ij})$, que tenga tantas filas como estrategias del primer jugador y tantas columnas como estrategias del segundo jugador. Si el primer jugador elige su estrategia i y el segundo su estrategia j , a_{ij} denota el pago que recibirá el jugador 1 y, por tanto, $-a_{ij}$ es el pago del jugador 2. La matriz de pagos del juego de pares o nones es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diremos que un par de estrategias (i, j) son un punto de silla del juego si el elemento a_{ij} es el máximo de su columna y el mínimo en su fila. Ocurre que todos los equilibrios de Nash de un juego en forma estratégica de suma nula se corresponden con los puntos de silla y proporcionan el mismo pago a los jugadores. Este valor común se conoce como el valor del juego. Veamos, pues, como se definen formalmente los puntos de silla y el valor de un juego bipersonal de suma nula.

Definición 1.40 *Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ la matriz de pagos asociada a un juego bipersonal finito de suma nula.*

- La acción $i^* \in \{1, \dots, n\}$ es *maxmin* para el jugador 1 si

$$\min_{j=1, \dots, m} a_{i^*j} \geq \min_{j=1, \dots, m} a_{ij}, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\},$$

o, equivalentemente,

$$\min_{j=1, \dots, m} a_{i^*j} = \max_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, m} a_{ij}.$$

- La acción $j^* \in \{1, \dots, m\}$ es *maxmin*⁹ para el jugador 2 si

$$\min_{i=1, \dots, n} -a_{ij^*} \geq \min_{i=1, \dots, n} -a_{ij}, \text{ para todo } j \in \{1, \dots, m\},$$

o, equivalentemente,

$$\min_{i=1, \dots, n} -a_{ij^*} = \max_{j=1, \dots, m} \min_{i=1, \dots, n} -a_{ij}.$$

El maxmin para un jugador es aquella acción que maximiza el pago que ese jugador puede obtener.

Definición 1.41 La estrategia pura (i^*, j^*) es un punto de silla del juego G si

$$a_{i^*j^*} = \max_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, m} a_{ij} = \min_{j=1, \dots, m} \max_{i=1, \dots, n} a_{ij}.$$

La siguiente proposición revela la relación directa que existe entre los equilibrios de Nash y los puntos de silla.

Proposición 1.42 Sea G un juego bipersonal de suma nula.

- a) Si (i^*, j^*) es un equilibrio de Nash de G entonces i^* es *maxmin* para el jugador 1, j^* es *maxmin* para el jugador 2, (i^*, j^*) es un punto de silla de G y, consecuentemente, todos los equilibrios de Nash dan lugar a los mismos pagos.

⁹Esta acción también podría denominarse minimax para el jugador 2, ya que equivale a que, para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, $\max_{i=1, \dots, n} a_{ij^*} \leq \max_{i=1, \dots, n} a_{ij}$, o también, $\max_{i=1, \dots, n} a_{ij^*} = \min_{j=1, \dots, m} \max_{i=1, \dots, n} a_{ij}$.

- b) Si (i^*, j^*) es un punto de silla de G entonces i^* es *maxmin* para el jugador 1, j^* es *maxmin* para el jugador 2 y, además, (i^*, j^*) es un equilibrio de Nash de G .

De la anterior proposición se deduce que cuando el juego tiene equilibrios de Nash se cumple que, $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$. A esta cantidad se le llama el valor del juego, que denotaremos por $\text{val}(G)$. El valor de un juego es lo que se pueden garantizar los jugadores si actúan con una estrategia que sea un equilibrio de Nash.

Recordemos que la matriz de pagos para el juego de pares o nones es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, $\max_i \min_j a_{ij} = -1 < \min_j \max_i a_{ij} = 1$, de donde se deduce que no hay equilibrios de Nash, como ya sabíamos.

Las Definiciones 1.40 y 1.41 pueden extenderse fácilmente para estrategias mixtas. Enunciamos el conocido teorema minimax debido a von Neumann (1928). El teorema minimax es fundamental en la teoría de juegos. Davis (1986) lo analiza con estas palabras:

[...] con él pueden analizarse todos los juegos bipersonales de suma cero como si tuviesen puntos de equilibrio. El juego llega a tener un valor claro, y cada jugador puede garantizarse la consecución de ese valor si desarrolla la estrategia adecuada. La única diferencia entre los juegos con puntos de equilibrio reales y los que no los tienen consiste en que mientras en los primeros se puede seguir una estrategia pura y obtener con seguridad el valor del juego, en los segundos es preciso utilizar estrategias mixtas, y el valor del juego se obtiene como promedio.

Teorema 1.43 *Todo juego bipersonal finito de suma nula tiene estrategias mixtas óptimas para las cuales el maxmin coincide con el minimax (el valor del juego).*

Desde el punto de vista práctico, Dantzing (1951) y Gale et al. (1951) demostraron que es equivalente resolver un problema de programación lineal a resolver un juego bipersonal de suma nula. El cálculo tanto de las estrategias óptimas como del valor de un juego puede realizarse resolviendo un par de

problemas duales de programación lineal. Concretamente, cualquier solución óptima $(p_1^*, \dots, p_n^*, v^*)$ del problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & v \\ \text{sujeto a:} & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i \geq v, \text{ para todo } j = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1 \\ p_i \geq 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n \end{array} \right. \end{array}$$

nos proporciona una estrategia mixta óptima $(p_1^*, \dots, p_n^*)$ para el jugador 1 y el valor del juego v^* . Cualquier solución óptima $(q_1^*, \dots, q_m^*, v^*)$ del problema de programación lineal (dual del anterior)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & v \\ \text{sujeto a:} & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j \leq v, \text{ para todo } i = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^m q_j = 1 \\ q_j \geq 0, \text{ para todo } j = 1, \dots, m \end{array} \right. \end{array}$$

nos daría una estrategia mixta óptima $(q_1^*, \dots, q_m^*)$ para el jugador 2.

Por ejemplo, para el juego de pares o nones, resolviendo el problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & v \\ \text{sujeto a:} & \left\{ \begin{array}{l} 2p - 1 \geq v \\ -2p + 1 \geq v \\ p \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

llegamos a la solución óptima $(p^*, v^*) = (\frac{1}{2}, 0)$. Obtenemos de esta forma alternativa la estrategia óptima del primer jugador $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y el valor nulo del juego, ya calculados anteriormente.

Nos gustaría concluir con una referencia a los experimentos relacionados con la teoría de juegos.¹⁰ ¿Cómo actúan en realidad las personas cuando se

¹⁰Volveremos a reflexionar acerca de la experimentación, en el contexto de los juegos TU, en la Sección 5.2.7.

enfrentan a juegos en la práctica? La matemática norteamericana Julia Bowman Robinson analizó el problema del “aprendizaje” cuando dos personas, que no son capaces de calcular sus respectivas estrategias minimax, practican un juego reiteradamente. Al principio escogen sus estrategias al azar pero, con el tiempo, van aprendiendo de su propia experiencia. Cada parte supone que la contraria está jugando una estrategia mixta con probabilidades proporcionales a las frecuencias empíricas con las que ha elegido en el pasado y, en consecuencia, elige la estrategia pura que maximiza su ganancia esperada. Si ambos jugadores proceden de este modo, Robinson (1951) demostró que ambas estrategias se aproximan a las estrategias minimax.

Finalizado este breve repaso por las características más notables de los juegos no cooperativos, dedicaremos la última parte de esta sección a relacionar los juegos en forma normal con los juegos TU.

Dado un juego $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$ en forma normal le asociamos el juego cooperativo en forma característica o coalicional, (N, v_G) , donde el conjunto de jugadores es $N = \{1, \dots, n\}$ y la función característica, v_G , viene definida del siguiente modo. Para cada $S \subset N$, consideramos el juego bipersonal de suma nula

$$G(S) \equiv (X_S, X_{N \setminus S}, H_S, H_{N \setminus S})$$

siendo

$$X_S = \prod_{i \in S} X_i, \quad X_{N \setminus S} = \prod_{i \in N \setminus S} X_i$$

y

$$H_S(x) = \sum_{i \in S} H_i(x) = -H_{N \setminus S}(x), \quad \text{para todo } x \in X.$$

Denotemos por G^* la extensión mixta de G . La función característica v_G asigna a cada coalición $S \subset N$ el valor

$$v_G(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S = \emptyset \\ \text{val}(G^*(S)) & \text{si } S \neq \emptyset, S \neq N \\ \max_{x \in X_N} H_N(x) & \text{si } S = N \end{cases}.$$

Dicho en palabras, el valor de una coalición S es el valor del juego bipersonal de suma nula cuando la coalición S actúa como un jugador y la complementaria

$N \setminus S$ como el otro. El valor de la extensión mixta $val(G^*(S))$ representa lo que la coalición S puede garantizarse por sí misma aunque los miembros de $N \setminus S$ actúen en su contra. Veamos un ejemplo concreto.

Ejemplo 1.44 En las siguientes matrices aparece reflejado el juego finito en forma normal de los jugadores Laura (L), Pablo (P) y Juan (J). Así, si, por ejemplo, Laura juega la estrategia B, Pablo la A y Juan la A, entonces el pago que reciben es, respectivamente, de 2, -4 y 2 unidades.

	Juan A		Juan B	
	A	B	A	B
Laura/Pablo	A	B	A	B
A	(1, 1, -2)	(-4, 3, 1)	(3, -2, -1)	(-6, -6, 12)
B	(2, -4, 2)	(-5, -5, 10)	(2, 2, -4)	(-2, 3, -1)

Construimos ahora los juegos bipersonales. En primer lugar el juego bipersonal correspondiente a la jugadora Laura:

Juego $G(S)$ con $S = \text{Laura}$				
Laura/(Pablo + Juan)	AA	AB	BA	BB
A	1	3	-4	-6
B	2	2	-5	-2

Ahora, el juego bipersonal correspondiente al jugador Pablo:

Juego $G(S)$ con $S = \text{Pablo}$				
Pablo/(Laura + Juan)	AA	AB	BA	BB
A	1	-2	-4	2
B	3	-6	-5	3

Por último, el juego bipersonal correspondiente al jugador Juan:

Juego $G(S)$ con $S = \text{Juan}$				
Juan/(Laura + Pablo)	AA	AB	BA	BB
A	-2	1	2	10
B	-1	12	-4	-1

Completamos la función característica calculando los puntos de silla correspondientes en la extensión mixta, bien a través de los programas duales de programación lineal que hemos descrito anteriormente,¹¹ o bien utilizando otros métodos para la resolución de juegos bipersonales, consúltese, por

¹¹El programa MATLAB® dispone del comando LINPROG, perteneciente a la “toolbox” de optimización, para resolver numéricamente problemas de programación lineal.

ejemplo, Girón y Gómez Villegas (1977). El juego cooperativo que se obtiene, (N, v_G) , tiene como conjunto de jugadores $N = \{L, P, J\}$ y función característica

$$\begin{aligned} v_G(J) &= -1.43, \quad v_G(L) = -4.4, \quad v_G(P) = -4 \\ v_G(P, J) &= 4.4, \quad v_G(L, P) = 1.43, \quad v_G(L, J) = 4, \quad v_G(L, P, J) = 0. \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior obtenemos que el juego resultante v_G es de suma nula, dado que el juego original no cooperativo G era de suma nula. Esta propiedad se cumple en general. También se puede demostrar que el juego TU asociado a un juego en forma normal mediante el procedimiento que hemos descrito es siempre superaditivo. Por otra parte, juegos en forma estratégica diferentes pueden dar lugar al mismo juego cooperativo.

Es importante observar que en el proceso de pasar al juego cooperativo perdemos, o escondemos, información del juego no cooperativo. Una situación similar ocurre en el problema de los juegos asociados a los mercados de intercambio, descritos en la Sección 4.3.

Otras relaciones entre juegos no cooperativos y cooperativos son plasmadas en lo que se conoce como implementación. Se trata de describir un proceso no cooperativo que conduzca a la solución cooperativa, en el sentido de que ésta se corresponda con los pagos asociados a los equilibrios de Nash.

Observación 1.45 *Sea (N, v) un juego coalicional superaditivo. El juego en forma normal $G_N \equiv (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$ donde, para cada $i = 1, \dots, n$, el espacio de estrategias es $X_i = \{S \in 2^N : i \in S\}$ y la función de pago*

$$H_i(S_1, \dots, S_n) = \begin{cases} \frac{v(S_i)}{|S_i|} & \text{si } S_j = S_i \text{ para todo } j \in S_i \\ v(i) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es tal que su reducción a la forma característica es el juego de partida, o sea, $v_{G_N} = v$.

Consideremos el siguiente juego G en forma normal de suma no nula:

Laura/Pablo	A	B
A	(0,-10)	(1,10)

Si calculamos el juego cooperativo asociado (N, v_G) obtenemos:

$$v_G(L) = 0, \quad v_G(P) = 10, \quad v_G(L, P) = 11$$

Como se observa, el planteamiento desarrollado cuando el juego no es de suma nula es pesimista, en el sentido de que parece poco razonable que la jugadora Laura vaya a conseguir 0 unidades de utilidad, dado que Pablo jugará la estrategia B.

Capítulo 2

Conceptos de solución tipo conjunto

Conceptos clave: *El núcleo. Caracterizaciones. El D-núcleo. Los conjuntos estables y sus generalizaciones. El core-cover. El conjunto de Weber. El conjunto de Harsanyi. El conjunto de regateo. El kernel y el prekernel*

Dejamos nuestra presentación del modelo TU del capítulo previo definiendo formalmente los conceptos de solución tipo conjunto y solución puntual. Dedicaremos este capítulo a analizar detenidamente las principales soluciones tipo conjunto planteadas en la literatura. En general, las soluciones tipo conjunto establecen criterios para descartar ciertos vectores de pagos del conjunto de imputaciones. De la propia Definición 1.29 se desprende que las soluciones tipo conjunto pueden seleccionar uno, un número finito, un número infinito, o incluso, ningún vector de reparto.

Bajo un principio de racionalidad coalicional cabe esperar que ninguna coalición tenga incentivos para impedir la formación de la gran coalición. De esta forma definiremos, en primer lugar, el núcleo (o “core”) de un juego. Este concepto de solución fue introducido por Gillies (1953), aunque Ysidro Edgeworth fue el precursor. El núcleo representa una generalización de la curva de contrato (Edgeworth (1881)) como solución al problema de determinar el resultado del intercambio entre individuos.

Veremos que el núcleo de un juego puede ser vacío. Mostraremos que si un juego tiene núcleo vacío entonces es inestable, esto es, cualquiera que sea el

reparto elegido habrá una coalición que reciba menos que lo que puede obtener por sí misma. En caso contrario, es un conjunto compacto y convexo con una estructura peculiar. Prestaremos atención a los vértices y las caras del núcleo, lo que nos llevará a estudiar los juegos exactos y los juegos de las caras.

Naturalmente, que el núcleo sea o no vacío condiciona en gran medida el análisis del juego. Por ello, es interesante estudiar la clase de juegos que tiene núcleo no vacío. Caracterizaremos los juegos con núcleo no vacío por medio de las familias equilibradas de coaliciones, un concepto que extiende la idea de partición. Introduciremos los juegos equilibrados y estableceremos el importante resultado, debido a Bondareva (1963) y Shapley (1967), que refleja que el carácter equilibrado de un juego es equivalente a que tenga núcleo no vacío. Detallaremos la demostración para reflejar cómo el núcleo de un juego TU puede obtenerse resolviendo un problema de programación lineal.

El siguiente paso es la definición de los juegos totalmente equilibrados como aquellos cuyos subjuegos son equilibrados. Ilustraremos este concepto con algunos ejemplos sencillos y veremos que los juegos que exhiban una distribución monótona respecto a la población, abreviadamente PMAS, son totalmente equilibrados. No obstante, la aplicación más interesante, los juegos de mercado, se pospondrá al Capítulo 4.

Cuando el núcleo de un juego es vacío recurriremos a otros conceptos de solución. La primera idea en esta línea es considerar los ε -núcleos (Shapley y Shubik (1963, 1966)). Dado cualquier $\varepsilon > 0$, seleccionamos aquellas preimputaciones en las que ninguna coalición tiene incentivos de desviarse cuando se le impone un coste de ε . Si $\varepsilon = 0$, tenemos el concepto de núcleo clásico. Además, a medida que ε aumenta el ε -núcleo también se hace más grande. Esta propiedad indujo a definir el menor núcleo (o “least core”) como la intersección de todos los ε -núcleos no vacíos (Maschler et al. (1979)).

Otra forma de debilitar el concepto de núcleo es el denominado D-núcleo (o “dominance core” de Gillies (1959)). Para poder definir apropiadamente el D-núcleo estableceremos, primeramente, el concepto de dominación. Diremos que dadas dos imputaciones x e y , la x domina a la y a través de la coalición S , si cada jugador de S recibe con x una utilidad mayor que con y siendo, además, la asignación x , factible para los jugadores de S . Así, diremos que x domina a y , si existe una coalición S para la cual x domina a y a través de S . El D-núcleo es el conjunto de las imputaciones que no son dominadas. Mostraremos que, en efecto, el núcleo es un subconjunto del D-núcleo y que, para juegos superaditivos, ambos conceptos de solución coinciden.

Veremos también que el núcleo y la dominación se mantienen para juegos

estratégicamente equivalentes, lo cual permite simplificar, en muchas ocasiones, su cálculo.

A continuación, las soluciones de von Neumann-Morgenstern o conjuntos estables centrarán nuestra atención. Éste fue el primer concepto de solución que se propuso, pero consideramos oportuno presentarlo después del núcleo y sus derivados para establecer relaciones entre ambos. La idea original consistía en encontrar un pago que no fuese dominado por ningún otro. Dado que la relación de dominación es intransitiva, von Neumann y Morgenstern renunciaron desde el primer momento a buscar un pago que resultase una solución “única” para todos los juegos de n jugadores. Por ello, una solución consiste no en una, sino en muchas imputaciones que tienen una cierta consistencia interna y una cierta consistencia externa. La consistencia interna se refiere a que dadas dos imputaciones en el conjunto estable, no puede dominar una a la otra; y la consistencia externa establece que dada cualquier imputación que no esté en el conjunto estable existe una del conjunto estable que la domina.

Mediante ejemplos mostraremos que hay juegos que tienen múltiples conjuntos estables e, incluso, pueden tener infinitos. El juego del dólar será analizado con detalle. Para von Neumann y Morgenstern perder la unicidad de la solución no supone un problema. Aún más, para ellos esto demuestra la flexibilidad que tiene el concepto de solución para adaptarse a la amplísima diversidad con la que nos encontramos en la vida real. Lo que realmente importa es la existencia de solución. Pasaron 20 años hasta que Lucas (1967) ideó un juego de 10 jugadores para el que no había conjuntos estables.

Veremos que el núcleo está contenido dentro de todo conjunto estable y que si el núcleo es un conjunto estable entonces es el único conjunto estable. También estudiaremos que para la clase de los juegos convexos, el núcleo es el único conjunto estable del juego.

Como generalización de los conjuntos estables Roth (1976) propuso las subsoluciones, que existen siempre. A la intersección de todas estas subsoluciones se le llama super-núcleo (o “super-core”). El super-núcleo contiene al núcleo como subconjunto.

Otros conceptos de solución en relación con el núcleo son: el core-cover, introducido por Tijs y Lipperts (1982), y el conjunto de Weber, definido en Weber (1988). Para entender el primero, necesitamos dos definiciones: el pago de utopía de un jugador, que representa lo máximo que éste podría pedir, en el sentido de que si pidiera más, sería rentable para la gran coalición el desprenderse de él; y el mínimo derecho de un jugador, que se corresponde con el máximo, sobre todas las coaliciones a las que pertenece el jugador, de

la utilidad restante cuando todos los jugadores reciben su pago de utopía. Se define el core-cover como el conjunto de imputaciones que están entre estas dos cotas. Se probará que el núcleo está contenido en el core-cover.

Para determinar el conjunto de Weber necesitamos definir los vectores de contribuciones marginales. Para cada orden de la gran coalición podemos calcular la contribución de cada jugador a los predecesores. Estas contribuciones definen el vector marginal asociado al orden dado. El conjunto de Weber es la envoltura convexa de los $n!$ vectores marginales, contiene al núcleo y nunca es vacío. Shapley (1971) e Ichiishi (1981) probaron que un juego es convexo si, y sólo si, los vectores de contribuciones marginales son los puntos extremos del núcleo. Luego, para la clase de los juegos convexos, el conjunto de Weber coincide con el núcleo.

El siguiente epígrafe se dedica al estudio del conjunto de Harsanyi (o “selectope”), discutido independientemente por Vasil’ev (1980) y por Hammer et al. (1977). Se corresponde con todas las posibles distribuciones de los dividendos de Harsanyi de todas las coaliciones entre sus miembros. Estudiaremos que el núcleo es un subconjunto del conjunto de Harsanyi. Además, el conjunto de Harsanyi tiene estructura tipo núcleo, concretamente es el núcleo de un juego específico. Mostraremos una condición necesaria y suficiente para que este conjunto coincida con el núcleo del juego.

Daremos paso, a continuación, a otros conceptos de solución que atienden a “la discusión” que puede tener lugar en el transcurso del juego. La pregunta de interés es, dada una coalición y un pago para esa coalición, ¿hay algún jugador que pueda plantear una objeción válida contra otro que forme parte de su propia coalición? Aclaremos el concepto de objeción y contraobjeción.

Una objeción de un jugador i contra un jugador j es, simplemente, una propuesta para que se forme una nueva coalición, S , con unos determinados pagos. Para que la objeción sea válida, el jugador i debe pertenecer a S y el jugador j no; cada jugador que vaya a formar parte de S debe obtener en ella más de lo que conseguía anteriormente; y la suma de los pagos de todos los jugadores incluidos en S debe ser igual a la utilidad que pueden conseguir los miembros de S .

Una contraobjeción, igual que una objeción, es una propuesta para formar una coalición T , con su pago correspondiente. La hace un jugador j en respuesta a una objeción dirigida contra él por otro jugador i . T debe contener a j , pero no a i . El propósito de la contraobjeción es el de convencer al que ha objetado de que no es el único que puede salir beneficiado desertando, siendo esencial que j haga creíble que esta coalición pueda formarse. Para inducir

a los jugadores de T a que le acepten, j debe ofrecerles por lo menos lo que les ofrecía i para formar la coalición S y, como mínimo, lo que hubiesen obtenido originalmente (j también debe recibir por lo menos tanto como obtenía inicialmente).

Hablaremos del conjunto de regateo (o “bargaining set”) definido por Aumann y Maschler (1965), que consiste en el conjunto de imputaciones para las cuales dada cualquier objeción de un jugador en contra de otro existe una contraobjeción. Si bien hay otras definiciones alternativas de conjunto de regateo, por ejemplo las dadas por Mas-Colell (1989) o Zhou (1994), nosotros nos centraremos en el definido por Aumann y Maschler (1965).

Fácilmente se probará que no hay ninguna posible objeción con respecto a un elemento del núcleo y, por tanto, el núcleo es un subconjunto del conjunto de regateo. Además, el conjunto de regateo no es vacío. Resaltaremos que este concepto de solución no persigue resultados justos, sino resultados que puedan llegar a imponerse. Es importante fomentar una discusión comparando las soluciones de von Neumann-Morgenstern y el conjunto de regateo. Ambas proporcionan, generalmente, más de un pago y ninguna discrimina entre ellos. En el conjunto de regateo, los resultados no tienen porque ser óptimos de Pareto y la propiedad de superaditividad no es crucial. La relación de ambas soluciones con el núcleo es esencial. El núcleo está comprendido en cada solución de von Neumann-Morgenstern (o conjunto estable) y cada imputación del núcleo debe ser estable en el sentido del conjunto de regateo. Conviene revisar los trabajos de Davis y Maschler (1963) y Peleg (1963, 1967) para ver demostraciones alternativas del carácter no vacío del conjunto de regateo. La principal dificultad que presentan estos conceptos de solución es su cálculo. También estudiaremos que si un juego es convexo, su conjunto de regateo coincide con el núcleo.

Otros conceptos de solución en esta misma línea son el kernel y el prekernel. El kernel fue introducido por Davis y Maschler (1965) y el prekernel por Maschler et al. (1972). Su cálculo, aunque puede ser tedioso, es más sencillo que el del conjunto de regateo de Aumann y Maschler.

Resumiendo, a lo largo del capítulo analizaremos los siguientes conceptos de solución tipo conjunto:

Concepto	Autores
Núcleo	Edgeworth (1881); Gillies (1953)
ε -núcleo	Shapley y Shubik (1963, 1966)

Concepto	Autores
Menor núcleo	Maschler et al. (1979)
D-núcleo	Gillies (1953, 1959)
Conjuntos estables	von Neumann y Morgenstern (1944)
Core-cover	Tijs y Lipperts (1982)
Conjunto de Weber	Weber (1988)
Conjunto de Harsanyi	Hammer et al. (1977); Vasil'ev (1980)
Conjunto de regateo	Aumann y Maschler (1965)
Kernel	Davis y Maschler (1965)
Prekernel	Maschler et al. (1972)

2.1. El núcleo y conceptos relacionados

El primer concepto de solución tipo conjunto que estudiamos es el núcleo. Se trata de seleccionar un subconjunto dentro del conjunto de imputaciones (es decir, repartos que satisfagan racionalidad individual y eficiencia) que, además, satisfagan la propiedad de racionalidad coalicional.

La racionalidad coalicional supone que a cada coalición $S \subset N$ debemos darle, al menos, lo que se puede garantizar por sí misma. Matemáticamente, esto quiere decir que $x(S) = \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$, para cada $S \subset N$. Diremos que las asignaciones seleccionadas de esta forma son estables, en el sentido de que ninguna coalición tendrá incentivos para desviarse y obtener un reparto mejor que lo que le asegura una asignación en el núcleo. Sin duda, la idea de asignación en el núcleo de un juego TU es similar a la de equilibrio de Nash de un juego no cooperativo. Formalmente, el concepto de núcleo queda expresado en la siguiente definición.

Definición 2.1 *El núcleo de un juego (N, v) es el conjunto:*

$$C(N, v) = \left\{ x \in I(N, v) : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \text{ para todo } S \subset N, S \neq \emptyset \right\}.$$

TUGlab: Para saber si una imputación pertenece al núcleo, TUGlab dispone de la orden BELONGTOCORE, cuya sintaxis y funcionamiento quedan recogidas en el siguiente ejemplo:

```
>> A=[0 0 0 2 1 1 6];punto=[0 1];
>> [estable,info]=belongtocore(A,punto)
estable = 0
info = x+y<v{12}
```

Fijémonos en que el reparto determinado por el vector punto tan sólo tiene 2 componentes; naturalmente la tercera la calcula el programa por la condición de eficiencia. En nuestro ejemplo, el reparto eficiente $(0, 1, 5)$ no está en el núcleo, ya que la suma de las asignaciones a los jugadores 1 y 2 es estrictamente menor que $v(12)$.

Presentamos, a continuación, una condición necesaria para que el núcleo de un juego no sea vacío. Un ejemplo ilustrará que dicha condición no es suficiente.

Proposición 2.2 *Si el núcleo de un juego (N, v) no es vacío, $C(N, v) \neq \emptyset$, entonces*

$$\sum_{i=1}^k v(P_i) \leq v(N),$$

para toda partición $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ de N .

Demostración: Dado $x \in C(N, v)$ tenemos que $\sum_{i \in P_j} x_i \geq v(P_j)$ para todo $P_j \in \mathcal{P}$. Entonces

$$\sum_{j=1}^k v(P_j) \leq \sum_{j=1}^k \sum_{i \in P_j} x_i = \sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

que es la relación buscada. ■

TUGlab: Cuando el núcleo de un juego no es vacío, TUGlab dispone de la orden CORESET para dibujarlo. En general, recomendamos dibujar el núcleo en una misma ventana con el conjunto de imputaciones. El núcleo se representará coloreado de gris. Esto se realiza con la siguiente cadena de comandos:

```

>> A=[0 0 0 0 1 2 1 1 1 1 4 3 2 1 7];
>> imputationset(A)
>> hold on % fija la ventana de dibujo
>> axis(axis) % fija la escala de los ejes
>> coreset(A)

```

El dibujo resultante puede verse en la Figura 2.1. Algunas gráficas correspondientes a núcleos de juegos de 3 jugadores pueden verse en la Figura 2.2.

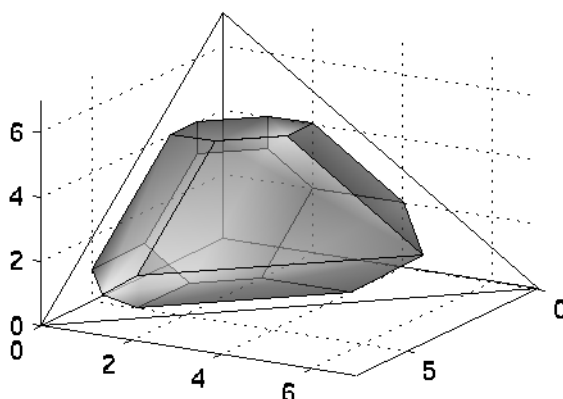


Figura 2.1: Núcleo de un juego de 4 jugadores con TUGlab

La condición (2.2) no es suficiente como se puede comprobar con el juego de dividir el dólar. En efecto, este juego tiene núcleo vacío y sin embargo se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
 v(1, 2, 3) &\geq v(1, 2) + v(3) \\
 &\geq v(2, 3) + v(1) \\
 &\geq v(1, 3) + v(2) \\
 &\geq v(1) + v(2) + v(3).
 \end{aligned}$$

Volveremos más adelante en esta sección (véase la Definición 2.19) a buscar una condición suficiente para que el núcleo de un juego no sea vacío y que, naturalmente, incluirá a la condición enunciada en la Proposición 2.2.

Ejemplo 2.3 *Fácilmente se comprueba que el núcleo del juego del guante en el que $L = \{1\}$ y $R = \{2, 3\}$, o sea, el jugador 1 tiene un guante izquierdo y los jugadores 2 y 3 tienen un guante derecho cada uno, se reduce a la asignación $(1, 0, 0)$. La interpretación de esta asignación es que toda la utilidad la recibe el jugador que dispone del bien que escasea.*

Ejemplo 2.4 *Sea $N = \{1, 2, 3\}$ y el siguiente juego paramétrico,¹*

$$\begin{aligned} v(1, 2, 3) &= 1 \\ v(1, 2) &= v(1, 3) = \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ v(S) &= 0 \text{ en otro caso.} \end{aligned}$$

Es un buen ejercicio, que recomendamos al lector, comprobar que:

$$C(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_2 \leq 1 - \alpha, x_3 \leq 1 - \alpha, \sum_{i=1}^3 x_i = 1 \right\}.$$

Dependiendo del valor de α , tenemos que:

- *Si $0 \leq \alpha \leq 0.5$, entonces el núcleo coincide con*

$$\text{conv}(\{(1, 0, 0), (\alpha, 0, 1 - \alpha), (\alpha, 1 - \alpha, 0), (0, \alpha, 1 - \alpha), (0, 1 - \alpha, \alpha)\}).$$

- *Si $0.5 \leq \alpha \leq 1$, entonces el núcleo coincide con*

$$\text{conv}(\{(1, 0, 0), (\alpha, 0, 1 - \alpha), (\alpha, 1 - \alpha, 0), (2\alpha - 1, 1 - \alpha, 1 - \alpha)\}).$$

En la Figura 2.2 se han dibujado los núcleos correspondientes a $\alpha = 0.25$ y $\alpha = 0.75$.

Como se puede observar en el siguiente resultado, conocido el núcleo de un juego (N, v) es sencillo obtener el núcleo de un juego (N, w) estratégicamente equivalente a él.

Proposición 2.5 *Si dos juegos (N, v) y (N, w) son estratégicamente equivalentes, entonces $x \in C(N, v)$ si, y sólo si, $kx + a \in C(N, w)$, siendo $k > 0$ y (N, a) el juego aditivo tales que $w = kv + a$.*

¹En un juego paramétrico el valor de al menos una coalición depende de un parámetro.

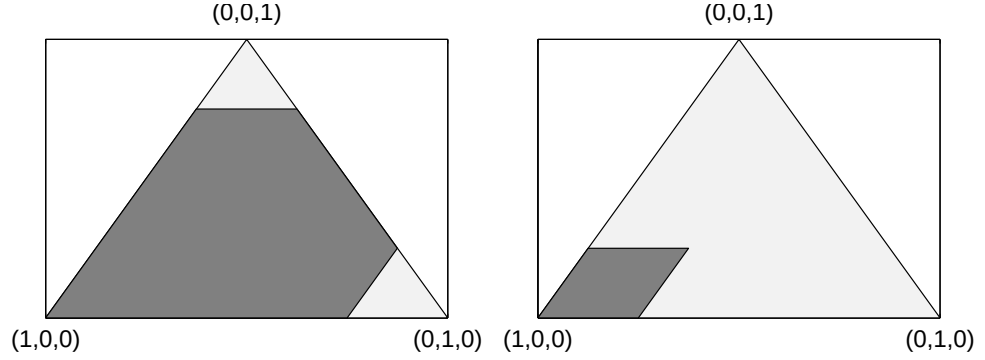


Figura 2.2: Núcleos de juegos de 3 jugadores con TUGlab

Naturalmente, la definición del núcleo para un juego de costes se obtiene invirtiendo las desigualdades en la Definición 2.1.

Observación 2.6 *El núcleo de un juego de costes (N, c) se define como el conjunto*

$$C^r(N, c) = \left\{ x \in I^r(N, c) : \sum_{i \in S} x_i \leq c(S), \text{ para todo } S \subset N, S \neq \emptyset \right\}.$$

Se comprueba fácilmente que:

- $x \in C^r(N, c) \Leftrightarrow -x \in C(N, -c)$
- (N, c) es cóncavo $\Leftrightarrow (N, -c)$ es convexo.
- Si (N, v_c) es el juego de ahorros asociado al juego de costes (N, c) ,

$$x = (x_i)_{i \in N} \in C(N, v_c) \Leftrightarrow (c(i) - x_i)_{i \in N} \in C^r(N, c).$$

Este último resultado es consecuencia de que el juego de ahorros (N, v_c) es estratégicamente equivalente al juego de costes (N, c) (con $k = -1$ y $a_i = c(i)$ para $i \in N$).

Ejemplo 2.7 *Retomamos el juego de la depuradora que abastece a tres municipios que presentábamos en el Ejemplo 1.1. El juego de ahorros (N, v_c)*

asociado al juego de costes viene dado por:

$$\begin{aligned} v_c(A) &= v_c(B) = v_c(C) = 0 \\ v_c(A, B) &= 2000 \\ v_c(A, C) &= 0 \\ v_c(B, C) &= 1000 \\ v_c(A, B, C) &= 2500 \end{aligned}$$

El núcleo del juego de ahorros se corresponde con

$$C(N, v_c) = \text{conv}(\{(1500, 500, 500), (1500, 1000, 0), (0, 2500, 0), (0, 2000, 500)\})$$

y se representa en la Figura 2.3.

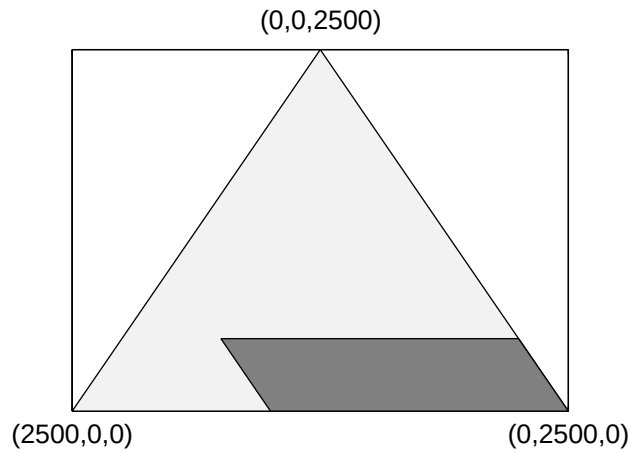


Figura 2.3: Núcleo del juego de ahorros asociado al juego de la depuradora

El núcleo del juego de costes es

$$C^r(N, c) = \text{conv}(\{(3500, 2500, 4500), (3500, 2000, 5000), (5000, 500, 5000), (5000, 1000, 4500)\}).$$

Dejamos que el lector represente este núcleo y lo compare con el del juego de ahorros.

El siguiente resultado determina una clase de juegos que tienen núcleo vacío: los esenciales de suma constante. A esta clase de juegos pertenece el juego del dólar.

Definición 2.8 Un juego (N, v) es de suma constante si

$$v(S) + v(N \setminus S) = v(N) \text{ para todo } S \subset N.$$

En un juego de suma constante la utilidad de la gran coalición se reparte íntegramente entre la utilidad de una coalición cualquiera y la de su complementaria.

Proposición 2.9 Si (N, v) es un juego esencial no degenerado y de suma constante entonces $C(N, v) = \emptyset$.

Demostración: Sea (N, v) un juego de suma constante y $x \in C(N, v)$. Entonces, para cada jugador $i \in N$,

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \geq v(N \setminus \{i\}) = v(N) - v(\{i\}).$$

Además, dado que x es eficiente,

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = v(N) - x_i.$$

Luego, $x_i \leq v(\{i\})$. Al ser $x \in I(N, v)$, $x_i = v(\{i\})$ para todo $i \in N$ y, por tanto, el juego es degenerado. ■

La existencia, o no, de asignaciones estables para un juego degenerado de suma constante se analiza en el Ejercicio 14 del Capítulo 5.

La siguiente proposición establece cotas para las asignaciones que pueden recibir los jugadores en el núcleo. Además, en el caso de que el vector de cotas superiores sea eficiente, el núcleo es unitario y proporciona a cada jugador su contribución a la gran coalición.

Proposición 2.10 Sea $(N, v) \in G^n$.

a) Si $x \in C(N, v)$ entonces, para cada $i \in N$,

$$v(i) \leq x_i \leq v(N) - v(N \setminus i).$$

b) Supongamos que $C(N, v) \neq \emptyset$. Si $\sum_{i \in N} (v(N) - v(N \setminus i)) = v(N)$ entonces

$$C(N, v) = \{(v(N) - v(N \setminus i))_{i \in N}\}.$$

Demostración: El apartado a) se obtiene fácilmente, dado que si $x \in C(N, v)$ entonces

$$v(N) = \sum_{i \in N} x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j + x_i \geq v(N \setminus \{i\}) + x_i.$$

Ahora, la afirmación en b) es inmediata y se deja como ejercicio al lector. ■

En general, si el núcleo de un juego no es vacío ha de ser un poliedro convexo y compacto, tal y como se prueba en el siguiente resultado.

Teorema 2.11 *Sea $(N, v) \in G^n$ tal que $C(N, v) \neq \emptyset$. Entonces se tiene que:*

- a) *El núcleo $C(N, v)$ es un poliedro convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$.*
- b) *Existen $x_1, \dots, x_k \in C(N, v)$ tales que cualquier elemento del núcleo $x \in C(N, v)$ puede escribirse como*

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, \text{ con } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i.$$

Es decir, el núcleo es la envoltura convexa de los puntos $x_1, \dots, x_k$,

$$C(N, v) = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_k\}).$$

Demostración: El apartado a) es inmediato de la propia definición de núcleo como conjunto de vectores que son soluciones de un sistema de desigualdades lineales (con $\geq$).

El apartado b) se obtiene sin más que aplicar el teorema de Krein-Milman (véase Krein y Milman (1940)), que ya empleamos en la Proposición 1.25 al tratar con el conjunto de imputaciones. ■

La definición del núcleo de un juego nos proporciona una H-representación del mismo, es decir, el núcleo es la intersección de los semiespacios positivos determinados por una colección finita de hiperplanos. El resultado anterior menciona una V-representación del núcleo, esto es, el núcleo puede verse como la envoltura convexa de una colección finita de puntos.

TUGlab: El comando COREVERTICES de TUGlab calcula los puntos extremos del núcleo.

```
>> A=[0 0 0 0 1 2 1 1 1 1 4 3 2 1 7];
>> extremos=corevertices(A)
extremos =
      0      1.0000      3.0000      3.0000
      0      1.0000      4.0000      2.0000
      0      2.0000      2.0000      3.0000
      0      2.0000      4.0000      1.0000
  1.0000          0      3.0000      3.0000
  1.0000          0      4.0000      2.0000
  3.0000          0      1.0000      3.0000
  2.0000          0      4.0000      1.0000
  2.0000      2.0000          0      3.0000
  3.0000      1.0000          0      3.0000
  1.0000      2.0000      4.0000          0
  1.0000      5.0000      1.0000          0
  2.0000      1.0000      4.0000          0
      0      4.0000      2.0000      1.0000
  5.0000          0      1.0000      1.0000
  2.0000      4.0000          0      1.0000
  5.0000      1.0000          0      1.0000
  5.0000      1.0000      1.0000          0
  5.5000      0.5000      0.5000      0.5000
```

Así pues, COREVERTICES nos proporciona una V-representación del núcleo. TUGlab dispone de varios comandos que permiten calcular H-representaciones y V-representaciones minimales del núcleo. Remitimos al lector al manual de usuario en el CD que acompaña al libro.

Para un juego de 3 jugadores el núcleo tendrá a lo sumo 6 puntos extremos mientras que para un juego de 4 jugadores este número asciende a 24. En Derks y Kuipers (2002) se analiza con meticulosidad el problema de determinar el número de puntos extremos del núcleo. En la selección de juegos de 4 jugadores del Capítulo 5 recogemos un sorprendente ejemplo de un núcleo, el que realizamos una representación, con el número máximo de puntos extremos.

Observación 2.12 *El núcleo puede tener puntos extremos en los que ninguna coordenada sea máxima para ningún agente. Consideremos el juego (N, v) con*

$N = \{1, 2, 3, 4\}$ y función característica

$$v(i) = 0, \text{ para todo } i \in N$$

$$v(1, 2) = 10, v(1, 3) = 30, v(1, 4) = 30, v(2, 3) = 30, v(2, 4) = 10, v(3, 4) = 20$$

$$v(1, 2, 3) = 90, v(1, 2, 4) = 40, v(1, 3, 4) = 40, v(2, 3, 4) = 90$$

$$v(N) = 160$$

Es fácil ver que $(0, 100, 30, 30)$ es un punto extremo del núcleo y que para cada $i \in N$, x_i no es máxima. Para ello basta tener en cuenta que $(10, 0, 80, 70)$ y $(20, 120, 10, 10)$ son también asignaciones extremas del núcleo del juego. Obsérvese que este juego no es convexo. El núcleo y sus extremos se representan en la Figura 2.4.

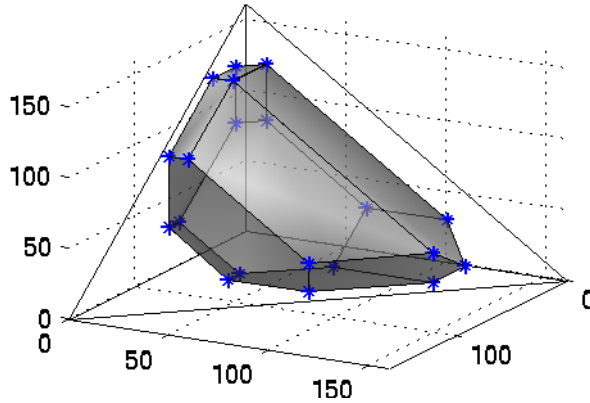


Figura 2.4: Núcleo con puntos extremos en los que ninguna coordenada es máxima para ningún agente

Hemos hablado ya de la contribución de un jugador i a una coalición S , $i \notin S$, que es el incremento $v(S \cup \{i\}) - v(S)$. Vamos a definir ahora un tipo especial de asignaciones eficientes, llamadas contribuciones marginales, que de ser estables, son puntos extremos del núcleo. Fijamos, pues, un orden de los jugadores de la gran coalición y calculamos la contribución marginal de cada jugador a la coalición formada por sus predecesores en el orden elegido. Así, aplicando este proceso a cada jugador, obtenemos un vector denominado de contribuciones marginales. Fácilmente se puede observar que tenemos $n!$

vectores, tantos como órdenes de la gran coalición, y que estos vectores son eficientes.

Definición 2.13 Sea $\sigma: N \rightarrow N$ una permutación de N , i.e. $\sigma \in \Pi(N)$.² Se define el vector de contribuciones marginales asociado al orden σ , $m^\sigma(N, v) = (m_i^\sigma(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^n$, como

$$m_i^\sigma(v) = v(\text{Pre}_\sigma(i) \cup \{i\}) - v(\text{Pre}_\sigma(i))$$

donde $\text{Pre}_\sigma(i) = \{j \in N : \sigma(j) < \sigma(i)\}$, es decir, es el conjunto de jugadores que preceden al jugador i en el orden σ .

Si no hay confusión escribiremos $m^\sigma(v)$ en lugar de $m^\sigma(N, v)$ para designar a los vectores marginales. Veamos que, en efecto, si un vector de contribuciones marginales pertenece al núcleo del juego entonces ha de ser un vértice.

Proposición 2.14 Sean (N, v) un juego TU y $\sigma \in \Pi(N)$ cualquier permutación de los jugadores de N .

- a) Si $m^\sigma(v) \in C(N, v)$ entonces $m^\sigma(v)$ es un punto extremo del núcleo.
- b) Si (N, v) es un juego convexo entonces $m^\sigma(v) \in C(N, v)$.

Demostración: Sea $\sigma = (i_1, \dots, i_n) \in \Pi(N)$. Se verifican las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned} m_{i_1}^\sigma(v) &= v(i_1) \\ m_{i_1}^\sigma(v) + m_{i_2}^\sigma(v) &= v(i_1) + v(i_1, i_2) - v(i_1) = v(i_1, i_2) \\ &\vdots \\ \sum_{j=i_1}^{i_n} m_j^\sigma(v) &= v(i_1, \dots, i_n) \end{aligned}$$

Hemos comprobado que todo vector de contribuciones marginales satura n igualdades linealmente independientes del núcleo y, por lo tanto, si pertenece al núcleo tiene que ser un punto extremo. Queda probada la afirmación del apartado a).

²Sea $S \subset N$, $\Pi(S)$ denota las permutaciones de los jugadores de S . Para cada $\sigma_S \in \Pi(S)$ e $i \in S$, $\sigma_S(i)$ representa la posición del jugador i en el orden σ_S . Escribiremos abreviadamente σ en lugar de σ_N .

Para demostrar b) hemos de ver que todo vector de contribuciones marginales está en el núcleo del juego o, equivalentemente, que para cada $\sigma \in \Pi(N)$ y $S \subset N$, $\sum_{i \in S} m_i^\sigma(v) \geq v(S)$. Consideremos $\sigma \in \Pi(N)$. Para cada $S \subset N$ denotemos por $\sigma_S = \{i_1, \dots, i_s\} \in \Pi(S)$ la permutación de los jugadores de S obtenida a partir de σ eliminando de ésta los jugadores de $N \setminus S$. Dado que (N, v) es convexo, la contribución de cada jugador a sus predecesores crece, o se mantiene, a medida que éste se va incorporando más tarde a la coalición. Así,

$$\begin{aligned} m_{i_1}^\sigma(v) &\geq v(i_1) \\ m_{i_2}^\sigma(v) &\geq v(i_1, i_2) - v(i_1) \\ &\vdots \\ m_{i_s}^\sigma(v) &\geq v(S) - v(i_1, \dots, i_{s-1}) \end{aligned}$$

Sumando obtenemos el resultado buscado. ■

Como corolario de la proposición anterior se deduce que el núcleo de un juego convexo no es vacío. Volveremos a retomar la estrecha relación que, para la clase de los juegos convexos, existe entre los vectores marginales y el núcleo en la Sección 2.5.

TUGlab: Los vectores de contribuciones marginales de un juego se obtienen en TUGlab a partir de la orden SHAPLEY. Como veremos en el próximo capítulo, esta orden calcula el valor de Shapley a partir de los vectores de contribuciones marginales, de ahí que éstos aparezcan vinculados a esta sentencia como segundo resultado de la misma. Veamos un ejemplo,

```
>> A=[0 0 0 6 5 5 10];
>> [Sh,contribuciones]=Shapley(A)
Sh =    3.5000    3.5000    3.0000
contribuciones =
    0     6     4
    0     5     5
    6     0     4
    5     0     5
    5     5     0
```


5 5 0

Hemos calculado, al mismo tiempo, el valor de Shapley y los 6 vectores de contribuciones marginales del juego A.

Nos ocuparemos ahora de investigar algunas características geométricas del núcleo. La estructura convexa del núcleo es, ciertamente, interesante. Detengámonos en analizar los casos de 3 y 4 jugadores, los únicos (exceptuando el caso trivial de 2 jugadores) para los que podemos hacer una representación gráfica del núcleo y que son, en consecuencia, los que podemos dibujar con TUGlab.

El núcleo de un juego de 3 jugadores está formado por los vectores, o repartos, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$x_1 + x_2 + x_3 = v(123)$$

y que, además, satisfagan las desigualdades:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq v(1) \\ x_2 &\geq v(2) \\ x_3 &\geq v(3) \\ x_1 + x_2 &\geq v(12) \\ x_1 + x_3 &\geq v(13) \\ x_2 + x_3 &\geq v(23) \end{aligned}$$

Despejando de la condición de eficiencia, $x_3 = v(123) - x_1 - x_2$, y substituyendo en las desigualdades anteriores obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} v(1) &\leq x_1 \leq v(123) - v(23) \\ v(2) &\leq x_2 \leq v(123) - v(13) \\ v(12) &\leq x_1 + x_2 \leq v(123) - v(3) \end{aligned}$$

Luego, el núcleo de un juego de 3 jugadores tendrá a lo sumo 6 caras de dimensión 1 (segmentos) que serán paralelas dos a dos.

Análogamente, el núcleo de un juego de 4 jugadores está formado por los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = v(1234)$$

y que, además, satisfagan las desigualdades:

$$\begin{aligned}
 v(1) &\leq x_1 && \leq v(1234) - v(234) \\
 v(2) &\leq x_2 && \leq v(1234) - v(134) \\
 v(3) &\leq x_3 && \leq v(1234) - v(124) \\
 v(12) &\leq x_1 + x_2 && \leq v(1234) - v(34) \\
 v(13) &\leq x_1 + x_3 && \leq v(1234) - v(24) \\
 v(23) &\leq x_2 + x_3 && \leq v(1234) - v(14) \\
 v(123) &\leq x_1 + x_2 + x_3 && \leq v(1234) - v(4)
 \end{aligned}$$

El núcleo de un juego de 4 jugadores podrá llegar a tener 14 caras de dimensión 2 (poliedros planos) que serán paralelas dos a dos.

TUGlab: El comando COREINFO de TUGlab proporciona información detallada de la estructura convexa del núcleo. Veamos cómo se utiliza con un ejemplo:

```

>> A=[0 0 0 6 5 5 10]
>> [E,H,C,nP,nH,Ha,ExH,MPC]=coreinfo(A)
E =
     5     5     0
     5     1     4
     1     5     4
H =
     1     0     0
    -1     0     5
     0     1     0
     0    -1     5
     1     1    -6
    -1    -1    10
C =     1     2     3
nP =     3
nH =     3
Ha =     2     4     5
ExH =
     0     1     0     1     0     1
     0     1     0     0     1     0
     0     0     0     1     1     0
MPC=     2

```

Las variables calculadas por la orden COREINFO contienen la siguiente información:

- E: los extremos del núcleo.
- H: los hiperplanos que definen el núcleo. Cada hiperplano se designa mediante un vector 1×3 (o 1×4 si el juego es de 4 jugadores) de coeficientes. Así, $[a \ b \ c]$ debe leerse como la recta $ax_1 + bx_2 + c = 0$ ($[a \ b \ c \ d]$ es el plano $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$).
- C: Para juegos de 3 jugadores, proporciona un orden de los extremos del núcleo para poder dibujar la frontera del mismo sin más que unir cada punto con su consecutivo.³ Para juegos de 4 jugadores, si una fila de C es, por ejemplo,

$[1 \ 2 \ 5 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3]$

 significa que una de las caras del núcleo tiene como vértices los puntos que ocupan las filas 1, 2, 5 y 3 de la variable E.⁴
- nP: número de puntos extremos del núcleo.
- nH: número de caras (no triviales) del núcleo.
- Ha: hiperplanos del núcleo que forman las caras no triviales, es decir, aquellos a los que pertenecen 2 puntos extremos (o más de 2 en el caso de juegos de 4 jugadores).
- ExH: Matriz (a_{ij}) de orden $nP \times 6$ (o $nP \times 14$) tal que $a_{ij} = 1$ si el punto de la fila i de E pertenece al hiperplano j de H ó $a_{ij} = 0$ si el punto i no pertenece al hiperplano j .
- MPC: número máximo de vértices de cualquier cara del núcleo.

En general, si el núcleo de un juego no es vacío entonces es un poliedro convexo y compacto de dimensión $n - 1$ a lo sumo, pues está contenido en el

³En general, las órdenes de dibujo de MATLAB®, como la básica PLOT, proceden del modo descrito. Así, para dibujar, por ejemplo, un hexágono conocidos los vértices, es preciso introducir éstos en el orden adecuado, de otro modo, no obtendríamos el hexágono sino una poligonal con líneas que se entrecruzan.

⁴La matriz C en combinación con el comando PATCH de MATLAB® permite, por ejemplo, dibujar por separado cualquiera de las caras del núcleo.

hiperplano $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$. Los núcleos “más completos”, técnicamente denominados por Shapley (1971) núcleos con estructura estrictamente completa, tienen dimensión máxima y, exactamente, $2^n - 2$ caras de dimensión $n - 2$: una por cada uno de los hiperplanos que lo definen. Ciertamente, el núcleo puede no tener dimensión máxima y ser “degenerado” (un único punto o un segmento en el caso de 3 jugadores; un punto, un segmento o un poliedro plano para juegos de 4 jugadores), véase la Figura 2.5.

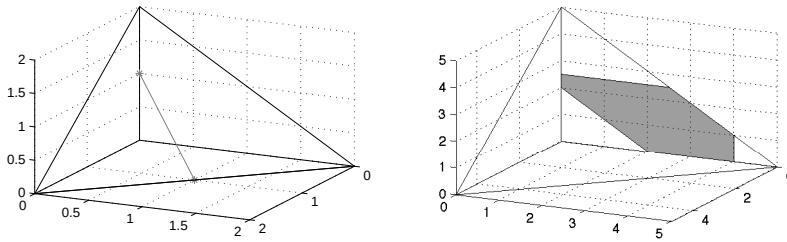


Figura 2.5: Núcleos “degenerados” de juegos de 4 jugadores

Algunas de las posibles estructuras del núcleo tienen un interés más allá del meramente geométrico. Mencionemos algunas de ellas.

Definición 2.15 (Schmeidler (1971)) Sea (N, v) un juego cuyo núcleo no es vacío. Diremos que (N, v) es exacto si para cada $S \subset N$, existe $x \in C(N, v)$ tal que $\sum_{i \in S} x_i = v(S)$.

Sea (N, v) un juego cuyo núcleo no es vacío. Se puede demostrar que hay un único juego exacto $(N, \hat{v})$ tal que $C(N, \hat{v}) = C(N, v)$. Este juego se conoce como la envoltura exacta de (N, v) . Una propiedad de los juegos exactos es que si dos juegos de esta clase tienen el mismo núcleo entonces son el mismo juego.

Shapley (1971) llama juegos con estructura completa a los juegos exactos: la intersección del núcleo con cualquiera de los hiperplanos que lo definen no es vacía (aunque no tenga necesariamente dimensión $n - 2$). En este mismo trabajo se analiza la configuración del núcleo, de sus caras y del número de vértices. Muchos de estos aspectos geométricos pueden ser explorados con

facilidad con TUGlab.⁵

Todos los juegos convexos son exactos. Si un juego es estrictamente convexo entonces todos los vectores de contribuciones marginales son distintos y su núcleo tiene estructura estrictamente completa.

TUGlab: El paquete TUGlab incorpora la orden EXACTGAME para determinar si un juego es exacto. Además, informa del número de vértices del núcleo que pertenecen a cada uno de los hiperplanos que lo definen y de si el núcleo tiene estructura estrictamente completa.

```
>> A=[0 2 2 0 5 5 0 5 2 2 9 5 5 5 11];
>> [E,info,cs]=exactgame(A)
E = 1
info =
      3      2      4      2      4      2      5      6      5      2      5      2      4      2
cs = 0
>> C=convexgame(A)
C = 0
```

El ejemplo anterior muestra un juego exacto que no es convexo. Su núcleo se representa, visto desde distintos ángulos, en la Figura 2.6. Las Figuras 5.15 y 5.17 de la Sección 5.3 muestran núcleos de juegos con estructura estrictamente completa.

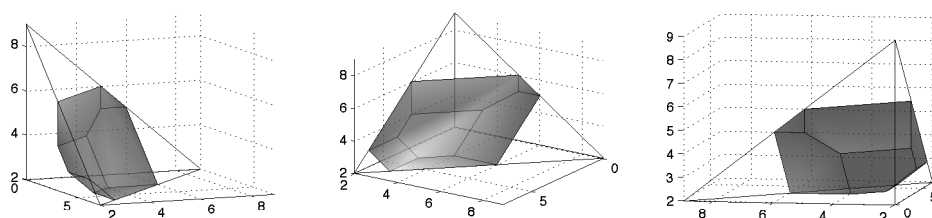


Figura 2.6: Tres vistas del núcleo de un juego exacto no convexo

⁵De hecho, muchos de ellos han desempeñado un papel esencial en la programación de los comandos de dibujo relativos al núcleo en TUGlab.

En esta misma línea de analizar aspectos geométricos del núcleo de un juego, nos centraremos en una sorprendente propiedad geométrica de los juegos convexos. Primeramente definimos los juegos de las caras introducidos en González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2008a). Para cada $T \subset N$, $T \neq \emptyset$, consideramos el hiperplano $H_T = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in T} x_i = v(T)\}$ y denotemos por $F_T = C(N, V) \cap H_{N \setminus T}$, la cara del núcleo que se obtienen al cortarlo por el hiperplano $H_{N \setminus T}$.

Definición 2.16 Sea (N, v) un juego cuyo núcleo no es vacío y $T \subset N$. El juego de la cara T , (o “ T -face game”), denotado por (N, v_{F_T}) , se define, para cada $S \subset N$, como:

$$v_{F_T}(S) = v((S \cap T) \cup (N \setminus T)) - v(N \setminus T) + v(S \cap (N \setminus T)).$$

Se puede comprobar que si $T = \emptyset$ ó $T = N$ entonces $(N, v_{F_T}) = (N, v)$. Además, si $S \cap T = \emptyset$ entonces $v_{F_T}(S) = v(S)$. Si el juego es convexo, en el juego de la cara (N, v_{F_T}) , el valor de la coalición T coincide exactamente con $v(N) - v(N \setminus T)$, su máximo pago en $C(N, v)$, y el valor de la coalición $N \setminus T$ es su mínimo pago en $C(N, v)$, es decir, $v(N \setminus T)$.

Los siguientes resultados proporcionan una idea clara de lo que representan los juegos de las caras y sus núcleos para la clase de juegos convexos.

Proposición 2.17 Sean (N, v) un juego convexo y $T \subset N$. Entonces:

- a) El juego (N, v_{F_T}) es convexo.
- b) La cara F_T puede expresarse como,⁶

$$F_T = \text{conv}(\{m^\sigma(N, v) : \sigma = (\sigma_{N \setminus T}, \sigma_T)\}).$$

El siguiente resultado establece que cada cara del núcleo de un juego convexo es, a su vez, el núcleo de un juego de una cara.

Proposición 2.18 Sea (N, v) un juego convexo y $T \subset N$. Se cumple que $C(N, v_{F_T}) = F_T$. Además,

$$C(N, v) = \text{conv}(\{C(N, v_{F_T}) : \emptyset \neq T \subset N, T \neq N\}).$$

⁶Las permutaciones del tipo $\sigma = (\sigma_{N \setminus T}, \sigma_T)$ ordenan en primer lugar a los jugadores de $N \setminus T$ y luego a los de T .

Puede consultarse el trabajo González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2008a) como complemento al artículo de Shapley (1971). En ambos se incide sobre la geometría de los núcleos de los juegos convexos y los juegos estrictamente convexos.

TUGlab: Calcular los juegos de las caras con TUGlab es sencillo, basta con utilizar la orden `FACESGAMES`.

```
>> A=[0,0,0,0,10,40,30,50,10,20,90,40,80,90,160];
>> F=facesgames(A)
F =
70    0    0    0  70  70  70  50  10  20 120  80  90  90 160
  0  80    0    0  80  40  30  80  80  20 120 110  80 100 160
  0    0 120    0 10 120  30 120 10 120 130  40 150 130 160
  0    0    0  70 10  40  70  50  70  70  90  80 110 120 160
60  70    0    0 140  60  60  70  70  20 140 140  80  90 160
30    0  80    0  30 150  30  80 10  80 150  40 150  90 160
40    0    0  40  40  40 110  50  40  40  90 110 110  90 160
  0 10  50    0 10  50  30 130 10  50 130  40  80 130 160
  0  50    0  40  50  40  40  50 120  40  90 120  80 120 160
  0    0  80  30 10  80  30  80  30 150  90  40 150 150 160
30 10  20    0  40  80  30  90 10  20 160  40  80  90 160
40  50    0  20  90  40  80  50  90  20  90 160  80  90 160
10    0  50 10 10  90  40  50 10  90  90  40 160  90 160
  0 10  40  30 10  40  30  90  40  80  90  40  80 160 160
```

Cada fila de la matriz F es un juego de una cara, el correspondiente a la coalición que ocupa la misma posición que el número de la fila en el orden que hemos adoptado para introducir los datos de la función característica en TUGlab.⁷ Ahora podemos comprobar que, en efecto, las caras del núcleo del juego original A , imagen de la izquierda en la Figura 2.7, son los núcleos de los juegos de las caras. En la imagen de la derecha de la Figura 2.7 se presentan los núcleos de los juegos de las caras correspondientes a las coaliciones $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,3\}$ y $\{2,3\}$.

⁷Para 3 jugadores este orden es: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ y $\{1,2,3\}$. Para 4 jugadores, el orden es: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$ y $\{1,2,3,4\}$.

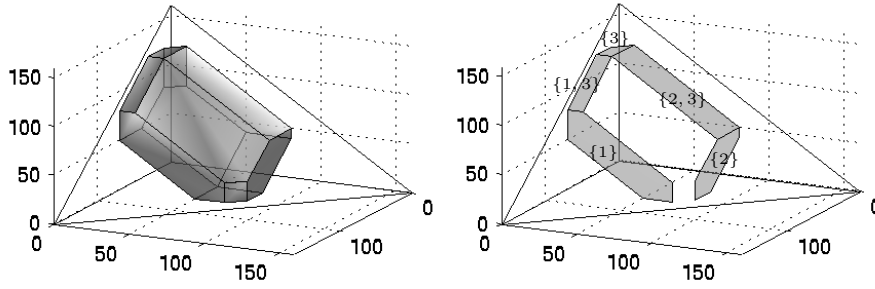


Figura 2.7: El núcleo y su relación con los juegos de las caras

Hasta aquí hemos estudiado algunas peculiaridades de la “forma” que debe tener el núcleo de un juego siempre que éste no sea vacío. Ahora trataremos de buscar condiciones que nos garanticen esta deseable propiedad. Nuestro punto de partida es la condición necesaria demostrada en la Proposición 2.2, que pretendemos generalizar en busca de una caracterización de los juegos cuyo núcleo no es vacío.

Definición 2.19 Una familia $\mathcal{F}$ de coaliciones no vacías de N se dice equilibrada si existen unos pesos positivos $\{\delta_S\}_{S \in \mathcal{F}}$, $\delta_S > 0$ para toda $S \in \mathcal{F}$, tales que $\sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S e^S = e^N$, siendo $e^S \in \mathbb{R}^n$ el vector característico de S , i.e.

$$e_i^S = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

o, equivalentemente, $\sum_{S \in \mathcal{F}, i \in S} \delta_S = 1$ para todo $i \in N$.

Pongamos un par de ejemplos de familias equilibradas:

- Cualquier partición de N , $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$, es una familia equilibrada, con $\delta_S = 1$ para toda $S \in \mathcal{P}$.
- Sea $N = \{1, 2, 3\}$, entonces $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ es una familia equilibrada, con $\delta_S = \frac{1}{2}$ para toda $S \in \mathcal{F}$.

En el Ejercicio 19 del Capítulo 5 se estudian algunas propiedades de las familias equilibradas.

Definición 2.20 Un juego (N, v) se dice equilibrado si para toda familia $\mathcal{F}$ equilibrada, con pesos asociados $\{\delta_S\}_{S \in \mathcal{F}}$, se verifica que

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S v(S) \leq v(N).$$

En la definición anterior, $\sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S v(S)$ representa el valor esperado de v asociado a la distribución de probabilidad $\{\delta_S\}_{S \in \mathcal{F}}$.

TUGlab: TUGlab también dispone de una orden para saber si un juego es o no equilibrado. La sentencia `BALANCEDGAME` puede tomar dos valores: 0 si el juego no es equilibrado y 1 si es equilibrado. En caso negativo, también calcula una familia equilibrada que no satisfaga la propiedad de la Definición 2.20.

```
>> A=[0 0 0 0 1 0 0 0 0 3 3 3 3 3 4];
>> [equilibrado,info]=balancedgame(A)
equilibrado = 0
info =      v{1234}<1/2*(v{34}+v{123}+v{124})
```

A continuación probaremos el teorema que caracteriza los juegos cuyo núcleo no es vacío a partir de las familias equilibradas. Recordemos previamente el teorema de dualidad de programación lineal.

Teorema 2.21 Consideremos el problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^t x \\ \text{sujeto a:} & Ax \geq b, \end{array} \quad (Primal)$$

siendo $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$.⁸ El correspondiente problema dual viene dado por

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & b^t y \\ \text{sujeto a:} & A^t y = c \\ & y \geq 0 \end{array} \quad (Dual)$$

⁸En esta formulación matricial de los problemas de programación lineal tratamos a los vectores x , c y b como vectores columna.

siendo $y \in \mathbb{R}^m$. Si uno de los problemas (Primal) o (Dual) es resoluble (tiene solución óptima finita), entonces el otro problema, (Dual) o (Primal), también es resoluble y los correspondientes valores de la función objetivo de ambos problemas coinciden. Si uno de los problemas tiene solución no acotada, el otro no tiene soluciones factibles.

El teorema de Bondareva-Shapley establece que los juegos equilibrados coinciden con aquellos cuyo núcleo no es vacío.

Teorema 2.22 (Bondareva (1963); Shapley (1967)) *El núcleo del juego (N, v) no es vacío si, y sólo si, el juego es equilibrado.*

$$C(N, v) \neq \emptyset \Leftrightarrow (N, v) \text{ es equilibrado}$$

Demostración: La condición necesaria es consecuencia inmediata de la definición de juego equilibrado. En efecto, sea $\mathcal{F}$ una familia equilibrada. Por hipótesis, sabemos que existe $x \in C(N, v)$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S v(S) &\leq \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S \sum_{i \in S} x_i = \sum_{S \in \mathcal{F}} \sum_{i \in S} \delta_S x_i \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{F}: i \in S} \delta_S x_i \\ &= \sum_{i \in N} x_i \\ &= v(N) \end{aligned}$$

y, por lo tanto, (N, v) es equilibrado.

Probaremos la condición suficiente utilizando el teorema de dualidad de programación lineal. Consideremos el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} &\text{mín} \quad \sum_{i \in N} x_i \\ &\text{sujeto a :} \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \text{ para todo } S \subset N, S \neq \emptyset \end{aligned} \quad (P)$$

Fácilmente se comprueba que

$$C(N, v) \neq \emptyset \Leftrightarrow (P) \text{ es resoluble y su valor es } v(N).$$

Sea $x = (x_i)_{i \in N}$ una solución factible de (P), entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &\geq v(S), \text{ para todo } \emptyset \neq S \subset N, S \neq N \\ \sum_{i \in N} x_i &\geq v(N). \end{aligned}$$

Nótese, además, que todo elemento $x \in C(N, v)$ verifica que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} x_i &\geq v(S) \\ \sum_{i \in N} x_i &= v(N). \end{aligned}$$

Construimos el dual del problema primal (P):

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S v(S) \\ \text{sujeto a:} \quad & \begin{cases} \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S e^S = e^N \\ \delta_S \geq 0, \text{ para todo } S \subset N, S \neq \emptyset \end{cases} \end{aligned} \quad (D)$$

Comprobaremos que:

(D) es resoluble y su valor es $v(N) \Leftrightarrow (N, v)$ equilibrado.

El conjunto factible de (D) es cerrado, acotado y no vacío. Obviamente, $\delta_S = 0$ si $S \neq N$ y $\delta_N = 1$ es una solución factible de (D), para la cual,

$$\sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S v(S) = v(N).$$

Por lo tanto,

$$\text{máx} \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S v(S) \geq v(N).$$

Así pues, (D) es resoluble y su valor es $v(N)$ si, y sólo si, para todo δ , con $\delta_S \geq 0$ y $\sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S e^S = e^N$, se cumple que

$$\sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S v(S) \leq v(N).$$

Obsérvese que esta última condición es equivalente a decir que para toda familia equilibrada $\mathcal{F}$,

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S v(S) \leq v(N).$$

Aplicando ahora el Teorema 2.21 queda demostrada la suficiencia. ■

Si el carácter no vacío del núcleo de un juego se transmite a todos sus subjuegos se dice que el juego es totalmente equilibrado.

Definición 2.23 *Un juego (N, v) se dice totalmente equilibrado si todo subjuego (R, v_R) , con $R \subset N$, $R \neq \emptyset$, es equilibrado.*

TUGlab: El siguiente ejemplo muestra el funcionamiento del comando TOTALBALANCEDGAME de TUGlab que analiza si un juego es totalmente equilibrado.

```
>> A=[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1];
>> [totalequilibrado,info]=totalbalancedgame(A)
totalequilibrado = 0
info =
The subgame given by the coalition S={1,2,3}
is not balanced, because v{123}<(v{3}+v{12})
```

Llegados a este punto, dejamos que el lector interprete la información dada por TUGlab acerca del juego representado por el vector A .

Un ejemplo de un juego totalmente equilibrado nos ayudará a comprender mejor este concepto.

Ejemplo 2.24 *Consideremos el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y función característica:*

$$v(1, 2) = v(1, 2, 3) = v(2, 3) = v(2, 3, 4) = v(3, 4) = v(1, 2, 4) = v(1, 3, 4) = \frac{1}{2}$$

$$v(N) = 1, \quad v(S) = 0 \text{ en otro caso}$$

Obsérvese que $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \in C(N, v)$ y, por tanto, el juego (N, v) es equilibrado. Además, $(0, \frac{1}{2}, 0)$ es un elemento del núcleo de los subjuegos de las coaliciones

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ y $\{2, 3, 4\}$. También es sencillo comprobar que todos los juegos bipersonales tienen núcleo no vacío. Luego, el juego es totalmente equilibrado.

No todos los juegos equilibrados son totalmente equilibrados como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.25 Consideremos el juego de cuatro jugadores $N = \{1, 2, 3, 4\}$ con función característica:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| \in \{0, 1\} \text{ ó si } S \in \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\} \\ 1 & \text{si } |S| = 3 \text{ ó si } S \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\} \\ 2 & \text{si } |S| = 4 \end{cases}$$

Es sencillo ver que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in C(N, v)$. Luego el juego original es equilibrado. Pero el subjuego (T, v_T) con $T = \{1, 2, 3\}$ no es equilibrado (exactamente se corresponde con el juego del dólar). En consecuencia, el juego (N, v) no es totalmente equilibrado.

Proposición 2.26 Todo juego totalmente equilibrado es superaditivo.

Demostración: Sean $S, T \in 2^N$ tales que $S \cap T = \emptyset$. Dado que el subjuego de la coalición $S \cup T$ es equilibrado, existe $x \in \mathbb{R}^{|S \cup T|}$ tal que $x(S) \geq v(S)$, $x(T) \geq v(T)$ y $x(S \cup T) = v(S \cup T)$. Por tanto,

$$v(S) + v(T) \leq x(S) + x(T) = x(S \cup T) = v(S \cup T)$$

como queríamos demostrar. ■

El lector puede comprobar fácilmente que los juegos exactos son totalmente equilibrados. Una estrategia habitual para probar que una clase de juegos está contenida en la de los totalmente equilibrados es demostrar, en primer lugar, que todos los juegos de esa clase son equilibrados y, luego, que todos los subjuegos de un juego de la clase son juegos de la misma clase.

Trataremos ahora con una interesante clase de juegos, contenida en la de los totalmente equilibrados, definida a partir de una propiedad que conjuga monotonía y obtención de repartos eficientes en subcoaliciones.

Definición 2.27 (Sprumont (1990)) Sea $(N, v) \in G^n$. Una distribución monótona respecto a la población (“population monotonic allocation scheme”), abreviadamente PMAS, consiste en una distribución

$$(x_{i,S})_{\emptyset \neq S \subset N, i \in S}$$

verificando:

1. Para toda $S \subset N$, $\sum_{i \in S} x_{i,S} = v(S)$ (eficiencia relativa a S).
2. Para toda $S \subset T$ y todo $i \in S$, $x_{i,S} \leq x_{i,T}$ (monotonía).

Como es fácil suponer, un juego no tiene por que tener estas distribuciones, pero la clase de los juegos que las poseen forma una subclase de los juegos totalmente equilibrados.

Proposición 2.28 Si un juego cooperativo tiene PMAS entonces es totalmente equilibrado.

Demostración: Sea $(x_{i,S})_{\emptyset \neq S \subset N, i \in S}$ una PMAS del juego (N, v) . Sabemos que $\sum_{i \in S} x_{i,S} = v(S)$. Tomemos $R \subset S$. Entonces, aplicando nuevamente las condiciones de eficiencia relativa a la coalición R y la monotonía, se obtiene

$$v(R) = \sum_{i \in R} x_{i,R} \leq \sum_{i \in R} x_{i,S}.$$

Hemos visto que $(x_{i,S})_{i \in S} \in C(S, v_S)$ y, por tanto, el juego es totalmente equilibrado. ■

Una forma de englobar o generalizar el concepto de núcleo es mediante los ε -núcleos. Se trata de seleccionar preimputaciones en las que ninguna coalición tiene incentivos de desviarse cuando se le impone un coste de ε . Cuando $\varepsilon = 0$, tenemos el concepto de núcleo clásico y a medida que ε aumenta el ε -núcleo también se hace mayor.

Definición 2.29 (Shapley y Shubik (1963, 1966)) Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, definimos los conjuntos,

$$C_\varepsilon(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S) - \varepsilon \text{ si } S \in 2^N \setminus \{\emptyset, N\}\}$$

$$C_\varepsilon^*(N, v) = \{x \in I(v) : x(S) \geq v(S) - \varepsilon \text{ si } 1 < |S| < n\}$$

Básicamente, la definición del segundo conjunto difiere de la definición del primero en que se seleccionan imputaciones. Es fácil ver que se cumplen las siguientes relaciones:

1. $C_0^*(N, v) = C_0(N, v) = C(N, v)$
2. Si $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ entonces $C_{\varepsilon_2}(N, v) \subset C_{\varepsilon_1}(N, v)$ y $C_{\varepsilon_2}^*(N, v) \subset C_{\varepsilon_1}^*(N, v)$.

Por añadidura, si ε es suficientemente grande el ε -núcleo es un poliedro con el número máximo de caras $(2^n - 2)$.

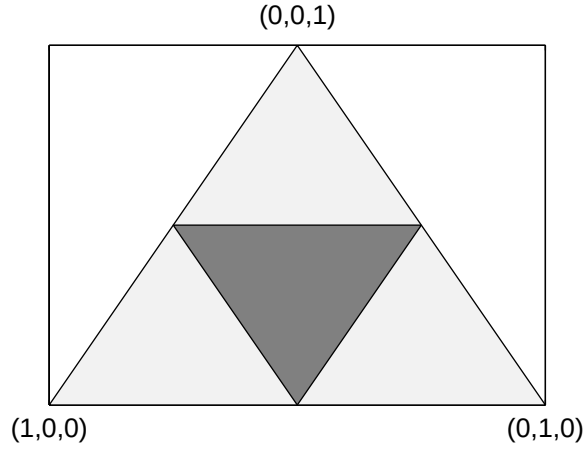


Figura 2.8: El núcleo del juego del Ejemplo 2.30

Ejemplo 2.30 En la Figura 2.8 se dibuja el núcleo del juego $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = v(13) = v(23) = 0.5$ y $v(123) = 1$. Los conjuntos $C_\varepsilon^*(N, v)$ con $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = -0.1$ se muestran en la Figura 2.9.

Es claro que si $\varepsilon > 0$ se debilita el concepto de núcleo, es decir, $C(N, v) \subset C_\varepsilon(N, v)$. Si el juego no es equilibrado, siempre existirá un ε para el que el correspondiente ε -núcleo no es vacío. Esto da pie a la siguiente definición.

Definición 2.31 (Maschler et al. (1979)) Dado un juego (N, v) , se define el menor núcleo (“least core”) como el conjunto

$$LC(N, v) = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}} \{C_\varepsilon(N, v) : C_\varepsilon(N, v) \neq \emptyset\}.$$

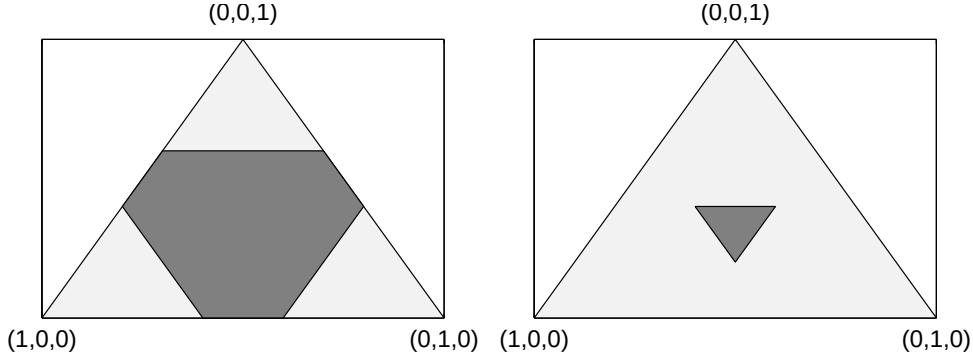


Figura 2.9: Los ε -núcleos, para $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = -0.1$, del juego del Ejemplo 2.30

Equivalentemente, el menor núcleo coincide con

$$LC(N, v) = C_{\varepsilon_0}(N, v), \text{ con } \varepsilon_0 = \min_{x \in I^*(N, v)} \max_{\emptyset \neq S \subset N} (v(S) - x(S)).$$

Si el núcleo de un juego no es vacío entonces el menor núcleo es un punto “central” en el núcleo. Todos los $C_\varepsilon(N, v)$ tienen dimensión $n-1$ y la dimensión de $LC(N, v)$ es menor o igual que $n-2$.

Para finalizar, sin entrar en detalles, definimos el concepto, debido a Sharkey (1982), de juego con “large core” y recordamos su relación con la convexidad. La siguiente definición identifica el conjunto de aspiraciones que podrían tener los jugadores de un juego. Diremos que el núcleo del juego es grande (“large”) cuando para cada aspiración existe un elemento del núcleo que la minora.

Definición 2.32 Sea (N, v) un juego coalicional.

- Un vector $y \in \mathbb{R}^n$ se dice *aceptable* si para cada $S \subset N$,

$$\sum_{i \in S} y_i \geq v(S).$$

- El juego (N, v) tiene “large core” si para cada $y \in \mathbb{R}^n$ aceptable, existe $x \in C(N, v)$ tal que $x \leq y$.
- El juego (N, v) tiene “totally large core” si él y todos sus subjuegos tienen “large core”.

Obviamente, no todos los núcleos son grandes. Sharkey (1982) demuestra que si un juego totalmente equilibrado tienen “large core” entonces es un juego exacto. Los artículos de Biswas et al. (1999, 2000, 2001) relacionan los juegos exactos, los juegos con “large core” y la estabilidad del núcleo (concepto que desarrollaremos en la Sección 2.3).

Se puede probar que todo juego convexo tiene “large core”, pero no todos los juegos con núcleo grande son convexos. Concretamente, Moulin (1990) demostró que un juego es convexo si, y sólo si, tiene “totally large core”.

2.2. El D-núcleo

El siguiente concepto de solución que estudiamos es el D-núcleo. Veremos que contiene al núcleo y que para juegos superaditivos coincide con el núcleo. Resultados más recientes de Chang (2000), que no se incorporan aquí, establecen una condición necesaria y suficiente para la existencia del D-núcleo. Además, en el citado artículo se da una condición necesaria y suficiente para que el D-núcleo coincida con el núcleo.

Antes de dar la definición formal de D-núcleo necesitamos introducir un concepto de dominación entre imputaciones. Una imputación domina a otra a través de una coalición S si le asigna a cada jugador de S un mejor pago, en sentido estricto, manteniendo la factibilidad, es decir, no puede repartir más de lo que la coalición S puede garantizarse por sí misma.

Definición 2.33 Sean $x, y \in I(N, v)$ y $S \in 2^N$.

- Diremos que x domina a y a través de S , y escribiremos $x \underset{S}{\text{dom}} y$, si

$$x_i > y_i \text{ para todo } i \in S \text{ y } \sum_{i \in S} x_i \leq v(S).$$

- Diremos que x domina a y , y escribiremos $x \underset{S}{\text{dom}} y$, si existe $S \in 2^N$, $S \neq \emptyset$, tal que $x \underset{S}{\text{dom}} y$.
- Las imputaciones dominadas a través S son aquellas que son dominadas por alguna imputación a través de la coalición S , esto es,

$$\text{dom}(S) = \{x \in I(N, v) : y \underset{S}{\text{dom}} x \text{ para algún } y \in I(N, v)\}.$$

Ahora, de modo natural, surge el concepto de D-núcleo como la selección de aquellas imputaciones que no son dominadas por ninguna otra.

Definición 2.34 (Gillies (1953, 1959)) *El D-núcleo, o “dominance core”, es el conjunto*

$$DC(N, v) = \{x \in I(N, v) : \text{No existe } y \in I(N, v) \text{ tal que } y \text{ dom } x\}.$$

Es sencillo comprobar que el D-núcleo también puede expresarse como:

$$DC(N, v) = I(N, v) \setminus \bigcup_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \text{dom}(S).$$

Ejemplo 2.35 *Considérense las siguientes imputaciones y las correspondientes relaciones de dominación en el juego del dólar:*

$$x = (0.5, 0.5, 0) \quad y = (0, 0.6, 0.4) \quad z = (0.3, 0, 0.7)$$

$$\begin{array}{c} x \text{ dom } z \\ S=\{1,2\} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} z \text{ dom } y \\ S=\{1,3\} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} y \text{ dom } x \\ S=\{2,3\} \end{array}$$

A la vista de este ejemplo debemos concluir que la relación de dominación no es transitiva. ¿Puede ocurrir que existan coaliciones S y T tales que $x \text{ dom}_S y$ y que $y \text{ dom}_T x$? Para responder a esta pregunta elijamos cualquier juego de 4 jugadores tal que $v(i) = 0$ para todo i , $v(1, 2) = v(3, 4) = v(1, 2, 3, 4) = 2$. Consideremos las imputaciones $x = (1, 1, 0, 0)$ e $y = (0, 0, 1, 1)$ y las coaliciones $S = \{1, 2\}$ y $T = \{3, 4\}$. Es claro que $x \text{ dom}_S y$ y que $y \text{ dom}_T x$, con lo que la respuesta a la pregunta planteada es afirmativa.

Los siguientes ejemplos muestran que hay juegos que tienen núcleo vacío cuyo D-núcleo no lo es. En el primero, el D-núcleo es unitario mientras que en el segundo es un conjunto infinito.

Ejemplo 2.36 *Consideremos el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica:*

$$v(1) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$$

$$v(S) = 0, \text{ para el resto de coaliciones.}$$

Fácilmente comprobamos que $I(N, v) = \{(1, 0, 0)\}$ y que $C(N, v) = \emptyset$. Dado que sólo hay una imputación, es la única que selecciona el D-núcleo, puesto que no puede ser dominada por ninguna otra, es decir, $DC(N, v) = \{(1, 0, 0)\}$.

Ejemplo 2.37 Consideremos el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica:

$$\begin{aligned} v(N) &= 1, \quad v(1, 2) = 2 \\ v(S) &= 0 \text{ si } S \neq \{1, 2\}, S \neq N \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.2 podemos concluir que el núcleo es vacío. Por otra parte,

$$DC(N, v) = \{x \in I(N, v) : x_3 = 0\} = \{(x_1, 1 - x_1, 0) : 0 \leq x_1 \leq 1\}.$$

En efecto, sea $A = \{(x_1, 1 - x_1, 0) : 0 \leq x_1 \leq 1\}$. Observemos que dadas dos imputaciones x e y pertenecientes a A es imposible que una domine a la otra a través de la coalición $\{1, 2\}$. Además, dado que en las restantes coaliciones la utilidad es 0, tampoco se puede dar una relación de dominación. Para concluir, basta considerar que cualquier imputación con $x_3 > 0$ está dominada por alguna imputación de A a través de la coalición $\{1, 2\}$.

El siguiente teorema nos indica algo que, una vez analizados los ejemplos precedentes, parece razonable: el núcleo siempre va a estar contenido en el D-núcleo. Además, para la clase de los juegos superaditivos ambos conceptos coinciden.

Teorema 2.38 Para cualquier juego $(N, v) \in G^n$ se tiene que:

- a) $C(N, v) \subset DC(N, v)$.
- b) Si (N, v) es superaditivo entonces $DC(N, v) = C(N, v)$.

Demostración: Sean (N, v) cualquier juego de n jugadores y $x \in I(N, v)$ tal que $x \notin DC(N, v)$. Veamos que $x \notin C(N, v)$. En efecto, sabemos que existen $y \in I(N, v)$ y $\emptyset \neq S \subset N$ tales que $y \underset{S}{\text{dom}} x$, es decir,

$$v(S) \geq \sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i.$$

Por consiguiente, $x \notin C(N, v)$.

Supongamos ahora que el juego es superaditivo y sea $x \in I(N, v)$ tal que $x \notin C(N, v)$. Podemos afirmar que existe $\emptyset \neq S \subset N$ tal que $x(S) < v(S)$. Para demostrar que $x \notin DC(N, v)$ construimos la siguiente asignación $y = (y_i)_{i \in N}$

$$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{v(S) - x(S)}{|S|} & \text{si } i \in S \\ v(\{i\}) + \frac{v(N) - v(S) - \sum_{j \in N \setminus S} v(\{j\})}{|N \setminus S|} & \text{si } i \notin S \end{cases}.$$

Veamos que $y \in I(N, v)$ y que $y \text{ dom}_S x$. Ahora bien, en virtud de la Observación 1.5, sabemos que

$$v(N) - v(S) - \sum_{j \in N \setminus S} v(\{j\}) > 0.$$

De ello se sigue que $y \in I(N, v)$. Además, para todo $i \in S$ se cumple que $y_i > x_i$ y que $\sum_{i \in S} y_i = v(S)$. Luego, en efecto, $y \text{ dom}_S x$. En consecuencia, si el juego es superaditivo entonces $DC(N, v) = C(N, v)$. ■

Observación 2.39 *Dado que el juego del dólar y el juego del guante son superaditivos, concluimos que, para ambos, su D-núcleo coincide con su núcleo.*

La siguiente proposición indica que la relación de dominación se preserva bajo juegos estratégicamente equivalentes. La demostración se deja al lector.

Proposición 2.40 *Si dos juegos (N, v) y (N, w) son estratégicamente equivalentes entonces, $x \text{ dom}_S y$ si, y sólo si, $(kx + a) \text{ dom}_S (ky + a)$, siendo $k > 0$ y (N, a) el juego aditivo tales que $w = kv + a$.*

2.3. Conjuntos estables o soluciones de von Neumann-Morgenstern

Los conjuntos estables seleccionan subconjuntos del conjunto de imputaciones en base a criterios razonables de dominación: una estabilidad interna que confiere a las imputaciones seleccionadas en el conjunto (estabilidad en el sentido de que ninguna es preferida por otra del mismo conjunto); y una estabilidad externa que garantiza que cualquier imputación no seleccionada es dominada por una del propio conjunto y, por tanto, hay una del conjunto que es preferida por alguna coalición.

Definición 2.41 *Dado un juego (N, v) diremos que el conjunto $M \subset I(N, v)$ es estable si cumple que:*

1. $M \cap \text{dom}(M) = \emptyset$ (Estabilidad interna)
2. $I(N, v) \setminus M \subset \text{dom}(M)$ (Estabilidad externa)

Equivalentemente, podemos decir que el conjunto M es estable si, y sólo si, $M \cap \text{dom}(M) = \emptyset$ y $M \cup \text{dom}(M) = I(N, v)$.

El siguiente resultado indica que las asignaciones del núcleo siempre están contenidas en cualquier conjunto estable. Además, cuando el núcleo es un conjunto estable entonces es el único conjunto estable que existe.

Proposición 2.42 *Sea M un conjunto estable para el juego (N, v) . Se verifica que:*

a) $C(N, v) \subset M$.

b) Si $C(N, v)$ es un conjunto estable entonces $M = C(N, v)$.

Demostración: Sea (N, v) un juego arbitrario. Supongamos que existe $x \in C(N, v) \setminus M$. Sabemos que M es un conjunto estable, por lo que existen $y \in M$ y $S \subset N$ tales que $y \text{ dom}_S x$, es decir, $y_i > x_i$ para todo $i \in S$ y $\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$.

Así pues, $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$, lo que supone una contradicción con $x \in C(N, v)$.

Ahora, supongamos que el núcleo del juego (N, v) es un conjunto estable. Por a) sabemos que $C(N, v) \subset M$. Sea $x \in M \setminus C(N, v)$. Dado que $C(N, v)$ es estable, existe $y \in C(N, v)$ tal que $y \text{ dom}_S x$. Ello implica la existencia de dos imputaciones x e y , ambas en M , entre las que hay una relación de dominación. Por tanto, obtenemos una contradicción con la estabilidad interna de M . ■

Ejemplo 2.43 *Consideremos el juego del dólar. Veamos que el conjunto*

$$M = \{(0, 0.5, 0.5), (0.5, 0, 0.5), (0.5, 0.5, 0)\}$$

es estable. En efecto:

1. M es estable internamente. Fácilmente se comprueba que no es posible que una imputación de M domine a otra. Por ejemplo, ¿se cumple que $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ dom}_S (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$? La única posibilidad sería para $S = \{2\}$, pero esto es imposible dado que en el juego del dólar $v(2) = 0$.
2. M es estable externamente. Sea $y \in I(N, v) \setminus M$, entonces existen $i, j \in N$, $i \neq j$, tales que $y_i < \frac{1}{2}$ e $y_j < \frac{1}{2}$. Supongamos $i = 1$, $j = 2$. Es claro que la imputación $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ pertenece a M y $x \text{ dom}_{S=\{12\}} y$.

En la Figura 2.10 se representa el conjunto de imputaciones del juego, las 3 asignaciones que pertenecen a M (en azul), el triángulo interior (en gris) formado por las imputaciones dominadas por todos los elementos de M , el triángulo rojo de las imputaciones dominadas sólo por $(0.5, 0.5, 0)$, el triángulo rosado de las imputaciones dominadas sólo por $(0, 0.5, 0.5)$ y, finalmente, el triángulo verde de las imputaciones dominadas sólo por $(0.5, 0, 0.5)$.

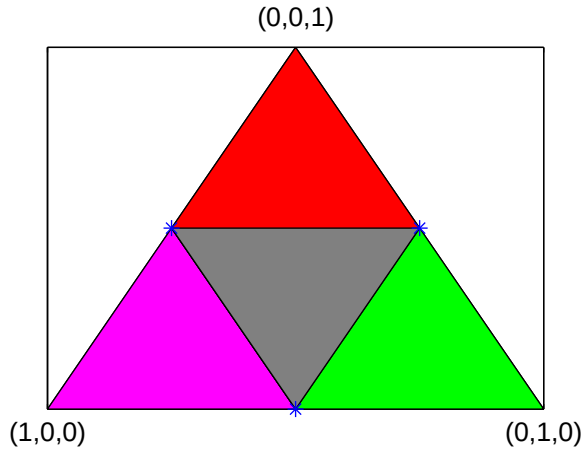


Figura 2.10: Un conjunto estable para el juego del dólar

El siguiente ejemplo muestra que, en general, no hay un único conjunto estable.

Ejemplo 2.44 Sea $0 \leq c < \frac{1}{2}$ y consideremos los conjuntos,

$$M_1 = \{(c, x_2, x_3) : x_2, x_3 \geq 0, x_2 + x_3 = 1 - c\}$$

$$M_2 = \{(x_1, c, x_3) : x_1, x_3 \geq 0, x_1 + x_3 = 1 - c\}$$

$$M_3 = \{(x_1, x_2, c) : x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1 - c\}$$

Los conjuntos M_1, M_2 y M_3 , denominados conjuntos discriminatorios hacia los jugadores 1, 2 y 3, respectivamente, también son conjuntos estables para el juego del dólar. Se deja como ejercicio comprobar esta afirmación.

Ejemplo 2.45 Consideremos el conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3\}$ y la siguiente función característica:

$$v(i) = -2, \quad i \in N \quad v(i, j) = 2, \quad i, j \in N, \quad i \neq j \quad v(1, 2, 3) = 0.$$

Este juego es estratégicamente equivalente al juego del dólar, con $k = \frac{1}{6}$ y el juego aditivo dado por $a_i = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$. Por tanto, como la relación de dominación se preserva bajo juegos estratégicamente equivalentes, es trivial comprobar que si

$$M = \{(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)\}$$

es un conjunto estable para el juego del dólar entonces

$$M' = \{(-2, 1, 1), (1, -2, 1), (1, 1, -2)\}$$

es un conjunto estable para el juego v .

Un ejercicio de interés para aquel que desee practicar con la relación de dominación y el cálculo de conjuntos estables, es encontrar algún conjunto estable para el juego de los guantes.

Sharkey (1982) demostró que si un juego tienen “large core” entonces el núcleo es el único conjunto estable.

Observación 2.46 *A pesar de que durante años se conjeturó que la existencia de conjuntos estables estaba garantizada, Lucas (1967) encontró un juego con 10 jugadores para el que no existe ningún conjunto estable.*

De interés para quien desee profundizar en esta línea son las nociones de subsolución y el super-núcleo (“supercore”) introducidas por Roth (1976) como generalización de los conjuntos estables y cuya existencia está asegurada. A continuación definimos, sin entrar en detalles, estos conceptos. Para ello necesitamos la idea de protección.

Definición 2.47 *Dados un juego (N, v) , un conjunto $M \subset I(N, v)$ y $x \in I(N, v)$, diremos que:*

- *x está protegida por M si para cada $y \in I(N, v)$ tal que $y \text{ dom } x$ existe $z \in M$ verificando que $z \text{ dom } y$.*
- *M es un conjunto auto-protector si todo elemento $x \in M$ está protegido por M .*

Definición 2.48 *Dado un juego (N, v) , diremos que el conjunto $M \subset I(N, v)$ es una subsolución si cumple que:*

1. *M satisface la propiedad de estabilidad interna.*

2. M es un conjunto auto-protector.
3. Si $x \notin M$ entonces x no está protegido por M .

Observemos que las dos últimas condiciones implican que el conjunto de imputaciones que están protegidas por M es, exactamente, el propio conjunto M . De las propias definiciones se observa que los conjuntos estables son, a su vez, subsoluciones.

Definición 2.49 *Se define el super-núcleo, o “supercore”, de un juego (N, v) como la intersección de todas las subsoluciones.*

Fijémonos en que el conjunto vacío puede ser una subsolución y, por consiguiente, el super-núcleo puede ser vacío.

2.4. El core-cover

El siguiente concepto de solución tipo conjunto que definimos es el core-cover. Tal y como su propio nombre indica, el core-cover va a contener (cubrir) al núcleo. Para definirlo con rigor necesitamos hacer uso de dos cotas entre las que se considera admisible el pago o reparto a cada jugador.

La cota superior, o pago de utopía de un jugador, es la contribución marginal del jugador a la gran coalición. El pago de utopía de un jugador representa lo máximo que éste podría pedir, en el sentido de que si pidiera más entonces sería rentable para la gran coalición no tenerlo en cuenta y pasar a un juego con $n - 1$ jugadores.

Calculemos, para cada jugador lo que le queda a cada coalición a la que pertenece si el resto de jugadores de la coalición se llevasen su pago de utopía. Parece razonable que, como mínimo, cada jugador se pueda asegurar el máximo de estas cantidades sobre todas las coaliciones a las que pertenece. Este valor es la cota inferior o mínimo derecho de un jugador.

Definición 2.50 *Dado un juego $(N, v) \in G^n$ y un jugador $i \in N$ definimos:*

- El pago de utopía del jugador i como el valor

$$M_i(N, v) = v(N) - v(N \setminus \{i\}).$$

- El mínimo derecho del jugador i como el valor

$$m_i(N, v) = \max_{S: i \in S} \left\{ v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(N, v) \right\}.$$

TUGlab: Los pagos de utopía y el mínimo derecho de todos los jugadores de un juego pueden calcularse con TUGlab usando la orden UTOPIAPAYOFFS. Así, si escribimos

```
>> A=[0 0 0 9 4 7 11];
>> [M,m]=utopiapayoffs(A)
M = 4      7      2
m = 2      5      0
```

observamos que, por ejemplo, para el segundo jugador el pago de utopía es 7 y el mínimo derecho 5.

El core-cover, como se presenta formalmente a continuación, se corresponde con todas las imputaciones que aseguran a cada jugador su mínimo derecho y no más que su pago de utopía.

Definición 2.51 (Tijs y Lipperts (1982)) Sea $(N, v) \in G^n$. Se define el core-cover como el conjunto

$$CC(N, v) = \{x \in I(N, v) : m(N, v) \leq x \leq M(N, v)\}.$$

Se puede comprobar que si el juego (N, v) es convexo, el mínimo derecho de los jugadores se corresponde con la utilidad que pueden conseguir por ellos mismos, esto es, $m_i(N, v) = v(\{i\})$ para cada $i \in N$.

A continuación se presenta una condición necesaria y suficiente para la existencia de asignaciones en el core-cover.

Proposición 2.52 El core-cover no es vacío, $CC(N, v) \neq \emptyset$, si, y sólo si, se verifican las siguientes condiciones:

1. $m(N, v) \leq M(N, v)$.

$$2. \sum_{i=1}^n m_i(N, v) \leq v(N) \leq \sum_{i=1}^n M_i(N, v).$$

Se dice que el juego (N, v) es de compromiso admisible, o cuasi-equilibrado, si cumple las condiciones de la proposición anterior.

TUGlab: Para comprobar si un juego es de compromiso admisible TUGlab dispone del comando `ADMISSIBLEGAME` cuyo funcionamiento queda claro en el siguiente ejemplo.

```
>> A=[0 0 0 2 2 2 4];CA=admissiblegame(A)
CA = 1
>> B=[0 0 0 0 1 2 1 1 1 1 4 3 2 1 -2];
>> [CB,info]=admissiblegame(B)
CB = 0
info = m(1)>M(1)
```

Así, el juego dado por el vector A es de compromiso admisible, ya que el comando `ADMISSIBLEGAME` produjo el valor 1. Por el contrario, el juego B no lo es ($CB=0$) puesto que $m_1(B) > M_1(B)$.

Comprobemos que, en efecto, el core-cover contiene (“cubre”) al núcleo.

Teorema 2.53 *El núcleo de un juego $(N, v) \in G^n$ está contenido en el core-cover,*

$$C(N, v) \subset CC(N, v).$$

Demostración: Sea $x \in C(N, v)$. Para cada $i \in N$,

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{k \in N} x_k - \sum_{k \in N \setminus i} x_k \\ &= v(N) - \sum_{k \in N \setminus i} x_k \\ &\leq v(N) - v(N \setminus i) \\ &= M_i(N, v). \end{aligned}$$

Además, para cada coalición S tal que $i \in S$,

$$x_i = \sum_{k \in S} x_k - \sum_{k \in S \setminus i} x_k \geq v(S) - \sum_{k \in S \setminus i} M_k(N, v).$$

Así pues, $x_i \geq \max_{S: i \in S} \left\{ v(S) - \sum_{k \in S \setminus i} M_k(N, v) \right\}$. En definitiva, para cada jugador $i \in N$, hemos visto que $m_i(N, v) \leq x_i \leq M_i(N, v)$. ■

Se puede comprobar que para juegos de 3 jugadores el core-cover y el núcleo coinciden, o sea, $C(N, v) = CC(N, v)$.

TUGlab: Para representar el core-cover de un juego de 4 jugadores de compromiso admisible podemos usar la sentencia CORECOVERSET. El core-cover se pinta en color amarillo. Los vértices de este conjunto se calculan con la orden CORECOVERVERTICES. El core-cover del juego del siguiente ejemplo se representa en la Figura 2.11.

```
>> A=[0 0 0 0 1 2 1 1 1 1 4 3 2 1 7];
>> imputationset(A),hold on,axis(axis)
>> corecoverset(A)
>> V=corecoververtices(A)
V =
    0     0     4     3
    0     5     0     2
    0     5     2     0
    0     4     0     3
    0     3     4     0
    6     0     0     1
    6     0     1     0
    6     1     0     0
    4     0     0     3
    3     0     4     0
    2     5     0     0
```

Dado que el core-cover de los juegos de 3 jugadores coincide con el núcleo, los comandos CORECOVERSET y CORECOVERVERTICES sólo están programados para juegos de 4 jugadores.

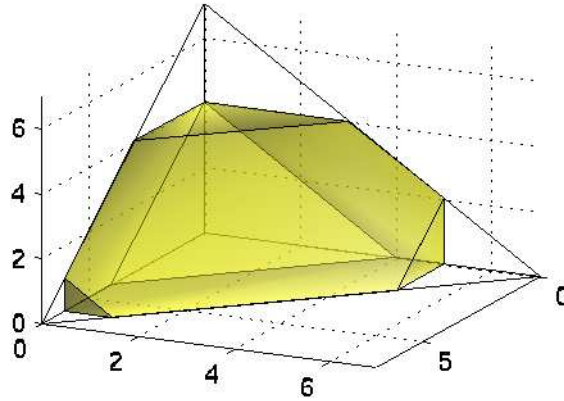


Figura 2.11: El core-cover de un juego de 4 jugadores con TUGlab

2.5. El conjunto de Weber

El conjunto de Weber, Weber (1988), se corresponde con la envoltura convexa de los $n!$ vectores de contribuciones marginales. Demostraremos que contiene al núcleo y nunca es vacío. Además, para la clase de los juegos convexos, todos los vectores de contribuciones marginales son puntos extremos del conjunto de Weber que coincide exactamente con el núcleo del juego.

Definición 2.54 Sea $(N, v) \in G^n$. Se define el conjunto de Weber como la envoltura convexa de los vectores de contribuciones marginales, esto es,

$$\begin{aligned} W(N, v) &= \text{conv}(\{m^\sigma(v) : \sigma \in \Pi(N)\}) \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^{n!} \alpha_j m^{\sigma_j}(v) : \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, n!, \sum_{j=1}^{n!} \alpha_j = 1 \right\}. \end{aligned}$$

La definición del conjunto de Weber nos proporciona una V-representación del mismo, es decir, el conjunto de Weber es la envoltura convexa de una

colección finita de puntos. En Vasil'ev (2001) se estudia una H-representación de este conjunto.⁹

Las propiedades básicas del conjunto de Weber son: no es vacío, es cerrado, es acotado, es convexo y contiene al núcleo.

Proposición 2.55 Sea $(N, v) \in G^n$. Se verifica que:

a) El conjunto de Weber es un conjunto no vacío, $\emptyset \neq W(N, v) \subset \mathbb{R}^n$, que además es cerrado, acotado y convexo.

b) $C(N, v) \subset W(N, v)$.

Demostración: Es trivial ver que $W(N, v) \neq \emptyset$, ya que los vectores de contribuciones marginales siempre existen. Como el conjunto de Weber es la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos, resulta ser compacto y convexo.

Comprobemos, finalmente, que el conjunto de Weber siempre contiene al núcleo. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x \in C(N, v)$ tal que $x \notin W(N, v)$. Entonces, existen $a \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$ tales que el hiperplano

$$H_a^k = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i y_i = k \right\}$$

separa el punto x y el conjunto de Weber.¹⁰ Equivalentemente, para toda permutación $\sigma \in \Pi(N)$,

$$\sum_{i=1}^n x_i a_i < \sum_{i=1}^n m_i^\sigma(v) a_i.$$

⁹Recordamos que dar una H-representación de un conjunto convexo es describirlo como la intersección de los semiespacios positivos determinados por una colección finita de hiperplanos. Si el conjunto convexo se describe como la envoltura convexa de una colección finita de puntos, hablamos de una V-representación.

¹⁰El teorema de separación que empleamos establece que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado, convexo y no vacío, y $x^* \notin A$ entonces existe un hiperplano $H_a^k = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i = k\}$

que separa estrictamente x^* y A ; esto es, $\sum_{i=1}^n a_i x_i^* < k < \sum_{i=1}^n a_i x_i$, para todo $x \in A$.

Tomemos el orden $\sigma^* = (i_1, \dots, i_n)$ tal que $a_{i_1} \leq \dots \leq a_{i_n}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n x_i a_i &< \sum_{i=1}^n m_i^{\sigma^*}(v) a_i \\
 &= a_{i_1} v(i_1) + a_{i_2} (v(i_1, i_2) - v(i_1)) + \dots + a_{i_n} (v(N) - v(i_1, \dots, i_{n-1})) \\
 &= v(i_1)(a_{i_1} - a_{i_2}) + v(i_1, i_2)(a_{i_2} - a_{i_3}) + \dots + v(N) a_{i_n} \\
 &\leq x_{i_1}(a_{i_1} - a_{i_2}) + (x_{i_1} + x_{i_2})(a_{i_2} - a_{i_3}) + \dots + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a_{i_n} \\
 &= x_{i_1} a_{i_1} + \dots + x_{i_n} a_{i_n} \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i a_i.
 \end{aligned}$$

La primera igualdad se obtiene directamente de la elección particular de σ^* . Para las demás igualdades basta con reagrupar adecuadamente los términos y la última desigualdad se verifica dado que $x \in C(N, v)$. De este modo llegamos a un absurdo, como consecuencia de suponer que $x \notin W(N, v)$. ■

De la proposición anterior se infiere que todo elemento del núcleo se obtiene por la ponderación de los vectores de contribuciones marginales.

La siguiente proposición demuestra que todas las asignaciones del conjunto de Weber son eficientes aunque, en general, no tienen por que ser imputaciones. Sin embargo, para la clase de los juegos 0-monótonos sí son imputaciones.

Proposición 2.56 *Sea $(N, v) \in G^n$. Se verifica que:*

- a) $W(N, v) \subset I^*(N, v)$.
- b) $W(N, v) \subset I(N, v)$ si, y sólo si, (N, v) es 0-monótono.
- c) Sea (N, v) un juego convexo, entonces $W(N, v) = C(N, v)$.

Demostración: Sea (N, v) un juego de n jugadores.

- a) Es inmediato ver que para cada $\sigma \in \Pi(N)$, $\sum_{i \in N} m_i^\sigma(v) = v(N)$.

- b) Por definición, (N, v) es 0-monótono si, y sólo si,

$$v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(i) \leq v(T) \quad (2.1)$$

para todo $S \subset T$. Veamos que estas condiciones son equivalentes a que para todo $i \in N$ y $S \subset N \setminus \{i\}$,

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(\{i\}). \quad (2.2)$$

Una vez comprobada la equivalencia, el resultado es inmediato.

Para demostrar que (2.1) implica (2.2) basta con tomar para cada $S \subset N \setminus \{i\}$ e $i \in N$ la coalición $T = S \cup \{i\}$.

Veamos, ahora, que (2.2) implica (2.1). Sea $S \subset T$, $S \neq T$, puesto que si $S = T$ la relación es trivial. Supongamos, entonces, que existe $k \geq 1$ tal que $T \setminus S = \{i_1, \dots, i_k\}$. Se verifica la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} v(S \cup \{i_1\}) - v(S) &\geq v(\{i_1\}) \\ v(S \cup \{i_1\} \cup \{i_2\}) - v(S \cup \{i_1\}) &\geq v(\{i_2\}) \\ &\dots \geq \dots \\ v(S \cup \{i_1\} \cup \dots \cup \{i_k\}) - v(S \cup \{i_1\} \cup \dots \cup \{i_{k-1}\}) &\geq v(\{i_k\}) \end{aligned}$$

Sumando las desigualdades obtenemos directamente que $v(T) - v(S) \geq \sum_{i \in T \setminus S} v(i)$.

- c) Ya sabemos que $C(N, v) \subset W(N, v)$. Si (N, v) es convexo, de la Proposición 2.14 deducimos que todo vector de contribuciones marginales pertenece al núcleo, es decir, $W(N, v) \subset C(N, v)$.

Quedan así probadas las afirmaciones del teorema. ■

La coincidencia del núcleo y el conjunto de Weber caracteriza a la clase de los juegos convexos.

Proposición 2.57 *Sea $(N, v) \in G^n$. Se tiene la siguiente equivalencia.*

$$(N, v) \text{ es convexo si, y sólo si, } W(N, v) = C(N, v).$$

Demostración: Teniendo en cuenta el apartado c) de la proposición previa, sólo nos queda demostrar que si el conjunto de Weber coincide con el núcleo entonces el juego es convexo.

Sea $T \subset S \subset N \setminus \{i\}$. Demostraremos que

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

Para ello, elegimos $\sigma \in \Pi(N)$ tal que $\sigma = (\sigma_T, \sigma_{S \setminus T}, i, \sigma_{N \setminus (S \cup \{i\})})$.¹¹ Sabemos que,

$$\sum_{j \in T} m_j^\sigma(v) = v(T) \quad \text{y} \quad m_i^\sigma(v) = v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

Además, dado que $m^\sigma(v) \in C(N, v)$,

$$\sum_{j \in T \cup \{i\}} m_j^\sigma(v) \geq v(T \cup \{i\}),$$

o equivalentemente,

$$\sum_{j \in T} m_j^\sigma(v) + m_i^\sigma(v) \geq v(T \cup i).$$

De las igualdades previas se llega a

$$v(T) + v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(T \cup i),$$

que es la condición de convexidad buscada. ■

La clase de los juegos convexos está ampliamente estudiada por el buen comportamiento que tiene con respecto a las distintas soluciones. Es fácil comprobar que los juegos convexos son una subclase de los totalmente equilibrados, dado que todo subjuego de un juego convexo es a su vez convexo y, por tanto, su núcleo coincide con su conjunto de Weber.

También se puede comprobar sin dificultad que para juegos convexos, dado un orden $\sigma \in \Pi(N)$, si consideramos para cada coalición $S \subset N$, el orden $\sigma_S \in \Pi(S)$, la distribución dada por los vectores de contribuciones marginales asociados a este orden, $(m_i^{\sigma_S})_{\emptyset \neq S \subset N, i \in S}$, es una distribución monótona respecto a la población.

TUGlab: El conjunto de Weber se representa con TUGlab mediante la orden WEBERSET y sus puntos extremos se calculan con WEBERVERTICES. El conjunto de Weber del ejemplo que sigue puede verse en la Figura 2.12. TUGlab pinta el conjunto de Weber en rojo.

¹¹Es decir, σ es cualquier permutación que ordene en primer lugar los jugadores de T , luego los de $S \setminus T$, a continuación coloque al jugador i y, finalmente, ordene los demás jugadores.

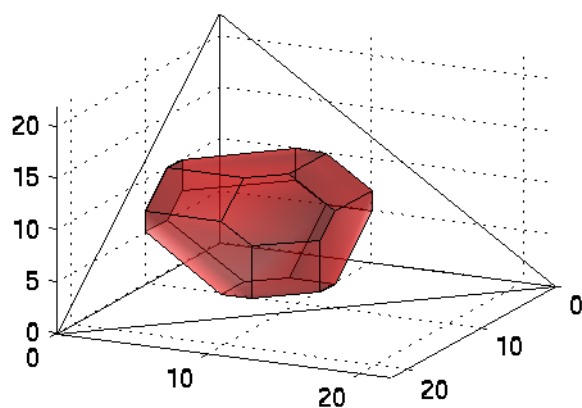


Figura 2.12: El conjunto de Weber de un juego de 4 jugadores con TUGlab

```
>> A=[0 0 0 0 7 7 7 7 7 7 12 12 12 12 22];
>> imputationset(A), axis(axis),hold on
>> weberset(A)
>> W=webervertices(A)
```

W =

0	7	5	10
0	7	10	5
0	5	7	10
0	10	7	5
0	5	10	7
0	10	5	7
7	0	5	10
7	0	10	5
5	0	7	10
10	0	7	5
5	0	10	7
10	0	5	7
7	5	0	10
7	10	0	5
5	7	0	10
10	7	0	5
5	10	0	7

10	5	0	7
7	5	10	0
7	10	5	0
5	7	10	0
10	7	5	0
5	10	7	0
10	5	7	0

TUGlab ofrece numerosas variantes de estas órdenes básicas para estudiar con todo detalle el conjunto de Weber. Por ejemplo, con TUGlab se pueden calcular H y V representaciones minimales del conjunto de Weber. También es posible determinar la permutación del conjunto de jugadores asociada a cada vértice. Remitimos al lector interesado al manual del usuario que se incluye en el material informático que acompaña al libro.

Ejemplo 2.58 Sea (N, v) el juego con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica:

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) &= 4, \quad v(1, 3) = 7, \quad v(2, 3) = 15 \\ v(1, 2, 3) &= 20 \end{aligned}$$

Con la ayuda de TUGlab se obtiene que el núcleo del juego se puede expresar como:

$$C(N, v) = \text{conv}(\{(4, 0, 16), (5, 0, 15), (0, 4, 16), (0, 13, 7), (5, 13, 2)\}).$$

El conjunto de Weber es la envoltura convexa de los siguientes vectores

σ	$m_1^\sigma(v)$	$m_2^\sigma(v)$	$m_3^\sigma(v)$
$(1, 2, 3)$	0	4	16
$(1, 3, 2)$	0	13	7
$(2, 1, 3)$	4	0	16
$(2, 3, 1)$	5	0	15
$(3, 1, 2)$	7	13	0
$(3, 2, 1)$	5	15	0

El conjunto de Weber de este juego se representa en la Figura 2.13.

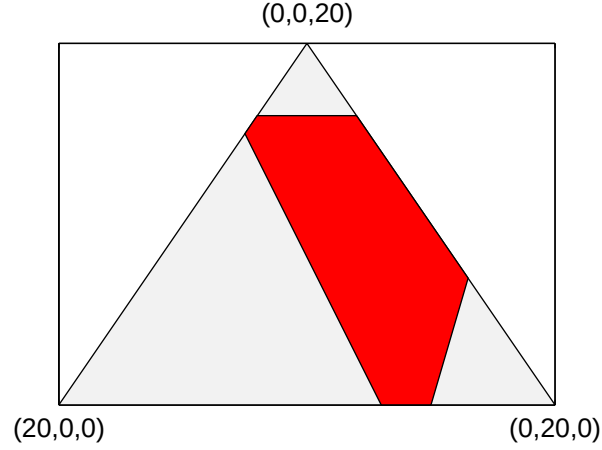


Figura 2.13: El conjunto de Weber de un juego de 3 jugadores con TUGlab

2.6. El conjunto de Harsanyi o selectope

El conjunto de Harsanyi fue introducido independientemente por Vasil'ev (1980) y por Hammer et al. (1977). Recientemente, este conjunto fue estudiado por Derks et al. (2000) bajo el nombre de “selectope”. Se corresponde con todas las posibles distribuciones de los dividendos de Harsanyi de todas las coaliciones entre sus miembros. Estos dividendos surgen de modo natural al expresar un juego en función de la base de los juegos de unanimidad. Concretamente, los dividendos son los coeficientes asociados a los elementos de la base. Estudiaremos que el núcleo es un subconjunto del conjunto de Harsanyi. Además, el conjunto de Harsanyi tiene estructura tipo núcleo, esto es, es el núcleo de un juego específico. Finalmente, daremos una condición necesaria y suficiente para que este conjunto coincida con el núcleo del juego.

Definición 2.59 *Se define el juego de unanimidad de la coalición $S \subset N$, $S \neq \emptyset$, como aquel juego (N, u_S) cuya función característica viene dada por:*

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subset T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

En Shapley (1953b) se prueba que el conjunto de los juegos de unanimidad constituyen una base de G^n , es decir, que todo juego coalicional (N, v) se puede descomponer de forma única como combinación lineal de los juegos

de unanimidad. Las coordenadas de un juego en la base de los juegos de unanimidad se denominan dividendos de Harsanyi del juego.

Proposición 2.60 (Harsanyi (1959, 1963)) Sea $(N, v) \in G^n$. Se verifica que

$$v = \sum_{\emptyset \neq T \subset N} c_T u_T$$

siendo $c_T = \sum_{T' \subset T} (-1)^{t-t'} v(T')$. Estos valores se conocen como los dividendos de Harsanyi del juego.

Los dividendos de Harsanyi se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$v(S) = \sum_{T \subset S} c_T, \text{ para } S \subset N.$$

Para ello, basta con tomar $c_\emptyset = 0$ y calcular, de manera recursiva en el cardinal de las coaliciones, los valores

$$c_T = v(T) - \sum_{T' \subset T, T' \neq \emptyset} c_{T'}.$$

TUGlab: El cálculo de los dividendos de Harsanyi en TUGlab se efectúa mediante la sentencia HARSANYIDIVIDENDS. Veamos un ejemplo ilustrativo.

```
>> A=[3 3 3 2 5 9 9];
>> [HD,unanimidad]=harsanyidividends(A)
HD = 3      3      3     -4     -1      3      2

unanimidad =
    1     0     0     1     1     0     1
    0     1     0     1     0     1     1
    0     0     1     0     1     1     1
    0     0     0     1     0     0     1
    0     0     0     0     1     0     1
    0     0     0     0     0     1     1
    0     0     0     0     0     0     1
```

El programa nos devuelve los dividendos de Harsanyi y la base de los juegos de unanimidad. Naturalmente, los dividendos son las coordenadas del juego A en la base dada (y en el correspondiente orden).

Las siguientes definiciones recogen conceptos que serán fundamentales para resumir los principales resultados acerca del conjunto de Harsanyi.

Definición 2.61 Sea $(N, v) \in G^n$.

- Un juego (N, v) se dice *totalmente positivo* si $c_S \geq 0$ para toda $S \subset N$.
- Dos juegos (N, v) y (N, w) se dicen *disjuntos* si para cada $S \subset N$, $c_S(v)c_S(w) = 0$.¹²
- Dado un juego (N, v) se definen dos juegos *totalmente positivos* (N, v^+) y (N, v^-) mediante:

$$v^+ = \sum_{S: c_S > 0} c_S u_S; \quad v^- = \sum_{S: c_S < 0} -c_S u_S.$$

De esta forma se tiene la descomposición $v = v^+ - v^-$.

- Un juego (N, v) es *casi positivo* si su juego 0-normalizado es *totalmente positivo*.

TUGlab: La descomposición dada en la definición anterior también se puede calcular con la orden HARSANYIDIVIDENDS.

```
>> A=[3 3 3 2 5 9 9];
>> [HD, unanimidad, Aplus, Aminus]=harsanyidividends(A)
HD = 3      3      3      -4      -1      3      2
```

```
unanimidad =
      1      0      0      1      1      0      1
      0      1      0      1      0      1      1
```

¹²Naturalmente, $c_S(v)$ y $c_S(w)$ son los dividendos de Harsanyi correspondientes a la coalición S para los juegos (N, v) y (N, w) , respectivamente.

0	0	1	0	1	1	1	
0	0	0	1	0	0	1	
0	0	0	0	1	0	1	
0	0	0	0	0	1	1	
0	0	0	0	0	0	1	
Aplus =	3	3	3	6	6	9	14
Aminus =	0	0	0	4	1	0	5

Los juegos Aplus y Aminus son, naturalmente, los juegos totalmente positivos v^+ y v^- de la definición anterior.

Como ya hemos dicho, el conjunto de Harsanyi se corresponde con todas las posibles distribuciones de los dividendos de Harsanyi de todas las coaliciones entre sus miembros. El núcleo es un subconjunto del conjunto de Harsanyi. Además, el conjunto de Harsanyi tiene estructura tipo núcleo, concretamente es el núcleo de un juego convexo particular.

Los juegos casi positivos son aquellos en los que el conjunto de Harsanyi coincide con el núcleo.

Los vectores de contribuciones marginales son ejemplos de vectores de pago de Harsanyi, de tal forma que el conjunto de Weber, siendo la envoltura convexa de los vectores de contribuciones marginales, es un subconjunto del conjunto de Harsanyi. Desarrollemos con detenimiento todas estas ideas.

Definición 2.62 *El conjunto de Harsanyi, que denotaremos por $H(N, v)$, es el conjunto de repartos dados, para cada $i \in N$, por*

$$\phi_i^p = \sum_{S \subset N: i \in S} p_i^S c_S,$$

donde $p = (p_i^S)_{S \subset N: i \in S}$ es cualquier sistema de pesos, es decir, $p \geq 0$ y $\sum_{j \in S} p_j^S = 1$ para cada $S \subset N$.

Observación 2.63 *Debido a que $v(N) = \sum_{S \subset N} c_S$ tenemos $\sum_{i \in N} \phi_i^p = v(N)$, para cualquier sistema de pesos p . En el caso de que $p_i^S = \frac{1}{|S|}$ para cada*

$S \subset N$ e $i \in S$, el pago de Harsanyi coincide con el valor de Shapley que introduciremos en el próximo capítulo.

Definimos, a continuación, dos juegos que tendrán especial relevancia. El primero de ellos, el “Harsanyi mingame”, nos permitirá determinar el conjunto de Harsanyi a través del cálculo de su núcleo.

Definición 2.64 Sea $(N, v) \in G^n$. Se define el juego mingame (N, v_H) mediante:

$$v_H(S) = v(S) - (v^-(N) - v^-(S) - v^-(N \setminus S)), \quad S \subset N.$$

El núcleo de un juego resulta ser un subconjunto del conjunto de Harsanyi. Además, el conjunto de Harsanyi coincide con el núcleo de un juego convexo: el juego mingame.

Proposición 2.65 Sea $(N, v) \in G^n$. Se verifica que:

- a) El juego mingame (N, v_H) es convexo.
- b) $H(N, v) = C(N, v_H)$
- c) $C(N, v) \subset H(N, v)$

Observación 2.66 Dada $S \subset N$, se pueden comprobar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} v_H(S) &= v(S) + \sum_{T \cap S \neq \emptyset, T \setminus S \neq \emptyset, c_T < 0} c_T \\ &= \sum_{T \cap S \neq \emptyset, c_T < 0} c_T + \sum_{T \subset S, c_T > 0} c_T. \end{aligned}$$

La primera expresión es la suma de $v(S)$ y todos los dividendos no negativos de las coaliciones T que contengan al menos un jugador en S y al menos un jugador fuera de S . Obtenemos de forma inmediata que $v(S) \geq v_H(S)$ para toda $S \subset N$ y que $v(N) = v_H(N)$.

Una condición necesaria y suficiente para que el conjunto de Harsanyi de un juego coincida con el núcleo es que el juego sea casi positivo.

Proposición 2.67 $H(N, v) = C(N, v)$ si, y sólo si, el juego es casi positivo.

El segundo juego que definimos en relación con el conjunto de Harsanyi se denomina, como no, juego maxgame.

Definición 2.68 Sea $(N, v) \in G^n$. Se define el juego maxgame (N, v^H) como:

$$v^H(S) = v(S) + (v^+(N) - v^+(S) - v^+(N \setminus S)), \quad S \subset N.$$

Los valores que el mingame y el maxgame asignan a una coalición se corresponden con el pago mínimo y máximo que dicha coalición puede obtener mediante un vector del conjunto de Harsanyi. En efecto, se puede comprobar que para cada $S \subset N$,

1. $v_H(S) = \min\{x(S) : x \in H(N, v)\}$
2. $v^H(S) = \max\{x(S) : x \in H(N, v)\}$

Estas propiedades justifican los nombres dados a estos juegos.

TUGlab: Los juegos mingame y maxgame de Harsanyi pueden obtenerse con la orden HARSANYISETINFO. El primer resultado será siempre el mingame y el segundo el maxgame.

```
>> A=[0 0 0 2 5 5 10];
>> [m,M]=harsanyisetinfo(A)
m =
    -2    -2    -2     0     3     3    10
M =
     7     7    10    12    12    12    10
```

El conjunto de Harsanyi se dibuja con la orden HARSANYISET. Dado que, en general, el conjunto de Harsanyi no está contenido en el conjunto de imputaciones, para obtener una clara representación de ambos es necesario realizar algunos ajustes que se explican con detenimiento en la Sección 5.2.5 y en los ejercicios de la Sección 5.3.1. La Figura 2.14 recoge un dibujo del conjunto de Harsanyi, de color azul, para el juego $A=[0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 5 \ 5 \ 10]$. También se dibujan el conjunto de imputaciones del mingame (a trazo discontinuo y en color verde), el conjunto de imputaciones del juego A (el triángulo marcado en negro) y el conjunto de Weber del juego A (en rojo, que coincide con el núcleo pues A es convexo). Sin duda, se

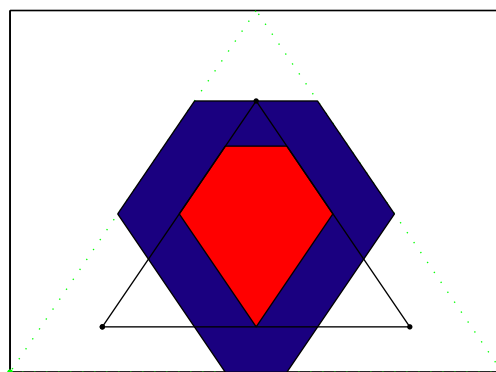


Figura 2.14: El conjunto de Harsanyi

aprecia claramente que el conjunto de Harsanyi incluye, en general, “muchísimos” repartos.

2.7. El conjunto de regateo

El siguiente concepto de solución de tipo conjunto que estudiamos atiende a la discusión que podría generarse en el juego. Hasta el momento, los conceptos de solución descritos dejan a un lado el proceso de negociación que puede tener lugar en el transcurso del juego, es decir, las amenazas y las contra-amenazas que podrían hacer las coaliciones. El conjunto de regateo (Aumann y Maschler (1965)) consiste en seleccionar aquellas imputaciones para las cuales dada cualquier objeción de un jugador en contra de otro existe una contraobjeción. Básicamente, lo que se plantea es que dada una coalición cualquiera y un vector de pagos asignado, si existe una objeción de un jugador de la coalición en contra de otro de la misma coalición, entonces el otro jugador pueda amenazarlo de forma creíble a través de una contraobjeción.

Uno de los principales inconvenientes de este concepto de solución es que su cálculo puede ser laborioso. Concluiremos esta sección indicando que, nuevamente, en juegos convexos tenemos resultados que simplifican las cuentas. En este caso, el conjunto de regateo coincide con el núcleo del juego.

Comenzamos definiendo el exceso de una coalición con respecto a un vector.

Definición 2.69 Sean $S \subset N$ y $x \in I(N, v)$. Se define el exceso del valor de una coalición S con respecto al vector x como

$$e(S, x) = v(S) - \sum_{j \in S} x_j = v(S) - x(S).$$

Se puede considerar que el exceso $e(S, x)$ es una medida de la queja de la coalición S con respecto a x . Representa la ganancia (o pérdida si es negativa) de la coalición S si sus miembros forman su propia coalición y no aceptan el reparto x . Cuanto mayor sea, más dista lo que puede conseguir una coalición por sí misma, $v(S)$, de lo que le asigna la distribución x , $x(S)$. Por tanto, para que las coaliciones estén satisfechas con un vector x , deberán tener excesos cuánto más negativos mejor. Fijémonos en que si $x \in C(N, v)$ entonces $e(S, x) \leq 0$ para toda $S \subset N$ y, en particular, $e(N, x) = 0$.

TUGlab: El comando EXCESSES calcula todos los excesos correspondientes a una imputación dada ordenados de mayor a menor y, por supuesto, también ordena las coaliciones donde se obtienen.

```
>> A=[2 3 4 7 5 9 12]; x=[2.5 5 4.5];
>> [excesos,coalicion]=excesses(A,x)
excesos = -0.50 -0.50 -0.50 -0.50 -2.00 -2.00

coalicion = '1' '3' '12' '23' '2' '13'
```

Así, por ejemplo, el exceso del valor de la coalición $\{2, 3\}$ con respecto a la imputación x es de -0.5 .

En la Sección 3.6 se denota por $\theta(x)$ el vector de excesos ordenados de mayor a menor correspondientes a una imputación x . Este vector es esencial para definir el nucleolo.

Dados $i, j \in N$, $i \neq j$, el conjunto $\Gamma_{ij} = \{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\} : i \in S, j \notin S\}$ está formado por aquellas coaliciones a las que pertenece el jugador i y no pertenece el jugador j .

Definición 2.70 Una objeción del jugador i en contra del jugador j con respecto a la imputación x en el juego (N, v) es un par (y^S, S) , $S \in \Gamma_{ij}$, tal

que

$$\sum_{k \in S} y_k^S = v(S)$$

y

$$y_k^S > x_k, \text{ para todo } k \in S.$$

En una objeción, los jugadores de S prefieren de forma estricta el pago proporcionado por y^S que el dado por x . Para que exista la objeción el exceso

$$e(S, x) = v(S) - \sum_{j \in S} x_j = v(S) - x(S)$$

ha de ser positivo.

Definición 2.71 Una contraobjeción a la objeción (y^S, S) , del jugador i en contra del jugador j con respecto a la imputación x en el juego (N, v) , es un par (z^T, T) , $T \in \Gamma_{ji}$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in T} z_k^T &= v(T), \\ z_k^T &\geq x_k \text{ para todo } k \in T \setminus S \end{aligned}$$

y

$$z_k^T \geq y_k^S \text{ para todo } k \in T \cap S.$$

En una contraobjeción los pagos son débilmente preferidos, en un caso, al original de la imputación x y, en otro caso, al de la propia objeción. Para que exista la contraobjeción ha de darse que $e(T, x) = v(T) - x(T) \geq 0$.

Definición 2.72 Sea $(N, v) \in G^n$. Una imputación $x \in I(N, v)$ pertenece al conjunto de regateo del juego, que denotaremos por $\mathcal{M}(N, v)$, si para cada objeción de un jugador en contra de otro con respecto a la imputación x existe una contraobjeción.

La siguiente proposición indica que no hay ninguna posible objeción con respecto a un elemento del núcleo y, por ende, el núcleo es un subconjunto del conjunto de regateo. Además, el conjunto de regateo nunca es vacío. Es interesante revisar los trabajos de Davis y Maschler (1963) y Peleg (1963, 1967) para ver demostraciones del carácter no vacío del conjunto de regateo.

Proposición 2.73 Sea $(N, v) \in G^n$. Se verifica que:

- a) $C(N, v) \subset \mathcal{M}(N, v)$.
- b) $\mathcal{M}(N, v) \neq \emptyset$.
- c) Si el juego es convexo entonces $C(N, v) = \mathcal{M}(N, v)$

Demostración: Si $x \in C(N, v)$ entonces $e(S, x) \leq 0$ para toda coalición $S \subset N$. Así pues, no hay ninguna posible objeción con respecto a un elemento del núcleo. Los apartados b) y c) se encuentran demostrados en Davis y Maschler (1963) y Driessen (1988). ■

En cuanto a la geometría de este conjunto indicar que Maschler demostró que el conjunto de regateo es una unión finita de poliedros convexos cerrados. Luego, el conjunto de regateo es un conjunto cerrado pero, en general, no es un conjunto convexo.

Ejemplo 2.74 Consideremos el juego paramétrico con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica:

$$\begin{aligned} v(1, 2) &= v(1, 3) = \alpha \quad (0.5 \leq \alpha \leq 1) \\ v(N) &= 1, \quad v(S) = 0 \text{ en otro caso.} \end{aligned}$$

Probaremos que $\mathcal{M}(N, v) = C(N, v)$. Para ello, ya que $C(N, v) \subset \mathcal{M}(N, v)$, basta con comprobar que $\mathcal{M}(N, v) \subset C(N, v)$.

Sea $x \in I(N, v) \setminus C(N, v)$. Veamos que $x \notin \mathcal{M}(N, v)$. En efecto, dado que $x \notin C(N, v)$, o bien $x_2 > 1 - \alpha$ o bien $x_3 > 1 - \alpha$. Supongamos, sin pérdida de generalidad por la simetría de los jugadores 2 y 3, que $x_2 > 1 - \alpha$. Entonces

$$e(\{1, 3\}, x) = v(1, 3) - (x_1 + x_3) > 0,$$

ya que $v(1, 3) = \alpha$ y $x_1 + x_3 = 1 - x_2 < \alpha$. Consecuentemente, el jugador 1 podría objetar en contra del jugador 2 por medio de la coalición $\{1, 3\}$. Sin embargo, es fácil comprobar que el jugador 2 no podría contraobjetar.

2.8. El kernel y el prekernel

Para terminar este capítulo describimos otro concepto de solución que atiende al proceso de negociación que podría darse en el juego. Observaremos que el kernel, Davis y Maschler (1965), de un juego está contenido en el

conjunto de regateo y aunque su cálculo suele ser complicado es más sencillo que el del conjunto de regateo. El prekernel fue introducido por Maschler et al. (1972) para determinar el kernel en un tipo especial de juegos. Como veremos una diferencia entre ambos es que el kernel selecciona asignaciones en el conjunto de imputaciones mientras que el prekernel selecciona simplemente asignaciones eficientes. En el próximo capítulo, concretamente en la Observación 3.2, mencionaremos algunas propiedades que, en determinados ejemplos permiten simplificar el cálculo de estos conjuntos.

Definición 2.75 Sean $i, j \in N$ y $x \in I^*(N, v)$. Se define el máximo exceso del jugador i sobre el jugador j con respecto a la preimputación x como

$$s_{ij}(x) = \max\{e(S, x) : S \in \Gamma_{ij}\}.$$

Si el máximo exceso es no negativo, representa la máxima cantidad que el jugador i puede ganar sin la cooperación de j , formando una coalición que no contenga a j y suponiendo que el resto de la coalición está satisfecha con la cantidad que les daba x . Podemos entonces decir que el máximo exceso es una medida de poder del jugador i para atacar al jugador j con respecto a la preimputación x .

En caso de que x satisfaga racionalidad individual, el jugador j es inmune a amenazas, dado que puede conseguir $v(j)$ por sí mismo.

Definición 2.76 Sean $i, j \in N$ y $x \in I(N, v)$. Diremos que el jugador i sobrevalora al jugador j con respecto a la imputación $x \in I(N, v)$ si:

$$x_j > v(j) \text{ y } s_{ij}(x) > s_{ji}(x).$$

Definición 2.77 Definimos el kernel de un juego (N, v) como el conjunto de imputaciones para las que ningún jugador sobrevalora a otro.

$$\mathcal{K}(N, v) = \left\{ x \in I(N, v) : (s_{ij}(x) - s_{ji}(x))(x_j - v(j)) \leq 0, \right. \\ \left. (s_{ji}(x) - s_{ij}(x))(x_i - v(i)) \leq 0, \text{ si } i \neq j \right\}.$$

Definición 2.78 Definimos el prekernel de un juego (N, v) como el conjunto de preimputaciones para las que cualesquiera dos jugadores son igualmente poderosos en sus amenazas mutuas.

$$\mathcal{K}^*(N, v) = \left\{ x \in I^*(N, v) : s_{ij}(x) = s_{ji}(x), \text{ si } i \neq j \right\}.$$

El kernel es una unión finita de poliedros convexos cerrados. La siguiente proposición resalta algunas propiedades del kernel y del prekernel. Sus demostraciones pueden consultarse en Driessen (1988). Una de ellas nos indica que la parte del kernel y del prekernel que está contenida en el núcleo coincide.

Proposición 2.79 *Sea $(N, v) \in G^n$. Se verifican las siguientes propiedades:*

- a) $\mathcal{K}(N, v) \neq \emptyset$
- b) $\mathcal{K}^*(N, v) \neq \emptyset$
- c) $\mathcal{K}(N, v) \subset \mathcal{M}(N, v)$
- d) Si (N, v) es superaditivo, $\mathcal{K}(N, v) = \mathcal{K}^*(N, v)$.
- e) Si (N, v) es convexo, $\mathcal{K}(N, v) = \mathcal{K}^*(N, v)$ y es unitario.¹³
- f) $\mathcal{K}(N, v) \cap C_\varepsilon(N, v) = \mathcal{K}^*(N, v) \cap C_\varepsilon(N, v)$ para cada $\varepsilon \leq 0$.

Demostración: Aquí demostraremos tan sólo el apartado c). Sea $x \in \mathcal{K}(N, v)$ y sea (y^S, S) una objeción del jugador i en contra del j con respecto a x . Luego $S \in \Gamma_{ij}$, $\sum_{k \in S} y_k^S = v(S)$ e $y_k^S > x_k$ para todo $k \in S$. Demostramos, a continuación, que existe una contraobjeción de j a i . En efecto, consideremos dos casos:

1. $s_{ij}(x) > s_{ji}(x)$.

Como $x \in \mathcal{K}(N, v)$, $x_j \leq v(j)$. Entonces, $x_j = v(j)$ y, por tanto, $(x_j, \{j\})$ es una contraobjeción válida.

2. $s_{ij}(x) \leq s_{ji}(x)$

En este caso elegimos $T \in \Gamma_{ji}$ tal que $s_{ji}(x) = e(T, x) = v(T) - \sum_{k \in T} x_k$.

¹³Además, como veremos en el próximo capítulo, coinciden con el nucleolo.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in T \cap S} y_k^S &= \sum_{k \in S} y_k^S - \sum_{k \in S \setminus T} y_k^S \\
 &= v(S) - \sum_{k \in S \setminus T} y_k^S \\
 &< v(S) - \sum_{k \in S \setminus T} x_k \\
 &= v(S) - \sum_{k \in S} x_k + \sum_{k \in S \cap T} x_k.
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, si sumamos $x_{T \setminus S}$ en los miembros de la desigualdad llegamos a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in T \cap S} y_k^S + \sum_{k \in T \setminus S} x_k &< v(S) - \sum_{k \in S} x_k + \sum_{k \in T} x_k \\
 &\leq s_{ij}(x) + \sum_{k \in T} x_k \\
 &= s_{ij}(x) - s_{ji}(x) + v(T) \leq v(T),
 \end{aligned}$$

lo que claramente indica la existencia de una contraobjeción a través de la coalición T . Dejamos que el lector la construya.

Las pruebas de las demás afirmaciones pueden encontrarse en Driessen (1988), aunque algunas ideas se comentan en la Observación 2.80. ■

Observación 2.80 *Se puede demostrar que el conjunto de regateo y el kernel de cualquier juego son no vacíos a partir de la existencia del nucleolo, concepto de solución puntual que se estudia en el siguiente capítulo. El nucleolo pertenece al kernel del juego y, como hemos visto, el kernel es un subconjunto del conjunto de regateo.*

Además, sabemos que el conjunto de regateo de un juego convexo coincide con el núcleo. Como consecuencia, el kernel de un juego convexo es un subconjunto del núcleo. En Maschler et al. (1972) se prueba que, por añadidura, para juegos convexos estos conceptos son unitarios y coinciden con el nucleolo del juego.

Capítulo 3

Conceptos de solución puntuales

Conceptos clave: *Propiedades de las reglas de reparto. El valor de Shapley. Caracterizaciones axiomáticas del valor de Shapley. Situaciones asimétricas: los valores ponderados. Uniones a priori: el valor coalicional. Situaciones con comunicación restringida: el valor de Myerson. El nucleolo y el prenucleolo. El tau-valor. El core-center*

En el presente capítulo estudiaremos conceptos de solución que determinan un único reparto. Algunos de ellos están definidos para la clase general de juegos, mientras que otros lo están únicamente para alguna subclase. Comenzaremos introduciendo algunas propiedades básicas de una regla de reparto, o axiomas, que posteriormente utilizaremos para caracterizar las soluciones que presentamos.

La caracterización axiomática de soluciones es una parte de la teoría de juegos que continuamente proporciona nuevas visiones que permiten comparar las distintas soluciones a un juego coalicional. Se trata de desgranar la regla de reparto dada en propiedades básicas, de tal forma que se obtengan resultados de existencia y unicidad de solución. A veces, resulta sorprendente que determinadas soluciones complejas queden caracterizadas por una serie de propiedades que parecen totalmente admisibles y naturales. Otra parte de la caracterización axiomática consiste en demostrar que ninguna propiedad sobra, en el sentido de que si se eliminase de la caracterización se perdería la

unicidad. Normalmente esto se conoce como independencia de los axiomas.

La primera solución puntual que presentaremos será el valor de Shapley. Una discusión acerca del valor de Shapley se puede encontrar en Luce y Raiffa (1957) y otra, más reciente, en el monográfico de Roth (1988) dedicado a Shapley. El valor de Shapley (Shapley (1953b)) ha sido ampliamente estudiado y, hoy por hoy, quizás sea el concepto de solución para juegos cooperativos más utilizado. Sus principales ventajas son, por una parte, la linealidad de la fórmula de cálculo que simplifica el mismo y, por otra, el proporcionar un único valor como solución. Ha sido utilizado, por poner un par de ejemplos ilustrativos, para distribuir los costes de distintas compañías aéreas en un aeropuerto y para distribuir los costes entre diferentes activos amortizables cuando los ingresos se obtienen por estos activos conjuntamente. Después del análisis de la caracterización más conocida del valor de Shapley discutiremos otras que se han dado para este valor. Mostraremos, además, que para la clase de los juegos convexos el valor de Shapley es el baricentro de los puntos extremos del núcleo teniendo en cuenta sus multiplicidades.

Se darán indicaciones de la ingente literatura surgida entorno al valor de Shapley: los valores ponderados, de interés cuando los jugadores no parten de una situación simétrica y tienen asociados pesos exógenos; los valores coalicionales, aplicables cuando los jugadores se asocian en coaliciones a priori; y el valor de Myerson, que supone que los jugadores no se pueden comunicar libremente y están sujetos a unas restricciones en la comunicación que vienen modeladas por un grafo.

El nucleolo fue introducido por Schmeidler (1969) y es, como el valor de Shapley, un concepto de solución puntual. Ya sabemos que el núcleo es vacío cuando hay al menos una coalición que tiene incentivos para romper la formación de la gran coalición. La idea del nucleolo consiste en hacer lo más “feliz” posible a la coalición más “infeliz”. Esta idea también es aplicable si el núcleo no es vacío y, en este caso, la asignación seleccionada es estable. Una vez analizadas las buenas propiedades del nucleolo se proporcionará un sencillo método geométrico para su cálculo en juegos de 3 jugadores. Para más jugadores son útiles las técnicas de programación lineal. El nucleolo persigue objetivos de justicia, solidaridad y, también, estabilidad. Veremos que en la clase de los juegos convexos el kernel y el prekernel coinciden con el nucleolo. Citar también la noción de nucleolo per cápita introducido por Grotte (1971). Las ideas básicas son las mismas, pero ahora se minimizan los mayores excesos per cápita. También conviene hablar del trabajo de Gately (1974) en el que se desarrolla el llamado “Gately point” que, inspirado en ideas similares,

minimiza las propensiones de los jugadores a romper la gran coalición. Uno de los problemas de este concepto de solución es que no tiene por que estar en el núcleo cuando éste no es vacío y una de sus ventajas es su fácil cálculo. Los fundamentos de esta solución se extendieron al considerar las propensiones de los jugadores a romper no sólo la gran coalición sino también otras coaliciones. La imputación que resulta recibe el nombre de “disruption nucleolus” (Littlechild y Vaidya (1976)) que pertenece al núcleo si éste no es vacío. Estos valores, variantes del nucleolo, no serán tratados en la presente monografía.

El τ -valor fue introducido por Tijs (1981) para los juegos cuasi-equilibrados o de compromiso admisible. El τ -valor elige un elemento en el core-cover de tal forma que cada jugador reciba su mínimo derecho más una cantidad añadida que depende de su pago de utopía. Obviamente, el τ -valor, no tiene por que ser un elemento del núcleo. Se dará una caracterización axiomática para este valor y se caracterizarán aquellos juegos para los que el τ -valor está en el núcleo. Recomendamos consultar el trabajo de Driessen y Tijs (1985) para una exposición detallada. Mostraremos que para la clase de los juegos convexos el τ -valor puede ser calculado fácilmente.

Finalizaremos el capítulo discutiendo una solución que ha sido propuesta recientemente en González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2003b, 2007): el core-center. Como su propio nombre indica se trata de calcular el centro del núcleo suponiendo que todas las asignaciones estables son igualmente apetecibles. Matemáticamente, el core-center es la esperanza, o media, de la distribución uniforme definida sobre el núcleo. Este concepto de solución se circunscribe a la clase de juegos equilibrados.

3.1. Propiedades de una regla de reparto

Comenzamos definiendo algunas propiedades de interés para una regla de reparto. Pero antes distinguiremos unos tipos especiales de jugadores que, por sus características, nos ayudarán a simplificar el cálculo de las soluciones.

Definición 3.1 Sean $(N, v) \in G^n$ e $i, j \in N$ dos jugadores.

- El jugador i se dice títere (o “dummy”) si para cada $S \subset N \setminus \{i\}$,

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(\{i\}).$$

- Si el jugador i es títere y, además, $v(i) = 0$, diremos que es un jugador nulo.

- Los jugadores i y j son simétricos con respecto a la función característica si para toda $S \subset N \setminus \{i, j\}$ se verifica que

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(S \cup \{j\}) - v(S).$$

Observación 3.2 Sean $(N, v) \in G^n$ y $x \in \mathcal{K}(N, v) \cup \mathcal{K}^*(N, v)$. Si $i, j \in N$ son jugadores simétricos entonces $x_i = x_j$. Si $i \in N$ es un jugador títere entonces $x_i \leq v(\{i\})$. Si $x \in \mathcal{K}(N, v)$ entonces $x_i = v(\{i\})$.

Nos centramos ahora en definir formalmente algunas propiedades de las reglas de reparto, aplazando momentáneamente las interpretaciones intuitivas de su significado. Sean G^n el conjunto de todos los juegos TU de n jugadores y $\varphi: G^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una regla de reparto, es decir, una aplicación que a cada juego le asocia un vector n -dimensional.¹

Definición 3.3 Sea φ una regla de reparto definida en el conjunto G^n .

- La regla de reparto φ es invariante por traslaciones si dados dos juegos $(N, v), (N, w) \in G^n$, y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $w(S) = v(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i$ para cada $S \subset N$, se verifica que

$$\varphi(N, w) = \varphi(N, v) + \alpha.$$

- La regla de reparto φ es invariante por cambios de escala si dados $(N, v), (N, w) \in G^n$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que $w(S) = rv(S)$ para $S \subset N$, se verifica que

$$\varphi(N, w) = r\varphi(N, v).$$

- La regla de reparto φ satisface covarianza si dados $(N, v), (N, w) \in G^n$, $r > 0$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $w(S) = rv(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i$, $S \subset N$, se cumple que

$$\varphi(N, w) = r\varphi(N, v) + \alpha.$$

¹Por supuesto, las definiciones pueden adaptarse fácilmente si la regla se restringe, o está sólo definida, a una subclase $\Omega \subset G^n$, esto es, si $\varphi: \Omega \subset G^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. En este caso, simplemente diremos que la regla de reparto φ satisface la correspondiente propiedad para los juegos de la clase Ω .

- La regla de reparto φ es eficiente si para todo $(N, v) \in G^n$,

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v) = v(N).$$

- La regla de reparto φ satisface la propiedad de racionalidad individual si para todo $(N, v) \in G^n$,

$$\varphi_i(N, v) \geq v(i), \text{ para todo } i \in N.$$

- La regla de reparto φ satisface selección en el núcleo si para todo $(N, v) \in G^n$ equilibrado,

$$\varphi(N, v) \in C(N, v).$$

- La regla de reparto φ satisface jugador títere si para todo $(N, v) \in G^n$ y cada jugador $i \in N$ que sea títere, se tiene que

$$\varphi_i(N, v) = v(i).$$

- La regla de reparto φ satisface jugador nulo si para todo $(N, v) \in G^n$ e i jugador nulo,

$$\varphi_i(N, v) = 0.$$

- La regla de reparto φ satisface simetría si para todo $(N, v) \in G^n$ y todo par i, j de jugadores simétricos,

$$\varphi_i(N, v) = \varphi_j(N, v).$$

- La regla de reparto φ satisface continuidad si φ es continua como función de $\mathbb{R}^{2^n-1}$ en $\mathbb{R}^n$.

- La regla de reparto φ satisface aditividad si para todo $(N, v), (N, w) \in G^n$, se verifica que

$$\varphi(N, v + w) = \varphi(N, v) + \varphi(N, w).$$

- La regla de reparto φ satisface monotonía fuerte (o marginalidad) si, dados $(N, v), (N, w) \in G^n$ e $i \in N$ tales que para cada $S \subset N \setminus \{i\}$, $w(S \cup \{i\}) - w(S) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$, entonces

$$\varphi_i(N, w) \geq \varphi_i(N, v).$$

- La regla de reparto φ satisface monotonía coalicional si dados (N, v) , $(N, w) \in G^n$ y $T \subset N$ tales que $w(T) > v(T)$ y $w(S) = v(S)$ para $S \neq T$, entonces

$$\varphi_i(N, w) \geq \varphi_i(N, v), \text{ para todo } i \in T.$$

- La regla de reparto φ satisface monotonía en el agregado si dados (N, v) , $(N, w) \in G^n$ con $w(N) > v(N)$ y $w(S) = v(S)$ para $S \neq N$, se tiene que

$$\varphi_i(N, w) \geq \varphi_i(N, v), \text{ para todo } i \in N.$$

- La regla de reparto φ satisface monotonía coalicional débil si dados (N, v) , $(N, w) \in G^n$ y $T \subset N$ tales que $w(T) > v(T)$ y $w(S) = v(S)$ para $S \neq T$, entonces

$$\sum_{i \in T} \varphi_i(N, w) \geq \sum_{i \in T} \varphi_i(N, v).$$

- La regla de reparto φ satisface contribuciones equilibradas si para todo $(N, v) \in G^n$ y cada par de jugadores $i, j \in N$,

$$\varphi_i(N, v) - \varphi_i(N \setminus \{j\}, v_{N \setminus \{j\}}) = \varphi_j(N, v) - \varphi_j(N \setminus \{i\}, v_{N \setminus \{i\}}).$$

- Una regla de reparto φ definida en G^2 satisface estándar para dos si para cada uno de los dos jugadores $i = 1, 2$ se tiene que

$$\varphi_i(N, v) = v(i) + \frac{1}{2}(v(1, 2) - v(1) - v(2)).$$

- La regla de reparto φ satisface consistencia si para cada $(N, v) \in G^n$, $S \subset N$ e $i \in S$ se verifica que

$$\varphi_i(S, v_S^\varphi) = \varphi_i(N, v).$$

siendo (S, v_S^φ) el juego reducido a la coalición S según la regla φ .²

²Existen distintas formas de definir el juego reducido. En la caracterización del valor de Shapley del Teorema 3.16 veremos una de ellas.

Tras la presentación formal de las principales propiedades de una regla de reparto, procedemos a reflexionar brevemente acerca del significado de las mismas.

La propiedad de invarianza por traslaciones (cambios de escala) refleja que si un juego es el trasladado por otro mediante un cambio de origen (de escala), entonces la regla de reparto también se traslada (escala) de la misma forma. El axioma de covarianza es una combinación de las anteriores propiedades.

La propiedad de eficiencia nos indica que la suma de las asignaciones que reciben todos los jugadores ha de coincidir con el valor de la gran coalición.

El axioma de racionalidad individual exige a una regla de reparto que asigne a cada jugador al menos su valor individual.

La propiedad de selección en el núcleo selecciona reglas de reparto en las que ninguna coalición tenga incentivos de desviarse y formar su propia coalición, o sea, repartos estables.

La propiedad de jugador títere (nulo) establece que si un jugador no realiza aportación a ninguna coalición entonces debe recibir su asignación individual (no debe recibir asignación).

La propiedad de simetría nos dice que si dos jugadores son intercambiables en el juego, deben recibir el mismo pago.

Una regla de reparto es continua si pequeñas variaciones en la utilidad que reciben los jugadores provocan pequeñas variaciones en los repartos.

La propiedad de aditividad establece que el pago que reciben los jugadores en un juego es igual a la suma de los pagos que recibirían si el juego se descompone en suma de dos.

El significado de las propiedades de monotonía es el siguiente. La monotonía fuerte indica que si la contribución marginal de un jugador a todas las coaliciones en un juego dado es superior o igual a la contribución marginal del jugador a todas las coaliciones en otro juego, entonces no debe recibir menos asignación en el primer juego que en el segundo. La monotonía coalicional establece que si dos juegos se diferencian exclusivamente en el valor de una coalición T ($w(T) > v(T)$), entonces todos los jugadores de la coalición T , individualmente, deben recibir, al menos, el mismo pago con la regla de reparto en el juego w que en el juego v . La monotonía en el agregado es un caso particular de la anterior propiedad cuando entre los juegos v y w la única variación está en el valor de la gran coalición. La monotonía coalicional débil es una versión debilitada de monotonía coalicional, en la que ahora, colectivamente, la coalición T debe recibir, al menos, el mismo pago con la regla de reparto en el juego w que en el juego v .

Una regla de reparto satisface contribuciones equilibradas si la utilidad que pierde o gana el jugador i si j deja de participar en el juego coincide con la utilidad que pierde o gana el jugador j si se va del juego el jugador i .

El axioma de ser estándar para dos, reparte, para juegos de dos jugadores, la utilidad total a partes iguales una vez se descuentan los valores individuales. Es decir, la asignación que recibe cada jugador se puede descomponer en dos partes o fases: en la primera fase cada jugador recibe lo que se puede garantizar por sí mismo y, en la segunda, se divide el resto a partes iguales.

El axioma de consistencia establece igualdad (o consistencia) entre la solución en el juego original y la solución en el juego reducido a una coalición.

3.2. El valor de Shapley

El valor de Shapley (Shapley (1953b)) es, sin lugar a duda, la regla de reparto más conocida. Se calcula promediando los vectores de contribuciones marginales asociados a todos los posibles órdenes de los jugadores. Presentamos, en esta sección, su definición y sus principales caracterizaciones axiomáticas.

Definición 3.4 *El valor de Shapley de un juego $(N, v) \in G^n$ es el reparto,*

$$Sh_i(N, v) = \frac{1}{n!} \sum_{S \subset N: i \in S} (s-1)!(n-s)!(v(S) - v(S \setminus \{i\})), \text{ para cada } i \in N.$$

La expresión de $Sh_i(N, v)$ se puede interpretar como el valor esperado del jugador i en el juego (N, v) . Los coeficientes indican que todas las coaliciones del mismo tamaño son igualmente apetecibles. De hecho, $(s-1)!(n-s)!$ es el número de permutaciones para las cuales los predecesores del jugador i son los jugadores de $S \setminus \{i\}$.

Observación 3.5 *Las siguientes expresiones son equivalentes a la anterior:*

$$\begin{aligned} Sh_i(N, v) &= \frac{1}{n!} \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} s!(n-s-1)!(v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} (v(\text{Pre}_\sigma(i) \cup \{i\}) - v(\text{Pre}_\sigma(i))) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} m^\sigma(N, v). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la anterior observación podemos interpretar el valor de Shapley de la siguiente forma. Supongamos que los jugadores van llegando a un lugar de modo aleatorio, y al llegar cada jugador recibe como utilidad su aportación marginal a los jugadores que ya estaban presentes. El valor de Shapley se puede ver como el vector de utilidades esperadas de los jugadores bajo este procedimiento. Dicho de otro modo, el valor de Shapley es la media de los $n!$ vectores de contribuciones marginales, aunque alguno esté repetido varias veces (multiplicidad).

TUGlab: El valor de Shapley se calcula con TUGlab mediante el comando SHAPLEY.

```
>> A=[0 0 0 6 5 5 10];  
>> Sh=Shapley(A)  
Sh =  
    3.5000    3.5000    3.0000
```

Advertimos al usuario de la sintaxis especial del comando Shapley: la letra inicial es mayúscula. Recordemos que MATLAB® diferencia mayúsculas de minúsculas.

Observemos, en primer lugar, que el valor de Shapley no satisface el axioma de racionalidad individual en el conjunto general de juegos. No obstante, en la clase de los juegos 0-monótonos el valor de Shapley satisface la propiedad de racionalidad individual. Además, si un juego es convexo entonces el valor de Shapley está en el núcleo del juego, es decir, satisface la propiedad de selección en el núcleo en la clase de juegos convexos. La demostración de este hecho es trivial teniendo en cuenta que el núcleo de un juego convexo es la envoltura convexa de los vectores de contribuciones marginales y el valor de Shapley es el promedio de ellos.

Es fácil comprobar que el valor de Shapley satisface las propiedades de eficiencia, covarianza, jugador títere, jugadores simétricos y aditividad. De hecho, los axiomas de eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad caracterizan el valor de Shapley.

Teorema 3.6 *Existe un único valor en G^n satisfaciendo los axiomas de eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad, y es el valor de Shapley. Es decir,*

si φ es una regla de reparto en G^n que verifica los axiomas de eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad entonces $\varphi = Sh$.

Demostración: Como ya se ha dicho, es inmediato verificar que el valor de Shapley satisface las propiedades mencionadas.

Comprobemos que es la única regla de reparto que las cumple. Supongamos que φ es una regla de reparto que satisface las propiedades del teorema. Expresemos el juego (N, v) como combinación lineal de la base de los juegos de unanimidad:

$$v = \sum_{\emptyset \neq T \subset N} c_T u_T$$

siendo $c_T = \sum_{T' \subset T} (-1)^{t-t'} v(T')$. Por verificarse la propiedad de aditividad, tenemos que

$$\varphi(N, v) = \sum_{\emptyset \neq T \subset N} \varphi(N, c_T u_T).$$

Fácilmente se observa que todos los jugadores de T son simétricos para el juego $(N, c_T u_T)$, cualquiera que sea la coalición T . Entonces, para cada $i, j \in T, i \neq j$,

$$\varphi_i(N, c_T u_T) = \varphi_j(N, c_T u_T).$$

Además, todos los jugadores que no están en una coalición T son jugadores nulos en el juego $(N, c_T u_T)$, dado que si $i \notin T$ y $S \subset N \setminus \{i\}$,

$$c_T u_T(S \cup \{i\}) - c_T u_T(S) = 0 = c_T u_T(i).$$

Aplicando los axiomas de jugador nulo y simetría se deduce que

$$\varphi_i(N, c_T u_T) = \begin{cases} \frac{c_T}{t} & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (3.1)$$

Por la aditividad de φ ,

$$\varphi(N, v) = \sum_{\emptyset \neq T \subset N} \varphi(N, c_T u_T) = \sum_{\emptyset \neq T \subset N: i \in T} \frac{c_T}{t}.$$

Ahora, dado que el valor de Shapley satisface los axiomas mencionados, es trivial comprobar que $\varphi = Sh$. ■

Incidimos nuevamente en que el teorema es cierto para la clase general de juegos, no hace falta que sean 0-monótonos o superaditivos.

Observación 3.7 *Comprobamos que los axiomas son lógicamente independientes, es decir, que si eliminamos cualquiera de ellos, perdemos la unicidad del valor.*

- *Regla de reparto sin eficiencia. Definamos $\varphi = 2Sh$. Es trivial comprobar que satisface jugador títere, simetría y aditividad, al igual que el valor de Shapley.*
- *Regla de reparto que no satisface jugador títere. Definamos $\varphi_i(N, v) = \frac{v(N)}{n}$, $i \in N$ (la solución igualitaria). Fácilmente se observa que satisface eficiencia, simetría y aditividad, al igual que el valor de Shapley.*
- *Regla de reparto que no satisface aditividad. Sea D el conjunto de jugadores títeres del juego (N, v) y d su cardinal. Tomemos*

$$\varphi_i(N, v) = \begin{cases} v(\{i\}) + \frac{1}{n-d} \left(v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\}) \right) & \text{si } i \in N \setminus D \\ v(\{i\}) & \text{si } i \in D \end{cases}.$$

Esta regla satisface eficiencia, jugadores títeres y simetría, al igual que el valor de Shapley.

- *Regla de reparto que no satisface simetría. Consideremos $(N, v) \in G^n$, $\sigma \in \Pi(N)$ y $\varphi(N, v) = m^\sigma(N, v)$. Es claro que satisface eficiencia, títeres y aditividad, al igual que el valor de Shapley.*

Ejemplo 3.8 *Sea (N, v) el juego con $N = \{A, B, C\}$ y función característica:*

$$\begin{aligned} v(A) &= v(B) = v(C) = 0 \\ v(A, B) &= 2, \quad v(A, C) = 4, \quad v(B, C) = 6 \\ v(A, B, C) &= 7 \end{aligned}$$

Vamos a calcular el valor de Shapley de este juego de tres formas distintas.

1. *Utilizando la descomposición en juegos de unanimidad. Para ello calculamos los dividendos de Harsanyi por el procedimiento descrito en la*

Sección 2.6.

$$\begin{aligned}
c_{\{A\}} &= v(A) = 0; c_{\{B\}} = v(B) = 0; c_{\{C\}} = v(C) = 0 \\
c_{\{A,B\}} &= v(A, B) - v(A) - v(B) = 2 \\
c_{\{A,C\}} &= v(A, C) - v(A) - v(C) = 4 \\
c_{\{B,C\}} &= v(B, C) - v(B) - v(C) = 6 \\
c_{\{A,B,C\}} &= v(A, B, C) - v(A, B) - v(A, C) - v(B, C) \\
&\quad + v(A) + v(B) + v(C) = 7 - 2 - 4 - 6 = -5
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$v = 2u_{\{A,B\}} + 4u_{\{A,C\}} + 6u_{\{B,C\}} - 5u_{\{A,B,C\}}.$$

Entonces, de acuerdo con la expresión (3.1), el valor de Shapley,

$$Sh(N, v) = (Sh_A(N, v), Sh_B(N, v), Sh_C(N, v)),$$

viene dado por:

$$Sh_A(N, v) = 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} - 5\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$Sh_B(N, v) = 2\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2} - 5\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$Sh_C(N, v) = 4\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2} - 5\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

2. Utilizando los órdenes de los jugadores y los vectores de contribuciones marginales. Calculamos los vectores de contribuciones marginales, que se recogen en la tabla.

Orden	Jugador		
	A	B	C
ABC	0	2	5
ACB	0	3	4
BAC	2	0	5
BCA	1	0	6
CAB	4	3	0
CBA	1	6	0
	8	14	20

El valor de Shapley es la media aritmética de los vectores de contribuciones marginales, esto es,

$$Sh(N, v) = \frac{1}{6}(8, 14, 20) = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

3. Dividiendo de forma igualitaria los valores de las coaliciones desde las más pequeñas a las mayores. Procedemos por etapas:

- a) Empezamos por las coaliciones individuales. Como $v(A) = 0$, y A es el único jugador de esta coalición, al jugador A le asignamos ese valor, que denotaremos por $x^1(A) = 0$. Procedemos del mismo modo con los otros jugadores, que tampoco recibirían nada en este paso, $x^1(B) = x^1(C) = 0$.
- b) Ahora nos fijamos en las coaliciones de dos jugadores. Dado que $v(A, B) = 2$ y $x^1(A) + x^1(C) = 0$, tenemos $v(AB) - (x^1(A) + x^1(C)) = 2$ para repartir a partes iguales entre A y B . Luego en este paso A y B , por formar la coalición AB , reciben 1 unidad cada uno, $x_{AB}^2(A) = x_{AB}^2(B) = 1$. Análogamente, para las otras coaliciones de dos jugadores, tendríamos

Coalición	Utilidad	Acumulado	A repartir	Reparto
S	$v(S)$	$x^1(S)$	$v(S) - x^1(S)$	$x_S^2(i), i \in S$
AC	4	0	4	2
BC	6	0	6	3

- c) Finalmente, para la gran coalición $v(A, B, C) = 7$. En las etapas anteriores los jugadores llevan acumulados los siguientes pagos:

Jugador	Etapas 1	Etapas 2	Total
A	0	1+2	3
B	0	1+3	4
C	0	2+3	5
			12

Así pues, en este paso disponemos de $v(A, B, C) - 12 = -5$ unidades a repartir a partes iguales entre los 3 jugadores que forman la coalición. Luego cada uno percibirá $-\frac{5}{3}$.

El total acumulado por cada jugador en el proceso de reparto descrito nos da el valor de Shapley del juego

$$Sh(N, v) = \left(3 - \frac{5}{3}, 4 - \frac{5}{3}, 5 - \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

Ejemplo 3.9 *Para el juego del dólar los vectores de contribuciones marginales son:*

	Jugador		
Orden	1	2	3
123	0	1	0
132	0	0	1
213	1	0	0
231	0	0	1
312	1	0	0
321	0	1	0
	2	2	2

Luego, el valor de Shapley del juego del dólar es:

$$Sh(N, v) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Ejemplo 3.10 *Los vectores de contribuciones marginales del juego del guante (el jugador tercero posee el guante único del par) son:*

	Jugador		
Orden	1	2	3
123	0	0	1
132	0	0	1
213	0	0	1
231	0	0	1
312	1	0	0
321	0	1	0
	1	1	4

Fijémonos en que el vector $(0, 0, 1)$ aparece repetido 4 veces, es decir, tiene multiplicidad 4. Luego, el valor de Shapley del juego del guante es:

$$Sh(N, v) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right).$$

Ejemplo 3.11 Consideremos la familia de juegos $\{(N, v_a)\}_{a=0}^3$, donde $N = \{1, 2, 3\}$ y, para cada $a \in [0, 3]$, la función característica viene dada por

$$\begin{aligned} v_a(1) &= v_a(2) = v_a(3) = 0 \\ v_a(12) &= 2 - a, v_a(13) = a^2, v_a(23) = 1 + a \\ v_a(123) &= 3 \end{aligned}$$

En la Figura 3.1 hemos representado con TUGlab la trayectoria del valor de Shapley de esta familia (curva en azul). Como se puede apreciar, la curva resultante es continua. En la misma figura se dibuja (curva en negro) la trayectoria del valor obtenido promediando los vectores de contribuciones marginales sin contar su multiplicidad. Se observa que hay saltos en la trayectoria (puntos en negro aislados) lo que nos permite aventurar, de forma empírica, que este valor no es continuo. Dejamos al lector la comprobación rigurosa de este hecho. Además, para ciertos valores del parámetro el valor de Shapley no pertenece al conjunto de imputaciones del juego. ¿A qué es debido?

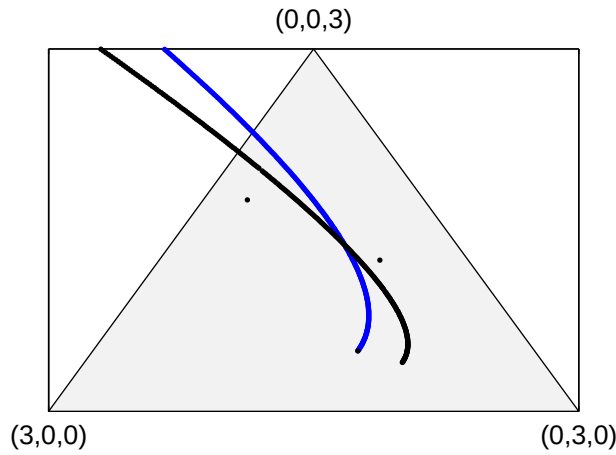


Figura 3.1: Continuidad del valor de Shapley

TUGlab: Presentamos el código en MATLAB[®] que hemos usado para generar la Figura 3.1. En él aparecen algunas de las funciones auxiliares que no describimos en esta monografía, pero que pueden ser muy útiles para realizar tareas más avanzadas.

```

>> PP=[];QQ=[];a=[0:0.01:3];AA=[0 0 0 2 0 1 3];
>> clf;imputationset(AA)
>> hold on, axis(axis)
>> for ii=[1:size(a,2)]
>>   A=[0 0 0 2-a(ii) a(ii)^2 1+a(ii) 3];
>>   [S,C]=Shapley(A);
>>   C=repeatedrows(C);
>>   PP=[PP;S];
>>   QQ=[QQ;mean(C)];
>> end
>> imputation3plot(AA,PP,'b.')
>> imputation3plot(AA,QQ,'k.')

```

En este fragmento de código aparecen las siguientes órdenes auxiliares de TUGlab: REPEATEDROWS e IMPUTATION3PLOT. Remitimos a la guía de usuario del programa para la descripción detallada de estos comandos.

Existen diversas caracterizaciones del valor de Shapley. Como ya se ha comentado, este valor ha generado una abundante y prolífica literatura. Hoy en día, 55 años después de que su autor lo definiese, todavía siguen apareciendo artículos en prestigiosas revistas de teoría de juegos relacionados con el valor de Shapley. Puede consultarse la monografía de Roth (1988) dedicada a este valor y a sus extensiones, aunque ya hay nuevas aportaciones interesantes no incluidas. Recientemente, en el año 2003, se conmemoraron los 50 años del valor en un congreso celebrado en Stony Brook (New York), y allí se pudo ver que el valor está todavía en auge.

Se puede comprobar que el valor de Shapley satisface las propiedades de monotonía fuerte y de contribuciones equilibradas, lo que dio pie a las siguientes caracterizaciones axiomáticas que se presentan sin demostración.

Teorema 3.12 (Myerson (1980)) *Existe un único valor en G^n que satisface los axiomas de eficiencia y contribuciones equilibradas, y es el valor de Shapley.*

Teorema 3.13 (Young (1985)) *Existe un único valor en G^n satisfaciendo los axiomas de monotonía fuerte, simetría y eficiencia, y es el valor de Shapley.*

Hart y Mas-Colell (1989) caracterizaron el valor de Shapley a través de la denominada función potencial.

Definición 3.14 *Se dice que $P: G^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función potencial si:*

1. $P: G^0 \rightarrow \mathbb{R}$ es nula, o sea, $P(\emptyset, v) = 0$,
2. $\sum_{i \in N} D^i P(N, v) = v(N)$, para todo $(N, v) \in G^n$,

donde $D^i P(N, v)$ representa la contribución marginal del jugador i al juego $(N, v) \in G^n$ mediante la función P , es decir,

$$D^i P(N, v) = P(N, v) - P(N \setminus i, v_{N \setminus i}).$$

Hart y Mas-Colell (1989) demostraron que existe una única función potencial P y, además, para cada juego $(N, v) \in G^n$ y para cada jugador $i \in N$, la contribución marginal del jugador i coincide con el valor de Shapley de dicho jugador.

Teorema 3.15 (Hart y Mas-Colell (1989)) *Existe una única función potencial $P: G^n \rightarrow \mathbb{R}$. Además, dados $(N, v) \in G^n$ y cualquier jugador $i \in N$,*

$$D^i P(N, v) = Sh_i(N, v).$$

En el mismo trabajo, Hart y Mas-Colell (1989) caracterizan el valor de Shapley utilizando la propiedad de consistencia y la propiedad de ser estándar para dos. Sea φ una regla de reparto. Para cada grupo de jugadores $S \subset N$ se define el juego reducido (S, v_S^φ) siendo, para $R \subset S$,

$$v_S^\varphi(R) = v(\hat{R}) - \sum_{i \in N \setminus S} \varphi_i(\hat{R}, v_{\hat{R}}) \text{ donde } \hat{R} = R \cup (N \setminus S).$$

En el juego reducido (S, v_S^φ) , la función característica de una subcoalición $R \subset S$ representa la utilidad que queda después de que los miembros de $N \setminus S$ han sido pagados mediante φ .

Teorema 3.16 (Hart y Mas-Colell (1989)) *Existe un único valor que satisface las propiedades de consistencia y estándar para dos, y es el valor de Shapley.*

La siguiente propiedad relaciona la extensión multilineal con el valor de Shapley de un juego. El valor de Shapley se puede obtener integrando las derivadas parciales de la extensión multilineal a lo largo de la diagonal principal $x_1 = \dots = x_n$ en el cubo $[0, 1]^n$.

Proposición 3.17 Sean $(N, v) \in G^n$, f la extensión multilineal de (N, v) e $i \in N$ un jugador cualquiera. Se verifica que:

$$Sh_i(N, v) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \dots, t) dt.$$

Demostración: Calculemos, en primer lugar, la derivada parcial de la extensión multilineal f respecto de la variable x_i .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{T \subset N, i \in T} \left(\prod_{k \in T, k \neq i} x_k \prod_{j \in N \setminus T} (1 - x_j) \right) v(T) \\ &\quad - \sum_{S \subset N, i \notin S} \left(\prod_{k \in S} x_k \prod_{j \notin S, j \neq i} (1 - x_j) \right) v(S). \end{aligned}$$

Ahora, si $T \subset N$ e $i \in T$ entonces es obvio que existe $S \subset N \setminus \{i\}$ tal que $T = S \cup \{i\}$. Ello nos permite agrupar la expresión anterior y escribir,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{S \subset N, i \notin S} \left(\prod_{k \in S} x_k \prod_{j \notin S, j \neq i} (1 - x_j) \right) (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Evaluando la expresión anterior en $x_1 = \dots = x_n = t$, llegamos a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \dots, t) = \sum_{S \subset N, i \notin S} t^s (1 - t)^{n-s-1} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Integrando con respecto a t en el intervalo $[0, 1]$,³

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \dots, t) dt &= \sum_{S \subset N, i \notin S} \left(\int_0^1 t^s (1 - t)^{n-s-1} dt \right) (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \\ &= Sh_i(N, v), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

En la Sección 5.2.6 explicamos de que forma se puede implementar este procedimiento para calcular el valor de Shapley con la ayuda de TUGlab.

³Recuérdese la distribución beta; $\int_0^1 t^s (1 - t)^{n-s-1} dt = \frac{s!(n-s-1)!}{n!}$.

3.3. Valores de Shapley ponderados

La propiedad de simetría es uno de los principales axiomas que caracteriza el valor de Shapley. Sin embargo, en ocasiones no parece razonable exigir esta propiedad. Pensemos, por ejemplo, que no siempre los esfuerzos de los jugadores son iguales a la hora de formar una coalición, o bien que, a menudo, los jugadores tienen diferentes habilidades, lo que supone que inicialmente partan de una situación no simétrica. También podemos pensar en situaciones no simétricas cuando cada jugador representa a su vez a otros agentes, pudiendo ser el número o el tipo de agentes representados por cada jugador distinto. En su tesis doctoral Shapley (1953a) ya introdujo los valores de Shapley ponderados y, a partir de este momento, muchos otros han desarrollado estudios de valores no simétricos: Owen (1968, 1972), Kalai y Samet (1987) y Hart y Mas-Colell (1989).

Comenzamos definiendo un sistema de pesos de un conjunto de jugadores. A continuación, definimos los valores de Shapley ponderados de los juegos de unanimidad y, en general, los valores de Shapley ponderados de cualquier juego.

Definición 3.18 *Un sistema ordenado de pesos $p = (\lambda, \Sigma)$, consiste en:*

1. *Un vector de pesos estrictamente positivos, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, con $\lambda_i > 0$ para todo $i \in N$.*
2. *Una partición ordenada de N , $\Sigma = \{S_1, \dots, S_m\}$, o sea, una partición en la que cuenta el orden en el que se escriben las coaliciones. Diremos que los jugadores de S_1 pertenecen al primer nivel, o nivel inferior, y que los jugadores de S_m son jugadores del nivel m , o nivel superior.*

Así pues, la partición ordenada $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ de $N = \{1, 2, 3\}$ es distinta de la partición ordenada $\{\{2\}, \{1\}, \{3\}\}$. Una partición ordenada permite considerar los pesos relativos a grupos de jugadores. Si $\Sigma = \{N\}$, consiste simplemente en considerar un sistema de pesos para los jugadores.

Definición 3.19 *Sean $S \subset N$, (N, u_S) el juego de unanimidad de la coalición S y $p = (\lambda, \Sigma)$ un sistema ordenado de pesos. Definimos el valor de Shapley*

ponderado por el sistema de pesos p del juego de unanimidad (N, u_S) mediante

$$(Sh_p)_i(N, u_S) = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\sum_{j \in S \cap S_k} \lambda_j} & \text{si } i \in S \cap S_k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

con $k = \max\{j : S_j \cap S \neq \emptyset\}$ e $i \in N$.

Como podemos observar en la definición precedente, la partición ordenada divide a los jugadores en distintos niveles de forma que los jugadores del nivel más alto se reparten la utilidad proporcionalmente a sus pesos y el resto no se lleva nada.

Aplicando la aditividad del valor de Shapley obtenemos la definición de valor de Shapley ponderado de un juego $(N, v) \in G^n$.

Definición 3.20 Sean $(N, v) \in G^n$ y p un sistema ordenado de pesos. Se define el valor de Shapley ponderado con sistema de pesos p , como el valor que a cada $i \in N$ le asigna,

$$(Sh_p)_i(N, v) = \sum_{S \subset N} c_S (Sh_p)_i(N, u_S),$$

siendo c_S , $S \subset N$, los correspondientes dividendos de Harsanyi del juego (N, v) .

Naturalmente, si $\lambda_i = \lambda_j$ para todo $i \neq j$ y $\Sigma = \{N\}$ entonces $Sh = (Sh)_p$.

Ejemplo 3.21 Consideremos el juego del guante con $L = \{1\}$ y $R = \{2, 3\}$. Calculamos el valor de Shapley ponderado para distintos sistemas ordenados de pesos.

Sistema de pesos	$(Sh)_p$
$\lambda = (1, 2, 3)$ $\Sigma = \{N\}$	$(\frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$
$\lambda = (1, 2, 3)$ $\Sigma = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$	$(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5})$
$\lambda = (2, 2, 2)$ $\Sigma = \{N\}$	$(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

A continuación, definimos el concepto de coalición de socios para proceder a dar dos axiomas que conjuntamente con eficiencia, jugador nulo y aditividad caracterizan los valores de Shapley ponderados.

Definición 3.22 Una coalición S es una coalición de socios en $(N, v) \in G^n$ si $v(T \cup R) = v(R)$ para toda $T \subset S, T \neq S$ y $R \subset N \setminus S$.

Una coalición de socios S se comporta como si fuera un único jugador de tal forma que cualquier coalición que no contenga a ningún socio no varía su utilidad si se une a un subgrupo de socios, o sea, los socios van en grupos.

Definición 3.23 Sea φ una regla de reparto en G^n .

- Diremos que φ satisface positividad si para todo juego monótono $(N, v) \in G^n$, $\varphi(N, v) \geq 0$.
- La regla φ satisface compañerismo si dada S , una coalición de socios en $(N, v) \in G^n$, se verifica que

$$\varphi_i(N, v) = \varphi_i(S, \left(\sum_{j \in S} \varphi_j(N, v)\right) u_S), \text{ para todo } i \in N.$$

La propiedad de positividad simplemente indica que si un juego es monótono, la regla de reparto no puede darle valores negativos a ningún jugador. El axioma de compañerismo nos indica que la utilidad total que consiguen en el juego (N, v) los miembros de cada coalición de socios $\sum_{j \in S} \varphi_j(N, v)$, se la reparten los jugadores de S del mismo modo que si jugaran el juego de unanimidad u_S entre ellos solos.

Teorema 3.24 (Kalai y Samet (1987)) Existe un único valor φ que satisface eficiencia, jugador nulo, aditividad, positividad y compañerismo, y se corresponde con $\varphi = (Sh)_p$.

3.4. El valor coalicional

En esta sección presentamos otra modificación del valor de Shapley. Supongamos que por mecanismos externos al propio juego, no contemplados en la función característica, se sabe que ciertos jugadores tienen afinidades (de tipo personal, político, o de cualquier otra índole) que provocan una mayor tendencia a cooperar entre ellos. De esta forma, el juego se modifica sustancialmente y se parte de un estado inicial en el que los jugadores que tienen afinidades aparecen agrupados en un sistema de coaliciones “a priori”. Owen

(1977) estudia este problema para juegos con utilidad transferible, e introduce un valor llamado valor coalicional, o valor de Owen, que proporciona un reparto de la utilidad en juego. El proceso que realiza, básicamente, es el siguiente: la estructura de coaliciones induce un juego entre éstas (juego cociente), a cada coalición “a priori” le asigna el valor de Shapley del juego cociente y distribuye este valor entre los miembros de la coalición teniendo en cuenta las posibilidades de que éstos entren a formar parte de otras coaliciones. Owen da una caracterización de su valor utilizando axiomas de eficiencia, títeres, simetría entre jugadores de una misma coalición “a priori”, simetría en el juego cociente y aditividad. Pasamos a definir formalmente los conceptos que necesitamos.

Definición 3.25 *Un sistema de coaliciones “a priori” $P = \{P_1, \dots, P_m\}$ es una partición de N . Una permutación $\sigma \in \Pi(N)$ se dice admisible con respecto a P si es una permutación de N tal que los elementos de las coaliciones “a priori” aparecen consecutivos. Denotaremos por $\Pi(N, P)$ el conjunto de permutaciones admisibles con respecto a P .*

Consideremos un juego (N, v) con sistema de coaliciones “a priori” P , que denotamos por (N, v, P) . Definimos, a continuación, el juego cociente que desempeñará un papel importante en la definición del valor coalicional.

Definición 3.26 *Sean $(N, v) \in G^n$ y P un sistema de coaliciones “a priori”. Definimos el juego cociente, (M, v_P) , como aquel con conjunto de jugadores $M = \{1, \dots, m\}$ y función característica*

$$v_P(S) = v\left(\bigcup_{j \in S} P_j\right), \text{ para todo } S \subset M.$$

Como observamos, el juego cociente tiene tantos jugadores como elementos hay en la partición (representantes) y el valor que obtiene una coalición de representantes es el valor en el juego original de todos los jugadores que son representados por la coalición de representantes.

Denotaremos por G_P^n al conjunto de juegos con sistema de coaliciones “a priori” con n jugadores. Tras efectuar una serie de cuentas que aquí se omiten, se puede obtener el valor coalicional de la siguiente forma: primero, calculamos el juego cociente inducido por partición de los jugadores; en segundo lugar, obtenemos el valor de Shapley del juego cociente que realiza un reparto entre las coaliciones “a priori”; finalmente, el valor asignado a cada coalición se distribuye entre sus miembros teniendo en cuenta las posibilidades de que dichos jugadores entren a formar parte de otras coaliciones.

Definición 3.27 Sea $(N, v, P) \in G_P^n$, se define el valor coalicional, o valor de Owen, como

$$\psi_i(N, v, P) = \sum_{S \subset M: j \notin S} \sum_{K \subset P_j: i \notin K} \frac{k!(p_j - k - 1)!s!(m - s - 1)!}{p_j!m!} \left(v(Q \cup K \cup \{i\}) - v(Q \cup K) \right).$$

siendo $i \in N$, j el único índice para el que $i \in P_j$ y $Q = \bigcup_{k \in S} P_k$.

Observación 3.28 Se puede comprobar que la anterior expresión es equivalente a

$$\psi_i(N, v, P) = \frac{1}{|\Pi(N, P)|!} \sum_{\sigma \in \Pi(N, P)} (v(\text{Pre}_\sigma(i) \cup \{i\}) - v(\text{Pre}_\sigma(i))),$$

Teniendo en cuenta la última observación, el valor coalicional puede ser visto como la media de las contribuciones marginales, dándoles probabilidad cero a aquellos órdenes en los cuales entre dos jugadores de una coalición “a priori” hay jugadores de otras coaliciones “a priori”, e igual probabilidad al resto de órdenes, es decir, a aquellos en los que los jugadores de cada coalición “a priori” aparecen consecutivos. Además, $\psi(N, v, P) = Sh(N, v)$ si $P = \{N\}$ ó $P = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$.

Ejemplo 3.29 En el juego del guante calculamos el valor coalicional si los dos agentes con el guante de la mano derecha se coaligan. Es decir, consideremos el sistema $P = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$. Los vectores de contribuciones marginales de las permutaciones admisibles se recogen en la tabla:

	Jugador		
$\Pi(N, P)$	1	2	3
123	0	1	0
132	0	0	1
231	1	0	0
321	1	0	0
	2	1	1

Luego, el valor coalicional sería

$$\psi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right).$$

Si tomamos $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ entonces el valor coalicional coincide con el valor de Shapley.

$$\psi = Sh = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

Definimos ahora nuevos axiomas o propiedades básicas de una regla de reparto con el propósito de dar una caracterización del valor coalicional, similar a la dada para el valor de Shapley, a través de eficiencia, simetría, jugador títere y aditividad.

Definición 3.30 Sea $(N, v, P) \in G_P^n$ y φ una regla de reparto en G_P^n .

- La regla φ satisface eficiencia si

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v, P) = v(N).$$

- La regla φ satisface jugadores títeres si para todo i jugador títere,

$$\varphi_i(N, v, P) = v(i).$$

- La regla φ satisface simetría individual si para todo $(N, v, P) \in G_P^n$, $i, j \in P_k$, tales que $v(S \cup i) = v(S \cup j)$ para todo $S \subset N \setminus \{i, j\}$,

$$\varphi_i(N, v, P) = \varphi_j(N, v, P).$$

- La regla φ satisface simetría en el cociente si para todos $P_k, P_l \in P$ tales que $v_P(S \cup k) = v_P(S \cup l)$ con $S \subset M \setminus \{k, l\}$,

$$\sum_{i \in P_k} \varphi_i(N, v, P) = \sum_{i \in P_l} \varphi_i(N, v, P).$$

- La regla φ satisface aditividad si para todo $(N, v, P), (N, w, P) \in G_P^n$ se verifica que

$$\varphi(N, v + w, P) = \varphi(N, v, P) + \varphi(N, w, P).$$

La explicación de estas propiedades es clara: son extensiones de las ya estudiadas para la clase de juegos sin coaliciones a priori. Los dos axiomas de simetría constituyen la única novedad: uno entre jugadores de cada coalición a priori y otro entre las coaliciones a priori.

Teorema 3.31 *Existe un único valor φ en G_P^n satisfaciendo los axiomas de eficiencia, títeres, simetría individual, simetría en el cociente y aditividad, y es el valor coalicional, es decir, $\varphi = \psi$.*

Existen otras caracterizaciones del valor coalicional. Citamos algunas de ellas. Winter (1992) añadió dos caracterizaciones, una utilizando la propiedad de consistencia y otra mediante el potencial. Por otra parte, Calvo et al. (1996) caracterizaron el valor coalicional utilizando la propiedad de contribuciones equilibradas introducida por Myerson (1980).

3.5. El valor de Myerson

En determinadas situaciones pueden existir limitaciones en la comunicación que no permitan que los jugadores cooperen libremente. Los dos principales valores estudiados en este contexto son el valor de Myerson (Myerson (1977)) y el valor posicional (Borm et al. (1992)). Aquí describimos brevemente el valor de Myerson.

Myerson estudia situaciones de comunicación restringida y modela la restricción en la cooperación mediante un grafo. Si dos jugadores están unidos mediante un arco del grafo pueden comunicarse directamente y, por tanto, formar una coalición, pudiendo también comunicarse por medio de otros jugadores si éstos sirven de enlace en el grafo.

La regla de asignación que propuso (el valor de Myerson) viene a ser el valor de Shapley de un nuevo juego construido a partir del original: el juego restringido por el grafo. Este juego representa el valor que puede obtener cada coalición si la restricción en la cooperación viene dada por un grafo. Comenzamos pues definiendo el concepto de grafo no orientado.

Definición 3.32 *Un grafo no orientado en N es un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de N . Si denotamos por $[n : m]$ el arco o camino que une a los jugadores $n \in N$ y $m \in N$, entonces un grafo no orientado es cualquier conjunto del tipo*

$$A = \{[n : m]; n \in N, m \in N, n \neq m\}.$$

Denotemos por $g(N)$ el conjunto de grafos no orientados en N . Para cada $S \subset N$ y cada $A \in g(N)$, $i, j \in S$ están conectados en S si A induce en S algún camino que conecta i con j . Denotaremos por $S|A$ la clase de las componentes conexas inducidas por A en S .

Ejemplo 3.33 Consideremos el grafo no orientado de la Figura 3.2, para el que $N = \{1, 2, 3\}$ y $A = \{[1 : 2], [1 : 3]\}$.

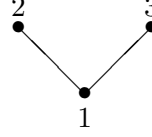


Figura 3.2: Un grafo no orientado

Los jugadores 2 y 3 están conectados en $\{1, 2, 3\}$ por A , pero no lo están en $\{2, 3\}$. En el ejemplo,

$$\{1, 2, 3\}|A = \{\{1, 2, 3\}\}, \quad \{2, 3\}|A = \{\{2\}, \{3\}\}.$$

Definición 3.34 Una terna (N, v, A) , en la que $(N, v) \in G^n$ y $A \in g(N)$, se denomina un juego con comunicación restringida. Denotaremos por G_C^n al conjunto de las situaciones con comunicación restringida con n jugadores.

Estamos ya en condiciones de definir formalmente el valor de Myerson en la clase de los juegos con comunicación restringida.

Definición 3.35 Sea $(N, v, A) \in G_C^n$, se define el valor de Myerson mediante

$$\varphi_M(N, v, A) = Sh(N, v^A)$$

siendo (N, v^A) el denominado juego de comunicación, dado por

$$v^A(S) = \sum_{T \in S|A} v(T), \text{ para todo } S \subset N.$$

Es trivial comprobar que el valor de Myerson es una generalización del valor de Shapley, puesto que cuando la comunicación entre los jugadores es completa, esto es, si todos los pares de jugadores están conectados, entonces

$$\varphi_M(N, v, A) = Sh(N, v).$$

Los tres axiomas de la siguiente definición serán claves para caracterizar el valor de Myerson.

Definición 3.36 Sea φ una regla de reparto en G_C^n .

- La regla φ satisface eficiencia en componentes si para todo $(N, v, A) \in G_C^n$ y $S \in N|A$,

$$\sum_{i \in S} \varphi_i(N, v, A) = v(S).$$

- La regla φ satisface justicia si para todo $(N, v, A) \in G_C^n$ y para todo $i : j \in A$,

$$\varphi_i(N, v, A) - \varphi_i(N, v, A \setminus (i : j)) = \varphi_j(N, v, A) - \varphi_j(N, v, A \setminus (i : j)).$$

- La regla φ satisface estabilidad si para todo $(N, v, A) \in G_C^n$ y para todo $i : j \in A$,

$$\begin{aligned} \varphi_i(N, v, A) &\geq \varphi_i(N, v, A \setminus (i : j)) \\ \varphi_j(N, v, A) &\geq \varphi_j(N, v, A \setminus (i : j)) \end{aligned}$$

El axioma de eficiencia en componentes nos indica que cada componente conexa S del grafo g se reparte la utilidad que puede conseguir. La propiedad de justicia establece que si el arco que une a los jugadores i y j desaparece y, por tanto, estos jugadores no se pueden comunicar directamente, ambos jugadores se ven afectados de la misma forma. La propiedad de estabilidad se refiere a que nunca puede ser perjudicial para los jugadores comunicarse directamente.

Enunciamos, sin demostración, una caracterización axiomática del valor de Myerson.

Teorema 3.37 (Myerson (1977)) *Existe un único valor φ en G_C^n que satisface los axiomas de eficiencia en componentes y justicia, y es el valor de Myerson, es decir, $\varphi = \varphi_M$. Además, si (N, v) es superaditivo, φ_M verifica estabilidad.*

Ejemplo 3.38 *Considera el grafo del Ejemplo 3.33 y el juego del dólar. En este caso, la función característica del juego (N, v^A) sería*

$$\begin{aligned} v^A(1) &= v^A(2) = v^A(3) = v^A(2, 3) = 0 \\ v^A(1, 2) &= v^A(1, 3) = v^A(1, 2, 3) = 1 \end{aligned}$$

El juego (N, v^A) es el juego del guante, para el que ya hemos calculado su valor de Shapley:

$$\varphi_M(N, v, A) = Sh(N, v^A) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right).$$

Para finalizar la sección del valor de Shapley y sus extensiones, queremos añadir que existen otros modelos similares a los descritos que analizan situaciones más complejas, por ejemplo: modelos que describen situaciones con comunicación restringida y coaliciones a priori al mismo tiempo, otros que modelan situaciones con incompatibilidades entre jugadores, etc.

3.6. El nucleolo y el prenucleolo

Ya conocemos que el núcleo es el conjunto de repartos que preservan la cooperación. El nucleolo selecciona uno de estos repartos para juegos equilibrados. En general, podemos definirlo como aquella imputación que hace que las quejas de las coaliciones sean lo más pequeñas posible.

El prenucleolo se diferencia del nucleolo en que, en general, es una preimputación. Si el prenucleolo resulta ser racionalmente individual entonces coincide con el nucleolo. En esto se basan muchos algoritmos de programación. Por ejemplo, Jean Derks ha elaborado un algoritmo (el más rápido que se conoce) que computa el prenucleolo de un juego de 20 agentes como máximo en menos de un día. Este programa, desarrollado en MATLAB®, puede descargarse de la dirección

<http://www.derks.com>

Schmeidler (1969) demostró la existencia del nucleolo utilizando funciones continuas y conjuntos no vacíos compactos. Por su parte, Maschler et al. (1979) dieron una caracterización geométrica de este valor.

En general, no hay una fórmula explícita para el cálculo del nucleolo sino que es necesario recurrir a resolver un número finito de problemas de programación lineal. Además, el criterio de Kohlberg (1971) nos permite conocer si una imputación dada es, o no, el nucleolo de un juego.

En la Definición 2.69 introducíamos el concepto de exceso del valor de una coalición con respecto a una imputación dada. Decíamos que dados $x \in I(N, v)$ y $S \subset N$, el exceso $e(S, x) = v(S) - x(S)$ mide la queja (o infelicidad) de la coalición S con respecto a x . Cuanto mayor sea, más “infeliz” está la coalición S . Obviamente, si $S = N$ o bien $S = \emptyset$, $e(S, x) = 0$.

A continuación, definimos formalmente el nucleolo, que será aquella imputación que minimiza la máxima queja, es decir, el nucleolo se ocupa en primer lugar de contentar a las coaliciones más inestables.

Recordemos, brevemente, la definición del orden lexicográfico entre vectores:

Definición 3.39 Definimos el orden lexicográfico $\leq_L$ en $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

- Diremos que $x <_L y$ si existe $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, tal que

$$\begin{aligned} x_i &= y_i, 1 \leq i < k \\ x_k &< y_k \end{aligned}$$

- Diremos que $x \leq_L y$ si $x = y$ ó $x <_L y$.

Dado un reparto $x \in \mathbb{R}^n$, sea $\theta(x)$ la 2^n -tupla cuyas componentes son los excesos, del valor de todas las coaliciones con respecto a x , ordenados de forma no creciente, es decir,

$$\theta_i(x) \geq \theta_j(x) \text{ si } 1 \leq i \leq j \leq 2^n.$$

Ya estamos en condiciones de introducir el nucleolo de un juego como las asignaciones que minimizan lexicográficamente los vectores de excesos.

Definición 3.40 Sea $(N, v) \in G^n$.

- Se define el nucleolo del juego (N, v) como el conjunto

$$Nu(N, v) = \{x \in I(N, v) : \theta(x) \leq_L \theta(y), \text{ para todo } y \in I(N, v)\}.$$

- El prenucleolo del juego (N, v) se define como el conjunto de todas las preimputaciones $x \in I^*(N, v)$ que cumplen

$$\theta(x) \leq_L \theta(y), \text{ para todo } y \in I^*(N, v).$$

El prenucleolo se denotará por $PreNu(N, v)$.

Los elementos del núcleo verifican que $e(S, x) \leq 0$ para toda $S \subset N$. Por tanto, es evidente que los vectores de excesos de los elementos del núcleo son lexicográficamente menores que los de cualquier punto de fuera del núcleo. Esto implica, directamente, que si el núcleo de un juego no es vacío entonces el nucleolo está contenido en el núcleo.

Es sencillo demostrar que la suma de las coordenadas del vector de excesos es constante. Matemáticamente, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{S \subset N} e(S, x) = k, \text{ para todo } x \in I(N, v).$$

También se verifica que para todo $x \in I(N, v)$,

$$e(S, x) + e(N \setminus S, x) = v(S) + v(N \setminus S) - v(N).$$

Ello implica que si disminuimos un exceso es a costa de aumentar el de la coalición complementaria. Enunciamos y demostramos un resultado más general.

Proposición 3.41 Sean $(N, v) \in G^n$, $x \in I^*(N, v)$ y $\mathcal{F}$ una colección equilibrada con pesos asociados $(\delta_S)_{S \in \mathcal{F}}$. Entonces existe $k_{\mathcal{F}} \in \mathbb{R}$, una constante que sólo depende de la familia $\mathcal{F}$, tal que:

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S e(S, x) = k_{\mathcal{F}}.$$

Demostración: Sean $(N, v) \in G^n$, $x \in I^*(N, v)$ y $\mathcal{F}$ una colección equilibrada con pesos asociados $(\delta_S)_{S \in \mathcal{F}}$. Se tiene que,

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S e(S, x) &= \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S (v(S) - x(S)) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S v(S) - \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S x(S) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{F}} \delta_S v(S) - v(N). \end{aligned}$$

Es claro que esta última expresión nos sirve como constante $k_{\mathcal{F}}$, lo que concluye la prueba. ■

Como vemos en la siguiente definición se puede definir el nucleolo de cualquier conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 3.42 Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. El nucleolo del conjunto X es el conjunto

$$Nu(X) = \{x \in X : \theta(x) \leq_L \theta(y) \text{ para todo } y \in X\}.$$

Es claro que, $Nu(N, v) = Nu(I(N, v))$.

Procedemos a revisar, sin demostración, algunos resultados fundamentales acerca del nucleolo. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, Driessen (1988). Básicamente, estos resultados afirman que el nucleolo de un juego TU es un único punto.

Teorema 3.43 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$ y X compacto. Entonces, $Nu(X) \neq \emptyset$ y es un conjunto compacto.*

Así pues, del teorema anterior deducimos que el nucleolo de cualquier conjunto compacto que no sea vacío también es un conjunto compacto que no es vacío. Si el conjunto, además, es convexo entonces el nucleolo se reduce a un punto.

Teorema 3.44 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$, convexo y compacto. Entonces $Nu(X)$ es un conjunto unitario.*

Como corolario del teorema anterior deducimos que el nucleolo de un juego TU esencial es un punto, que pertenecerá al núcleo si el juego es equilibrado.

Teorema 3.45 *El nucleolo de un juego esencial $(N, v) \in G^n$ consiste en un único punto. Si $C(N, v) \neq \emptyset$ entonces*

$$Nu(N, v) \in C(N, v).$$

El nucleolo de un juego siempre pertenece al kernel. En el caso de juegos convexos, el kernel y el prekernel coinciden con el nucleolo.

Teorema 3.46 *Sea $(N, v) \in G^n$ un juego esencial. Se verifica que:*

- a) $Nu(N, v) \in \mathcal{K}(N, v)$.
- b) Si (N, v) es un juego convexo, entonces $\mathcal{K}(N, v) = \mathcal{K}^*(N, v) = Nu(N, v)$.

Se puede comprobar que el nucleolo de un juego satisface propiedades de jugador títere y jugadores simétricos. También es fácil deducir, de la propia definición, que el nucleolo de un juego transformado por cambios de origen y escala se corresponde con la transformación del nucleolo original, es decir, satisface la propiedad de covarianza. Por añadidura, el nucleolo satisface la propiedad de monotonía coalicional débil, si bien falla en las otras tres propiedades de monotonía estudiadas: monotonía fuerte, monotonía coalicional y monotonía en el agregado.

Naturalmente, el prenucleolo de un juego consiste en un único punto, ya que $PreNu(N, v) = Nu(I^*(N, v))$. El prenucleolo de un juego coincide con el nucleolo siempre que el prenucleolo sea una imputación, o sea, satisfaga la propiedad de racionalidad individual.

Ejemplo 3.47 Consideremos el juego del guante, siendo el jugador 1 el poseedor del guante único. Sabemos que $C(N, v) = \{(1, 0, 0)\}$. Luego $Nu(N, v) = (1, 0, 0)$.

Ejemplo 3.48 Sabemos que el juego del dólar no es equilibrado, o sea, el núcleo es el conjunto vacío, $C(N, v) = \emptyset$. Comprobaremos que $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es el nucleolo. Por una parte, dado que todos los jugadores son simétricos, el nucleolo ha de asignarles el mismo pago, digamos a . Pero, para que el valor sea eficiente ha de cumplirse que $a + a + a = 3a = v(N) = 1$. Luego, en efecto, x ha de ser el nucleolo. Ahora, calculamos los excesos del nucleolo

$$\begin{aligned} e(N, x) &= 0 \\ e(\{1, 2\}, x) &= v(1, 2) - x_1 - x_2 = \frac{1}{3} \\ e(\{1, 3\}, x) &= v(1, 3) - x_1 - x_3 = \frac{1}{3} \\ e(\{2, 3\}, x) &= v(2, 3) - x_2 - x_3 = \frac{1}{3} \\ e(\{1\}, x) &= v(1) - x_1 = -\frac{1}{3} \\ e(\{2\}, x) &= v(2) - x_2 = -\frac{1}{3} \\ e(\{3\}, x) &= v(3) - x_3 = -\frac{1}{3} \\ e(\emptyset, x) &= 0 \end{aligned}$$

y escribimos el correspondiente vector de excesos

$$\theta(x) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Ejemplo 3.49 Sea (N, v) el juego con $N = \{A, B, C\}$ y función característica,

$$\begin{aligned} v(A) &= v(B) = v(C) = 0 \\ v(A, B) &= 4, \quad v(A, C) = 0, \quad v(B, C) = 3 \\ v(A, B, C) &= 6 \end{aligned}$$

Consideremos la imputación $x = (2, 3, 1)$ y calculemos los correspondientes excesos.

$$\begin{aligned} e(N, x) &= 0 \\ e(\{A, B\}, x) &= -1, \quad e(\{A, C\}, x) = -3, \quad e(\{B, C\}, x) = -1 \\ e(\{A\}, x) &= -2, \quad e(\{B\}, x) = -3, \quad e(\{C\}, x) = -1 \\ e(\emptyset, x) &= 0 \end{aligned}$$

Observamos que en las coaliciones $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ y $\{C\}$, el exceso es de -1. Si traspasamos de A a B la cantidad $\frac{1}{2}$ y consideramos la nueva imputación $y = (1.5, 3.5, 1)$. De nuevo, calculamos los excesos,

$$\begin{aligned} e(N, y) &= 0 \\ e(\{A, B\}, y) &= -1, \quad e(\{A, C\}, y) = -2.5, \quad e(\{B, C\}, y) = -1.5 \\ e(\{A\}, y) &= -1.5, \quad e(\{B\}, y) = -3.5, \quad e(\{C\}, y) = -1 \\ e(\emptyset, y) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $Nu(N, v) = (1.5, 3.5, 1)$, dado que no podemos disminuir el exceso -1 de las coaliciones $\{A, B\}$ y $\{C\}$ al mismo tiempo.

TUGlab: La orden NUCLEOLUS de TUGlab permite calcular tanto el nucleolo como el prenucleolo de un juego. Más adelante veremos que el proceso implica la resolución de varios problemas de programación lineal consecutivos que TUGlab realiza con la orden LINPROG de la “toolbox” de optimización de MATLAB®. Cada programa lineal resuelto satisfactoriamente devolverá en pantalla el mensaje Optimization terminated successfully. A continuación, presentamos dos ejemplos. En el primero el nucleolo y el prenucleolo coinciden, mientras que en el segundo son distintos. Obsérvese que en el segundo ejemplo, el prenucleolo no es una imputación.

```
>> A=[0 0 0 0 3 3 6 8 9 8 6 15 16 17 20];
>> [nucleolo,prenucleolo]=nucleolus(A)
```

```
Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
```

```
nucleolo =
      1.50      3.67      4.67     10.17
```

```
prenucleolo =
      1.50      3.67      4.67     10.17
```

```
>> A=[2 1 0 9 2 1 6]
```



```
>> [nucleolo, prenucleolo]=nucleolus(A)
```

```
Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
```

```
nucleolo =
    3.5000    2.5000         0
```

```
prenucleolo =
    4.2500    3.2500   -1.5000
```

Ejemplo 3.50 *Los tres problemas del Talmud mencionados en la Sección 1.21 pueden modelarse matemáticamente mediante los juegos:*

```
>> A1=[0 0 0 0 0 0 100];
>> A2=[0 0 0 0 0 100 200];
>> A3=[0 0 0 0 100 200 300];
```

Con TUGlab podemos calcular el nucleolo de estos tres juegos.

```
>> NA1=nucleolus(A1)
NA1 =
    33.3333    33.3333    33.3333
>> NA2=nucleolus(A2)
NA2 =
    50     75     75
>> NA3=nucleolus(A3)
NA3 =
    50    100    150
```

Sorprendentemente, éstas son las mismas soluciones propuestas para estos problemas en el Talmud hace unos 2000 años.

A continuación, presentamos una forma constructiva para el cálculo del nucleolo cuyos detalles y justificación teórica pueden verse en los trabajos de

Maschler et al. (1979) o Driessen (1988).⁴ Sea $(N, v) \in G^n$ un juego esencial y consideremos los conjuntos,

$$X^0 = I(N, v) \text{ y } \Sigma^0 = \{S \subset N : S \neq N, S \neq \emptyset\}.$$

Se define de forma recursiva

$$\begin{aligned} \epsilon^j &= \min_{x \in X^{j-1}} \max_{S \in \Sigma^{j-1}} e(S, x) \\ X^j &= \{x \in X^{j-1} : \max_{S \in \Sigma^{j-1}} e(S, x) = \epsilon^j\} \\ \Sigma_j &= \{S \in \Sigma^{j-1} : e(S, x) = \epsilon^j, \text{ para todo } x \in X^j\} \\ \Sigma^j &= \Sigma^{j-1} \setminus \Sigma_j, \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, s$, con $s = \min\{j : j \geq 1, \Sigma^j = \emptyset\}$. El nucleolo coincide con el conjunto final X^s .

TUGlab: Vamos a calcular para el juego del Ejemplo 3.49 el nucleolo a través de la resolución de programas lineales usando TUGlab. Recordemos la función característica del juego,

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) &= 4, \quad v(1, 3) = 0, \quad v(2, 3) = 3 \\ v(1, 2, 3) &= 6 \end{aligned}$$

Dado un reparto $x = (x_1, x_2, x_3)$ la primera coordenada del vector de excesos sería,⁵

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \max_{S \in \Sigma^0} e(S, x) \\ &= \max\{-x_1, -x_2, -x_3, 4 - x_1 - x_2, -x_1 - x_3, 3 - x_2 - x_3\}. \end{aligned}$$

⁴En Maschler et al. (1979) se describe un método geométrico para el cálculo del nucleolo fácil de aplicar a juegos de 3 jugadores.

⁵Siendo estrictos, en realidad nos estamos refiriendo a la primera coordenada no trivial. Obsérvese que $\theta(x)$ tiene siempre al menos 2 coordenadas nulas, las correspondientes a los excesos de las coaliciones $\emptyset$ y N .

Por lo tanto, la primera coordenada del vector de excesos del nucleolo vendría dada por el valor óptimo del siguiente programa:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \theta_1(x_1, x_2, x_3) \\ \text{sujeto a :} & \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \end{array}$$

Claramente, la función objetivo $\theta_1(x_1, x_2, x_3)$ no tiene por que ser lineal. No obstante, este problema es equivalente al siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \epsilon_1 \\ \text{sujeto a :} & \begin{cases} -x_1 \leq \epsilon_1 \\ -x_2 \leq \epsilon_1 \\ -x_3 \leq \epsilon_1 \\ 4 - x_1 - x_2 \leq \epsilon_1 \\ -x_1 - x_3 \leq \epsilon_1 \\ 3 - x_2 - x_3 \leq \epsilon_1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \end{array}$$

Podemos resolver este problema utilizando la orden NUCLEOLUSINFO del paquete TUGlab. Veamos como funciona.

```
>> A=[0 0 0 4 0 3 6];
>> [N,infoN]=nucleolusinfo(A)
Optimization terminated successfully
Optimization terminated successfully
N =
    1.5000    3.5000    1.0000
infoN =
    {1x11 cell}    {1x11 cell}
```

Observamos que el programa ha calculado el nucleolo y en la variable `infoN` almacena cierta información en unas estructuras de MATLAB® llamadas celdas. `infoN` consta de dos celdas, porque se han completado dos problemas de programación lineal para calcular el nucleolo. Cada celda, a su vez, contiene 11 elementos. Consultemos la información que el programa almacena relativa a la solución del primer problema de programación lineal y que está guardada en la primera celda. Veamos como se puede acceder a ella e interpretarla.

```
>> infoN{1}
ans = Columns 1 through 3
      [1x4 double]      [6x4 double]      [6x1 double]
Columns 4 through 7
      [1x4 double]      [6]      [1x4 double] [1x4 double]
Columns 8 through 11
      [3x1 double]      [-1.0000]      [2x1 double]      [1]
```

Vemos que en esta celda hay 11 elementos de información, de hecho 11 matrices de distintos órdenes. El contenido de estas matrices se puede ver tecleando

```
>> [obj,A,b,AA,bb, cotasinf,cotassup,
    solucion, valoroptimo, saturadas,
    convergencia]=infoN{1}-{:}
```

```
obj =
      0      0      0      1
A =
     -1      0      0     -1
      0     -1      0     -1
      0      0     -1     -1
     -1     -1      0     -1
     -1      0     -1     -1
      0     -1     -1     -1
b =
      0
      0
      0
     -4
      0
     -3
AA =
      1      1      1      0
bb =
      6
cotasinf =
      0      0      0    -Inf
cotassup =
     Inf     Inf     Inf     Inf
```

```

solucion =
    1.6149
    3.3851
    1.0000
valoroptimo =
   -1.0000
saturadas =
     3
     4
convergencia =
     1

```

En el primer vector se guarda la función objetivo. Así, $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ significa $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot \epsilon_1$. En las siguientes dos matrices tenemos las restricciones de desigualdad del problema escritas de la forma $Ax \leq b$. Por ejemplo, la primera restricción sería $-x_1 - \epsilon_1 \leq 0$.

A continuación están las restricciones de igualdad, $(AA)x = (bb)$, que en este caso es única y justamente la condición de eficiencia $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Luego aparecen las acotaciones de las variables, $cotainf \leq x \leq cotasup$. En nuestro caso, éstas se reducen a $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

La solución óptima se almacena en `solucion`, es decir, una imputación donde se alcanza el óptimo del primer problema es

$$x = (1.6149, 3.3851, 1.0000)$$

y el valor óptimo del problema viene dado por la variable `valoroptimo`. O sea, la primera coordenada del nucleolo ha de ser $\epsilon_1 = -1$. La siguiente matriz nos informa de las restricciones de desigualdad que se saturan en la solución óptima: la tercera y la cuarta. La última matriz, `convergencia`, es un código para saber si el algoritmo de resolución del problema de programación lineal ha convergido (1 es la respuesta afirmativa).

Podemos comprobar que las restricciones que se saturan, la tercera y la cuarta, junto con la condición de eficiencia son dependientes (no determinan de forma única la solución) y, por tanto, necesitamos resolver otro problema de programación lineal. En este segundo paso, en el que, obviamente, introducimos toda la información del primer problema, intentamos obtener la segunda componente del vector de excesos del nucleolo. La información relativa a este segundo problema se encuentra almacenada en la segunda celda de la variable `infoN`.

```
>> [obj2,A2,b2,AA2,bb2, cotasinf2,cotassup2,
    solucion2, valoroptimo2, saturadas2,
    convergencia2]=infoN{2}{:}
```

```
obj2 =    0    0    0    1
```

```
A2 =
```

```
    -1    0    0   -1
```

```
    0   -1    0   -1
```

```
   -1    0   -1   -1
```

```
    0   -1   -1   -1
```

```
b2 =
```

```
    0
```

```
    0
```

```
    0
```

```
   -3
```

```
AA2 =
```

```
    1    1    1    0
```

```
    0    0   -1    0
```

```
bb2 =
```

```
    6
```

```
   -1
```

```
cotasinf2 =
```

```
    0    0    0  -Inf
```

```
cotassup2 =
```

```
   Inf   Inf   Inf   Inf
```

```
solucion2 =
```

```
    1.5000
```

```
    3.5000
```

```
    1.0000
```

```
valoroptimo2 =
```

```
   -1.5000
```

```
saturadas2 =
```

```
    1
```

```
    4
```

```
convergencia2 =    1
```

Por tanto, como en este paso se saturan las restricciones 1 y 4 del nuevo proble-

ma, que junto con las anteriores determinan de modo único una solución (forman un sistema compatible determinado), tenemos que $(1.5, 3.5, 1)$ es el nucleolo, que es el valor obtenido originariamente en la variable N . Si las restricciones que se saturan no determinasen de forma única una solución seguiríamos el proceso que, obviamente, finalizará en un número finito de pasos.

Ahora, podemos calcular el vector de excesos asociado al nucleolo (cuyos dos primeros valores distintos han de ser los almacenados en `valoroptimo` y `valoroptimo2`) y las coaliciones en las que se obtienen.

```
>> [excesos,coalicion]=excesses(A,N)

excesos =
    -1.0000    -1.0000    -1.5000    -1.5000    -2.5000    -3.5000
coalicion =
    '3'    '12'    '1'    '23'    '13'    '2'
```

La siguiente proposición nos da una condición para comprobar si una asignación es el nucleolo de un juego. Se conoce como el criterio de Kohlberg.

Proposición 3.51 (Criterio de Kohlberg) Sean un juego $(N, v) \in G^n$ y $x \in I(N, v)$, con $x_i \neq v(i), i = 1, \dots, n$. Denotemos por $k(x)$ el número de excesos distintos de la imputación x . El reparto x es el nucleolo del juego si, y sólo si, para $1 \leq j \leq k(x)$ se verifica que

$$\bigcup_{t=1}^j F^t$$

es una familia equilibrada, siendo F^t el conjunto de coaliciones asociadas al t -ésimo exceso en el orden no decreciente.

Puede consultarse la demostración en Kohlberg (1971) o bien en Owen (1995).

Ejemplo 3.52 Sea el juego (N, v) donde

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = 0, v(3) = 20 \\ v(1, 2) &= 5, v(1, 3) = 25, v(2, 3) = 25 \\ v(1, 2, 3) &= 30 \end{aligned}$$

Comprobemos que $x = (\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{70}{3})$ es el nucleolo del juego. Los excesos asociados a las coaliciones son

Excesos	Familia
$-5/3$	$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$
$-10/3$	$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

Dado que la primera familia es equilibrada y la unión de la primera con la segunda también lo es, x es el nucleolo del juego.

Ejemplo 3.53 Sea el juego (N, v) dado por

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) &= 4, v(1, 3) = 9, v(2, 3) = 2 \\ v(1, 2, 3) &= 10 \end{aligned}$$

Veamos si $x = (5, 1, 4)$ es el nucleolo del juego. El exceso mayor se obtiene para la coalición $\{1, 3\}$ y, dado que no es equilibrada, x no es el nucleolo del juego. ¿Y la imputación $y = (5.75, 0.5, 3.75)$? Los excesos asociados a las coaliciones son:

Excesos	Familia
-0.5	$\{\{2\}, \{1, 3\}\}$
-2.25	$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$
-3.75	$\{\{3\}\}$
-5.75	$\{(1)\}$

Se puede comprobar que las familias

$$\begin{aligned} &\{\{2\}, \{1, 3\}\}; \{\{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\} \\ &\{\{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3\}\}; \{\{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3\}, \{1\}\} \end{aligned}$$

son equilibradas. Por tanto, la imputación $y = (5.75, 0.5, 3.75)$ es el nucleolo.

Finalizamos esta sección dedicada al nucleolo indicando un resultado de imposibilidad.

Teorema 3.54 (Young (1985)) Para $n \geq 5$ no existen soluciones en G^n que satisfagan simultáneamente selección en el núcleo y monotonía coalicional.

Observación 3.55 *Housman y Clark (1998) probaron que para $n = 4$ también se tiene el teorema de imposibilidad, mientras que para $n = 3$ existen infinitas soluciones que satisfacen ambas propiedades. Recordemos que el valor de Shapley satisface monotonía coalicional (dado que satisface monotonía fuerte, y esta propiedad implica monotonía coalicional) pero, en general, no está en el núcleo. El nucleolo satisface selección en el núcleo, sin embargo, no satisface monotonía coalicional.*

3.7. El τ -valor

En esta sección estudiaremos el τ -valor, un concepto de solución introducido por Tijs (1981) para los juegos cuasi-equilibrados o de compromiso admisible.

Definición 3.56 *Sean $(N, v) \in G^n$ un juego TU de compromiso admisible, $m(N, v)$ el vector de mínimos derechos y $M(N, v)$ el vector de los pagos de utopía de los jugadores. Se define el τ -valor como el reparto que satisface*

$$\tau(N, v) = m(N, v) + \alpha(M(N, v) - m(N, v))$$

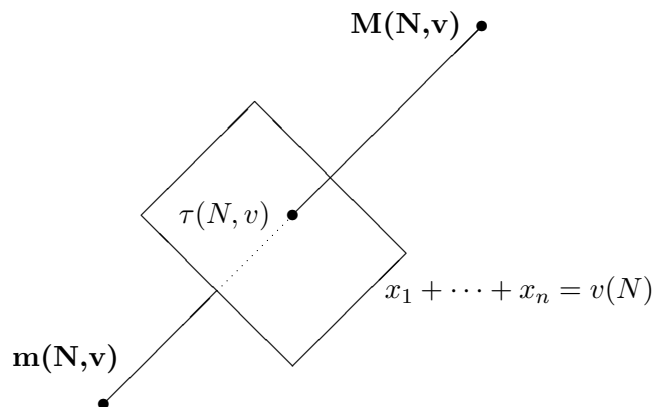
con $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i \in N} \tau_i(N, v) = v(N)$.

El τ -valor elige un elemento en el core-cover de tal forma que cada jugador reciba su mínimo derecho más una cantidad añadida que depende de su pago de utopía, véase la Figura 3.3. Obviamente, el τ -valor no tiene por qué ser un elemento del núcleo.

Recordemos que, como ya demostramos en el Teorema 2.53, los juegos equilibrados son cuasi-equilibrados.

Ejemplo 3.57 *Consideremos el juego (N, v) con $N = \{1, 2, 3\}$ y función característica,*

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = 0 \\ v(3) &= v(1, 2) = 100 \\ v(1, 3) &= 200 \\ v(2, 3) &= 300 \\ v(1, 2, 3) &= 400 \end{aligned}$$

Figura 3.3: Esquema de la definición del τ -valor

Se puede comprobar que $m(N, v) = (0, 0, 100)$ y $M(N, v) = (100, 200, 300)$. Entonces,

$$\tau(N, v) = (0, 0, 100) + \alpha(100, 200, 200)$$

con α verificando que $\sum_{i \in N} \tau_i(N, v) = 400$. De estas relaciones obtenemos,

$$\alpha = \frac{3}{5} \text{ y } \tau(N, v) = (60, 120, 220).$$

TUGlab: Como se deduce inmediatamente del ejemplo que sigue, la orden TAUVALUE de TUGlab computa el τ -valor y el escalar α que interviene en su definición.

```
>> A=[0 0 0 9 4 7 11];
>> [tau,alfa]=tauvalue(A)
tau =
    3.3333    6.3333    1.3333
alfa =
    0.6667
```

A continuación describimos algunas propiedades que satisface el τ -valor. Todas son de sencilla interpretación. Recomendamos al lector que analice la relación entre la propiedad de monotonía complementaria y la de monotonía coalicional.

Definición 3.58 Sea φ una regla de reparto en G^n .

- La regla φ satisface la propiedad de a prueba de tóteres si dado $D \subset N$ el conjunto de tóteres del juego (N, v) se verifica que,⁶

$$\varphi(N \setminus D, v_{N \setminus D}) = \varphi(N, v)|_{N \setminus D}.$$

- La regla φ satisface monotonía complementaria si dados $(N, v), (N, w) \in G^n$ y $T \subset N$ tales que $w(T) > v(T)$ y $w(S) = v(S)$ si $S \neq T$, entonces $\varphi_i(N, v) \geq \varphi_i(N, w)$ para todo $i \in N \setminus T$.
- La regla φ satisface proporcionalidad restringida si $\varphi(N, v)$ es proporcional a $M(N, v)$ cuando $m(N, v) = 0$.
- La regla φ satisface mínimo derecho si

$$\varphi(N, v) = m(N, v) + \varphi(N, v - m(N, v)).$$

El lector podrá comprobar que el τ -valor satisface todos los axiomas que acabamos de definir.

Teorema 3.59 (Tijs (1987)) Sea $(N, v) \in G^n$ un juego de compromiso admisible. El τ -valor es el único valor en la clase de los juegos de compromiso admisibles que satisface los axiomas de eficiencia, proporcionalidad restringida y la propiedad del mínimo derecho.

Terminamos esta sección con unos ejemplos resueltos con TUGlab.

TUGlab: Consideremos los siguientes juegos:

```
>> A=[0 0 0 0 2 2 0 2 0 0 2 0 0 0 3];
>> B=[0 0 0 0 2 2 0 2 0 0 0 2 2 2 3];
```

⁶Naturalmente, $\varphi(N, v)|_{N \setminus D}$ consiste en considerar tan sólo las coordenadas de $\varphi(N, v)$ correspondientes a los jugadores de $N \setminus D$.

Con TUGlab comprobamos que para el juego B, el core-cover, el núcleo y el τ -valor coinciden.

```
>> CV=corevertices(B)
CV =
    1    1    1    0
>> CCV=corecoververtices(B)
CCV =
    1    1    1    0
>> T=tauvalue(B)
T =
    1    1    1    0
```

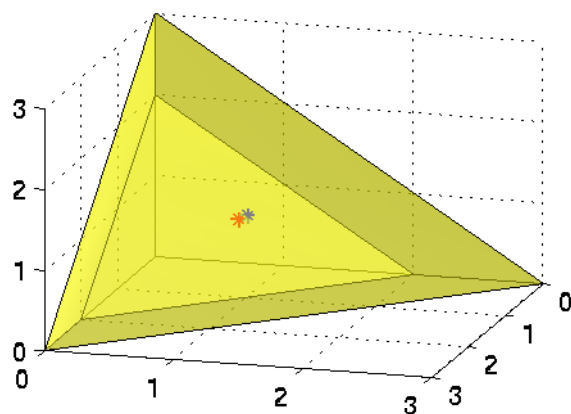


Figura 3.4: El τ -valor no tiene por que pertenecer al núcleo de un juego

Para el juego A, el núcleo sigue siendo unitario. Pero, el core-cover contiene estrictamente al núcleo y el τ -valor no pertenece al núcleo.

```
>> CVA=corevertices(A)
CVA =
    1    1    1    0
>> TA=tauvalue(A)
TA =
    0.9000    0.9000    0.9000    0.3000
```

```
>> clf;imputationset(A);hold on,axis(axis), corecoverset(A)
```

Las últimas líneas de comandos producen el dibujo de la Figura 3.4 en la que se representa el core-cover del juego A junto con el núcleo (el punto gris) y el τ -valor (el punto rojo).

3.8. El core-center

Sea (N, v) un juego equilibrado. Supongamos que todos los jugadores están de acuerdo en encontrar una asignación en el núcleo de un juego. Es claro que en el núcleo hay asignaciones que benefician a unos jugadores, otras a otros, pero todas atienden a criterios de estabilidad. Podemos, pues, pensar en promediar el continuo de asignaciones (en el caso de que el núcleo no degenera en un punto). La regla de reparto obtenida de esta forma se denomina core-center y ha sido definida por González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2003b, 2007) y González-Díaz (2005). En física, el centro de gravedad es un concepto importante porque permite estudiar el movimiento de un sistema complejo a través del movimiento de su centro. Podemos decir que el core-center es el único punto del núcleo en el que todas las distribuciones del núcleo están en equilibrio: El core-center es el centro de gravedad del núcleo si consideramos que su “masa” está uniformemente distribuida.

Sea (N, v) un juego equilibrado y consideremos la distribución de probabilidad uniforme sobre el núcleo. El core-center se define como la esperanza matemática de esta distribución.

Definición 3.60 Sea $(N, v) \in G^n$ un juego equilibrado. Se define el core-center como el valor

$$\mu(N, v) = E[X] \text{ donde } X \sim U(C(N, v)).$$

El core-center satisface propiedades de eficiencia, racionalidad individual, racionalidad coalicional, simetría, covarianza y jugadores títeres. Además, se puede comprobar que satisface monotonía coalicional débil y no satisface las otras tres propiedades de monotonía; en este sentido, podemos decir que tiene un comportamiento análogo al nucleolo.

El siguiente teorema refleja que el core-center es continuo en la clase de los juegos equilibrados.

Teorema 3.61 Sea $(N, v) \in G^n$ un juego equilibrado. El valor μ es continuo, es decir, para cada sucesión de juegos equilibrados $\{v^t\}$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} v^t = v$ se tiene que,⁷

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(N, v^t) = \mu(N, v).$$

Aunque pueda parecer que la continuidad del centro de gravedad es una propiedad evidente, lo cierto es que, en general, no se verifica tal y como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.62 El centro de gravedad de un politopo convexo no tiene por que verificar la propiedad de continuidad.

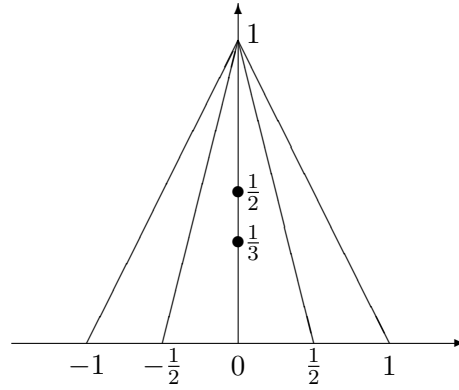


Figura 3.5: La discontinuidad del centro de gravedad

Consideremos el triángulo formado por los vértices $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y $(0, 1)$, con $a > 0$. Independientemente del valor de a , su centro de gravedad es el punto $(0, \frac{1}{3})$. Si ahora hacemos tender a hacia 0, en el límite tenemos el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(0, 1)$, cuyo centro de gravedad es el punto $(0, \frac{1}{2})$. Luego, el centro de gravedad del límite de los triángulos no coincide con el límite de los centros de gravedad. La situación se esquematiza en la Figura 3.5.

El problema de la continuidad surge cuando, en el límite, el politopo degenera en uno de dimensión menor. A la vista de este ejemplo, el Teorema 3.61

⁷La convergencia de las funciones características v^t se entiende en $\mathbb{R}^{2^n - 1}$.

adquiere una notable relevancia: la continuidad del core-center es una consecuencia de la peculiar estructura convexa del núcleo de los juegos equilibrados.

TUGlab: Calcular el core-center con TUGlab consiste simplemente en ejecutar el comando CORECENTER tal y como se indica en el ejemplo que sigue.

```
>> A=[0 0 0 1 5 5 10];
>> CC=corecenter(A)
CC =
    2.5442    2.5442    4.9116
```

Definimos ahora varias propiedades que nos servirán para caracterizar el core-center dentro de la clase de los juegos equilibrados. Primeramente definiremos juego simétrico y juego cuasi-simétrico.

Definición 3.63 Sea $(N, v) \in G^n$.

- El juego (N, v) es simétrico si cada par de jugadores i y j son simétricos.
- Dos jugadores i y j son cuasi-simétricos si para cada $S \subset N \setminus \{i, j\}$,

$$v(S \cup \{i\}) - (v(S) + v(i)) = v(S \cup \{j\}) - (v(S) + v(j)).$$

- El juego (N, v) es cuasi-simétrico si cada par de jugadores i y j son cuasi-simétricos.
- Sea (N, v) un juego equilibrado y supongamos que $C(N, v)$ un m -politopo con $m \leq n - 1$.⁸ Una disección de $C(N, v)$ consiste en un número finito de juegos $\{(N, v_1), \dots, (N, v_k)\}$ tales que:

$$1. C(N, v) = \bigcup_{\ell=1}^k C(N, v_\ell)$$

$$2. \text{ Para cada par } \ell, \ell' \in \{1, \dots, k\} \text{ con } \ell \neq \ell',$$

$$\text{vol}_m(C(N, v_\ell) \cap C(N, v_{\ell'})) = 0.$$

⁸Un politopo P es un m -politopo si su dimensión es m . Por vol_m denotaremos su volumen m -dimensional.

En los juegos simétricos el valor de la coalición S , $v(S)$, depende solamente de la cardinalidad de la coalición. Fácilmente se comprueba que un juego es cuasi-simétrico si el juego 0-normalizado es simétrico. Una disección del núcleo de un juego consiste en dividir su núcleo en núcleos de otros juegos de tal forma que recubran todo el núcleo original y que el volumen de sus intersecciones sea nulo.

Definición 3.64 Sean $(N, v) \in G^n$ y φ una regla de reparto.

- La regla φ satisface simetría débil si para cada juego simétrico (N, v) y jugadores $i, j \in N$,

$$\varphi_i(N, v) = \varphi_j(N, v).$$

- La regla φ satisface simetría débil extendida si para cada juego cuasi-simétrico (N, v) y jugadores $i, j \in N$,

$$\varphi_i(N, v) - v(i) = \varphi_j(N, v) - v(j).$$

La propiedad de simetría débil otorga igual pago a todos los jugadores de un juego simétrico. Es sencillo comprobar que esta propiedad es más débil que la clásica de simetría. La propiedad de simetría débil extendida indica que si para dos jugadores su contribución a cualquier coalición difiere solamente en la diferencia de sus valores individuales, $v(i) - v(j)$, entonces la diferencia en los pagos debe ser también $v(i) - v(j)$.

Observación 3.65 Se puede comprobar que invarianza ante traslaciones y simetría débil implican simetría débil extendida.

El siguiente axioma es la traducción al contexto de los juegos equilibrados de la propiedad fundamental del centro de gravedad.

Definición 3.66 Sea (N, v) un juego equilibrado y supongamos que $C(N, v)$ es un m -politopo, con $m \leq n - 1$, y que $\{(N, v_1), \dots, (N, v_k)\}$ es una disección de $C(N, v)$. Una regla φ satisface aditividad ponderada si

$$\text{vol}_m(C(N, v))\varphi(N, v) = \sum_{\ell=1}^k \text{vol}_m(C(N, v_\ell))\varphi(N, v_\ell).$$

Obviamente, por definición, el core-center satisface el axioma de aditividad ponderada. A partir de esta propiedad se define una más débil que denominamos “trade-off”.

Definición 3.67 Sea φ una regla definida sobre los juegos equilibrados. La regla φ satisface “trade-off” si existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que

$$\varphi(N, v) = \alpha\varphi(N, w_1) + (1 - \alpha)\varphi(N, w_2).$$

cualquiera que sea la disección en juegos equilibrados $\{(N, w_1), (N, w_2)\}$ del juego (N, v) .

La siguiente propiedad que se presenta impone cierta estructura a los coeficientes de los juegos implicados en una disección del núcleo de un juego.

Definición 3.68 Sea φ una regla definida sobre los juegos equilibrados. Consideremos dos disecciones $\{(N, v_1), \dots, (N, v_k)\}$ y $\{(N, w_1), \dots, (N, w_\ell)\}$ del juego (N, v) formadas por juegos equilibrados. Una regla φ satisface “strong-trade-off” si verifica que:

1. Existen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ y $\beta_1, \dots, \beta_\ell$ tales que

$$\varphi(N, v) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(N, v_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \varphi(N, w_i).$$

2. Si p, q son tales que $C(N, v_p)$ es una traslación de $C(N, w_q)$, entonces $\alpha_p = \beta_q$.

El siguiente teorema muestra una caracterización axiomática del core-center en base a las propiedades estudiadas.

Teorema 3.69 Sea $(N, v) \in G^n$ un juego equilibrado y φ una regla de reparto verificando los axiomas de eficiencia, continuidad, simetría débil extendida y “strong trade-off”. Entonces $\varphi(N, v) = \mu(N, v)$.

Observación 3.70 En González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2008b) se discute ampliamente sobre las propiedades de “trade-off” y “strong trade-off”. Se presenta también una caracterización del core-center para juegos convexos de tres jugadores utilizando el axioma más débil (“trade-off”) y una propiedad muy natural que asigna el centro de simetría del núcleo en juegos cuyo núcleo

es simétrico. Además es de interés la interpretación de la propiedad de “trade-off” en base a romper el núcleo de un juego en dos, o más, y distinguir las asignaciones que benefician a una coalición o a su complementaria.

En algunas subclases de juegos convexos, que incluyen los juegos de 3 y 4 jugadores, se puede demostrar que el core-center es el valor de Shapley de otro juego que, para cada coalición, cuantifica las asignaciones que descarta el núcleo. Es todavía una cuestión sin respuesta si este resultado puede extenderse a la clase de todos los juegos convexos. Véase González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2003a).

Para finalizar este capítulo queremos recordar al lector que en las Secciones 5.2.3 y 5.2.4 analizaremos varios ejemplos en los que se comparan algunas de las soluciones puntuales que hemos estudiado.

Capítulo 4

Aplicaciones

Conceptos clave: *Los juegos simples. Índices de poder: Shapley-Shubik y Banzhaf. Los juegos de bancarrota. Los juegos de mercado. El juego del aeropuerto. Los juegos de secuenciación*

En este capítulo se presentan algunas clases de juegos asociados a problemas concretos que han merecido la atención de numerosos investigadores, bien por su interés académico o bien por su interés práctico en situaciones reales. Las aplicaciones de la teoría de juegos cooperativos crecen día tras día y es fácil encontrar en publicaciones recientes nuevos problemas que se estudian con un enfoque cooperativo.

Aquí comenzamos analizando los juegos simples que tienen como ámbito primordial de aplicación la “politología”. Por poner un ejemplo, se utilizan para describir todas las posibilidades de formar gobierno una vez que tenemos el reparto de escaños en un Parlamento. Mediante un juego simple se modelan situaciones en las que cada coalición o bien es ganadora o bien es perdedora. Daremos resultados sobre el núcleo y los conjuntos estables de los juegos simples. Definiremos el concepto de índice de poder y los de juego de mayoría absoluta y juego de mayoría ponderada. Estudiaremos tanto el índice de poder de Shapley y Shubik (1954) como el índice de Banzhaf-Coleman (Banzhaf (1964), Coleman (1971)).

Los juegos de bancarrota, O'Neill (1982), modelan, a través de un juego cooperativo, situaciones en las que varios acreedores demandan pagos a una entidad que no tiene suficientes fondos para satisfacer a todos los demandan-

tes. En este contexto es recomendable la lectura del trabajo de recopilación de Thomson (2003). Describimos lo que se conoce como problema de bancarrota y sus principales soluciones. Entre ellas, la más conocida es, quizás, la solución proporcional que divide el estado proporcionalmente a las demandas. Analizaremos algunas reglas y veremos la relación que existe entre las soluciones clásicas del problema de bancarrota y las soluciones del juego asociado.

Una de las primeras aplicaciones de la teoría de juegos fue la de describir el regateo que tiene lugar en el mundo de los negocios. El modelo más simple fue sugerido por Edgeworth (1881). Posteriormente, los juegos de mercado han sido ampliamente estudiados, referencias fundamentales son Shapley y Shubik (1969, 1975). Un resultado crucial nos indica que estos juegos se corresponden, precisamente, con los juegos totalmente equilibrados, lo que nos asegura, entre otras cosas, que el núcleo no sea vacío. Además, probaremos que los pagos asociados a equilibrios competitivos (véase Varian (1984, 1999)) son elementos del núcleo del juego.

Es común, en muchas situaciones, que los individuos cooperen en un proyecto conjunto y los costes comunes tengan que ser repartidos. El problema del reparto de costes consiste en su distribución de un modo justo entre los individuos. La definición del juego de costes supone conocer el conjunto de jugadores y, para cada coalición $S \subset N$, el coste asociado a dicha coalición. Un juego de costes clásico es el juego del aeropuerto estudiado en Littlechild y Thompson (1977).

Una buena recopilación de diversos juegos cooperativos que provienen de problemas de optimización se encuentra en Curiel (1997). Además, es aconsejable la lectura del trabajo de Borm et al. (2001), donde, entre otros, se estudian los juegos de programación lineal, los juegos de asignación, los juegos de permutación, los juegos de secuenciación, los juegos del viajante y los juegos de rutas, los juegos de mínimo coste en una red y los juegos de localización. Aquí nos centraremos exclusivamente en los juegos de secuenciación.

4.1. Juegos simples. Índices de poder

Como queda dicho, los juegos simples encuentran un marco adecuado de aplicación en los análisis de fuerzas en parlamentos o instituciones y órganos de decisión equiparables. Comenzamos esta sección definiendo conceptos básicos para modelar estos juegos. Sencillamente, un juego simple es aquel juego monótono para el que el valor de cualquier coalición o bien es 1 (coalición

ganadora) o bien es 0 (coalición perdedora).

Definición 4.1 Sea $(N, v) \in G^n$.

- El juego (N, v) se dice simple si es monótono y, además, $v(N) = 1$ y $v(S) \in \{0, 1\}$ para toda $S \in 2^N$.
- Una coalición $S \in 2^N$ se dice ganadora si $v(S) = 1$.
- Una coalición $S \in 2^N$ se llama coalición perdedora si $v(S) = 0$.
- Sea (N, v) un juego simple. Diremos que S es una coalición minimal ganadora si $v(S) = 1$ y $v(T) = 0$ para toda $T \subset S, T \neq S$.
- Un jugador $i \in N$ es:
 - Títere si $v(S) + v(\{i\}) = v(S \cup \{i\})$ para toda $S \subset N \setminus \{i\}$.
 - Nulo si $v(S) = v(S \cup \{i\})$ para toda $S \subset N \setminus \{i\}$.
 - Dictador si $v(S) = 1$ si, y sólo si, $i \in S$.
 - Veto si $v(S) = 1$ implica que $i \in S$.

Alternativamente, se pueden definir los juegos simples prescindiendo de la condición de monotonía.

Ejemplo 4.2 Sea (N, v) el juego dado por $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } |S| \in \{0, 1\} \text{ ó si } S \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\} \\ 0 & \text{si } S \in \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\} \\ 1 & \text{si } |S| = 4 \text{ ó si } S \in \{\{1, 2\}, \{1, 2, 4\}\} \end{cases}.$$

Observamos que cumple todas las condiciones de la definición de juego simple, excepto la de monotonía. Además, es fácil comprobar que no tiene dictadores y que los jugadores 1 y 2 son jugadores veto. Como ejercicio, dejamos que el lector intente modificar la función característica para que el jugador 1 sea un dictador.

Observación 4.3 Obsérvese que un jugador títere, i , puede ser dictador, en cuyo caso $v(i) = 1$, pero también puede ser nulo, y entonces $v(i) = 0$. Además,

es fácil comprobar que el conjunto de jugadores veto se puede escribir de la siguiente forma:

$$\text{veto}(N, v) = \bigcap_{S \in 2^N} \{S \in 2^N : v(S) = 1\}.$$

Por otra parte, un jugador i es veto si, y sólo si, $v(N \setminus \{i\}) = 0$.

A continuación damos una formulación equivalente de juego simple, en el sentido de la Definición 4.1, a través de las coaliciones ganadoras y las coaliciones ganadoras minimales.

Definición 4.4 *Un juego simple (o juego de votación) es un par $(N, \mathcal{W})$, donde N es el conjunto de jugadores (votantes) y $\mathcal{W}$ es la colección de coaliciones ganadoras ($S \in \mathcal{W} \Leftrightarrow v(S) = 1$), tal que:*

1. $\emptyset \notin \mathcal{W}$
2. $N \in \mathcal{W}$
3. $S \in \mathcal{W}$ y $S \subset T$ implica $T \in \mathcal{W}$.

Tal y como deja entrever la última condición de la anterior definición, los juegos simples van a estar caracterizados por las coaliciones ganadoras minimales.

Definición 4.5 *Una coalición ganadora S se dice que es ganadora minimal si no contiene propiamente a ninguna otra coalición ganadora. Denotaremos por $\mathcal{W}^m$ al conjunto de coaliciones ganadoras minimales. Entonces,*

$$\mathcal{W}^m = \{S \in \mathcal{W} : v(T) = 0 \text{ si } T \subset S, T \neq S\}.$$

Así pues, el conjunto $\mathcal{W}$ de coaliciones ganadoras puede expresarse como

$$\mathcal{W} = \{S \in 2^N : S \in \mathcal{W}^m \text{ ó existe } T \subset S, T \in \mathcal{W}^m\}.$$

Veamos cómo, a partir de los juegos simples, se modelan tanto la conocida regla de mayoría absoluta como el poder en el juego de un parlamento (véase Ejemplo 1.19).

Definición 4.6 (Juego de mayoría absoluta) *Supongamos una situación en la que tenemos n votantes (o jugadores) y que cada uno dispone de un único voto. El juego (N, v) de mayoría absoluta es el juego simple de n jugadores que tiene como coaliciones ganadoras, $S \in \mathcal{W}$, aquellas tales que $|S| > \frac{n}{2}$.*

El juego de mayoría absoluta es aquel en el que son ganadoras las coaliciones que suman, al menos, la mitad más uno de los votos. Se deja al lector la comprobación de que los juegos de mayoría absoluta son superaditivos.¹

De forma sencilla podemos extender los juegos de mayoría absoluta para abarcar la situación en la que los votantes pueden disponer de más de un voto, siendo, de nuevo, el criterio de “la mitad más uno” el que determina las coaliciones ganadoras.

Definición 4.7 (Juego de mayoría ponderada) *Consideremos un número n de votantes (o jugadores). Para $i = 1, \dots, n$, sea w_i el número de votos del jugador i y denotemos por $w = w_1 + \dots + w_n$ el número total de votos. El juego (N, v) de mayoría ponderada asociado al esquema de votos $[w_1, \dots, w_n]$ es el juego simple de n jugadores para el que una coalición S es ganadora, $S \in \mathcal{W}$, si*

$$\sum_{i \in S} w_i \geq \frac{w}{2} + 1.$$

Ejemplo 4.8 *Recordemos el Ejemplo 1.19 presentado en el Capítulo 1. En él, los votantes, o jugadores, serían los partidos y los votos, los escaños. Podemos, en consecuencia, describir el juego del parlamento del siguiente modo:*

- *Conjunto de jugadores:* $N = \{A, B, C, D, E\}$.
- *Función característica:*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \in \mathcal{W} \\ 0 & \text{si } S \notin \mathcal{W} \end{cases}$$

siendo el conjunto de las coaliciones ganadoras minimales

$$\mathcal{W}^m = \{AB, AC, BCD, BCE, ADE\}.$$

Otra generalización del juego de mayoría ponderada consiste en cambiar la cuota de la mayoría.

¹En el contexto de los juegos simples la superaditividad del juego es equivalente a que $S \cap T \neq \emptyset$, para cualquier $S, T \in \mathcal{W}$.

Definición 4.9 Un juego (N, v) de mayoría ponderada con cuota, que denotaremos $[q; w_1, \dots, w_n]$, donde n es el número de votantes, w_i el número de votos del votante i y q la cuota, es aquel juego simple tal que

$$S \in \mathcal{W} \text{ si } \sum_{i \in S} w_i \geq q.$$

El juego de mayoría absoluta de n jugadores se correspondería con el juego de mayoría ponderada con cuota $[\frac{n}{2}; 1, \dots, 1]$. Asimismo, el juego de mayoría ponderada con pesos $[w_1, \dots, w_n]$ es el juego de mayoría ponderada con cuota $[\frac{n}{2}; w_1, \dots, w_n]$. Observemos que, en general, los juegos de mayoría ponderada con cuota no son superaditivos.

TUGlab: Consideremos el juego de mayoría ponderada con cuota $[4; 1, 5, 1, 5]$. Comprobamos con TUGlab que, en efecto, no es un juego superaditivo.

```
>> A=[0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
>> [S,info]=superadditivegame(A)
S = 0
info = (v{1234}-v{12})<v{34}
```

Ejemplo 4.10 El congreso de los Estados Unidos consta de 537 votantes: el presidente, 101 senadores (incluido el vicepresidente) y 435 diputados.

Una coalición es ganadora si contiene:

- Al presidente y la mayoría de senadores y diputados.
- $\frac{2}{3}$ de senadores y diputados.

Se observa que este juego se puede modelar como un juego simple en el que, además, el presidente no tiene poder de veto.

Ejemplo 4.11 En los siguientes juegos de mayoría ponderada se describen las coaliciones ganadoras minimales y la tipología de los jugadores.

Cuota	$[3; 2, 2, 1]$
Coaliciones ganadoras	$\mathcal{W}^m = \{AB, AC, BC, \}$
Tipo de jugadores	A, B, C son simétricos

Cuota	$[4; 2, 2, 2, 1]$
Coaliciones ganadoras	$\mathcal{W}^m = \{AB, AC, BC\}$
Tipo de jugadores	D es nulo; A, B, C son simétricos

Cuota	$[3; 3, 1, 1]$
Coaliciones ganadoras	$\mathcal{W}^m = \{A\}$
Tipo de jugadores	A es dictador

Para calcular el núcleo de un juego simple debemos encontrar los jugadores veto del juego. De hecho, un juego simple es equilibrado si existe al menos un jugador veto. Los elementos del núcleo se corresponden con todas las posibles divisiones (no negativas) de la unidad entre los jugadores veto.

Proposición 4.12 *El juego simple $(N, v) \in G^n$ es equilibrado si, y sólo si, tiene un jugador veto, o sea,*

$$C(N, v) \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{veto}(N, v) \neq \emptyset.$$

Además, cualquier división no negativa de $v(N)$ entre los jugadores veto será un elemento del núcleo, i.e.

$$C(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : x_i = 0 \text{ si } i \notin \text{veto}(N, v), \sum_{j \in \text{veto}(N, v)} x_j = 1 \right\}.$$

Demostración: Comencemos probando la necesidad. Sea (N, v) un juego simple cuyo núcleo no sea vacío y demostremos que existe al menos un jugador veto. Sabemos que $i \in N$ es un jugador veto si, y sólo si, $v(N \setminus \{i\}) = 0$. Supongamos, por reducción al absurdo, que no existieran jugadores veto. Entonces, para todo $i \in N$, $v(N \setminus \{i\}) = 1$. Dado $x \in C(N, v)$ se verificaría que

$$\sum_{j \in N \setminus i} x_j \geq v(N \setminus i) = 1, \text{ para todo } i \in N$$

lo que a su vez implicaría que $x_i = 0$ para todo $i \in N$. Por lo tanto $C(N, v) = \emptyset$, lo que nos lleva a una contradicción.

Probemos ahora la suficiencia. Supongamos que el conjunto de jugadores veto no es vacío y tomemos $S = \text{veto}(N, v)$. Consideremos las asignaciones $x \in \mathbb{R}^n$ tales que

1. $x_i \geq 0$, para todo $i \in S$ y $\sum_{i \in S} x_i = 1$.

2. $x_i = 0$, para todo $i \in N \setminus S$.

Es fácil comprobar que $x \in C(N, v)$. En efecto, sea cualquier coalición ganadora $T \supset S$. Entonces

$$\sum_{i \in T} x_i \geq \sum_{i \in S} x_i = 1 = v(T),$$

lo que concluye la demostración. ■

Observación 4.13 *La anterior proposición es válida también para los juegos simples definidos prescindiendo de la condición de monotonía. De hecho, la monotonía sólo se utiliza en la demostración de la necesidad. Veamos que sin recurrir a esta propiedad sigue siendo cierto que $C(N, v) \neq \emptyset$ implica la existencia de un jugador veto.*

Sea $x \in C(N, v)$, entonces $\sum_{i \in N} x_i = v(N) = 1$ y $x_i \geq 0$ para todo $i \in N$.

Por tanto existe $j \in N$ tal que $x_j > 0$. Probaremos que si $j \notin T$ entonces $v(T) = 0$ y, por tanto, j sería veto. En efecto,

$$v(T) \leq \sum_{i \in T} x_i \leq \sum_{i \in N \setminus j} x_i = 1 - x_j < 1,$$

con lo que $v(T) = 0$.

TUGlab: Para el juego del Ejemplo 4.2, calculamos con TUGlab los vértices del núcleo.

```
>> V=corevertices(A)
V =
    0    1    0    0
    1    0    0    0
```

Así pues, el núcleo es el segmento $C(N, v) = \text{conv}(\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\})$. Naturalmente, los jugadores 1 y 2 son veto.

Observemos que si modificamos adecuadamente el juego anterior para que el jugador 1 sea un dictador entonces el núcleo degenera en otra dimensión más, esto es, el núcleo sería el punto $(1, 0, 0, 0)$.

Pasamos a analizar algunos resultados sobre juegos simples y conjuntos estables.

Proposición 4.14 *Sea (N, v) un juego simple y S una coalición ganadora minimal. Entonces el conjunto*

$$X_S = \{x \in I(N, v) : x_i = 0 \text{ si } i \notin S\}$$

es un conjunto estable.

Demostración: Comprobamos que se verifican tanto la propiedad de estabilidad interna como la de estabilidad externa.

- Estabilidad interna. Sean $z, x \in X_S$ y supongamos que $x \text{ dom}_T z$, con $T \subset S$, $T \neq S$ (el argumento para cualquier otra coalición $T \subset N$ sería totalmente análogo). Entonces, $x_j = z_j = 0$ si $j \notin S$, $x_i > z_i$ para todo $i \in T$ y $\sum_{i \in T} x_i \leq v(T) = 0$. Hemos llegado a una imposibilidad que surge de suponer que hay una relación de dominación entre dos elementos del conjunto X_S a través de la coalición T .
- Estabilidad externa. Sea $y \in I(N, v) \setminus X_S$. Entonces $\alpha = 1 - \sum_{i \in S} y_i > 0$.

Definimos $x \in X_S$ de la siguiente forma:

$$x_i = \begin{cases} y_i + \frac{\alpha}{|S|} & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{si } i \notin S \end{cases}.$$

Es trivial comprobar que $x \text{ dom}_S y$, con lo que queda probada la estabilidad externa.

Luego, X_S es un conjunto estable. ■

La siguiente proposición establece que para la clase de los juegos simples es equivalente que el núcleo no sea vacío y que los núcleos de todos sus subjuegos no sean vacíos. Por otra parte, ya sabemos que si un juego tiene distribuciones

monótonas respecto a la población (PMAS) entonces es totalmente equilibrado. En el contexto de los juegos simples, estas dos propiedades también son equivalentes.

Proposición 4.15 *Sea (N, v) un juego simple. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

- a) (N, v) es equilibrado.
- b) (N, v) es totalmente equilibrado.
- c) (N, v) tiene PMAS.

En juegos cooperativos es habitual hablar de concepto de solución, bien sea ésta puntual o conjuntista. En el ámbito de los juegos simples, en lugar de solución nos referiremos a índices de poder, reflejo de que, habitualmente, con estos juegos se modelan situaciones de repartos de poder entre partidos políticos u otros organismos de decisión.

Definición 4.16 *Un índice de poder es una función φ que asigna a cada juego simple (N, v) un vector $\varphi(N, v) \in \mathbb{R}^n$.*

Lloyd Shapley y Martin Shubik introducen el índice de poder que lleva sus nombres en el artículo Shapley y Shubik (1954). El índice de poder de Shapley-Shubik es el valor de Shapley del juego simple y se puede reformular de la siguiente manera.

Definición 4.17 *Sea (N, v) un juego simple. Se define el índice de poder de Shapley-Shubik mediante*

$$\mathfrak{S}_i(N, v) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{S \in \mathcal{W} \\ S \setminus \{i\} \notin \mathcal{W}}} (s-1)!(n-s)! \quad \text{para } i \in N.$$

Ejemplo 4.18 *Considérese el juego de mayoría ponderada $[6; 4, 3, 2, 1]$. Para cada permutación de los jugadores, en la tabla que sigue resaltamos, en letra negrita, el jugador que se lleva la contribución (se dice que el jugador es pivote en la permutación correspondiente).*

$ABCD$	$BACD$	$CABD$	$DABC$
$ABDC$	$BADC$	$CADB$	$DACB$
$ACBD$	$BCAD$	$CBAD$	$DBAC$
$ACDB$	$BCDA$	$CBDA$	$DBCA$
$ADBC$	$BDAC$	$CDAB$	$DCAB$
$ADCB$	$BDCA$	$CDBA$	$DCBA$

Aplicamos la definición 4.17 y calculamos el índice de poder de Shapley-Shubik, obteniendo

$$\mathfrak{S}(N, v) = \frac{1}{24}(10, 6, 6, 2) = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right).$$

Observación 4.19 Se puede comprobar fácilmente que los índices de poder de Shapley-Shubik para los tres juegos del Ejemplo 4.11 son, respectivamente,

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \text{ y } (1, 0, 0).$$

Observación 4.20 Dado que, en general, la suma de dos juegos simples no es un juego simple, no se puede discutir la propiedad de aditividad en estos juegos. Por ello, las caracterizaciones axiomáticas que se basan en esta propiedad no son aplicables. Dubey (1975) caracterizó el índice de poder de Shapley-Shubik utilizando una propiedad específica de aditividad para juegos simples que se conoce como transferencia.

A continuación describimos el índice de Banzhaf que inicialmente se definió para la clase de los juegos simples (Banzhaf (1964)) y, posteriormente, se extendió a la clase de los juegos TU (Owen (1975)).

Definición 4.21 Un “swing” (cambio) para el jugador i se define como una coalición $S \in 2^N$ tal que $i \in S$, S es una coalición ganadora y $S \setminus \{i\}$ es perdedora.

Sea θ_i el número de “swings” para el jugador i . Se define el índice de Banzhaf normalizado como el porcentaje del número total de “swings” para cada jugador.

Definición 4.22 El índice de poder de Banzhaf, β , de un juego simple (N, v) viene dado, para cada $i \in N$, por la expresión:

$$\beta_i(N, v) = \frac{\theta_i}{\sum_{j=1}^n \theta_j}.$$

Observación 4.23 Este índice también se conoce como índice de poder de Banzhaf-Coleman. Dubey y Shapley (1979) obtuvieron una caracterización axiomática del índice de Banzhaf utilizando también la propiedad de transferencia. Se puede comprobar fácilmente que este valor satisface las propiedades de jugador nulo y simetría.

Ejemplo 4.24 Consideremos el juego de mayoría ponderada $[6; 4, 3, 2, 1]$ y sea $\mathcal{W}$ el conjunto de coaliciones ganadoras. En cada coalición ganadora resaltamos, en letra negrita, a aquellos jugadores para los que dicha coalición es “swing”.

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{ABC}, \mathbf{ABD}, \mathbf{ACD}, \mathbf{BCD}, \mathbf{ABCD}\}$$

El índice de poder de Banzhaf del juego es

$$\beta(N, v) = \left(\frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12} \right)$$

Ejemplo 4.25 Considera el juego de mayoría ponderada $[3; 2, 1, 1]$. El valor de Shapley-Shubik de este juego es:

$$\mathfrak{S}(N, v) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right)$$

Las coaliciones ganadoras y los jugadores para los que son “swing” son:

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{ABC}\}$$

Finalmente, calculamos el índice de Banzhaf:

$$\beta(N, v) = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

En consecuencia, para este juego los índices de poder de Shapley-Shubik y el de Banzhaf no coinciden.

Ejemplo 4.26 Vamos a calcular y analizar el índice de Shapley-Shubik y el índice de Banzhaf correspondientes al Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas. Para ello, aplicaremos la propiedad de simetría que satisfacen ambos índices, dado que todos los miembros permanentes del Consejo son simétricos y todos los no permanentes también lo son. En primer lugar, describimos cómo varió la formación del Consejo en los años 1954 y 1965.

- Año 1954. El Consejo estaba formado por 5 miembros permanentes (Estados Unidos, URSS, Inglaterra, Francia y China) y por 6 no permanentes. Para que una propuesta fuese aceptada, 7 miembros tenían que apoyarla, pero los miembros permanentes tenían poder de veto.
- Año 1965. El Consejo estaba formado por 5 miembros permanentes y por 10 no permanentes. Para que una propuesta fuese aprobada tenía que ser apoyada por 9 miembros (los miembros permanentes seguían teniendo poder de veto). En otro tipo de decisiones, las de procedimiento, se necesitaban sólo 9 votos afirmativos.

Calculamos primeramente el índice de Shapley-Shubik correspondiente a la situación del año 1954. Denotemos por P a los miembros permanentes y por $\bar{P}$ a los no permanentes. Aplicamos la simetría entre los miembros permanentes y entre los no permanentes. El número de órdenes distintos es $\frac{11!}{5!6!} = 462$.

¿En qué órdenes es $\bar{P}$ pivote? En aquéllos de la forma

$$(PPPP\bar{P})\bar{P}(\bar{P}\bar{P}\bar{P}\bar{P})$$

es decir en $\frac{6!}{5!1!} = 6$. Por tanto, el índice correspondiente al conjunto de todos los miembros no permanentes será de $\frac{6}{462} = 0.013$, y el de los miembros permanentes será de $\frac{456}{462} = 0.987$. Aplicando la simetría tenemos que:

$$\mathfrak{S}_P(N, v) = \frac{1}{5} \frac{456}{462} = 0.1974$$

$$\mathfrak{S}_{\bar{P}}(N, v) = \frac{1}{6} \frac{6}{462} = 0.0022$$

Dicho de otro modo, la razón de poder entre un miembro permanente y uno no permanente es de 90 : 1. El poder conjunto de los permanentes es de 0.9870.

Procedemos ahora a efectuar las cuentas en el año 1965. El número de órdenes distintos es $\frac{15!}{5!10!} = 3003$. $\bar{P}$ es pivote en las siguientes permutaciones:

$$(PPPP\bar{P}\bar{P}\bar{P})\bar{P}(\bar{P}\bar{P}\bar{P}\bar{P}\bar{P})$$

es decir en $\frac{8!}{5!3!} = 56$ órdenes.

$$\mathfrak{S}_P(N, v) = \frac{1}{5} \frac{2947}{3003} = 0.1962$$

$$\mathfrak{S}_{\bar{P}}(N, v) = \frac{1}{10} \frac{56}{3003} = 0.0018$$

Por tanto la razón de poder entre un miembro permanente y uno no permanente es de 105 : 1. El poder otorgado a los permanentes es de $\frac{2947}{3003} = 0.9813$. Observamos que, con respecto a la situación anterior, los miembros permanentes bajan un poco su poder conjunto aunque individualmente lo aumentan.

Calculamos ahora el índice de Banzhaf referido a la situación del Consejo en el año 1954.

Coaliciones ganadoras	Repeticiones	$\theta(P)$	$\theta(\bar{P})$
PPPPPP$\bar{P}$	$\binom{5}{5} \binom{6}{2} = 15$	75	30
PPPPPP$\bar{P}\bar{P}$	$\binom{5}{5} \binom{6}{3} = 20$	100	0
PPPPPP$\bar{P}\bar{P}\bar{P}$	15	75	0
PPPPPP$\bar{P}\bar{P}\bar{P}\bar{P}$	6	30	0
PPPPPP$\bar{P}\bar{P}\bar{P}\bar{P}\bar{P}$	1	5	0
		285	30

Así pues, el índice de poder de Banzhaf de cada miembro permanente y cada no permanente es:

$$\beta_P(N, v) = \frac{285}{315} \frac{1}{5} = 0.1810$$

$$\beta_{\bar{P}}(N, v) = \frac{30}{315} \frac{1}{6} = 0.0159$$

Por lo tanto, la razón de poder entre un miembro permanente y uno no permanente es de 11 : 1. Conjuntamente, el poder de los permanentes es de 0.9047.

Como ejercicio, el lector puede efectuar los cálculos del índice de Banzhaf referidos al año 1965. Obtendrá que el valor de Banzhaf de un miembro permanente es 0.1669 y el de un no permanente 0.01653. Conjuntamente, el poder de los permanentes, con respecto al índice de Shapley-Shubik, disminuye a 0.8346.

Observación 4.27 Reseñar que para el cálculo del índice de Banzhaf de un juego simple es de utilidad su extensión multilineal. Además, existen otros índices de poder de interés estudiados en la literatura, como por ejemplo, el índice de Deegan y Packel (1979).

Un trabajo reciente en el que, nuevamente, se manifiesta la aplicación de los juegos simples al análisis del poder político se puede encontrar en Algaba et al. (2007), en este caso para distribuir el poder en la fallida Constitución Europea.

4.2. Los juegos de bancarrota

Los juegos de bancarrota han merecido una gran atención desde su introducción por O'Neill (1982) y Aumann y Maschler (1985) tanto por su aplicabilidad a situaciones reales, como por su interés académico. En Thomson (2003) se puede encontrar un buen compendio que resume la evolución de la literatura referida a los juegos de bancarrota a lo largo del tiempo.

En esta sección exponemos, de forma abreviada, las principales ideas acerca de este tipo de juegos y algunas soluciones específicas. En todo juego de bancarrota hay un conjunto de acreedores entre los que hay que repartir una hacienda que por lo general, y aquí radica el interés del planteamiento, no es suficiente para cubrir las deudas.

Definición 4.28 Sean $E > 0$ el estado a repartir y $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}_+^n$ las demandas de los acreedores.

- El par (E, d) es un problema de bancarrota si $0 < E \leq \sum_{i=1}^n d_i$.
- Una regla de reparto asociada a un problema de bancarrota es una función f que a cada problema de bancarrota (E, d) le asocia un valor $f(E, d) \in \mathbb{R}^n$ tal que
 1. $0 \leq f_i(E, d) \leq d_i$, para $i = 1, \dots, n$.
 2. $\sum_{i=1}^n f_i(E, d) = E$.

Así pues, una regla de reparto es una forma de distribuir la totalidad del estado entre los acreedores con la única condición de no dar a ninguno de ellos una cantidad superior a su demanda.

Definición 4.29 Se define el juego cooperativo (N, v) asociado al problema de bancarrota (E, d) como aquel juego con conjunto de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$ y función característica:

$$v(S) = \max\left\{0, E - \sum_{i \in N \setminus S} d_i\right\}, S \subset N.$$

El juego de bancarrota asocia a cada coalición lo que queda del estado una vez satisfechas completamente las demandas de los acreedores ajenos a la coalición. Veamos un sencillo caso práctico.

Ejemplo 4.30 Supongamos que el patrimonio de una empresa que se ha declarado en quiebra asciende a 10000 unidades monetarias. Cuatro acreedores solicitan las siguientes cantidades $d = (3000, 2000, 5000, 8000)$. El correspondiente juego de bancarrota tendría cuatro jugadores, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, y su función característica sería:

$$\begin{aligned} v(N) &= 10000 \\ v(1, 2, 3) &= 2000, \quad v(1, 2, 4) = 5000, \quad v(1, 3, 4) = 8000, \quad v(2, 3, 4) = 7000 \\ v(1, 2) &= v(1, 3) = v(2, 3) = 0, \quad v(1, 4) = 3000, \\ v(2, 4) &= 2000, \quad v(3, 4) = 5000 \\ v(i) &= 0, \quad \text{para todo } i \in N \end{aligned}$$

A continuación demostraremos, siguiendo a Curiel et al. (1987), que los juegos de bancarrota son convexos.

Proposición 4.31 *Los juegos de bancarrota son convexos.*

Demostración: Dada $R \subset N$, denotemos por $d(R) = \sum_{i \in R} d_i$. Es fácil ver que si $R \subset T$ entonces

$$E - d(N \setminus R) \leq E - d(N \setminus T).$$

Ciertamente, $R \subset T$ implica $N \setminus R \supset N \setminus T$ y, consecuentemente, $d(N \setminus R) \geq d(N \setminus T)$, de donde se sigue inmediatamente la desigualdad buscada.

Sean $S, T \in 2^N$ tales que $S \subset T \subset N \setminus \{i\}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} &v(S \cup \{i\}) + v(T) \\ &= \max\{0, E - d(N \setminus (S \cup \{i\}))\} + \max\{0, E - d(N \setminus T)\} \\ &= \max\{0, E - d(N \setminus (S \cup \{i\})), E - d(N \setminus T), 2E - d(N \setminus (S \cup \{i\})) - d(N \setminus T)\}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} &v(T \cup \{i\}) + v(S) \\ &= \max\{0, E - d(N \setminus (T \cup \{i\})), E - d(N \setminus S), 2E - d(N \setminus (T \cup \{i\})) - d(N \setminus S)\}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $S \subset T \cup \{i\}$ deducimos que

$$E - d(N \setminus S) \leq E - d(N \setminus (T \cup \{i\})).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} & v(T \cup \{i\}) + v(S) \\ &= \max\left\{0, E - d(N \setminus (T \cup \{i\})), 2E - d(N \setminus (T \cup \{i\})) - d(N \setminus S)\right\}. \end{aligned}$$

Por otra parte, ya que $T \cup \{i\} \supset S \cup \{i\}$ y $T \cup \{i\} \supset T$

$$\begin{aligned} E - d(N \setminus (T \cup \{i\})) &\geq E - d(N \setminus (S \cup \{i\})) \\ E - d(N \setminus (T \cup \{i\})) &\geq E - d(N \setminus T) \\ 2E - d(N \setminus (T \cup \{i\})) - d(N \setminus S) &= 2E - d(N \setminus (S \cup \{i\})) - d(N \setminus T). \end{aligned}$$

Estas desigualdades implican que el juego (N, v) asociado a un problema de bancarrota es convexo, puesto que $v(S \cup \{i\}) + v(T) \leq v(T \cup \{i\}) + v(S)$ para todo $S, T \in 2^N$, $S \subset T \subset N \setminus \{i\}$. ■

Han sido propuestas distintas reglas de reparto para los problemas de bancarrota: la solución de igual ganancia, la solución de igual pérdida, el reparto proporcional y el reparto proporcional ajustado, entre otras. Revisamos las principales.

Definición 4.32 Sea (E, d) un problema de bancarrota.²

- La solución de igual ganancia (CEA) asigna a cada acreedor i el mínimo entre α y su demanda d_i , estando α unívocamente determinado por la propiedad de eficiencia. Formalmente, para cada $i \in N$,

$$CEA_i(E, d) = \min\{\alpha, d_i\}$$

donde α es tal que

$$E = \sum_{i \in N} \min\{\alpha, d_i\}.$$

- La solución de igual pérdida (CEL) asigna a cada acreedor i el máximo entre 0 y $d_i - \beta$, estando β unívocamente determinado por la propiedad de eficiencia. Es decir, para cada $i \in N$,

$$CEL_i(E, d) = \max\{0, d_i - \beta\}$$

²Las abreviaturas CEA, CEL, PRO, APRO y RA responden a las denominaciones de las soluciones en inglés. En concreto, “Constraint Equal Award”, “Constraint Equal Loss”, “Proportional”, “Adjusted Proportional” y “Random Arrival”.

donde β es tal que

$$E = \sum_{i \in N} \max\{0, d_i - \beta\}.$$

- El reparto proporcional (*PRO*) divide el estado de forma proporcional a las demandas de los acreedores, esto es, para cada $i \in N$,

$$PRO_i(E, d) = d_i \frac{E}{\sum_{k \in N} d_k}.$$

- El reparto proporcional ajustado (*APRO*) empieza asignándole a cada acreedor su derecho mínimo, que se corresponde con el máximo entre 0 y la parte del estado no demandada por el resto de los acreedores, es decir,

$$s_i = \max\left\{0, E - \sum_{j \in N \setminus i} d_j\right\}.$$

Una vez realizada esta asignación, el estado restante, $E' = E - \sum_{i \in N} s_i$, es dividido de forma proporcional entre los demandantes teniendo en cuenta que las demandas de los jugadores en el estado E' son $d'_i = \min\{d_i - s_i, E'\}$, dado que demandas mayores que E' se consideran irrelevantes. Por lo tanto, el reparto proporcional ajustado asigna a cada $i \in N$,

$$APRO_i(E, d) = s_i + d'_i \frac{E'}{\sum_{k \in N} d'_k}.$$

- El reparto del Talmud (*T*) divide el estado de la siguiente forma:

$$1. \text{ Si } \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{2} \geq E, \text{ entonces}$$

$$T_i(E, d) = \min\left\{\frac{d_i}{2}, \lambda\right\}$$

siendo λ tal que

$$E = \sum_{i=1}^n \min\left\{\frac{d_i}{2}, \lambda\right\}.$$

2. Si $\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{2} \leq E$ entonces

$$T_i(E, d) = d_i - \min\left\{\frac{d_i}{2}, \lambda\right\}$$

siendo λ tal que

$$E = \sum_{i=1}^n \left(d_i - \min\left\{\frac{d_i}{2}, \lambda\right\}\right).$$

- El reparto de las llegadas aleatorias (RA) divide el estado para cada $i \in N$ del modo,

$$RA_i(E, d) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \min\left\{d_i, \max\left\{E - \sum_{j \in N, \pi(j) < \pi(i)} d_j, 0\right\}\right\}.$$

Observamos que, en el reparto del Talmud, si el estado coincide con la mitad de las demandas, cada jugador recibe la mitad de su demanda. En caso de que el estado sea menor, se aplica la CEA, y si el estado es mayor, la CEL (en ambos casos aplicadas a las mitades de las demandas en lugar de a las demandas).

Para comprender el reparto de llegadas aleatorias, supongamos que los acreedores llegan de uno en uno y se les va asignando el dinero disponible hasta que se termina. El reparto de llegadas aleatorias es el promedio de estas asignaciones en todos los posibles órdenes de llegada.

En el siguiente teorema proporcionamos relaciones entre las soluciones descritas previamente y los conceptos de solución para el juego TU asociado al problema de bancarrota.

Teorema 4.33 Sea (E, d) un problema de bancarrota y (N, v) el juego TU asociado. Se verifica que:³

- $RA(E, d) = Sh(N, v)$ (O'Neill (1982))
- $T(E, d) = Nu(N, v)$ (Aumann y Maschler (1985))

³DR es la solución de Dutta-Ray que selecciona, para juegos convexos, un vector en el núcleo del juego que es máximo en el orden de Lorenz. Véase Dutta y Ray (1989).

- $APRO(E, d) = \tau(N, v)$ (Curiel et al. (1987))
- $CEA(E, d) = DR(N, v)$ (Dutta y Ray (1989))

Observación 4.34 Dado que los juegos de bancarrota son convexos, se simplifica considerablemente el cálculo del valor de Shapley, del nucleolo y del τ -valor. Además, todos ellos están en el núcleo del juego TU asociado.

Ejemplo 4.35 Retomamos los problemas de bancarrota presentados en el Ejemplo 1.21 del Capítulo 1. Un hombre tiene 3 esposas y estipula que a su muerte reciban 100, 200 y 300 unidades monetarias, respectivamente. Veamos, en primer lugar, cuáles serían los juegos de bancarrota asociados (empleamos la notación vectorial de TUGlab para la función característica) si en el momento de su defunción su hacienda es de E unidades, en los casos:

E	Juego
100	$A=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 100]$
200	$A=[0, 0, 0, 0, 0, 100, 200]$
300	$A=[0, 0, 0, 0, 100, 200, 300]$

Los repartos que hemos analizado en esta sección, para los tres estados considerados, dan los resultados que se recogen en la siguiente tabla.

	Estado E		
Reparto	100	200	300
CEA	(33.3, 33.3, 33.3)	(66.6, 66.6, 66.6)	(100, 100, 100)
CEL	(0, 0, 100)	(0, 50, 150)	(0, 100, 200)
APRO	(33.3, 33.3, 33.3)	(40, 80, 80)	(50, 100, 150)
T	(33.3, 33.3, 33.3)	(50, 75, 75)	(50, 100, 150)
RA	(33.3, 33.3, 33.3)	(33.3, 83.3, 83.3)	(50, 100, 150)

TUGlab: Con ayuda de TUGlab vamos a representar el núcleo del juego dado en el Ejemplo 4.30. Calculamos, además, las soluciones proporcional ajustada (el τ -valor), la solución del Talmud (el nucleolo), y la de llegadas aleatorias (el valor de Shapley).

```
>> A=[0 0 0 0 0 0 3000 0 2000 5000 2000 5000 8000 7000 10000];
>> format bank %presentación con 2 cifras decimales
```

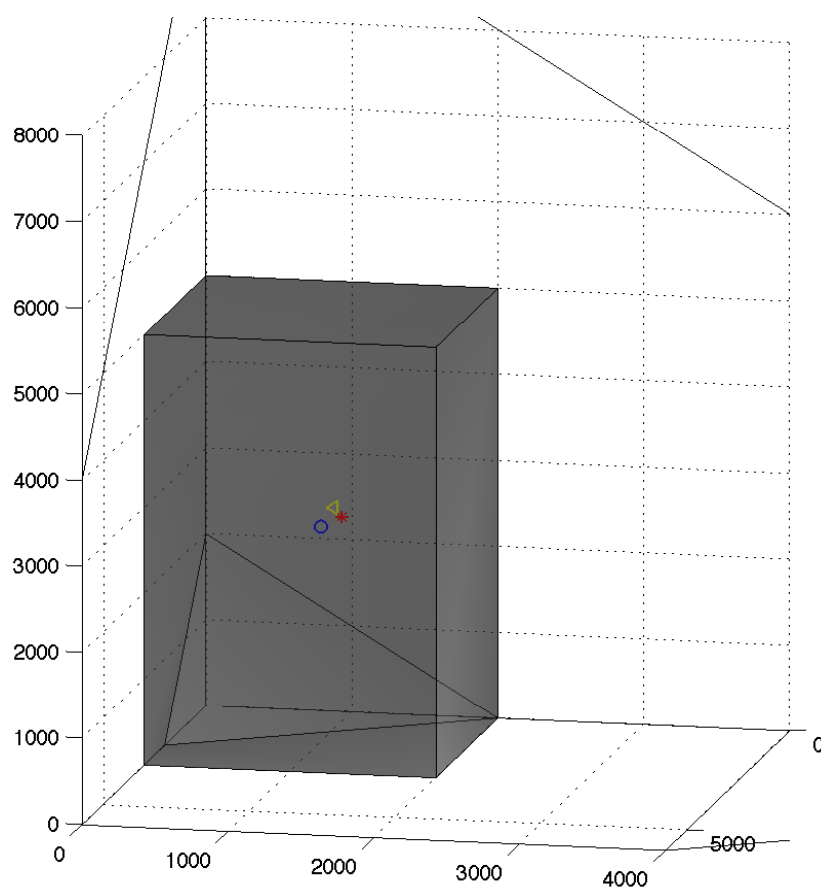


Figura 4.1: Núcleo (en gris), nucleolo (en azul), τ -valor (en amarillo) y valor de Shapley (en rojo) de un problema de bancarrota

```
>> tv=tauvalue(A)
tv =
    1666.67    1111.11    2777.78    4444.44
>> nu=nucleolus(A)
Optimization terminated successfully.
```



```

Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
nu =
    1500.00    1000.00    2500.00    5000.00
>> sh=Shapley(A)
sh =
    1666.67    1166.67    2666.67    4500.00
>> clf
>> imputationset(A)
>> hold on, axis(axis)
>> coreset(A)
>> plot3(tv(1,1),tv(1,2),tv(1,3),'<y')
>> plot3(nu(1,1),nu(1,2),nu(1,3),'ob')
>> plot3(sh(1,1),sh(1,2),sh(1,3),'*r')

```

En la Figura 4.1 se puede ver el resultado obtenido tras ejecutar las órdenes anteriores en MATLAB®. Con el fin de distinguir mejor la posición relativa de los tres valores, hemos ampliado y rotado el dibujo que por defecto presenta MATLAB®.

Para terminar esta sección quisiéramos comentar que existen innumerables artículos de investigación dedicados al estudio axiomático de las soluciones descritas. Otra perspectiva, también aplicable a los problemas de bancarrota, consiste en asociar a cada problema de bancarrota un problema de negociación y, de nuevo, estudiar relaciones entre las reglas de reparto y las soluciones clásicas a los problemas de negociación (la solución de Nash, la solución de Nash ponderada, la solución de Kalai-Smorodinski, la de iguales pérdidas, etc).

4.3. Los juegos de mercado

El siguiente contexto aplicado que centra nuestra atención relaciona la teoría de juegos cooperativos con un modelo clásico de Microeconomía: los mercados de intercambio. Un mercado de intercambio está caracterizado por un conjunto de agentes, sus bienes, sus dotaciones iniciales y sus funciones de utilidad. Estas funciones cuantifican la utilidad que les supone a los agentes el intercambio de sus bienes a unos precios determinados. A cada mercado de

intercambio se le puede asociar un juego cooperativo que resume la información del mercado en la función característica. Como es de esperar, existen relaciones entre los equilibrios competitivos del mercado de intercambio y el juego TU al que da lugar. Concretamente, los pagos asociados a los equilibrios competitivos del mercado de intercambio seleccionan asignaciones en el núcleo del juego.

Primeramente estudiaremos los mercados de intercambio y los equilibrios competitivos (consúltese Mas-Colell et al. (1995) o Varian (1984)), para dar paso al análisis de los juegos de mercado. Veremos cómo se asocia un juego a cada mercado de intercambio; además, estudiaremos propiedades de estos juegos en relación con el núcleo. Como ya hemos anticipado, veremos que los pagos asociados a los equilibrios competitivos se corresponden con asignaciones en el núcleo. El grueso de los resultados que mencionaremos se recogen en los artículos Shapley y Shubik (1969, 1975). También se pueden consultar algunos de los resultados que expondremos en Aumann (1989), Eichberger (1993) y Rafels i Pallarola et al. (1999). Mencionemos, por último, las interesantes relaciones entre el núcleo y el equilibrio competitivo que aparecen recogidas en Moulin (1995).

Definición 4.36 *Un mercado de intercambio M está caracterizado por los siguientes elementos:*

$$M = (N, \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}, (w^i, 0)_{i \in N}, (u^i)_{i \in N})$$

donde

- N es el conjunto de agentes.
- $\mathbb{R}_+^m$ es el espacio de bienes o mercancías.
- $\mathbb{R}$ representa el espacio del dinero.
- Para cada $i \in N$, $(w^i, 0) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}$ representa las dotaciones iniciales de bienes y dinero, respectivamente, del agente i .⁴
- Para cada $i \in N$, u^i es la función de utilidad del agente i , medida en términos monetarios, que suponemos continua y cóncava. Es decir,

$$u^i : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$$

y $u^i(x)$ representa la utilidad que asigna el agente i a la cesta de bienes $x \in \mathbb{R}_+^m$.

⁴Es decir, suponemos que la dotación inicial de dinero es nula.

Podemos construir la función de utilidad $U^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que mide, conjuntamente y en términos monetarios, la utilidad proporcionada por la cesta de bienes y por el dinero obtenido en el intercambio, mediante:

$$U^i(x^i, t^i) = u^i(x^i) + t^i, \quad (x^i, t^i) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}.$$

Bajo el supuesto de que los agentes, inicialmente, no disponen de dinero, tenemos que

$$\sum_{i \in N} t^i = 0$$

y, por tanto,

$$\sum_{i \in N} U^i(x^i, t^i) = \sum_{i \in N} u^i(x^i).$$

Supongamos que los bienes $1, \dots, m$ se intercambian en el mercado a unos precios fijos $p_1, \dots, p_m$, respectivamente. Sea $p = (p_1, \dots, p_m)$ el vector de precios.

Definición 4.37 Sea $M = (N, \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}, (w^i, 0)_{i \in N}, (u^i)_{i \in N})$ un mercado de intercambio.

- La asignación $\bar{x}^i$ es óptima al precio p para el agente i si

$$U^i(\bar{x}^i, p(w^i - \bar{x}^i)) = \max_{x^i \in \mathbb{R}_+^m} U^i(x^i, p(w^i - x^i)).$$

- El vector $(\bar{p}, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$, donde $\bar{p} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{x}^i \in \mathbb{R}_+^m$ es un equilibrio competitivo para el mercado M si, para cada agente $i \in N$, $\bar{x}^i$ es óptima al precio $\bar{p}$ y, además, se verifica

$$\sum_{i \in N} \bar{x}^i = \sum_{i \in N} w^i \quad (\text{cierre de mercado}).$$

Asociado a cada equilibrio competitivo, $(\bar{p}, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$, hay un vector de pagos, $z = (z^i)_{i \in N}$, donde, para cada $i \in N$,

$$z^i = u^i(\bar{x}^i) + \bar{p}(w^i - \bar{x}^i) = U^i(\bar{x}^i, \bar{p}(w^i - \bar{x}^i)).$$

Naturalmente, z^i representa la utilidad que le proporciona al agente i la asignación óptima $\bar{x}^i$, medida en términos monetarios, después de producirse el intercambio de los bienes y el correspondiente pago de los intercambios entre los agentes.

Diversos resultados garantizan la existencia de equilibrio competitivo bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, si:

1. u^i es de clase 1 en su dominio, para todo $i \in N$.
2. $u^i(x + a) \geq u^i(x)$, para todo $i \in N$ y para todos $x, a \in \mathbb{R}_+^m$.
3. $\sum_{i \in N} w_j^i > 0$, para todo $j \in M$.

entonces tenemos asegurada la existencia de equilibrio competitivo en el mercado.

Definición 4.38 *El juego de mercado asociado al mercado de intercambio $M = (N, \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}, (w^i, 0)_{i \in N}, (u^i)_{i \in N})$ es el par (N, v) , siendo N el conjunto finito de agentes y v la función característica, definida para cada $S \subset N$, por*

$$v(S) = \max_{A_S} \sum_{i \in S} u^i(x^i)$$

siendo

$$A_S = \left\{ (x^i)_{i \in S} : x^i \in \mathbb{R}_+^m, \sum_{i \in S} x^i = \sum_{i \in S} w^i \right\}.$$

Comprobaremos que el conjunto de los pagos asociados a los equilibrios competitivos está contenido en el núcleo. Por lo tanto, el núcleo del juego de mercado no es vacío si existe al menos un equilibrio competitivo.

Proposición 4.39 *Sean M un mercado de intercambio, z el pago asociado al equilibrio competitivo $(\bar{p}, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ y (N, v) el juego de mercado asociado a M . Se tiene que $z \in C(N, v)$.*

Utilizando la caracterización de Bondareva-Shapley, e independientemente de la existencia de equilibrios, el núcleo de un juego de mercado nunca es vacío.

Teorema 4.40 *Los juegos de mercado son equilibrados.*

Teniendo en cuenta que todo subjuego de un juego de mercado es, a su vez, un juego de mercado, deducimos que los juegos de mercado son totalmente equilibrados.

Corolario 4.41 *Los juegos de mercado son totalmente equilibrados.*

El siguiente teorema pondrá de manifiesto que la clase de los juegos de mercado coincide con la clase de los juegos totalmente equilibrados.

Teorema 4.42 *Una condición necesaria y suficiente para que un juego sea totalmente equilibrado es que sea un juego de mercado.*

Demostración: Ya conocemos que los juegos de mercado son totalmente equilibrados. Basta con probar entonces que dado un juego totalmente equilibrado (N, v) , podemos construir un mercado M_C de tal forma que la función característica del juego asociado al mercado, (N, w) , coincida con la función característica del juego (N, v) ; es decir, $v(S) = w(S)$ para toda $S \subset N$.

Sea (N, v) un juego totalmente equilibrado. Construimos un mercado asociado a este juego (mercado entre coaliciones) de la siguiente forma:

$$M_C = \left(N, \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}, (e^{\{i\}}, 0)_{i \in N}, (u^i)_{i \in N} \right),$$

donde: N es el conjunto de jugadores; el conjunto de bienes son los propios jugadores (interpretado como su tiempo, su trabajo, ellos mismos,...); las dotaciones iniciales son los vectores característicos de cada coalición individual; y, para todo $i \in N$, todos los jugadores tienen la misma utilidad $u^i = u$, dada por

$$u(x) = \max \left\{ \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S v(S) : \delta_S \geq 0, \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \delta_S e^S = x \right\}.$$

Fácilmente se comprueba que u es una función continua, cóncava y homogénea de grado uno. Además, u es superaditiva, es decir,

$$u\left(\sum_{i \in N} x^i\right) \geq \sum_{i \in N} u(x^i)$$

para cada $x^i \in \mathbb{R}_+^n$.

Construimos el juego de mercado asociado a M_C , denotado (N, w) , y comprobamos que para toda $S \subset N$, $w(S) = v(S)$. Esta igualdad se prueba demostrando que $w(S) = u(e^S)$ para toda $S \subset N$ y que $v(S) = u(e^S)$ para toda $S \subset N$. Dejamos los detalles al lector. ■

Concluimos con un resultado que nos indica que, para los mercados de coaliciones, el conjunto de pagos asociados a los equilibrios competitivos del mercado coincide exactamente con el núcleo.

Teorema 4.43 *El conjunto de los pagos asociados a los equilibrios competitivos del mercado entre coaliciones M_C coincide con el núcleo del juego de mercado asociado a M_C .*

Demostración: Ya hemos probado que los pagos asociados a los equilibrios competitivos son asignaciones del núcleo. Demostraremos entonces que dada cualquier asignación en el núcleo podemos construir un equilibrio competitivo cuyo pago asociado es, precisamente, ese elemento del núcleo.

Es sencillo comprobar que dado $z \in C(N, v)$, el vector $(z, \frac{e^N}{n}, \dots, \frac{e^N}{n})$ es un equilibrio competitivo para el mercado M_C , cuyo pago asociado es, precisamente, z . ■

Concluimos esta sección estudiando con más detalle los juegos de asignación, que presentábamos en el Ejemplo 1.22 del Capítulo 1, y que surgen al considerar un mercado bilateral.

Ejemplo 4.44 *Describíamos en el Ejemplo 1.22 un mercado con m propietarios, que poseen una casa cada uno, y n compradores interesados en adquirir una única vivienda. Denotábamos por c_i la valoración que el propietario i hace de su casa y por h_{ij} la valoración que de la vivienda i tiene el comprador j .*

Un problema de asignación entre $m = |M|$ compradores y $n = |N|$ vendedores (o en un mercado bilateral) consiste en encontrar las transacciones óptimas que maximicen la utilidad conjunta. Si denotamos por $a_{ij} = \max\{0, h_{ij} - c_i\}$, debemos encontrar $i_1, \dots, i_k \in M$ y $j_1, \dots, j_k \in N$ tales que hagan máxima la suma

$$a_{i_1 j_1} + \dots + a_{i_k j_k}$$

siendo $k = \min\{|M|, |N|\}$.

Construimos entonces el juego de asignación $(M \cup N, v)$ asociado al problema de asignación, de la siguiente forma:

- *Conjunto de jugadores:* $M \cup N$
- *Función característica:*

$$\begin{aligned} v(S) &= 0, \text{ si } S \subset M \text{ ó } S \subset N \\ v(ij) &= \max\{0, h_{ij} - c_i\} = a_{ij}, \text{ si } i \in M, j \in N \\ v(S) &= \max\{a_{i_1 j_1} + \dots + a_{i_k j_k}\}, \text{ en otro caso} \end{aligned}$$

siendo $k = \min\{|S \cap M|, |S \cap N|\}$, $i_1, \dots, i_k \in S \cap M$ y $j_1, \dots, j_k \in S \cap N$.

Fijémonos en que la matriz a_{ij} es suficiente para determinar la función característica v . Por otra parte, el precio al cual se hace la transacción entre cada comprador y cada vendedor no interviene en la función característica.

Estudiamos un caso simple de un juego de asignación. Consideremos dos vendedores 1 y 2 que valoran sus casas en 10 y 20 unidades, respectivamente. Hay dos posibles compradores 3 y 4 siendo sus tasaciones de las casas las recogidas en la tabla:

	<i>Comprador</i>	
<i>Casa</i>	3	4
1	14	18
2	23	25

La matriz de transacciones sería

$$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

y la función característica del juego de asignación

$$\begin{aligned} v(S) &= 0 \quad \text{si } S \subset \{1, 2\} \text{ ó } S \subset \{3, 4\} \\ v(13) &= 4, v(14) = 8, v(23) = 3, v(24) = 5 \\ v(123) &= 4, v(124) = 8, v(134) = 8, v(234) = 5 \\ v(1234) &= 11 \end{aligned}$$

4.4. El juego del aeropuerto

Supongamos que tenemos m tipos de aviones de distinto tamaño y queremos sufragar el coste de construir una pista para que pueda ser usada por todos. Si construimos una pista para que aterrice el avión más grande, ésta servirá también para el resto de los aviones. Sin embargo, las características de una pista para aviones pequeños no son adecuadas para los aviones de gran envergadura.

Veamos cómo formular este problema desde la perspectiva de los juegos cooperativos.

Sea t_j el coste de construir una pista para los aviones del tipo j siendo

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m.$$

De esta forma, con tipo m denotamos la clase de aviones que necesitan una pista mayor y con 1 la clase de los aviones más pequeños.

Sean N_j el conjunto de aviones del tipo j ($j = 1, \dots, m$) y $N = \bigcup_{j=1}^m N_j$ el conjunto de todos los aviones. Como es habitual, denotaremos por n_j al número de aviones de tipo j , n representa el número total de aviones, es decir, $n = \sum_{j=1}^m n_j$ y, por último, s_j denotará el número de aviones de tipo j o superior, es decir, $s_j = \sum_{k=j}^m n_k$.

Definimos el juego de costes, (N, c) , como aquel con conjunto de jugadores $N = \bigcup_{j=1}^m N_j$ y función característica

$$c(S) = \max\{t_j : 1 \leq j \leq m, S \cap N_j \neq \emptyset\}, \quad S \in 2^N \setminus \emptyset.$$

Como se aprecia, el coste que debe sufragar una coalición S se corresponde con el coste de construir una pista que puedan utilizar todos los aviones de la coalición.

Definición 4.45 Dada $T \subset N$, definimos el juego de unanimidad dual asociado a T mediante

$$u_T^*(S) = \begin{cases} 1 & T \cap S \neq \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Se verifica que $u_T^*(S) = u_T(N) - u_T(N \setminus S)$. A partir de esta expresión es fácil observar que el valor de Shapley del juego de unanimidad dual coincide con el valor de Shapley del juego de unanimidad y coincide exactamente con $\frac{1}{t}$ si $i \in T$ (los jugadores de $N \setminus T$ son títeres). El juego de unanimidad dual se puede interpretar como el que modela el coste de un bien público demandado únicamente por los jugadores de T .

La siguiente proposición proporciona expresiones para el valor de Shapley y para el τ -valor en función de los costes de construir la pista.

Proposición 4.46 Sea (N, c) el juego de costes del aeropuerto. Entonces:

a) La función característica c se puede descomponer como

$$c = \sum_{k=1}^m (t_k - t_{k-1}) u_{T_k}^*,$$

$$\text{siendo } T_k = \bigcup_{r=k}^m N_r, \quad k = 1, \dots, m.$$

$$b) \quad Sh_i(N, c) = \sum_{k=1}^j \frac{t_k - t_{k-1}}{s_k}, \quad \text{si } i \in N_j.$$

$$c) \quad \tau(N, c) = t_m \left(\sum_{k=1}^m n_k t_k \right)^{-1} t_j, \quad \text{si } i \in N_j.$$

Como observamos la interpretación del valor de Shapley del juego del aeropuerto es clara: el coste que debe pagar un avión de un tipo determinado sólo depende de los costes de los aviones de menor tamaño. El coste de construir la pista para los aviones de tipo 1, t_1 , se divide entre todos los aviones de manera igualitaria; a continuación, el coste incremental de construir la pista para los aviones del segundo tipo, $t_2 - t_1$, se divide entre todos los aviones exceptuando los de tipo 1, y así sucesivamente. Dejamos que el lector interprete el reparto del τ -valor.

TUGlab: Vamos a representar el núcleo y calcular el valor de Shapley, el nucleolo, el core-center y el tau-valor para un juego de costes del aeropuerto con 4 tipos de aviones y costes $1 < 2 < 3 < 4$. Recordemos, véase la Observación 2.6, que el núcleo de un juego de costes $C^r(N, v)$ coincide con $C(N, -v)$.

```
>> A=[-1 -2 -3 -4 -2 -3 -4 -3 -4 -4 -3 -4 -4 -4 -4 ];
>> N=nucleolus(A),Sh=Shapley(A),tv=tauvalue(A),CC=corecenter(A)
Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
Optimization terminated successfully.
N = -0.5000 -0.7500 -0.8750 -1.8750
Sh = -0.2500 -0.5833 -1.0833 -2.0833
tv = -0.3333 -0.6667 -1.0000 -2.0000
CC = -0.4219 -0.6719 -0.9531 -1.9531
```

El núcleo se representa en la Figura 4.2.

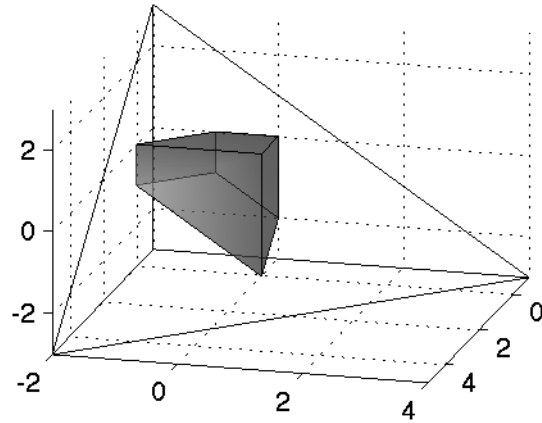


Figura 4.2: Núcleo de un juego de costes del aeropuerto

4.5. Juegos de secuenciación

Una situación de secuenciación consiste en un conjunto de trabajos o tareas que tienen que ser procesados, unos detrás de otros, en una o varias máquinas. Las tareas tienen tiempos y costes de procesamiento determinados. Definimos, a continuación, el modelo más sencillo, en el que existe sólo una máquina para procesar las tareas y éstas tienen un orden inicial asignado. Además, supondremos que la función de costes es lineal en el tiempo de finalización.

Definición 4.47 Una situación de secuenciación viene determinada por el cuarteto (N, σ_0, p, c) , donde:

- N es el conjunto de trabajos o tareas que tiene que procesar una máquina.
- σ_0 es una permutación de N indicando el orden inicial de las tareas ($\sigma_0(i) = j$ significa que la tarea i será la j -ésima tarea procesada en la máquina).
- $p = (p_i)_{i \in N}$ es un vector que especifica los tiempos de proceso de las diferentes tareas, siendo $p_i > 0$ para cada $i \in N$.

- $c = (c_i)_{i \in N}$ es la función de coste, $c_i : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. El valor $c_i(t)$ nos indica el coste de terminar la tarea i en el instante t . Consideraremos que el coste es lineal en el tiempo, i.e.,

$$c_i(t) = \alpha_i t + \beta_i, \text{ siendo } \alpha_i > 0 \text{ y } \beta_i \in \mathbb{R}.$$

El orden que tienen inicialmente asignado las tareas refleja el derecho que tiene cada una de ellas de procesarse en un determinado intervalo de tiempo. Ahora bien, cada grupo de agentes, o coalición, puede reducir los costes si se reordenan adecuadamente entre ellos. Para precisar esta idea necesitamos definir algunos conceptos previos.

Si el orden de las tareas que van a ser procesadas en una máquina viene dado por $\sigma \in \Pi(N)$, denotaremos por:

- $t(\sigma, i)$ el tiempo de inicio de la tarea i , teniendo en cuenta que las tareas que le preceden según σ han finalizado,

$$t_{\sigma, i} = \sum_{j: \sigma(j) < \sigma(i)} p_j.$$

- $t(\sigma, S)$ el tiempo de finalización de las tareas que están en S ,

$$t(\sigma, S) = \sum_{k \in S: \sigma(k) \leq \sigma(u)} p_k$$

donde u es el último jugador en S siguiendo el orden dado por σ , i.e., $\sigma(u) \geq \sigma(k)$ para todo $k \in S$.

- $c_\sigma(S)$ el coste total de las tareas de S en el orden dado por σ ,

$$c_\sigma(S) = \sum_{i \in S} c_i(t(\sigma, \{i\})).$$

El valor $c_\sigma(S)$ se corresponde con la suma de todos los costes de las tareas que están en S . Con el criterio de coste lineal en el tiempo de finalización obtenemos que el coste asociado al orden $\sigma \in \Pi(N)$ es

$$c_\sigma(N) = \sum_{i \in N} (\alpha_i t(\sigma, \{i\}) + \beta_i).$$

Dos problemas pueden ser analizados en esta situación: el primero consiste en encontrar el orden que maximiza las ganancias y el segundo en distribuir las ganancias entre los agentes involucrados.

El índice de urgencia de una tarea $i \in N$ mide el coste de proceso de la tarea i por unidad de tiempo.

Definición 4.48 Sea (N, σ_0, p, c) una situación de secuenciación.

- Definimos el índice de urgencia de la tarea $i \in N$ como $u_i = \frac{\alpha_i}{p_i}$.
- Dos jugadores $i, j \in N$ son contiguos en el orden σ si o bien $\sigma(i) = \sigma(j) + 1$ o bien $\sigma(i) = \sigma(j) - 1$.

Smith (1956) resolvió el problema de maximizar las ganancias a través de los índices de urgencia. Describimos formalmente el resultado.

Proposición 4.49 Sea (N, σ_0, p, c) una situación de secuenciación. Entonces

$$\sum_{i \in N} \alpha_i (t(\sigma_0, \{i\}) - t(\hat{\sigma}, \{i\})) = \max_{\sigma \in \Pi(N)} \left\{ \sum_{i \in N} \alpha_i (t(\sigma_0, \{i\}) - t(\sigma, \{i\})) \right\}$$

si, y sólo si,

$$u_{\hat{\sigma}^{-1}(1)} \geq u_{\hat{\sigma}^{-1}(2)} \geq \dots \geq u_{\hat{\sigma}^{-1}(n)}.$$

De esta forma para obtener el orden óptimo $\hat{\sigma}$, debemos ordenar las tareas en orden no creciente de sus índices de urgencia.

Curiel et al. (1989) introducen la solución de igual ganancia entre jugadores contiguos. Es fácil comprobar que la ganancia, o pérdida, de intercambiar dos jugadores contiguos $i, j \in N$ tal que i precede a j en un orden dado se corresponde con $\alpha_j p_i - \alpha_i p_j$. Definimos, pues, los siguientes coeficientes

$$g_{ij} = \max\{\alpha_j p_i - \alpha_i p_j, 0\}, \text{ para } i, j \in N, i \neq j.$$

En función de estos valores, si $\hat{\sigma}$ es un orden óptimo de la situación de secuenciación (N, σ_0, p, c) se obtiene que

$$c_{\sigma_0}(N) - c_{\hat{\sigma}}(N) = \sum_{i, j \in N: \sigma_0(i) < \sigma_0(j)} g_{ij}.$$

Definición 4.50 La solución de igual ganancia entre jugadores contiguos, EGS ,⁵ es una aplicación que a cada situación de secuenciación (N, σ_0, p, c) le asigna el vector de $\mathbb{R}^n$, dado, para cada $i \in N$, por,⁶

$$EGS_i(N, \sigma_0, p, \alpha) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \text{Suc}(\sigma_0, i)} g_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \text{Pre}(\sigma_0, i)} g_{ki}.$$

Esta regla de asignación es independiente del orden óptimo elegido y asigna a cada jugador la mitad de las ganancias que se obtienen en todos los intercambios en los que interviene el jugador para la obtención del orden óptimo a partir del orden inicial.

Curiel et al. (1989) definen el juego de secuenciación asociado a una situación de secuenciación y para ello introducen los órdenes admisibles.

Definición 4.51 Un orden $\sigma \in \Pi(N)$ es admisible para S si satisface las siguientes condiciones:

1. $t(\sigma_0, i) = t_{\sigma, i}$ para todo $i \in N \setminus S$.
2. $\text{Pre}(\sigma_0, i) \cap (N \setminus S) = \text{Pre}(\sigma, i) \cap (N \setminus S)$ para todo $i \in S$.

La primera condición indica que el tiempo de inicio de cada tarea que no está en la coalición S es el mismo que en el orden inicial; mientras que la segunda condición no permite a los jugadores de S saltar sobre jugadores que no estén en S . Con ello se asegura que los agentes de $N \setminus S$ no salgan perjudicados cuando los de S se reordenan entre ellos. Al conjunto de órdenes admisibles de la coalición S lo denotaremos por $\sum_S$.

Definición 4.52 A cada situación de secuenciación (N, σ_0, p, c) se le puede asociar el correspondiente juego TU de secuenciación (N, v) donde, para cada $S \in 2^N$,

$$v(S) = \max_{\sigma \in \sum_S} \left\{ \sum_{i \in S} \alpha_i (t(\sigma_0, \{i\}) - t(\sigma, \{i\})) \right\}. \quad (4.1)$$

⁵En inglés, “Equal Gain Splitting”.

⁶Ya conocemos que $\text{Pre}(\sigma, i)$ es el conjunto de los predecesores del jugador i en el orden dado por la permutación σ . Al conjunto de los sucesores de i en el orden determinado por σ lo denotaremos por $\text{Suc}(\sigma, i)$.

La utilidad que puede conseguir una coalición se define como la máxima ganancia que pueden obtener los miembros de la coalición por medio de órdenes admisibles. La expresión (4.1) puede ser reescrita en términos de los coeficientes g_{ij} . Para ello definimos el concepto de coalición conexa.

Definición 4.53 Sean $S \subset N$ y $\sigma \in \Pi(N)$.

- La coalición S es conexa con respecto a σ si para todo $i, j \in S$ y $k \in N$ tal que $\sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j)$ se verifica que $k \in S$.
- La coalición conexa $S \subset T$ es una componente de T con respecto a σ si, para cada $i \in T \setminus S$, $S \cup \{i\}$ no es una coalición conexa con respecto a σ .

Las componentes de T con respecto a σ forman una partición de T , denotada T/σ . De esta forma, para cada coalición S conexa con respecto a σ ,

$$v(S) = \sum_{i,j \in S: \sigma(i) < \sigma(j)} g_{ij}$$

y, para cada coalición T no conexa con respecto a σ ,

$$v(T) = \sum_{S \in T/\sigma} v(S).$$

En Curiel et al. (1989) se prueba que los juegos de secuenciación son juegos convexos, por tanto, estos juegos son equilibrados. Además, Curiel et al. (1994) probaron que si (N, σ_0, p, c) es una situación de secuenciación donde la función de coste es aditiva y monótona no decreciente en el tiempo de finalización entonces la regla de asignación EGS se encuentra en el núcleo del juego de secuenciación asociado.

Definición 4.54 Sea Γ un árbol.⁷ Un juego (N, v) es Γ -aditivo en componentes si:

1. $v(i) = 0$ para cada $i \in N$.
2. (N, v) es superaditivo.
3. $v(S) = \sum_{T \in S/\Gamma} v(T)$.

⁷Un árbol es un grafo conectado sin ciclos. Se extiende la definición de S/σ a S/Γ considerando las componentes de S inducidas por el árbol Γ .

Es sencillo comprobar que los juegos de secuenciación son Γ -aditivos. Concretamente son σ -aditivos dado que el grafo es lineal y se corresponde con una permutación de los jugadores.

Los siguientes resultados, debidos a Potters y Reijnierse (1995), establecen relaciones entre algunos conceptos de solución en la clase de juegos Γ -aditivos en componentes.

Teorema 4.55 *Sea (N, v) un juego Γ -aditivo en componentes. Entonces*

$$a) \mathcal{M}(N, v) = C(N, v)$$

$$b) \mathcal{K}(N, v) = Nu(N, v)$$

Observación 4.56 *Si se añaden nuevas restricciones al problema, que modelen situaciones en las que los trabajos no pueden ser procesados en cualquier momento o bien deben ser procesados en intervalos fijos de tiempo (“ready times” o “due dates”), los juegos asociados dejan, en general, de ser convexos aunque siguen siendo equilibrados. Los desarrollos precisos de estas ideas pueden consultarse en Hamers et al. (1995) y Borm et al. (2002).*

Otras extensiones aparecen si se considera más de una máquina en la que se pueden procesar los trabajos. Véase, por ejemplo, Hamers et al. (1999).

Por último, citar que también han sido estudiadas situaciones de secuenciación en las que no existe un orden inicial de las tareas a procesar (Klijn y Sánchez-Rodríguez (2006)).

Ejemplo 4.57 *Terminamos la sección con unos sencillos ejemplos de juegos de secuenciación. Sean $N = \{1, 2, 3\}$, $p = (1, 2, 2)$ y $\alpha = (3, 2, 4)$. Los índices de urgencia de las tareas son $u_1 = 3$, $u_2 = 1$ y $u_3 = 2$. Así, ordenando estos índices de mayor a menor, obtenemos que el orden óptimo es $\hat{\sigma} = (1, 3, 2)$. Los coeficientes g_{ij} son*

$$\begin{array}{ll} g_{12} = 2 & g_{21} = 4 \\ g_{13} = 0 & g_{31} = 2 \\ g_{23} = 4 & g_{32} = 0 \end{array}$$

Finalmente, en la siguiente tabla, calculamos, para cada posible orden inicial σ_0 , el juego coalicional asociado a la situación de secuenciación y la solución de igual ganancia:

σ_0	<i>Juego</i>	<i>EGS</i>
<i>123</i>	[0 0 0 0 0 4 4]	$(0, 2, 2)$
<i>132</i>	[0 0 0 0 0 0 0]	$(0, 0, 0)$
<i>213</i>	[0 0 0 4 0 4 8]	$(2, 4, 2)$
<i>231</i>	[0 0 0 0 2 4 10]	$(3, 4, 3)$
<i>312</i>	[0 0 0 0 2 0 2]	$(1, 0, 1)$
<i>321</i>	[0 0 0 4 0 4 6]	$(3, 2, 1)$

El cálculo de la solución EGS es muy simple. Por ejemplo, para el orden 321, al jugador 2 le precede el 3 y le sigue el 1, de modo que:

$$EGS_2(N, \sigma_0, p, \alpha) = \frac{1}{2}g_{32} + \frac{1}{2}g_{21} = 2.$$

Capítulo 5

El paquete TUGlab

Conceptos clave: *Descripción de TUGlab. Ejemplos usando TUGlab. Prácticas con TUGlab. Ejercicios*

En los capítulos precedentes hemos presentado las funciones principales de TUGlab intercaladas en pequeños módulos con los correspondientes conceptos de la teoría de juegos cooperativos. Esos breves incisos muestran la forma más simple y sencilla de las funciones definidas en TUGlab, su sintaxis básica y sus aplicaciones inmediatas. Así, hemos visto que, para juegos de 3 y 4 jugadores, con TUGlab podemos: comprobar la monotonía, la convexidad y el carácter equilibrado de un juego; calcular conceptos de solución como el valor de Shapley, el nucleolo o el τ -valor; dibujar el conjunto de imputaciones, el conjunto de Weber y el núcleo de un juego; obtener los dividendos de Harsanyi; la extensión multilineal y la normalización de cualquier juego,...

El objetivo de este capítulo es doble. Por una parte, explicar con más detenimiento el funcionamiento de algunas órdenes de TUGlab para poder extraer el máximo partido de su definición, siendo especialmente importante entender el mecanismo interno de las órdenes de dibujo. Por otra, presentar algunos ejemplos de aplicaciones de TUGlab más avanzadas que las vistas en los capítulos previos combinando las funciones propias de TUGlab con las capacidades generales de MATLAB®.¹

Incluiremos una selección de juegos, listos para ser ejecutados en TUGlab, que cubren todos los aspectos de la teoría que pueden ser abordados con la

¹MATLAB® es una marca registrada de The MathWorks, Inc.

ayuda del programa. Concluimos el capítulo con una colección de ejercicios propuestos orientados a recapitular y repasar los contenidos desarrollados en el libro.

5.1. Descripción de TUGlab

TUGlab es una “toolbox” en MATLAB[®], esto es, un paquete o módulo de funciones que extienden las capacidades básicas de MATLAB[®], desarrollada por los autores de esta monografía, con más de 50 funciones para calcular y visualizar conceptos de teoría de juegos de 3 y 4 jugadores. En el CD que acompaña al libro se encuentra disponible el paquete TUGlab junto con una completa guía de usuario (en inglés y en formato pdf). El paquete incluye:

1. Los documentos principales (31 documentos con extensión `.m`) que definen funciones directamente relacionadas con la teoría de juegos.
2. Los documentos auxiliares (27 documentos con extensión `.m`) necesarios para los cálculos pero no directamente relacionados con la teoría de juegos.
3. Los documentos de datos (2 documentos con extensión `.mat`).
4. La guía de usuario en formato pdf y en inglés.
5. Varios documentos con ejemplos que ilustran cómo puede ser utilizado el paquete TUGlab, incluyendo animaciones y una biblioteca con juegos TU “clásicos”.

El paquete TUGlab se puede emplear con cualquier versión de MATLAB[®]: MATLAB 6 y MATLAB 7 en Unix, PC o Macintosh. Para instalarlo, basta con copiar el paquete completo en el disco duro del ordenador, eligiendo un directorio que pertenezca al camino de búsqueda de MATLAB[®]. El material íntegro también está disponible, en su versión más actual, en la página web

<http://eio.usc.es/pub/io/xogos>.

Esta página pertenece al grupo SaGaTh (Santiago Game Theory Group), el grupo de teoría de juegos del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Santiago de Compostela.

5.1.1. Las funciones principales de TUGlab

Escribimos, a continuación, la lista de los comandos principales definidos en TUGlab con una breve definición de los mismos.²

1. **additivegame** Comprueba si un juego TU es aditivo.
2. **admissiblegame** Comprueba si un juego TU es de compromiso admisible.
3. **balancedgame** Comprueba si un juego TU es equilibrado.
4. **belongtocore** Comprueba si un punto dado pertenece al núcleo de un juego TU.
5. **convexgame** Comprueba si un juego TU es convexo.
6. **corecenter** Calcula el core-center de un juego TU.
7. **corecoverset** Dibuja el core-cover de un juego TU.
8. **corecoververtices** Calcula los vértices del core-cover de un juego de 4 jugadores que sea de compromiso admisible.
9. **coreset** Dibuja el núcleo de un juego TU equilibrado.
10. **corevertices** Calcula los vértices del núcleo de un juego TU.
11. **dualgame** Devuelve el dual de un juego TU.
12. **essentialgame** Comprueba si un juego TU es esencial.
13. **exactgame** Comprueba si un juego TU es exacto.
14. **excesses** Calcula los excesos de una asignación.
15. **facesgames** Calcula los juegos de las caras de un juego TU.
16. **harsanyidividends** Calcula los dividendos de Harsanyi de un juego TU.
17. **harsanyiset** Dibuja el conjunto de Harsanyi de un juego TU.

²Recordamos al lector que MATLAB® distingue las letras mayúsculas y las minúsculas de modo que es fundamental para su correcto funcionamiento escribir los comandos con la combinación de mayúsculas y minúsculas adecuada, justamente, la que aparece en la lista.

18. **imputationset** Dibuja el conjunto de imputaciones de un juego TU.
19. **imputationvertices** Calcula los vértices del conjunto de imputaciones de un juego TU.
20. **MLExtension** Devuelve la extensión multilínea de un juego TU.
21. **monotonicgame** Comprueba si un juego TU es monótono.
22. **normalizedgame** Devuelve la 0 y la 0-1 normalización de un juego TU.
23. **nucleolus** Devuelve el nucleolo y el prenucleolo de un juego TU.
24. **Shapley** Calcula el valor de Shapley y los vectores de contribuciones marginales de un juego TU.
25. **superadditivegame** Comprueba si un juego TU es superaditivo.
26. **tauvalue** Calcula el tau-valor de un juego TU.
27. **totalbalancedgame** Comprueba si un juego TU es totalmente equilibrado.
28. **utopiapayoffs** Devuelve los pagos de utopía y los mínimos derechos de todos los jugadores de un juego TU.
29. **weberset** Dibuja el conjunto de Weber de un juego TU.
30. **webervertices** Calcula los vértices del conjunto de Weber.
31. **zeromonotonicgame** Comprueba si un juego TU es 0 monótono.

A continuación reproducimos la lista de las 27 funciones auxiliares de TUGlab. Todas estas funciones son propias de TUGlab a excepción de las 3 en letra cursiva, que forman parte de la “toolbox” de optimización y que sólo se utilizan para el cálculo del nucleolo.³

³Si la “Optimization toolbox” está instalada en el ordenador que ejecuta MATLAB®, recomendamos eliminar estos documentos del directorio de TUGlab.

CCimputation3.m	centroidgame3.m	<i>checkbounds.m</i>
checksegment.m	convexhullextremes.m	corecoverinfo.m
coreinfo.m	efficiency.m	facetsorder.m
gramschmidt.m	harsanyisetinfo.m	heronformula.m
hyperplane.m	imputation3plot.m	imputationset3white.m
<i>linprog.m</i>	<i>lipsol.m</i>	nucleolusaux.m
nucleolusimplex.m	nucleolusinfo.m	poligonorder.m
precision.m	repeatedrows.m	weber4aux.m
weberinfo.m	weberinfoExtra.m	weberverticesExtra.m

El paquete TUGlab se completa con dos documentos adicionales de datos: `intersecciones.mat` e `interseccionesCC.mat`. Recordamos al lector que en el CD que acompaña al libro se incluye un manual de ayuda del usuario (en inglés). En él se detallan pormenorizadamente todas las funciones de TUGlab proporcionando, para cada una de ellas, la siguiente información:

1. La sintaxis.
2. Una breve descripción de ayuda.
3. Las variables de entrada de la función (“inputs”).
4. Las variables de salida de la función (“outputs”).
5. Comentarios relativos a los conceptos de la teoría de juegos TU asociados a la función que se describe y cualquier información necesaria para comprender como actúa.
6. Un ejemplo ilustrativo.
7. Una lista de las funciones de TUGlab relacionadas.

A modo de ejemplo mostramos lo que dice la guía de usuario respecto del comando `ADDITIVEGAME`.⁴

⁴Esta es la misma información que se obtienen invocando la ayuda de MATLAB® con el comando `HELP ADDITIVEGAME`.

ADDITIVEGAME

[S,info]=additivegame(A)

ADDITIVEGAME Checks if a TU game is additive.

INPUT

For 3 players the characteristic function must be introduced with vector $A=[v1 \ v2 \ v3 \ v12 \ v13 \ v23 \ v123]$. For 4 players the characteristic function must be introduced with vector $A=[v1 \ v2 \ v3 \ v4 \ v12 \ v13 \ v14 \ v23 \ v24 \ v34 \ v123 \ v124 \ v134 \ v234 \ v1234]$.

OUTPUT

$S=additivegame(A)$ If the TU game given by vector A is additive S is 1, otherwise S is 0.

$[S,info]=additivegame(A)$ If the game is not additive, info provides an instance where additivity breaks down.

COMMENTS

A game is additive if $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$, for all disjoint coalitions $S, T \subset N$.

EXAMPLE

```
>> A=[0 0 0 2 2 2 4];
>> [aditivo,info]=additivegame(A)
aditivo = 0
info =
v13 <> v1+v3
```

See also SUPERADDITIVEGAME, CONVEXGAME.

Finalmente, el CD que se adjunta con el libro contiene ejemplos, simulaciones y material avanzado en los siguientes documentos:

1. **examples.m** (4Kb). Una colección de ejemplos de juegos TU de 3 y 4 jugadores.
2. **parametric3.m** (4Kb). Un ejemplo de un juego paramétrico de 3 jugadores.

dores: $A(p)=[0 \ 0 \ 0 \ p \ p \ p \ 1]$, con $p = 0, \dots, 2/3$. Dibuja los núcleos de 11 de estos juegos. Si $p \leq 1/2$ el juego $A(p)$ es convexo. Para $p > 1/2$ el juego $A(p)$ no es convexo y, por tanto, el núcleo y el conjunto de Weber no coinciden. Para uno de estos valores, concretamente $p = 8/15$, el programa superpone el dibujo del núcleo y el del conjunto de Weber para comprobar que, en efecto, el segundo contiene estrictamente al primero. A medida que el parámetro p se acerca al valor $2/3$, el núcleo se va reduciendo hasta colapsar en un punto.

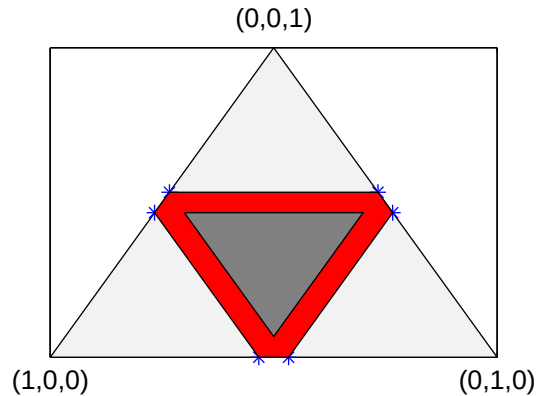


Figura 5.1: Núcleo y conjunto de Weber del juego $A(p)$ para $p = 8/15$

3. **parametric4.m** (4Kb). Un ejemplo de un juego paramétrico de 4 jugadores: $B(p)=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ c(p) \ c(p) \ c(p) \ c(p) \ c(p) \ c(p) \ p \ p \ p \ p \ 22]$, con $c(p) = \max\{0, p - 5\}$ y $p = 0, \dots, 14$. Dibuja los núcleos de 14 juegos de esta familia. Si $p \leq 10$ el juego $A(p)$ es convexo. Para $p > 10$ el juego $A(p)$ no es convexo y, por tanto, el núcleo y el conjunto de Weber no coinciden. Cuando $p = 12$, obtenemos el sorprendente ejemplo de Derks y Kuipers (2002): el núcleo de este juego tiene 24 puntos extremos y ninguno de ellos es un vector de contribuciones marginales (véase la Figura 5.18). Para este valor particular, se superponen en la misma figura el núcleo, el conjunto de Weber y los vectores de contribuciones marginales.
4. **moviesource.m** (4Kb) y **simulation.m** (4Kb). Un ejemplo para crear una película en MATLAB®. El documento **moviesource.m** crea los fotogramas de la película que se guardan en un documento denominado

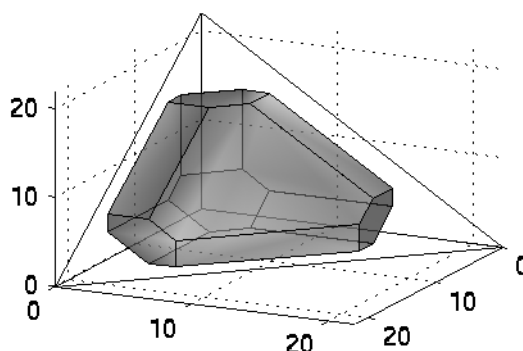


Figura 5.2: El núcleo del juego paramétrico $B(p)$ para $p = 10$

`simulation.mat`. Ahora, se puede ver la película completa ejecutando el programa `simulation.m`. Este ejemplo se estudia con detalle en la Sección 5.2.3.

En las secciones que siguen veremos otros ejemplos interesantes de juegos TU analizados con la ayuda de TUGlab. Estos ejemplos, junto con los materiales que vayamos desarrollando en el futuro, irán siendo incorporados a la página web del programa.

5.1.2. Representación gráfica con TUGlab

La representación gráfica del núcleo de los juegos de 3 y 4 jugadores es, sin duda, el elemento distintivo de TUGlab. En la Sección 1.4 hemos estudiado las propiedades generales del conjunto de imputaciones de los juegos de 3 y 4 jugadores. Para que el usuario saque el mayor partido posible de los comandos de dibujo es conveniente tener presente algunos datos acerca de como TUGlab representa el conjunto de imputaciones.

En el caso de juegos de 3 jugadores, se acostumbra a realizar una representación plana del conjunto de imputaciones, que es un triángulo equilátero contenido en el plano de eficiencia $x + y + z = v(N)$ en $\mathbb{R}^3$. Así, para el juego $A=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3]$ el conjunto de imputaciones “real” sería el triángulo de la izquierda en la Figura 5.3. De forma natural, se opta por proyectar ese triángulo en $\mathbb{R}^2$ para obtener un dibujo más manejable, el de la derecha en la Figura 5.3. A la hora de elegir la representación plana del conjunto de imputaciones en

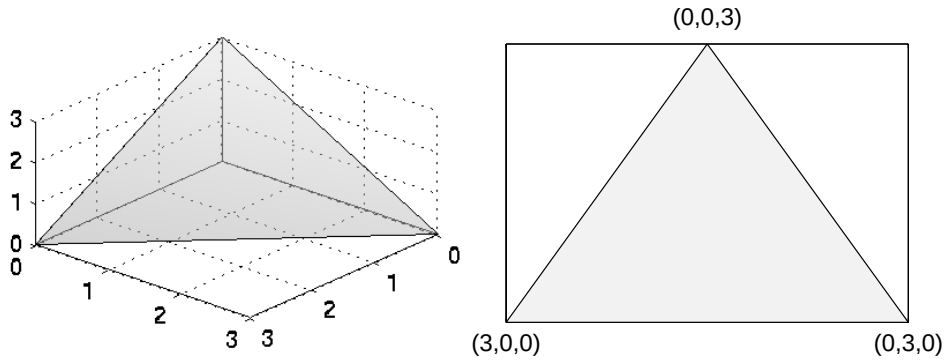


Figura 5.3: Conjunto de imputaciones para un juego de 3 jugadores

TUGlab hemos optado por proyectar el conjunto de imputaciones de un juego de 3 jugadores, el simplex en $\mathbb{R}^3$, en el triángulo equilátero en $\mathbb{R}^2$ definido por los vértices $(0,0)$, $(L,0)$ y $(\frac{L}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}L)$, con $L = v(N) - (v(1) + \dots + v(n))$. Esta proyección es una isometría del hiperplano de eficiencia en $\mathbb{R}^2$. De este modo, para dibujar una asignación en nuestro triángulo tendremos que transformar las coordenadas “reales” en las coordenadas “planas” a través de la matriz de la proyección (que se puede obtener con la orden CCIMPUTATION3). Si queremos dibujar una imputación en la representación plana utilizaremos la orden `imputation3plot(A,punto)` que, en el triángulo definido por el juego A, dibuja la asignación con coordenadas “reales” `punto=[x1 x2 x3]`. Así, por ejemplo, la secuencia de comandos

```
>> A =[ 0 0 0 2 5 5 10];
>> clf
>> imputationset(A)
>> hold on, axis(axis)
>> Sh=Shapley(A);
>> punto=[1 7 2];
>> imputation3plot(A,punto,'*b')
>> imputation3plot(A,Sh,'<r')
```

nos permite dibujar el triángulo de imputaciones determinado por el juego A y sobre él, dibujar la imputación $(1,7,2)$ en azul y marcada con un asterisco (traducción del código de colores y marcas '`*b`') y el valor de Shapley del juego en rojo y marcado con un triángulo ('`<r`'). El resultado puede verse en la Figura 5.4.

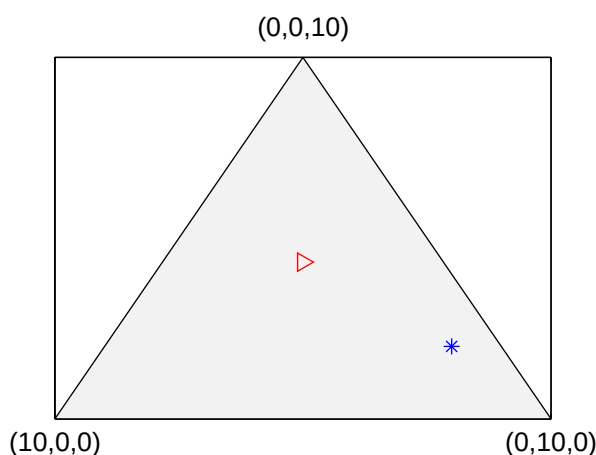


Figura 5.4: Asignaciones en el triángulo de imputaciones

Hasta donde conocemos, las representaciones gráficas para juegos de 4 jugadores son poco frecuentes en la literatura. Tal vez por ello, y a diferencia del caso de 3 jugadores, no existe un modo típico, ampliamente aceptado, de presentar en $\mathbb{R}^3$ el tetraedro de imputaciones contenido en $\mathbb{R}^4$. En TUGlab hemos optado por el camino más sencillo a la hora de programar: eliminar la cuarta componente, esto es, proyectar en XYZ . Ciertamente, de este modo, obtenemos dibujos deformados:⁵ nuestra proyección no preserva las distancias. No obstante, creemos que ese inconveniente se ve compensado no sólo por el menor coste de programación sino por el hecho de que, en nuestra representación tridimensional, las coordenadas de los puntos dibujados son las “reales”.

Consecuentemente, para dibujar una imputación con 4 coordenadas usaremos directamente la orden PLOT3 de MATLAB®, o sea, nos olvidamos de la cuarta coordenada. La siguiente secuencia de comandos muestra como dibujar los vértices del conjunto de Weber del juego dado por el vector A .

```
>> A=[0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 3];
>> clf
>> imputationset(A)
>> hold on, axis(axis)
```

⁵En realidad, existe una segunda fuente de deformación del dibujo debida a la forma que, por defecto, utiliza MATLAB® para elegir las escalas en los ejes: una circunferencia parece una elipse. Este efecto puede corregirse eligiendo la opción `AXIS EQUAL` (ejes iguales).

```
>> W=webervertices(A);
>> plot3(W(:,1)',W(:,2)',W(:,3)', '*b')
>> weberset(A)
```

El resultado de estas órdenes de dibujo puede verse en la Figura 5.5.

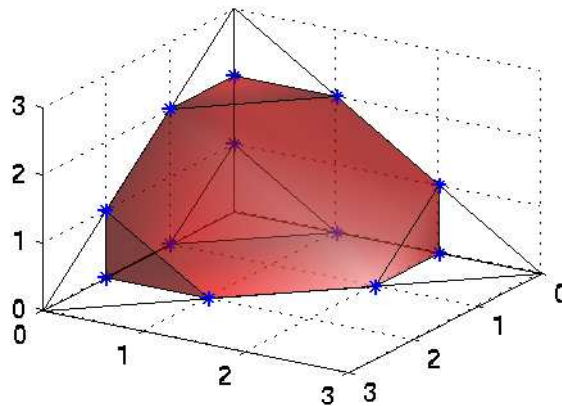


Figura 5.5: Asignaciones en el tetraedro de imputaciones

Recomendamos al usuario que, como norma general no exenta de excepciones, tanto para juegos de 3 como de 4 jugadores, utilice el conjunto de imputaciones como referencia para las demás representaciones. Es decir, sugerimos que todos los dibujos se superpongan sobre el conjunto de imputaciones conservando la escala y los límites impuestos por éste. Esta doble tarea, superposición y fijación de la escala, se consigue con los comandos `HOLD ON` y `AXIS(AXIS)`, respectivamente.

5.2. Ejemplos avanzados usando TUGlab

Ilustraremos con varios ejemplos cómo la plataforma TUGlab puede usarse para explorar los aspectos geométricos que subyacen detrás de algunos conceptos de la teoría de juegos cooperativos. Combinando las órdenes genéricas de MATLAB® con las específicas de TUGlab es posible diseñar ejemplos elaborados, simulaciones, representaciones gráficas complejas, etc. que profundicen en partes concretas de la teoría. Estos ejemplos podrían servir como punto de par-

tida para la preparación de prácticas de laboratorio en cursos de introducción a la teoría de juegos cooperativos.

5.2.1. Convexidad

Sabemos que un juego TU es convexo si, y sólo si, los vectores de contribuciones marginales pertenecen al núcleo. Consideremos los juegos dados por

$$A = [0, 0, 0, 0.2, 0.2, 0.2, 1]$$

$$B = [0, 0, 0, 0.55, 0.55, 0.55, 1].$$

De los dos juegos, tan sólo A es convexo. Representando los correspondientes núcleos, véase la Figura 5.6, parece intuirse que un juego de 3 jugadores es convexo si su núcleo “toca” las tres caras del conjunto de imputaciones. ¿Es correcta esta interpretación para juegos de 3 jugadores? Desde luego, la

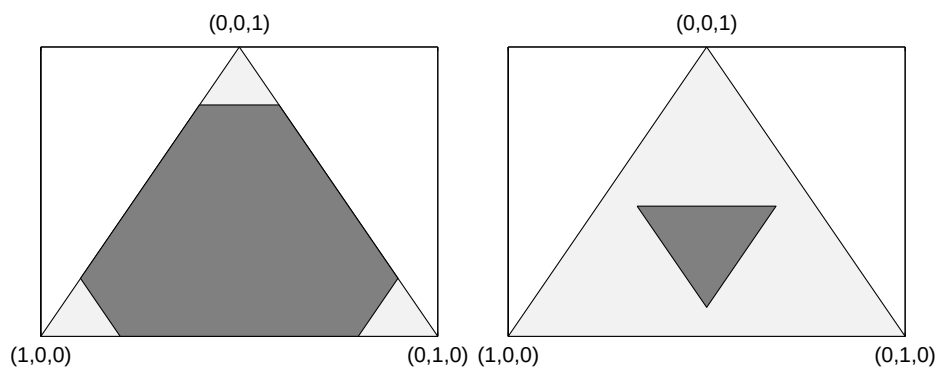


Figura 5.6: Núcleos de los juegos A y B

propiedad no es cierta para juegos de 4 jugadores, tal y como se deduce del análisis de los juegos

$$C = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 6, 5, 5, 5, 10]$$

$$D = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6, 5, 5, 5, 10].$$

Observemos que ambos juegos tienen el mismo conjunto de imputaciones y el mismo núcleo, véase la gráfica de la izquierda en la Figura 5.7. Todos los puntos extremos del núcleo pertenecen a las caras del tetraedro de imputaciones. Sin

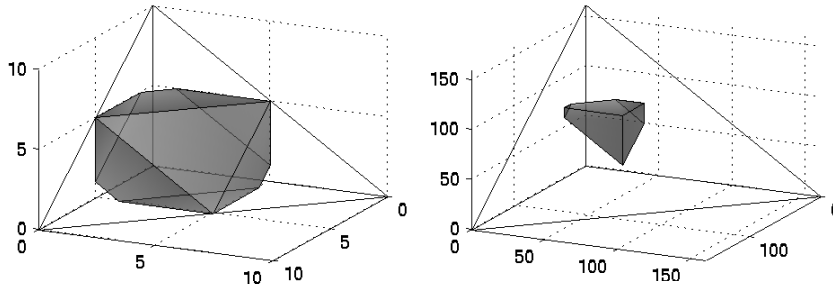


Figura 5.7: Núcleo de los juegos C y D y núcleo del juego E

embargo, el juego C es convexo y el D no lo es. Ahora bien, si el núcleo tiene un vértice que es un punto interior del conjunto de imputaciones entonces el juego no es convexo, como ocurre, por ejemplo, con el juego

$$E = [0, 0, 0, 0, 10, 40, 30, 60, 10, 20, 90, 90, 120, 130, 160].$$

Estos ejemplos sirven también para ilustrar que, en general, la información contenida en el conjunto de imputaciones y en el núcleo, su estructura convexa, no es suficiente para reconstruir la función característica, ni tan siquiera para determinar si el núcleo dado proviene de un juego convexo. Esta propiedad está relacionada con la exactitud de un juego, véase la Definición 2.15.

5.2.2. Los extremos del conjunto de Weber

El conjunto de Weber es un politopo definido como la envoltura convexa del conjunto finito de vectores de contribuciones marginales. Este conjunto de generadores del politopo podría no ser minimal, es decir, no todos los vectores de contribuciones marginales tienen que ser vértices del conjunto de Weber. Presentamos un par de juegos en los que se da esta situación:

$$A = [0, 0, 0, 10, 4, 4, 10]$$

$$B = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 0, 2, 3, 2, 3, 4].$$

Los conjuntos de Weber de los juegos A y B se muestran en la Figura 5.8. Utilizando el comando WEBERVERTICES podemos saber cuáles de los vectores de contribuciones marginales son extremos. Así, por ejemplo, para el juego A, los vértices son: $(6, 0, 4)$, $(10, 0, 0)$, $(0, 10, 0)$ y $(0, 6, 4)$ mientras que

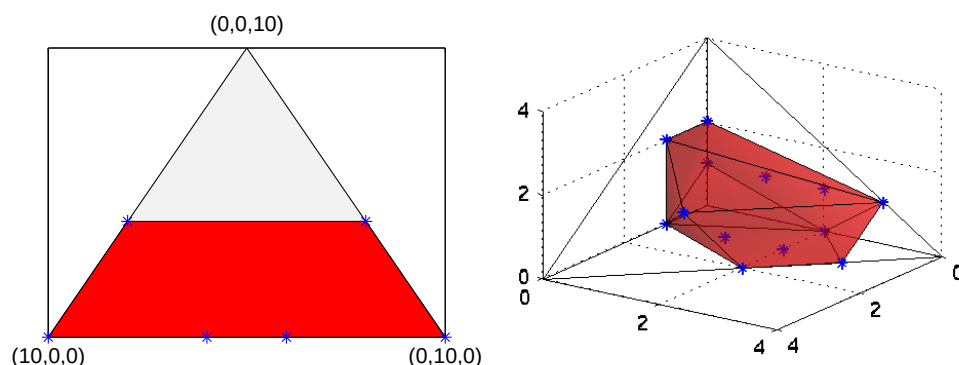


Figura 5.8: Vectores marginales que no son vértices del conjunto de Weber

$(6, 4, 0)$ y $(4, 6, 0)$ no son extremos del poliedro de Weber. Es frecuente escuchar, e incluso leer, que el valor de Shapley es el baricentro del conjunto de Weber. Sin duda, se trata de un abuso del lenguaje del que es consciente quien hace la aseveración, pero que puede inducir a error al oyente o lector. Siendo formales, y los ejemplos anteriores son claros, esta afirmación es falsa. Así, en el Ejemplo 3.11, vimos que el baricentro de los vértices del conjunto de Weber no es, en general, continuo, mientras que el valor de Shapley lo es. Incidimos en estos aspectos diferenciadores entre valores en el siguiente apartado.

5.2.3. Comparación de valores

TUGlab incluye algunas órdenes especializadas que pueden ser utilizadas para trabajos de investigación. Por ejemplo, el paquete incluye el cálculo del core-center de un juego equilibrado, que se define como el centroide, o centro de gravedad, del núcleo. Este concepto ha sido introducido en González-Díaz y Sánchez-Rodríguez (2007) y puede interpretarse como la media de la distribución uniforme definida sobre el núcleo.

Es bien conocido que el valor de Shapley se corresponde con el centro de masas de un sistema finito de $n!$ partículas de igual masa situadas en las posiciones determinadas por los vectores de contribuciones marginales. El core-center es el centro de masas del politopo núcleo suponiendo que la masa está uniformemente distribuida sobre todo el núcleo. Estos dos valores tienen comportamientos muy distintos.

Utilizando TUGlab se puede hacer una animación del siguiente juego pa-

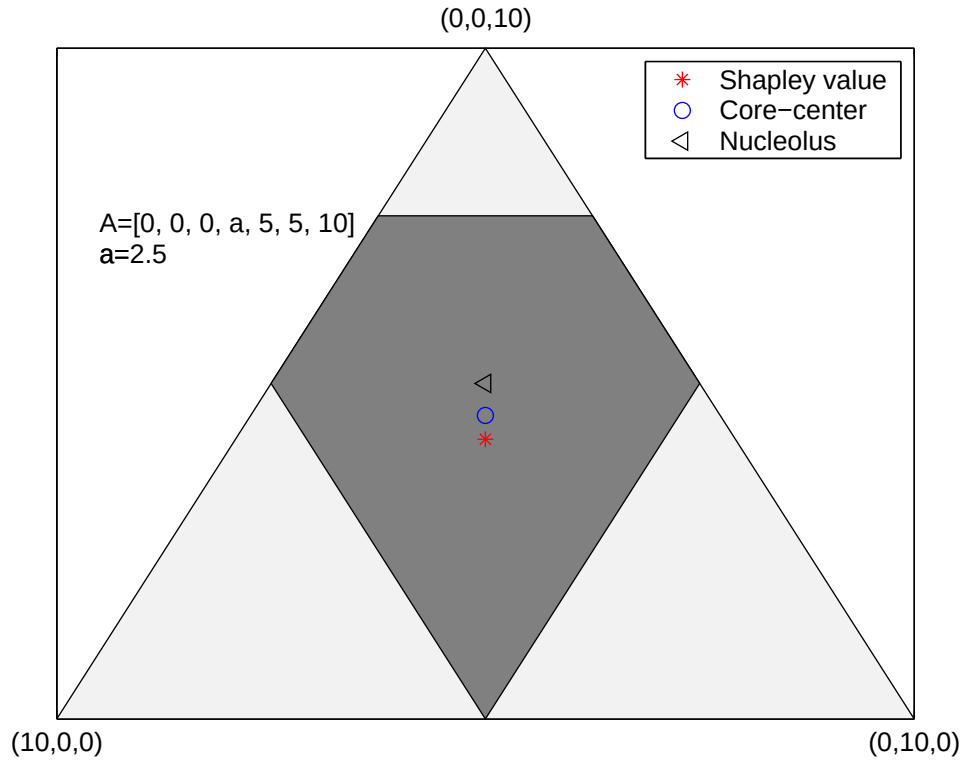


Figura 5.9: Comparación de valores para el juego paramétrico A , con $a = 2.5$

ramétrico $A = [0, 0, 0, a, 5, 5, 10]$, $a \in [0, 10]$, y comparar el valor de Shapley, el core-center y el nucleolo. La simulación completa se encuentra en el material adicional suministrado en el CD, concretamente en los documentos `moviesource.m` (4Kb) y `simulation.m` (4Kb). En la Sección 5.1 explicamos cómo ejecutar estos documentos para ver correctamente la simulación. Aquí, brevemente, resumimos lo que ocurre. El juego A es convexo en el rango $[0, 5]$. El nucleolo, Nu , el core-center, μ , y el valor de Shapley, Sh , coinciden para $a = 0$. El nucleolo toma el valor constante $Nu = (2.5, 2.5, 5)$, para todos los valores de $a \in [0, 2.5]$ mientras que, μ y Sh varían. En la Figura 5.9 vemos el fotograma correspondiente al valor $a = 2.5$.

Los tres valores convergen a $(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3})$ cuando el parámetro a va de 2.5 a 5. El juego no es convexo en el rango $[5, 10]$, el núcleo es un triángulo que colapsa en el punto $(5, 5, 0)$ cuando a tiende a 10, así μ y Nu coinciden y convergen

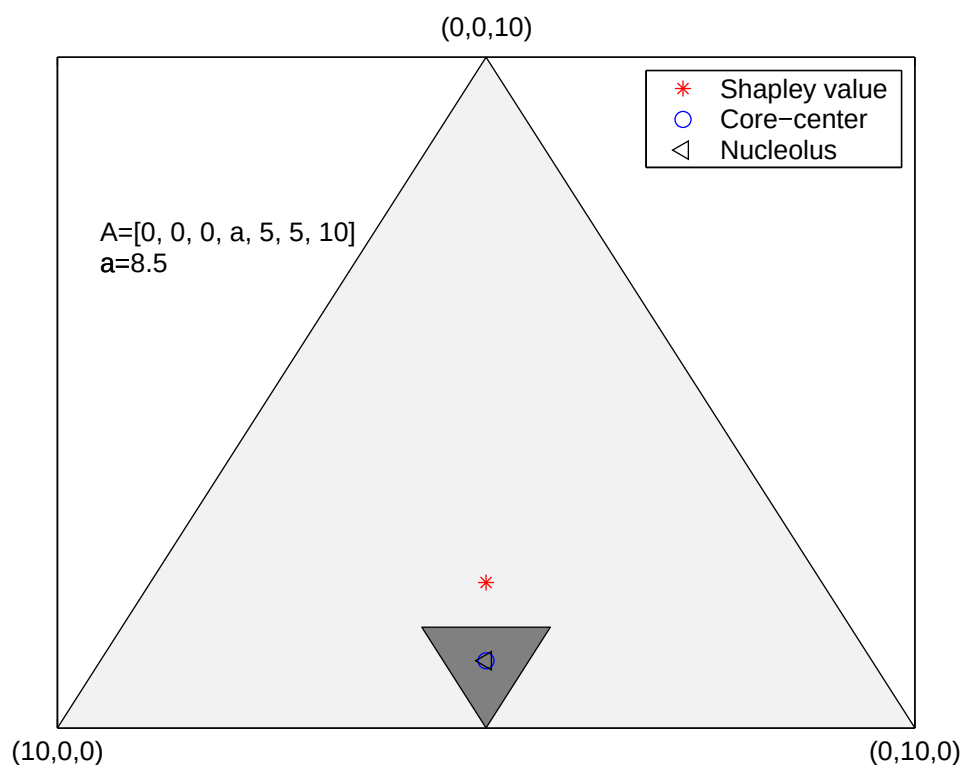


Figura 5.10: Comparación de valores para el juego paramétrico A , con $a = 8.5$

a ese punto. Pero, el conjunto de Weber aumenta de tamaño y, por tanto, Sh se separa de los otros dos valores. En la Figura 5.10 se recoge el fotograma correspondiente al valor del parámetro $a = 8.5$. La película completa, así como el código en MATLAB[®] que la genera, forma parte del material incluido en el CD que acompaña al libro.

La siguiente tabla presenta los valores obtenidos con las órdenes NUCLEOLUS, CORECENTER y SHAPLEY de TUGlab, para algunas elecciones del parámetro a .

a	Nu	μ	Sh
0	(2.5,2.5,5)	(2.5,2.5,5)	(2.5,2.5,5)
1	(2.5,2.5,5)	(2.5442,2.5442,4.9116)	(2.6667,2.6667,4.6667)
2.5	(2.5,2.5,5)	(2.7381,2.7381,4.5238)	(2.9167,2.9167,4.1667)
4	(3,3,4)	(3.0490,3.0490,3.9020)	(3.1667,3.1667,3.6667)

a	Nu	μ	Sh
5	(3.3333,3.3333,3.3333)	(3.3333,3.3333,3.3333)	(3.3333,3.3333,3.3333)
7	(4,4,2)	(4,4,4)	(3.6667,3.6667,2.6667)
10	(5,5,0)	(5,5,0)	(4.1667,4.1667,1.6667)

5.2.4. Juegos paramétricos

El paquete TUGlab ofrece grandes posibilidades para el estudio de familias paramétricas de juegos. El ejemplo del epígrafe anterior es una buena muestra. También, en la Sección 5.1.1 describíamos dos documentos, que se incluyen en el material informático que acompaña al libro, en los que se estudiaban un juego paramétrico de 3 jugadores (`simulation3.m`) y otro de 4 jugadores (`simulation4.m`).

Nos ocuparemos aquí de otro juego paramétrico de 3 jugadores, concretamente el determinado por $A(p)=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ p]$, cuando el parámetro p varía entre 1 y 5. El lector habrá observado que se trata de una familia de juegos en la que tan sólo variamos el valor de la gran coalición y que para $p = 1$ tenemos el juego de los guantes. Hemos dibujado con TUGlab los núcleos de 7 juegos de la familia junto con el nucleolo y el core-center de cada uno de ellos. Dado que los conjuntos de imputaciones de estos juegos están contenidos en planos paralelos en $\mathbb{R}^3$, presentamos en la Figura 5.11 todos los correspondientes triángulos, con los núcleos (en amarillo) y las trayectorias seguidas por el core-center (en azul) y el nucleolo (en rojo).

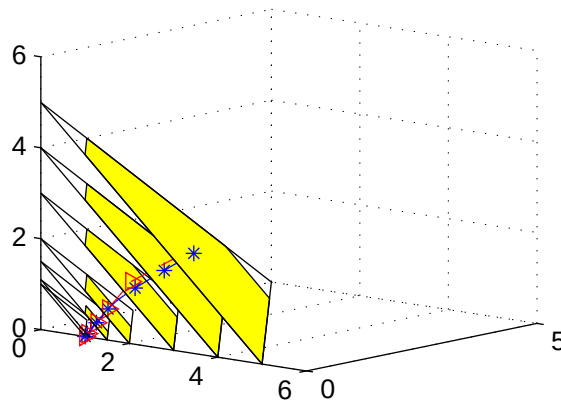


Figura 5.11: Los núcleos de la familia paramétrica de juegos de los guantes

En la Figura 5.12 se aíslan estas trayectorias. Hasta un cierto valor del parámetro, $p = 2$, los dos valores calculados coinciden, para seguir trayectorias divergentes para valores de $p > 2$. Animamos al lector a que interprete estos resultados pensando en la familia paramétrica como una variante del juego de los guantes.

Este ejemplo pone de manifiesto que tanto el nucleolo como el core-center son funciones continuas del parámetro p . Claramente la trayectoria del nucleolo no es derivable, propiedad que parece tener el core-center. ¿Es ésta una propiedad general del core-center de una familia uniparamétrica de juegos equilibrados?

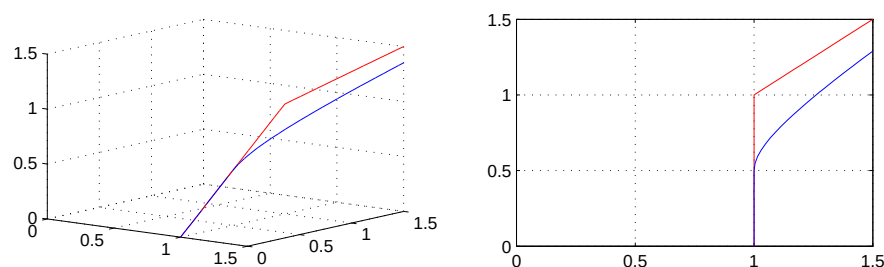


Figura 5.12: Trayectorias del core-center y el nucleolo para la familia paramétrica de juegos de los guantes

5.2.5. El conjunto de Harsanyi

Con TUGlab se puede dibujar el conjunto de Harsanyi de un juego, también llamado “selectope”. El conjunto de Harsanyi está formado por todos los posibles repartos de los dividendos de Harsanyi de todas las coaliciones entre sus miembros. El conjunto de Harsanyi está relacionado con el núcleo y con el conjunto de Weber como muestra el siguiente ejemplo. El juego $A = [1, 1, 2, 1, 2, 4, 10]$, véase la Figura 5.13, no es superaditivo, el conjunto de Weber (rojo) no está contenido en el conjunto de imputaciones, pero contiene al núcleo (gris) y está contenido en el conjunto de Harsanyi (azul).

El conjunto de Harsanyi contiene al conjunto de Weber y tiene estructura tipo núcleo, de hecho es el núcleo del juego mingame asociado. Para ver un ejemplo del código en MATLAB® que permite generar un gráfico como el de la Figura 5.13 remitimos al lector al Ejercicio 13 de la Sección 5.3.1.

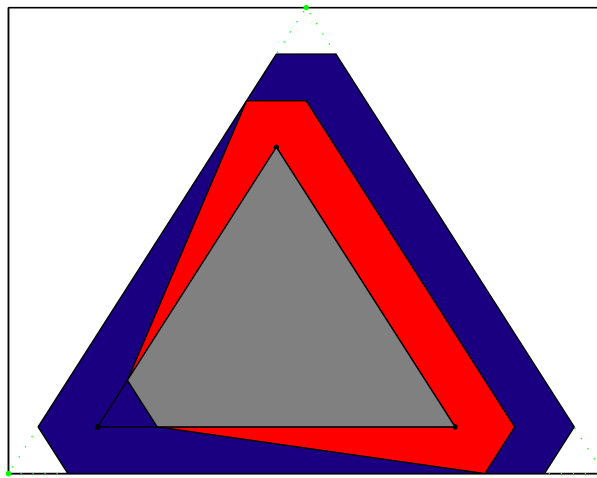


Figura 5.13: El conjunto de Harsanyi, el núcleo y el conjunto de Weber

5.2.6. La extensión multilinear

El valor de Shapley de un juego puede obtenerse a través de la extensión multilinear. Con ayuda de las órdenes de TUGlab, y empleando los recursos básicos de cálculo simbólico de MATLAB®, recordamos este procedimiento.

Consideremos el juego $A=[0, 0, 0, 2, 5, 5, 10]$. Por una parte, podemos calcular directamente el valor de Shapley, a partir de los vectores de contribuciones marginales, con la orden:

```
>> format rat
>> Sh=Shapley(A)
Sh = [17/6 , 17/6 , 13/3]
```

Alternativamente, para calcular el valor de Shapley podemos proceder del siguiente modo. Primero obtenemos la extensión multilinear del juego A ,

```
>> [MLE,P]=MLExtension(A)
P = 2*x*y-2*x*y*z+5*x*z+5*y*z
```

Para poder realizar los cálculos con las variables x , y y z debemos declararlas como variables simbólicas en MATLAB®.

```
>> syms x y z
```

Ahora, calculamos la matriz jacobiana de la función $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, la extensión multilinear.

```
>> DP=jacobian(P,[x y z])
DP = [ 2*y-2*y*z+5*z, 2*x-2*x*z+5*z, -2*x*y+5*x+5*y]
```

A continuación, evaluamos todas las derivadas parciales de P a lo largo de la diagonal del cuadrado, esto es, en los puntos de la forma (r, r, r) .

```
>> DPenr=subs(DP,[x y z],[r r r])
DPenr= [7*r-2*r^2 , 7*r-2*r^2 , -2*r^2+10*r]
```

Finalmente, hacemos la integral definida entre 0 y 1.

```
>> valor=int(DPenr,r,0,1)
valor = [17/6 , 17/6 , 13/3]
```

Como podemos comprobar, el valor obtenido coincide con el valor de Shapley calculado anteriormente.

5.2.7. Un experimento

Martin Shubik en un interesante artículo titulado “Some simple games for teaching and research” conjetura que si el núcleo de un juego es “grande” entonces es más probable que unos jugadores eventuales del juego seleccionen un reparto en su interior. Para sustentar esta opinión, propone tres juegos: uno con núcleo grande, otro con núcleo degenerado en un punto y otro con núcleo vacío. Durante el período 1961 a 1994, M. Shubik planteó estos juegos a estudiantes de la Universidad de Yale, de distintos niveles. Su objetivo fundamental era comprobar si las soluciones normativas eran elegidas en casos prácticos por personas sin conocimientos de teoría de juegos. El porcentaje de asignaciones en el núcleo, obtenido por M. Shubik, fue superior al 86 % para el juego con núcleo grande; y para el juego con núcleo unitario fue muchísimo menor, por debajo del 26 %.

Hemos replicado el experimento, utilizando el juego de núcleo grande, con alumnos de la diplomatura de Relaciones Laborales de la Universidad de Vigo en los cursos 2005-2006 y 2006-2007. Es importante mencionar que estos alumnos no disponen de conocimientos de teoría de juegos y que, en general, su bagaje matemático es escaso. El enunciado concreto del problema que les planteamos es el siguiente:

Tres individuos A , B y C pueden ganar 400 euros si se coordinan y realizan un trabajo juntos. Si A y B cooperan prescindiendo de C ganarán 100 euros; A y C juntos obtendrían 200 euros; mientras que si fuesen B y C quienes colaborasen se garantizarán 300 euros. Un individuo solo no ganaría nada. La información se resume en la siguiente tabla:

Coaliciones	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
Ganancia	0	0	0	100	200	300	400

Los tres individuos resuelven cooperar para ganar los 400 euros, pero no se ponen de acuerdo en la manera de repartirlos entre ellos. Por eso deciden recurrir a ti: un juez imparcial, un árbitro. Escribe tu propuesta de reparto dando tres números, (R_A, R_B, R_C) , que representarían las asignaciones a los individuos A , B y C , respectivamente. No olvides que

$$R_A + R_B + R_C = 400.$$

Explica brevemente tus razones para elegir ese reparto.

En nuestro juego el núcleo es un trapezoide. La razón de su tamaño con respecto al del simplex es $3/16$; si la elección fuera al azar éste sería, pues, el porcentaje de asignaciones en el núcleo que cabría esperar: el 18.75 %.

Los resultados del experimento en el curso 2005-2006 fueron los siguientes:

- 28 asignaciones pertenecían al núcleo.
- 19 asignaciones estaban fuera del núcleo pero dentro de imputaciones; de ellas 8 coincidieron con la solución igualitaria.
- 2 asignaciones que ni siquiera eran eficientes; razonaban que el árbitro, por el mero hecho de decidir el reparto, tenía que quedarse con una parte (gente práctica y realista).

Los resultados del curso 2006-2007 se presentan, con la ayuda de TUGlab, en la Figura 5.14. Vemos el núcleo del juego en gris. Las asignaciones de los alumnos son los puntos azules, con las frecuencias con que fueron elegidas. Hemos destacado el valor de Shapley, en rojo, que no fue seleccionado por nadie, y la solución igualitaria, en verde, que, pese a no ser estable, fue elegida por 12 alumnos.

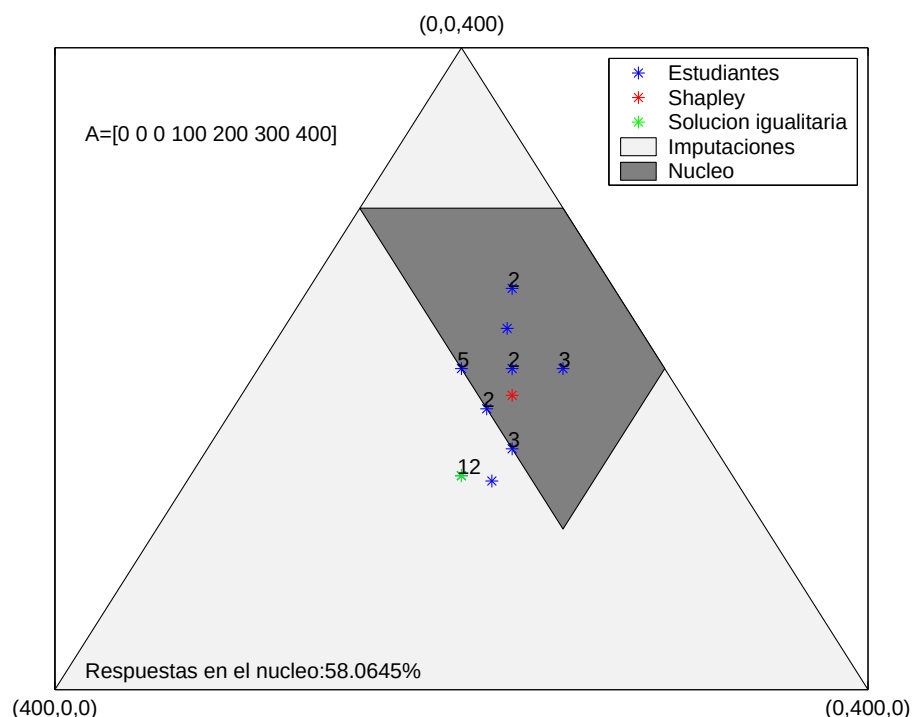


Figura 5.14: Resultados del experimento en el curso 2006-2007

Quisiéramos finalizar con unas breves reflexiones. Comparando nuestros resultados con los obtenidos por M. Shubik parece que un mayor nivel matemático de los participantes implica un mayor porcentaje de selecciones en el núcleo. Por otra parte, es evidente que la solución igualitaria tiene un elevado predicamento como reparto “justo” entre la gente. Coincidimos con M. Shubik en que este tipo de experimentos obligan a una interesante reflexión acerca de los presupuestos en que se fundamentan las soluciones normativas.

5.3. Ejemplos y ejercicios con TUGlab

Esta sección es una colección de juegos y de ejercicios que esperamos sirvan, por una parte, como una referencia rápida para el lector y, por otra, como una forma amena de adiestrarse en el manejo de TUGlab. En la lista, con los juegos de 3 y 4 jugadores separados, el lector encontrará ejemplos diversos de juegos

con una breve descripción de cierta peculiaridad que los identifica. Algunos van acompañados con unas pocas líneas de código que pretenden servir de guía de cómo combinar TUGlab con los comandos propios de MATLAB®.

5.3.1. Juegos de 3 jugadores

La mayor parte de los juegos de la selección que ahora presentamos están recogidos en el documento `ejemplos.m` incluido en el CD que acompaña al libro.

1. El juego denominado “The cattle drive”, Shapley (1987). Véase el Ejemplo 1.17.

```
>> A=[0 0 0 1 1 0 1]
```

2. El juego de ahorros correspondiente al juego de la depuradora descrito en la Sección 1.1. Representa el núcleo y las soluciones puntuales propuestas en dicho ejemplo: el nucleolo, el core-center, el valor de Shapley y el τ -valor.

```
>> A=[0 0 0 2000 0 1000 2500]
```

3. Un juego que no es superaditivo, ni esencial ni monótono.

```
>> A=[ 1 2 3 0 0 0 5]
```

4. Un juego esencial y simétrico.

```
>> A=[0 0 0 2 2 2 10]
```

5. Un par de juegos aditivos y, por tanto, degenerados. El conjunto de imputaciones es un punto.

```
>> A1=[0 0 0 0 0 0 0]
```

```
>> A2=[1 1 1 2 2 2 3]
```

6. Un juego monótono que no es 0-monótono, no admite 0-1 normalización. El juego es esencial y degenerado aunque no es aditivo.


```
>> A=[1 0 0 1 1 1 1]
```

7. Un juego que es 0-monótono pero no es monótono.

```
>> A=[-1 -1 -1 0 0 0 -1]
```

8. Considera el juego $A=[0\ 0\ 0\ 2\ 5\ 5\ 10]$ ¿Es superaditivo? ¿Es aditivo? ¿Es convexo? ¿Es equilibrado? Obtén la normalización 0-1.

9. ¿Es el juego $B=[0\ 0\ 0\ 8\ 8\ 8\ 10]$ equilibrado? ¿Por qué?

```
>> A=[0 0 0 2 5 5 10]
>> balancedgame(A)
>> B=[0 0 0 8 8 8 10]
>> [b,info]=balancedgame(B)
```

Representamos el núcleo del juego A.

```
>> clf
>> imputationset(A)
>> hold on, axis(axis)
>> coreset(A)
```

Obtenemos los puntos extremos del núcleo. ¿Coincide el núcleo con el conjunto de Weber? ¿Qué se puede concluir?

```
>> corevertices(A)
>> [vertices,WC]=corevertices(A)
```

10. Repite el ejercicio anterior para el juego $C=[0\ 0\ 0\ 6\ 5\ 5\ 10]$. Representa el núcleo y el conjunto de Weber en el mismo gráfico (primero representa el conjunto mayor, es decir el conjunto de Weber). Dibuja el núcleo del juego C y el núcleo de su 0-1 normalización. ¿Qué se puede deducir?

11. Obtén la H-representación del núcleo de los juegos A y C de los ejercicios 8 y 10 utilizando la orden COREINFO.

```
>> [a,b,c,d,e,f,g]=coreinfo(A)
```

12. Un ejemplo de un juego con núcleo “perfecto”, véase Shapley (1971). Las caras paralelas del núcleo equidistan entre sí. La circunferencia inscrita en el triángulo es tangente a los 6 lados del núcleo. Véase la Figura 5.15. Calcula las distintas soluciones puntuales de este juego.

```
>> n=3;s=[1 1 1 2 2 2 3];
>> A=s-sqrt(s.*(n-s)/(n-1))
```

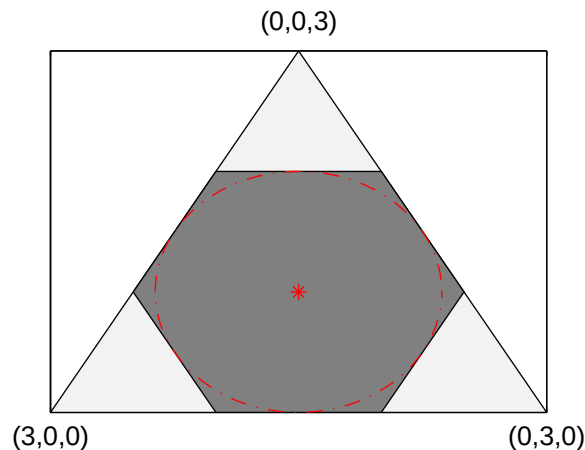


Figura 5.15: El núcleo del juego “perfecto” de 3 jugadores

13. Obtén para el juego $A=[0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 5 \ 5 \ 10]$: los dividendos de Harsanyi, la descomposición en los juegos de unanimidad, la parte positiva y la parte negativa, el mingame, el maxgame y el conjunto de Harsanyi.

Representa el conjunto de Harsanyi y el núcleo del juego A en el mismo gráfico (véase la Sección 5.13).

```
>> A=[0 0 0 2 5 5 10]
>> [HD,una,Aplus,Aminus]=harsanyidividends(A)
>> [mingame maxgame]=harsanyisetinfo(A)
>> V=corevertices(mingame)
```

Para dibujar escogemos la mayor ventana, la correspondiente al conjunto de imputaciones del juego mingame. Pero dibujaremos en el triángulo de imputaciones de A .

```

% los vertices de imputaciones del mingame.
>> vertices=imputationvertices(mingame);
% coordenadas en el triangulo determinado por el juego A.
>> [M,minvert]=CCimputation3(A,vertices);
>> ventana=[min(minvert) max(minvert)];
% coordenadas maximas y minimas
% para fijar la ventana de dibujo.
>> ejes=[ventana(1) ventana(3) ventana(2) ventana(4)]
>> clf
% repetimos el primer punto para cerrar la poligonal.
>> minvert(end+1,:)=minvert(1,:);
% pintamos imputaciones del mingame
% en el sistema de referencia determinado por el juego A.
>> plot(minvert(:,1)',minvert(:,2)',':.g')
>> axis(ejes),hold on
>> harsanyiset(A)
>> weberset(A)
%el conjunto de imputaciones de A sin color.
>> imputationset3white(A)
>> coreset(A)

```

14. Un juego con núcleo unitario interior al conjunto de imputaciones.

```
>> A=[0 0 0 2000 2000 1000 2500]
```

15. Algunos juegos que no son equilibrados.

```
>> A1=[0 0 0 2000 2250 1000 2500]
>> A2=[0 0 1 2 1 1 2]
```

16. Un par de juegos equilibrados.

```
>> A1=[0 0 0 1000 1000 0 1000]
>> A2=[5 6 4 12 15 12 25]
```

17. Un juego cuyo núcleo está estrictamente contenido en el conjunto de Weber.

```
>> A=[0 0 0 4 7 15 20]
```

18. Un juego no superaditivo cuyo núcleo es un único punto. De hecho, el conjunto de imputaciones es unitario.

```
>> A=[1 2 3 2 4 5 6]
```

19. Un ejemplo idóneo para dibujar el núcleo del juego, el de su 0-normalización y el de su 0-1 normalización.

```
>> A=[1 1 2 1 4 4 7]
```

20. Ejemplo de un juego financiero de depósitos bancarios, véase Rafels i Pallarola et al. (1999).

```
>> A=[20000 20000 50000 50000 75000 75000 120000]
```

21. Un juego con un núcleo irregular. Calcula las principales soluciones.

```
>> A=[0 0 0 4 3 2 8]
```

22. Un juego cuyo núcleo degenera en una de las aristas del conjunto de imputaciones. Calcula las principales soluciones.

```
A=[10 15 30 25 40 60 70]
```

23. Un juego que no es ni totalmente positivo ni casi-positivo, por tanto el conjunto de Harsanyi y el núcleo son distintos. El juego no es 0-monótono y, consecuentemente, el conjunto de Weber no está contenido en el conjunto de imputaciones. El juego no es superaditivo.

```
>> A=[1 1 2 1 2 4 10]
```

24. Los juegos A1 y A2 tienen 4 vectores de contribuciones marginales alineados. El juego A1 es superaditivo mientras que A2 no lo es.

```
>> A1=[0 0 0 10 4 4 10]
```

```
>> A2=[0 0 0 14 4 4 10]
```

25. Un juego convexo cuyo conjunto de Weber se reduce a una línea.

```
>> A=[0 0 0 3 0 0 3]
```

26. Un juego no convexo. El conjunto de Weber es un triángulo con 3 vectores marginales alineados. El vértice superior tiene multiplicidad 3.

```
>> A=[0 0 0 0 3 4 4]
```

27. Un juego no convexo cuyo conjunto de Weber tiene 6 puntos extremos distintos. No hay ningún lado del conjunto de Weber que sea paralelo a un lado del conjunto de imputaciones.

```
>> A=[0 0 0 6 5 7 10]
```

28. Los juegos del artículo de M. Shubik “Some simple games for teaching and research” al que nos referimos en la Sección 5.2.7. Son, por orden: el juego 1a (“fat core”), el juego 1b (núcleo unitario), el juego 6 (núcleo vacío), juego en el que el jugador 1 es títere, y los juegos 1a y 1b con diferente normalización (trasladados por el vector (100, 100, 100)).

```
>> J1a=[0 0 0 100 200 300 400]
```

```
>> J1b=[0 0 0 0 400 400 400]
```

```
>> J6=[0 0 0 250 300 350 400]
```

```
>> Dummy=[0 0 0 0 0 400 400]
```

```
>> J1amas100=[100 100 100 300 400 500 700]
```

```
>> J1bmas100=[100 100 100 200 600 600 700]
```

29. Un juego 1-convexo, véase Driessen (1988). El τ -valor, el nucleolo y el core-center coinciden ya que son el baricentro del núcleo, que es un triángulo. El valor de Shapley no pertenece al núcleo. El conjunto de Weber tiene 5 extremos.

```
>> A=[0 0 0 9 4 7 11]
```

30. El “flow game”, $A=[0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 3 \ 3 \ 5]$, un caso particular de un juego de programación lineal. En la Figura 5.16 se representa su núcleo, que es un cuadrilátero, junto con el τ -valor, el nucleolo y el core-center, que coinciden (en rojo), y el valor de Shapley (en azul).

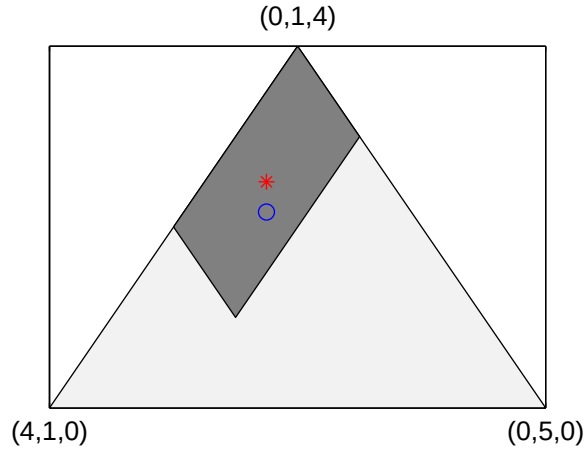


Figura 5.16: El núcleo del “flow game” con el nucleolo y el valor de Shapley

31. Calcula el nucleolo resolviendo una serie de programas de programación lineal en los siguientes juegos: $A=[0 \ 0 \ 0 \ 30 \ 30 \ 80 \ 100]$, $B=[10 \ 20 \ 30 \ 30 \ 44 \ 55 \ 66]$ y $C=[0 \ 0 \ 20 \ 5 \ 25 \ 25 \ 30]$. Indica el programa resuelto en cada etapa conjuntamente con la información proporcionada. Calcula el core-center y el valor de Shapley y compara las soluciones. Obtén, para cada solución, el vector de excesos y las coaliciones en las que se alcanza.

5.3.2. Juegos de 4 jugadores

La mayoría de los juegos de 4 jugadores que presentamos a continuación están recogidos en el documento `ejemplos.m` incluido en el CD que acompaña al libro.

1. Un juego degenerado y aditivo. El conjunto de imputaciones es un punto.

```
>> A=[1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4]
```

2. El juego de los guantes con 4 jugadores para $L = \{1, 2\}$ y $R = \{3, 4\}$.

```
>> A=[0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 2]
```

3. Un ejemplo del juego de conexión a una red eléctrica, véase Rafels i Pallarola et al. (1999).

```
>> A=[0 0 0 0 0 0 0 10 10 10 20 20 20 20 30]
```

4. Considera el juego $A=[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 5\ 2\ 3\ 0\ 3\ 5\ 5\ 3\ 7]$. Representa el conjunto de vectores de contribuciones marginales distinguiendo aquellos que son extremos del conjunto de Weber de los que no lo son. Representa gráficamente el núcleo del juego y también el conjunto de Weber.

```
>> A=[0 0 0 0 0 3 5 2 3 0 3 5 5 3 7];
>> clf
>> imputationset(A)
>> hold on, axis(axis)
>> [a,b]=webervertices(A);
>> plot3(b(:,1)',b(:,2)',b(:,3)', '*b')
>> coreset(A)
>> hold on, axis(axis)
>> plot3(a(:,1)',a(:,2)',a(:,3)', '*r')
>> weberset(A)
```

5. Un juego con núcleo “perfecto”, véase Shapley (1971). Las caras paralelas del núcleo equidistan entre sí. La esfera inscrita en el tetraedro de imputaciones es tangente a las 14 caras del núcleo.

```
>>n=4;s=[ones(1,4) 2*ones(1,6) 3*ones(1,4) 4],
>>A=s-sqrt(s.*(n-s)/(n-1))
```

6. El núcleo del juego es un cubo.

```
>> A=[0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 3]
```

7. Los juegos del Ejercicio 41 de la Sección 5.4 relativos al teorema de imposibilidad (Housman y Clark (1998)) para 4 jugadores, véase la Observación 3.55. Comprueba que el núcleo del juego A es un segmento y que los otros son juegos con núcleos unitarios. Los juegos A_1 y A_2 tienen el mismo núcleo. El núcleo de los juegos A_3 y A_4 coincide.

```
>> A=[0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 2]
>> A1=[0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 2 1 2]
>> A2=[0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 2 2]
>> A3=[0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 2 1 1 1 2]
>> A4=[0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 2 1 1 2]
```

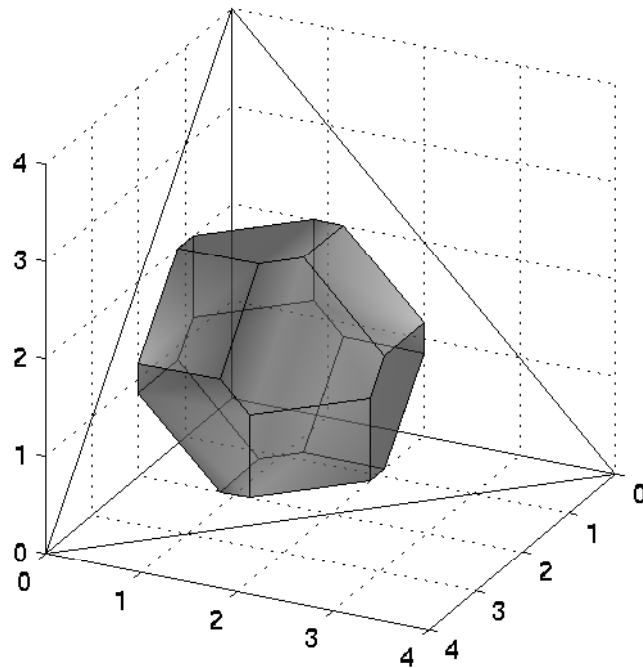


Figura 5.17: El núcleo del juego “perfecto” de 4 jugadores

8. Un juego equilibrado que no es totalmente equilibrado (su núcleo es un punto).

$A = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 350 \ 350 \ 350 \ 350 \ 350 \ 350 \ 350 \ 350 \ 350 \ 350 \ 700];$

9. Un juego que no es equilibrado, aunque todos los subjuegos propios son totalmente equilibrados.

$A = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 525 \ 525 \ 525 \ 525 \ 525]$

10. Algunos juegos que no son equilibrados.

```
>> A1=[0 0 0 0 1 0 0 0 0 3 3 3 3 3 4];
>> A2=[0 0 0 0 0 6.5 6.5 6.5 6.5 0 10 10 10 10 13];
```


11. Un juego simple no monótono que no es totalmente equilibrado.

```
>> A=[0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1]
```

12. Un juego totalmente equilibrado.

```
>> A=[0 0 0 0 0 1 2 2 3 0 2 3 2 3 4]
```

13. Un juego convexo cuyo núcleo tiene 24 puntos extremos.

```
>> A=[0 0 0 0 10 40 30 50 11 20 94 42 82 92 160]
```

14. Calcula el nucleolo del juego $A=[0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 3\ 4\ 6\ 7\ 9\ 12\ 13\ 15\ 20]$ analizando los programas lineales que se resuelven en cada etapa.

15. Para este juego, el core-cover coincide con el núcleo.

```
>> A=[1 0 0 0 1 2 1 2 2 2 7 4 6 8 10]
```

16. Juego de la defensa mutua, véase Rafels i Pallarola et al. (1999).

```
>> A=[0 0 0 0 150 0 150 200 100 250 350 400 400 550 850]
```

17. Ejemplo en el que el prenucleolo no es una imputación y, por tanto, no coincide con el nucleolo.

```
>> A=[ 0 0 1 0 0 0 10 0 0 0 0 0 0 0 10]
```

18. Un juego de bancarrota con $E = 10000$, $d_1 = 3000$, $d_2 = 2000$, $d_3 = 5000$ y $d_4 = 8000$.

```
>> A=[0 0 0 0 0 0 3000 0 2000 5000...
      2000 5000 8000 7000 10000]
```

19. El conjunto de Weber del juego A no está contenido en el conjunto de imputaciones. Es un conjunto realmente complejo con 22 puntos extremos y nada menos que 25 caras. Todos los vectores de contribuciones marginales son extremos del conjunto de Weber.

```
>> A=[0 0 0 0 2 1 1 1 0.5 0.5 0.5 6 4 5 9]
```

20. Un juego convexo cuyo núcleo es una pirámide invertida.

```
>> A=[0 0 0 0 10 10 10 10 10 10 20 20 20 20 30]
```

21. Representa para el juego $A = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 40 \ 30 \ 50 \ 10 \ 20 \ 90 \ 40 \ 80 \ 90 \ 160]$ el core-cover y el núcleo en dos ventanas separadas para poder comparar mejor ambos conjuntos.

```
>> A = [0 0 0 0 10 40 30 50 10 20 90 40 80 90 160]
>> clf
>> subplot(1,2,1)
>> imputationset(A)
>> axis(axis)
>> coreset(A)
>> axis equal
>> subplot(1,2,2)
>> imputationset(A)
>> hold on
>> axis(axis)
>> corecoverset(A)
>> axis equal
```

22. Analiza el juego $A=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 7 \ 7 \ 7 \ 7 \ 12 \ 12 \ 12 \ 12 \ 22]$. Representa el núcleo y el conjunto de Weber. ¿Cuántos extremos tiene el núcleo? ¿Es éste el número máximo de extremos que puede tener el núcleo de un juego de 4 jugadores? ¿Es algún extremo del núcleo un vector de contribuciones marginales? Véase Derks y Kuipers (2002).

23. Un juego exacto no convexo.

```
>> A=[0 2 2 0 5 5 0 5 2 2 9 5 5 5 11]
```

24. Todos los juegos de esta familia paramétrica tienen el mismo núcleo, que resulta ser un segmento. Sin embargo, el nucleolo varía con el parámetro.

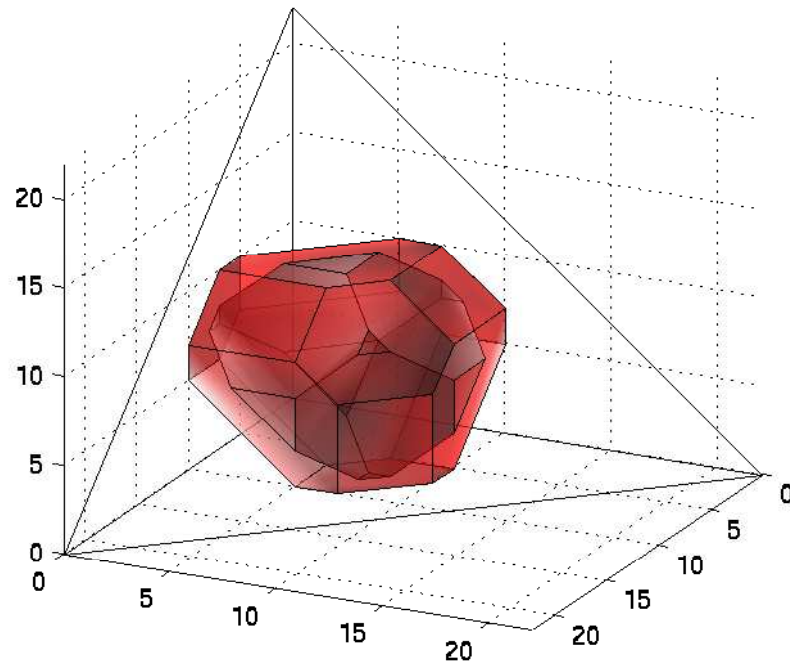


Figura 5.18: Núcleo y conjunto de Weber del juego de Derks y Kuipers (2002)

```
>> a=[1:0.05:5/4];Nu=[];
>> for p=1:size(a,2)
    juego=[0 0 0 0 1 1/2 1 1 0 1 a(p) 1 1 1 2];
    % Dibujamos imputaciones
    clf
    imputationset(juego);
    hold on,axis(axis)
    % pintamos el core
    coreset(juego);
    % calculamos el nucleolo
    Nu(p,1:4)=nucleolus(juego);
    % dibujamos el nucleolo
    plot3(Nu(p,1),Nu(p,2),Nu(p,3),'*k')
    pause
end
```

```

end
>> format rat % Números en formato racional
>> Nu % Todos los nucleolos

```

5.4. Problemas propuestos

Finalizamos el capítulo dejando al lector una amplia colección de problemas y ejercicios que abarcan los contenidos que hemos desarrollado a lo largo de esta monografía.

1. Encuentra la 0-normalización y la 0-1 normalización de los siguientes juegos explicando, en el caso de no ser posible, las razones de ello.

a) $(\{1, 2, 3\}, v)$, siendo

$$v(1) = 1, v(2) = 3, v(3) = 3, \\ v(1, 2) = 5, v(1, 3) = 7, v(2, 3) = 9, v(1, 2, 3) = 12$$

b) $(\{1, 2, 3\}, w)$, siendo

$$w(1) = 1, w(2) = 2, w(3) = 3, \\ w(1, 2) = 3, w(1, 3) = 4, w(2, 3) = 5, w(1, 2, 3) = 6$$

c) $(\{1, 2, 3\}, u)$, siendo

$$u(1) = 0, u(2) = 2, u(3) = 2, \\ u(1, 2) = 3, u(1, 3) = 1, u(2, 3) = 15, u(1, 2, 3) = 4$$

2. Prueba que la 0-1 normalización de cualquier juego esencial de tres jugadores de suma constante resulta el juego de dividir el dólar.
3. Prueba que los juegos de unanimidad son superaditivos.
4. A cada función de producción f le podemos asociar un juego TU, (N, v) , con dos propietarios, denotados 1 y 2, y m trabajadores,⁶ donde

$$N = \{1, 2, \dots, m, m+1, m+2\}$$

⁶Una función de producción es una aplicación $f: \{1, 2, \dots, m, m+1, m+2\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(1) = f(2) = 0$, $f(t+1) \geq f(t)$ para todo $t \in \{1, \dots, m+1\}$.

y

$$v(S) = \begin{cases} f(s-1) & \text{si } 1 \in S, 2 \notin S \text{ o bien } 1 \notin S, 2 \in S \\ f(s-2) & \text{si } 1, 2 \in S \\ 0 & \text{si } 1, 2 \notin S \end{cases}$$

con $s = |S|$. ¿Es el juego (N, v) convexo?

5. A cada par de funciones de producción f^1 y f^2 le podemos asociar un juego TU, (N, w) , con dos propietarios y m trabajadores, dado por:

$$w(S) = \begin{cases} f^1(s-1) & \text{si } 1 \in S, 2 \notin S \\ f^2(s-1) & \text{si } 1 \notin S, 2 \in S \\ \max\{f^1(r) + f^2(t) : r+t = s-2; r, t \geq 0\} & \text{si } 1, 2 \in S \\ 0 & \text{si } 1, 2 \notin S \end{cases}$$

con $s = |S|$. ¿Es el juego (N, w) convexo?

6. Construye la función característica de la variante del juego del guante donde cada miembro de L posee p guantes izquierdos y cada miembro de R posee q guantes derechos.
7. Obtén el juego en forma característica asociado al siguiente juego en forma normal.

	Juan A		Juan B	
Laura/Pablo	A	B	A	B
A	(0,3,1)	(2,1,1)	(1,0,0)	(1,1,1)
B	(4,2,3)	(1,0,0)	(0,0,1)	(0,1,1)

8. Demuestra la afirmación realizada en la Observación 1.45: Dado un juego (N, v) y el juego en forma estratégica asociado, al hacer la reducción de éste último a la forma coalicional se recupera la función característica v .
9. Prueba que si P es cualquier punto interior de un triángulo equilátero de altura h entonces la suma de las distancias perpendiculares desde P a las caras del triángulo es igual a h .

10. Calcula el núcleo del siguiente juego:

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) &= 4, v(1, 3) = 7, v(2, 3) = 15 \\ v(1, 2, 3) &= 15 \end{aligned}$$

y estudia cómo varía si se consideran los juegos paramétricos:

- a) $v(1, 2) = a; 0 \leq a \leq 15$.
 b) $v(1, 3) = b; 0 \leq b \leq 15$.
 c) $v(1, 2) = a; v(1, 3) = b; 0 \leq a, b \leq 15$.

11. Considera el juego de jugadores $N = \{A, B, C, D\}$ y función característica:

$$\begin{aligned} v(A) &= v(B) = v(C) = v(D) = 0 \\ v(A, B) &= 2, v(A, C) = 3, v(A, D) = 4 \\ v(C, D) &= 7, v(B, D) = 6, v(B, C) = 5 \\ v(A, B, C) &= 5, v(A, B, D) = 6, v(A, C, D) = 7, v(BCD) = 8 \\ v(A, B, C, D) &= 10 \end{aligned}$$

Demuestra que el núcleo no es vacío y calcúlalo.

12. Realiza un análisis dinámico del núcleo del siguiente juego paramétrico

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0, v(12) = v(13) = \alpha, v(123) = 1$$

para $\alpha \in [0, 2]$.

13. Demuestra que el núcleo de un juego cooperativo y el núcleo de su juego dual coinciden.
14. Encuentra un contraejemplo que demuestre que la Proposición 2.9 es falsa para juegos degenerados. Busca, además, un ejemplo de un juego degenerado y de suma constante con núcleo vacío.
15. Considera el juego (N, v) dado por

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = 0 \\ v(12) &= \frac{1}{4}, v(13) = \frac{1}{2}, v(23) = \frac{3}{4}, v(123) = 1 \end{aligned}$$

y las siguientes imputaciones:

$$p = (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}), \quad q = (\frac{5}{16}, \frac{9}{16}, \frac{1}{8}), \quad r = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0), \quad s = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \quad t = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$$

- a) Comprueba que p domina a t .
- b) Comprueba que q domina a r .
- c) ¿Qué imputación de la lista domina a s ?
- d) Demuestra que ni p ni q son dominadas por ninguna imputación de la lista anterior.
- e) Encuentra una imputación que domine a q .
- f) Prueba que ninguna imputación puede dominar a p .

16. Considera el siguiente juego:

$$\begin{aligned} v(A) &= v(B) = v(C) = v(D) = 0 \\ v(A, B) &= 50, v(C, D) = 70, v(A, C) = 30 \\ v(B, D) &= 90, v(A, D) = 30, v(B, C) = 90 \\ v(ABC) &= v(ABD) = v(ACD) = v(BCD) = v(ABCD) = 120 \end{aligned}$$

y las imputaciones

$$\begin{aligned} u &= (25, 25, 35, 35) & w &= (20, 40, 20, 40) \\ y &= (35, 65, 10, 10) & x &= (30, 60, 30, 0) \end{aligned}$$

Encuentra ciclos de dominación que involucren a 3 y a 4 de las imputaciones citadas.

17. Tres jugadores, L_1, L_2 y L_3 , tienen cada uno un guante izquierdo y dos jugadores, R_1 y R_2 , tienen cada uno un guante derecho. Si suponemos que el valor de una coalición es el número de pares de guantes que se pueden formar:

- a) Demuestra que la imputación $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ (formada por los pagos a L_1, L_2, L_3, R_1 y R_2) está dominada por otra imputación.
- b) Demuestra que la imputación $(\frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{7}{10}, \frac{7}{10})$ está dominada por otra imputación.
- c) Calcula el núcleo de este juego.

18. Sea c una constante tal que $0 \leq c < \frac{1}{2}$. Prueba que

$$Z_c = \{(c, x_2, x_3) : x_2, x_3 \geq 0, x_2 + x_3 = 1 - c\}$$

es un conjunto estable para el juego de dividir el dólar.

19. Unicidad de los pesos y las familias equilibradas (véase la Definición 2.19).
- a) Prueba que la unión de dos colecciones equilibradas es una colección equilibrada
 - b) Dadas dos familias equilibradas C y D tales que $C \subset D$, $C \neq D$, existe otra familia equilibrada B tal que $B \cup C = D$.
 - c) Demuestra (por inducción en el número de coaliciones de la colección) que toda colección equilibrada es la unión de colecciones equilibradas minimales.
 - d) Finalmente, prueba que toda colección equilibrada tiene pesos únicos si, y sólo si, es minimal.
20. Prueba que si un juego tiene un conjunto estable con una única imputación, entonces es degenerado.
21. Calcula $m(N, v)$, $M(N, v)$, $C(N, v)$ y $CC(N, v)$ para el siguiente juego:

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = 0 \\ v(1, 2) &= v(1, 3) = 2 \\ v(2, 3) &= 3 \\ v(1, 2, 3) &= 4 \end{aligned}$$

22. Prueba que si $n = 2$ ó $n = 3$ entonces $C(N, v) = CC(N, v)$. Construye un juego con $n = 4$ tal que $C(N, v) \neq CC(N, v)$.
23. Demuestra que si (N, v) es un juego cooperativo tal que para toda coalición $S \subset N$ se verifica que:

$$v(N) \geq v(S) + \sum_{i \in N \setminus S} v(i),$$

entonces el núcleo del juego coincide con el conjunto de imputaciones no dominadas.

24. Considera el juego de los guantes con $N = R \cup L$, $R \cap L = \emptyset$.
- Demuestra que si $|R| < |L|$, el núcleo del juego contiene un único vector en el que los miembros de L no reciben nada.
 - Calcula el núcleo del juego si $|R| = |L|$.
25. Calcula el valor de Shapley para un juego superaditivo degenerado.
26. Calcula el valor de Shapley y el nucleolo de los siguientes juegos TU de 3 jugadores:

	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
v_1	0	0	0	60	80	100	105
v_2	0	0	0	60	80	100	135
v_3	0	0	0	2	4	6	7

Representa en el simplex las restricciones del núcleo y las soluciones calculadas.

27. Demuestra que el nucleolo satisface las propiedades de jugadores simétricos y jugadores títeres.
28. Determina y demuestra la relación entre los conjuntos de imputaciones y los núcleos de dos juegos que son estratégicamente equivalentes.
29. Un gobierno municipal del estado de Minnesota consta de un grupo formado por 6 concejales y 1 portavoz, y el alcalde. Para que una propuesta sea aprobada debe estar apoyada por:
- La mayoría del grupo y por el alcalde (en el grupo, el portavoz sólo vota si hay empate entre los concejales).
 - Al menos 6 de 7 miembros del grupo pero el alcalde en contra (en este caso, el portavoz siempre vota).

Describe el juego al que da lugar este problema.

30. ¿Es el juego del ejercicio anterior de suma constante? Prueba que no es equilibrado.
31. Calcula los índices de Shapley-Shubik y de Banzhaf del juego del gobierno municipal de Minnesota.

32. Considera un tribunal formado por $2m$ miembros y un presidente que sólo vote en caso de empate. ¿Es el poder del presidente igual al de cualquier otro miembro? Calcula y compara los índices de Shapley-Shubik y de Banzhaf.
33. El gobierno de una ciudad está formado por dos cámaras. Una de ellas consta de 3 miembros y la otra de 7. Para aprobar una propuesta se necesita mayoría en cada cámara. Calcula los índices de Shapley-Shubik y de Banzhaf de cada miembro.
34. Calcula el índice de Shapley-Shubik, el índice de Banzhaf y el nucleolo de los siguientes juegos de votación ponderada con cuota:

$$\text{a) } [6; 4, 3, 2, 1] \quad \text{b) } [7; 4, 3, 2, 1]$$

¿Crees que el nucleolo es un buen índice de poder?

35. Una empresa quiebra y sus deudas son de 10000, 20000 y 30000 euros con los agentes A, B y C, respectivamente. Compara el valor de Shapley, el nucleolo, el core-center y el τ -valor del juego TU asociado si la empresa dispusiera para sufragar sus deudas de:
- a) 10000 euros. b) 15000 euros. c) 25000 euros.
d) 43000 euros. e) 55000 euros. f) 60000 euros.
36. (Compra-venta de una casa). Los compradores 2 y 3 tienen cada uno 300000 dólares. Supongamos que el jugador 2 valora la casa en 200000 dólares y el jugador 3 lo valora en 300000 dólares. Además el vendedor la tasa en 100000 dólares.
- a) Escribe la función característica asociada a este juego. Calcula la 0-1 normalización.
- b) Dibuja el núcleo en el triángulo de imputaciones e interprétalo.
37. Tres ciudades quieren conectarse a una depuradora ya construida. Sea

$$\begin{array}{cccc} & \begin{matrix} 0 \\ \downarrow \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \downarrow \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ \downarrow \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ \downarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \rightarrow \\ 1 \rightarrow \\ 2 \rightarrow \\ 3 \rightarrow \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 26 & 12 & 17 \\ & 0 & 30 & 21 \\ & & 0 & 44 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

la matriz de costes, de tal modo que a_{ij} representa el coste de conectar la ciudad i y la ciudad j y a_{0j} el coste de conectar la depuradora con la ciudad j . Define la función característica del juego de costes que represente adecuadamente este problema. ¿Es superaditivo el juego? Representa geométricamente el conjunto de imputaciones.

38. Tres agentes son propietarios de las acciones de una corporación. El primer agente dispone del 1.1 % de las acciones, el segundo del 49 % y el tercero del 50 %. Para que se apruebe una resolución en la Junta de Accionistas, se necesitan el 51 % de las acciones. Encuentra la función característica de este juego. Encuentra una representación del correspondiente juego simple monótono como un juego de mayoría ponderada.

Consideremos ahora que el tercer jugador cede una parte α de sus acciones, que como máximo representa el 49 % de las acciones, a una fundación (jugador 4) que no asistirá a la Junta. Analiza el juego resultante.

39. Dado un juego cooperativo $(N, v) \in G^n$, se define la distribución igualitaria como

$$\alpha_i^v = \frac{v(N)}{n} \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

- a) Justifica que satisface la propiedad de monotonía coalicional.
 b) Demuestra que una condición necesaria y suficiente para que la distribución igualitaria esté en el núcleo del juego es que para toda coalición $S \subset N$,

$$\frac{v(S)}{s} \leq \frac{v(N)}{n}$$

siendo s el cardinal de S y n el de N .

- c) Un juego es simétrico si el valor de cualquier coalición sólo depende de su cardinalidad, es decir, si $v(S) = f(|S|)$. Demuestra que un juego simétrico es equilibrado si, y sólo si, la distribución igualitaria pertenece al núcleo del juego.
40. Considera el juego con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y función característica:

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = v(4) = v(12) = v(34) = 0 \\ v(N) &= 2, v(S) = 1 \text{ en otro caso.} \end{aligned}$$

Sean los juegos (N, v^1) , (N, v^2) , (N, v^3) y (N, v^4) que coinciden con (N, v) salvo en las siguientes coaliciones:

$$v^1(134) = 2, v^2(234) = 2, v^3(123) = 2 \text{ y } v^4(124) = 2.$$

Demuestra que el núcleo de cada uno de estos juegos se reduce a un único punto, en concreto:

$$C(N, v^1) = C(N, v^2) = \{(0, 0, 1, 1)\}$$

y

$$C(N, v^3) = C(N, v^4) = \{(1, 1, 0, 0)\}$$

Deduce que no puede existir una solución que satisfaga la propiedad de pertenecer al núcleo y monotonía coalicional en G^4 . Este ejercicio ilustra el teorema de imposibilidad mencionado en la Observación 3.55. Los juegos utilizados se recogen en el Ejemplo 7 de la Sección 5.3.2.

41. Demuestra que los juegos duales de la base de unanimidad vienen dados por:

$$u_T^*(S) = \begin{cases} 1 & S \cap T \neq \emptyset \\ 0 & S \cap T = \emptyset \end{cases}.$$

Justifica que $\{u_T^*\}_{T \subset N, T \neq \emptyset}$ forman una base de G^n y que las coordenadas de un juego en la base de unanimidad y las coordenadas del juego dual en la base dual de los juegos de unanimidad coinciden. Formalmente, si

$$v = \sum_{T \subset N, T \neq \emptyset} \lambda_T u_T$$

entonces

$$v^* = \sum_{T \subset N, T \neq \emptyset} \lambda_T u_T^*.$$

Demuestra que un juego cooperativo es convexo si, y sólo si, su dual es cóncavo.

Índice alfabético

Asignación

- aceptable, 99
- estable, 72

Axioma

- a prueba de titeres, 174
- de aditividad, 135, 154
 - ponderada, 179
- de compañerismo, 151
- de consistencia, 136
- de continuidad, 135, 145
- de contribuciones
 - equilibradas, 136
- de covarianza, 134
- de eficiencia, 135, 154
 - en componentes, 157
- de estabilidad, 157
- de invarianza
 - por cambios de escala, 134
 - por traslaciones, 134
- de jugadores
 - nulos, 135
 - titeres, 135
- de justicia, 157
- de mínimo derecho, 174
- de monotonía
 - coalicional, 136
 - coalicional débil, 136
 - complementaria, 174
 - en el agregado, 136

fuerte, 135

- de positividad, 151
- de proporcionalidad
 - restringida, 174
- de racionalidad individual, 135
- de selección en el núcleo, 135
- de simetría, 135
 - débil, 179
 - débil extendida, 179
 - en el cociente, 154
 - individual, 154
- de strong trade-off, 180
- de trade-off, 180
- estándar para dos, 136

Coalición, 28

- conexa, 217
- de socios, 151
- ganadora, 185
 - minimal, 185, 186
- perdedora, 185
- swing, 193

Conjunto

- auto-protector, 106
- de Harsanyi, 121, 238
- de imputaciones, 42
- de jugadores, 28
- de preimputaciones, 42
- de regateo, 71, 126
- de Weber, 70, 111, 233

- estable, 69, 191
- Contraobjeción, 70, 126
- Core-center, 176, 234
- Core-cover, 69, 108
- Criterio de Kohlberg, 170
- D-núcleo, 68, 101
- Disección del núcleo, 178
- Dividendos de Harsanyi, 119
- Dominancia, 100
- Eficiencia, 41
- Envoltura exacta, 87
- Equilibrio
 - competitivo, 206
 - de Nash, 16, 57
 - en estrategias mixtas, 58
- Estabilidad
 - externa, 103
 - interna, 103
- Estrategia
 - maxmin, 60
 - minimax, 60
 - mixta, 55, 58
 - pura, 54, 55
- Exceso, 125, 158
- Experimentación
 - en juegos no cooperativos, 62
 - en juegos TU, 240
- Extensión
 - mixta, 58
 - multilineal, 50, 239
- Familia equilibrada, 91, 259
- Función
 - característica, 28
 - potencial, 147
- Grafo no orientado, 155
- H-representación, 79
- Índice de poder, 192
 - de Banzhaf normalizado, 193
 - de Shapley-Shubik, 192
- Índice de urgencia, 215
- Juego
 - 0-1 normalizado, 31
 - 0-monótono, 33
 - 0-normalizado, 31
 - aditivo, 30
 - casi positivo, 120
 - cociente, 152
 - con comunicación restringida, 156
 - con large core, 99
 - cóncavo, 36
 - convexo, 34, 100, 114, 198, 232
 - cuasi-simétrico, 178
 - de ahorros, 39
 - de asignación, 209
 - de bancarrota, 197
 - de compromiso admisible, 109
 - de comunicación, 156
 - de costes, 39
 - de la batalla de los sexos, 56
 - de la depuradora, 25
 - de los guantes, 37
 - de mayoría
 - absoluta, 186
 - ponderada, 187
 - ponderada con cuota, 188
 - de pares o nones, 55
 - de secuenciación, 216
 - de suma
 - constante, 78
 - nula, 36
 - nula en forma normal, 59

- de unanimidad, 118, 263
 - dual, 211, 263
- de votación, 186
- degenerado, 42
- del aeropuerto, 210
- del dilema del prisionero, 56
- del dólar, 36
- del parlamento, 38
- dual, 32, 257
- en forma estratégica, 55
- en forma normal, 55
 - asociado a uno coalicional, 63
- equilibrado, 68, 92, 189, 192
- esencial, 42
- estratégicamente equivalente, 31
- estrictamente convexo, 35
- exacto, 87
- maxgame, 123
- mingame, 122
- monótono, 33
- no cooperativo, 54
- NTU, 52
- paramétrico, 237
- PERT, 53
- reducido, 147
- simétrico, 178, 262
- simple, 185, 186
- subaditivo, 30
- superaditivo, 30
- the Cattle Drive, 37
- totalmente
 - equilibrado, 95, 192, 208
 - positivo, 120
- TU, 28
- Juegos disjuntos, 120
- Jugador
 - dictador, 185
 - nulo, 133, 185
 - títere, 133, 185
 - veto, 185
- Jugadores
 - conectados por un grafo, 155
 - contiguos, 215
 - cuasi-simétricos, 178
 - simétricos, 134
- Kernel, 71, 128
- Máximo exceso, 128
- Mínimo derecho, 108
- Menor núcleo, 68, 98
- Mercado de intercambio, 205
- Núcleo, 67, 72
 - ε -núcleo, 97
 - con estructura
 - completa, 88
 - estrictamente completa, 87
 - juego de ahorros, 76
 - juego de costes, 76
 - juego del dólar, 74
 - juego del guante, 75
- Nucleolo, 159, 234
- Objeción, 70, 125
- Orden lexicográfico, 158
- Pago de utopía, 107
- Permutación admisible, 152
- PMAS, 97, 192
- Prekernel, 71, 128
- Problema
 - de asignación, 209
 - de bancarrota, 197
- Punto de silla, 60
- Racionalidad

- coalicional, 72
- individual, 41
- Regla
 - de reparto, 50
 - EGS, 216
- Sistema
 - de coaliciones a priori, 152
 - ordenado de pesos, 149
- Situación de secuenciación, 213
- Sobrevalorar, 128
- Solución
 - de igual ganancia, 199
 - de igual pérdida, 199
 - de llegadas aleatorias, 201
 - del Talmud, 200
 - igualitaria, 262
 - proporcional, 200
 - proporcional ajustada, 200
 - puntual, 50
 - tipo conjunto, 50
- Subjuego, 29
- Subsolución, 106
- Super-núcleo, 69, 107
- τ -valor, 172
- Teorema
 - de Bondareva-Shapley, 93
 - de dualidad, 92
 - de imposibilidad, 171
 - de Krein-Milman, 43, 79
 - de separación, 112
 - minimax, 14, 61
- TUGlab, 19, 222
- Utilidad
 - no transferible, 15, 28
 - transferible, 15, 28
- V-representación, 79
- Valor
 - coalicional o de Owen, 153
 - de Myerson, 156
 - de Shapley, 132, 138, 234
 - de un juego, 61
- Vector
 - de contribuciones marginales, 82, 233
 - de excesos, 159

Bibliografía

- Algaba, E., Bilbao, J. M., Fernández, J. R., 2007. The distribution of power in the European Constitution. *European Journal of Operational Research* 176, 1752–1766. [196]
- Aumann, R. J., 1961. The core of a cooperative game without side payments. *Transactions of the American Mathematical Society* 98, 539–552. [16]
- Aumann, R. J., 1989. *Lectures on game theory*. Westview Press. [205]
- Aumann, R. J., Hart, S. (Eds.), 1992. *Handbook of game theory with economic applications*. Vol. 1. North-Holland, Amsterdam. [18]
- Aumann, R. J., Hart, S. (Eds.), 1994. *Handbook of game theory with economic applications*. Vol. 2. North-Holland, Amsterdam. [18]
- Aumann, R. J., Hart, S. (Eds.), 2002. *Handbook of game theory with economic applications*. Vol. 3. North-Holland, Amsterdam. [18]
- Aumann, R. J., Maschler, M., 1965. The bargaining set for cooperative games. *Advances in Game Theory* 19, 443–477. [71, 72, 124]
- Aumann, R. J., Maschler, M., 1985. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. *Journal of Economic Theory* 36, 195–213. [197, 201]
- Aumann, R. J., Peleg, B., 1960. Von Neumann-Morgenstern solutions o cooperative games without side payments. *Bulletin of the American Mathematical Society* 66, 173–179. [52]
- Banzhaf, J. F., 1964. Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Review* , 317–343. [183, 193]

- Beresford, R. S., Peston, M. H., 1955. A mixed strategy in action. *Operational Research* 6, 173–175. [16]
- Bergantiños, G., Sánchez-Rodríguez, E., 2002. NTU PERT games. *Operations Research Letters* 30 (2), 130–140. [53]
- Bertrand, J., 1883. *Théorie mathématique de la richesse sociale*. *Journal des Savants*, 499–508. [14]
- Besada Moráis, M., García Cutrín, F. J., Mirás Calvo, M. A., Quinteiro Sandomingo, C., Vázquez Pampín, C., 2007. *Matlab: Todo un mundo*. Servicio de Publicacións da Universidade de Vigo, Vigo. [20]
- Biswas, A. K., Parthasaraty, T., Potters, A. M., Voorneveld, M., 1999. Large cores and exactness. *Games and Economic Behavior* 28 (1), 1–12. [100]
- Biswas, A. K., Parthasaraty, T., Ravindran, G., 2001. Stability and largeness of core. *Games and Economic Behavior* 34 (2), 227–237. [100]
- Biswas, A. K., Ravindran, G., Parthasaraty, T., 2000. Stability and largeness of core for symmetric games. *International Journal of Game Theory* 29, 11–22. [100]
- Bondareva, O. N., 1963. Certain applications of the methods of linear programming to the theory of cooperative games. *Problemy Kibernetiki* 10, 119–139, en ruso. [68, 93]
- Borm, P., Fiestras-Janeiro, G., Hamers, H., Sánchez-Rodríguez, E., Voorneveld, M., 2002. On the convexity of games corresponding to sequencing situations with due dates. *European Journal of Operational Research* 136, 616–634. [218]
- Borm, P., Hamers, H., Hendrickx, R., 2001. Operations research games: A survey. *TOP* 9, 139–199. [184]
- Borm, P., Owen, G., Tijs, S., 1992. On the position value for communication situations. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 5, 305–320. [155]
- Brams, S. J., 2004. *Game theory and politics*. Courier Dover, Londres. [19]
- Brânzei, R., Dimitrov, D., Tijs, S., 2005. *Models in cooperative game theory: crisp, fuzzy and multichoice games*. Springer-Verlag, Berlin. [19]

- Calvo, E., Lasaga, J., Winter, E., 1996. The principle of balanced contributions and hierarchies of cooperation. *Mathematical Social Sciences* 31, 171–182. [155]
- Chang, 2000. Remarks on theory of the core. *Naval Research Logistics Quarterly* 47, 455–458. [100]
- Chun, Y., 1988. The equal-loss principle for bargaining problems. *Economics Letters* 23, 103–106. [54]
- Coleman, J., 1971. Control of collectivities and the power of a collectivity to act. En: Lieberman, B. (Ed.), *Social choice*. Gordon and Breach, London, pp. 269–300. [183]
- Cournot, A. A., 1838. *Recherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses*. N. Bacon, Paris. [14]
- Curiel, I., 1997. *Cooperative game theory and applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. The Netherlands. [19, 184]
- Curiel, I., Maschler, M., Tijs, S. H., 1987. Bankruptcy games. *Zeitschrift für Operations Research* 31, 143–159, series A. [198, 202]
- Curiel, I., Pederzoli, G., Tijs, S. H., 1989. Sequencing games. *European Journal of Operational Research* 40, 344–351. [215, 216, 217]
- Curiel, I., Potters, J. A. M., Rajendra Prasad, V., Tijs, S. H., Veltman, B., 1994. Sequencing and cooperation. *Operations Research* 42, 566–568. [217]
- Dantzing, G. B., 1951. A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem. En: Koopmans, T. C. (Ed.), *Activity analysis of production and allocation*. Wiley, New York, pp. 330–338. [61]
- Davis, M. D., 1986. *Introducción a la teoría de juegos*. Alianza Universidad, Madrid. [14, 17, 54, 61]
- Davis, M. D., Maschler, M., 1963. Existence of stable payoff configurations for cooperative games. *Bulletin of the American Mathematical Society* 69, 106–108. [71, 126, 127]
- Davis, M. D., Maschler, M., 1965. The kernel of a cooperative game. *Naval Research Logistic Quarterly* 12, 223–259. [71, 72, 127]

- Deegan, J., Packel, E. W., 1979. A new index of power for simple n -person games. *International Journal of Game Theory* 7, 113–123. [196]
- Derks, J., Haller, H., Peters, H., 2000. The selectope for cooperative games. *International Journal of Game Theory* 20, 23–38. [118]
- Derks, J., Kuipers, J., 2002. On the number of extreme points of the core of a transferable utility game. En: Borm, P., Peters, H. (Eds.), *Chapters in game theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. The Netherlands, pp. 83–97. [80, 227, 253, 254]
- Driessen, T., 1988. *Cooperative games, solutions and applications*. Kluwer Academic Publishers, Wiley. [34, 127, 129, 130, 160, 165, 248]
- Driessen, T., Tijs, S. H., 1985. The τ -value, the core and semiconvex games. *International Journal of Game Theory* 14, 229–247. [133]
- Dubey, P., 1975. On the uniqueness of the Shapley value. *International Journal of Game Theory* 4, 131–139. [193]
- Dubey, P., Shapley, L. S., 1979. Mathematical properties of the Banzhaf power index. *Mathematics of Operations Research* 4, 99–131. [194]
- Dutta, B., Ray, D., 1989. A concept of egalitarianism under participation constraints. *Econometrica* 57, 615–635. [201, 202]
- Edgeworth, F. Y., 1881. *Mathematical psychics*. Keegan, Paul, London. [14, 67, 71, 184]
- Eichberger, J., 1993. *Game theory for economists*. Academic Press, San Diego. [205]
- Gale, G., Kuhn, H. W., Tucker, A. W., 1951. Linear programming and the theory of games. En: Koopmans, T. C. (Ed.), *Activity analysis of production and allocation*. Wiley, New York, pp. 317–329. [61]
- Gately, D., 1974. Sharing the gains from regional cooperation: A game theoretic application to planning investment in electric power. *International Economic Review* 15 (1), 195–208. [132]
- Gillies, D. B., 1953. Some theorems on n -person games. Tesis doctoral, Department of Mathematics, Princeton. [16, 67, 71, 72, 101]

- Gillies, D. B., 1959. Solutions to general non-zero-sum games. *Annals of Mathematical Studies* 40, 47–85. [68, 72, 101]
- Girón, F. J., Gómez Villegas, M. A., 1977. *Teoría de los juegos*. U.N.E.D., Madrid. [65]
- González-Díaz, J., 2005. Essays on competition and cooperation in game theoretical models. Tesis doctoral, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Santiago de Compostela. [176]
- González-Díaz, J., Sánchez-Rodríguez, E., 2003a. The core-center and the Shapley value: A comparative study. Working Paper 03-10. Reports in Statistics and Operations Research, Universidad de Santiago de Compostela. [181]
- González-Díaz, J., Sánchez-Rodríguez, E., 2003b. From set-valued solutions to single-valued solutions: the centroid and the core-center. Working Paper 03-09. Reports in Statistics and Operations Research, Universidad de Santiago de Compostela. [133, 176]
- González-Díaz, J., Sánchez-Rodríguez, E., 2007. A natural selection from the core of a tu game: the core-center. *International Journal of Game Theory* 36, 27–46. [133, 176, 234]
- González-Díaz, J., Sánchez-Rodríguez, E., 2008a. Cores of convex and strictly convex games. *Games and Economic Behavior* 62 (1), 100–105. [89, 90]
- González-Díaz, J., Sánchez-Rodríguez, E., 2008b. Towards an axiomatization of the core-center. *European Journal of Operational Research* doi: 10.1016/j.ejor.2008.02.004, En prensa. [180]
- Grotte, J. H., 1971. Observations on the nucleolus and the central game. *International Journal of Game Theory* 1, 173–177. [132]
- Hamers, H., Borm, P., Tijs, S. H., 1995. On games corresponding to sequencing situations with ready times. *Mathematical Programming* 70, 1–13. [218]
- Hamers, H., Klijn, F., Suijs, J., 1999. On the balancedness of multimachine sequencing games. *European Journal of Operational Research* 119, 678–691. [218]
- Hammer, P. L., Peled, U. N., Sorensen, S., 1977. Pseudo boolean functions and game theory. core elements and Shapley value. *Cahiers du CERO* 19, 159–176. [70, 72, 118]

- Harsanyi, J. C., 1959. A bargaining model for cooperative n -person games. En: Tucker, A. W., Luce, R. D. (Eds.), Contributions to the theory of games. Vol. IV. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, pp. 325–355. [119]
- Harsanyi, J. C., 1963. A simplified bargaining model for the n -person game. International Economic Review 4, 194–220. [119]
- Hart, S., Mas-Colell, A., 1989. Potential, value, and consistency. Econometrica 57, 589–614. [146, 147, 149]
- Haywood, O. G., 1954. Military decision and game theory. Journal of Operations Research Society of America 2, 365–385. [16]
- Housman, D., Clark, L., 1998. Core and monotonic allocation methods. International Journal of Game Theory 27, 611–616. [172, 250]
- Howard, N., 1968. Theory of metagames. Tesis doctoral, University of London, Londres. [18]
- Ichiishi, T., 1981. Supermodularity: Applications to convex games and to the greedy algorithm for LP. Journal of Economic Theory 25, 283–286. [70]
- Kalai, E., 1977a. Nonsymmetric Nash solutions and replications of 2-person bargaining. International Journal of Game Theory 6, 129–133. [54]
- Kalai, E., 1977b. Proportional solutions to bargaining situations: Interpersonal utility comparisons. Econometrica 45, 1623–1630. [54]
- Kalai, E., Samet, D., 1987. On weighted Shapley values. International Journal of Game Theory 16 (3), 205–222. [149, 151]
- Kalai, E., Smorodinsky, M., 1975. Other solutions to Nash's bargaining problem. Econometrica 43, 513–518. [54]
- Klijn, F., Sánchez-Rodríguez, E., 2006. Sequencing games without initial order. Mathematical Methods of Operations Research 63, 53–62. [218]
- Kohlberg, 1971. On the nucleolus of a characteristic function game. SIAM Journal of Applied Mathematics 20, 62–66. [158, 170]
- Krein, M., Milman, D., 1940. On extreme points of regular convex sets. Studia Mathematica 9, 133–138. [43, 79]

- Kreps, D. M., 1995. Curso de teoría macroeconómica. McGraw-Hill, Madrid. [17]
- Kuhn, H. W., 1997. Classics in game theory. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. [18]
- Littlechild, S. C., Thompson, G. F., 1977. Aircraft landing fees: A game theory approach. *The Bell Journal of Economics* 8, 186–204. [17, 184]
- Littlechild, S. C., Vaidya, K., 1976. The propensity to disrupt and the disruption nucleolus of a characteristic function game. *International Journal of Game Theory* 5, 151–161. [133]
- Lucas, W. F., 1967. A counterexample in game theory. *Management Science* 13, 766–767. [69, 106]
- Luce, R. D., Raiffa, H., 1957. Games and decisions. John Wiley and Sons, Inc., New York. [18, 132]
- Mas-Colell, A., 1989. An equivalence theorem for a bargaining set. *Journal of Mathematical Economics* 18, 129–139. [71]
- Mas-Colell, A., Whinston, M. D., Green, J. R., 1995. Microeconomic theory. Oxford University Press, Oxford, New York. [205]
- Maschler, M., Owen, G., 1989. The consistent Shapley value for hyperplane games. *International Journal of Game theory* 18, 389–407. [54]
- Maschler, M., Owen, G., 1992. The consistent Shapley value for games without side payments. En: Selten, R. (Ed.), *Rational interaction*. Springer Verlag, New York, pp. 5–12. [54]
- Maschler, M., Peleg, B., Shapley, L. S., 1972. The kernel and bargaining set for convex games. *International Journal of Game Theory* 1, 73–93. [71, 72, 128, 130]
- Maschler, M., Peleg, B., Shapley, L. S., 1979. Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts. *Mathematics of Operations Research* 4, 303–338. [68, 72, 98, 158, 165]
- Maynard-Smith, J., 1974. The theory of games and the evolution of animal conflicts. *Journal of Theoretical Biology* 47, 209–221. [18]

- Moulin, H., 1990. Cores and large cores when population varies. *International Journal of Game Theory* 19, 219–232. [100]
- Moulin, H., 1995. *Cooperative microeconomics*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. [205]
- Myerson, R. B., 1977. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operation Research* 2, 225–229. [155, 157]
- Myerson, R. B., 1980. Conference structures and fair allocation rules. *International Journal of Game Theory* 9, 169–182. [146, 155]
- Myerson, R. B., 1991. *Game Theory. Analysis of conflict*. Harvard University Press, Harvard. [18]
- Nasar, S., 2001. *Una mente prodigiosa*. Mondadori, Barcelona. [15]
- Nash, J., 1950. The bargaining problem. *Econometrica* 18, 155–162. [54]
- Nash, J., 1951. Non cooperative games. *Annals of Mathematics* 54, 286–295. [57]
- O'Neill, B., 1982. A problem of rights arbitration from the Talmud. *Mathematical Social Sciences* 2, 345–371. [183, 197, 201]
- Osborne, M. J., 2002. *An introduction to game theory*. Oxford University Press, New York. [18]
- Osborne, M. J., Rubinstein, A., 1994. *A course in game theory*. MIT Press, Boston. [54]
- Owen, G., 1968. A note on the Shapley value. *Management Science* 14 (11), 731–732. [149]
- Owen, G., 1972. Multilinear extensions of games. *Management Science* 18 (5), 64–79. [149]
- Owen, G., 1975. Multilinear extensions and the Banzhaf value. *Naval Research Logistic Quarterly* 22, 741–750. [193]
- Owen, G., 1977. Values of games with a priori unions. En: Henn, R., Moeschlin, O. (Eds.), *Essays in mathematical economics and game theory*. Berlin-Heidelberg, New York, pp. 76–88. [151]

- Owen, G., 1995. *Game Theory*. Academic Press, San Diego. [170]
- Peleg, B., 1963. Existence theorem for the bargaining set $\mathcal{M}$. *Bulletin of the American Mathematical Society* 69, 109–110. [71, 126]
- Peleg, B., 1967. Existence theorem for the bargaining set $\mathcal{M}$. En: Shubik, M. (Ed.), *Essays in mathematical economics*. Princeton University Press, New Jersey, pp. 53–56. [71, 126]
- Peleg, B., Sudhilter, P., 2004. *Introduction to the theory of cooperative games*. Springer-Verlag, Berlin. [19]
- Peters, H. J., Borm, P., Tijs, S., 2002. *Chapters in game theory: In honor of Stef Tijs*. Springer-Verlag, Berlin. [19]
- Potters, J. A. M., Reijnierse, J. H., 1995. Γ -component additive games. *International Journal of Game Theory* 24, 49–56. [218]
- Rafels i Pallarola, C., Izquierdo i Aznar, J. M., Marín Solano, J., Martínez de Albéniz Salas, F. J., Núñez Oliva, M., Ybern Carballo, N., 1999. *Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques*. Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona. [19, 24, 205, 247, 249, 252]
- Robinson, J. B., 1951. An iterative method of solving a game. *Annals of Mathematics* 54, 296–301. [63]
- Roth, A. E., 1976. Subsolutions and the supercore of cooperative games. *Mathematics of Operations Research* 1, 43–49. [69, 106]
- Roth, A. E. (Ed.), 1988. *The Shapley value. Essays in honor of L. S. Shapley*. Cambridge University Press, Cambridge. [132, 146]
- Sánchez-Rodríguez, E., 1999. *Juegos cooperativos que describen modelos en los que el orden es inherente al problema*. Tesis doctoral, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Santiago de Compostela. [53]
- Schmeidler, D., 1969. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 17, 1163–1170. [132, 158]
- Schmeidler, D., 1971. *Cores of exact games*. Tech. Rep. I. CP-329, Center for Research in Management Science. University of California, Berkeley. [87]

- Shapley, L. S., 1953a. Additive and non-additive set functions. Tesis doctoral, Department of Mathematics, Princeton. [149]
- Shapley, L. S., 1953b. A value for n -person games. En: Kuhn, H. W., Tucker, A. W. (Eds.), Contributions to the theory of games. Vol. II de Annals of Mathematics Studies, 28. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, pp. 307–317. [16, 118, 132, 138]
- Shapley, L. S., 1967. On balanced sets and cores. Naval Research Logistics Quarterly 14, 453–460. [68, 93]
- Shapley, L. S., 1969. Utility comparison and the theory of games. Tech. Rep. La decision 2, Centre Nacional de la Recherche Scientifique. París. [54]
- Shapley, L. S., 1971. Cores of convex games. International Journal of Game Theory 1 (3), 11–26. [34, 70, 87, 90, 245, 250]
- Shapley, L. S., 1987. Game theory. Tech. Rep. Department of Mathematics, UCLA. [37, 243]
- Shapley, L. S., Shubik, M., 1954. A method for evaluating the distribution of power in a committee system. American Political Science Review 48, 787–792. [183, 192]
- Shapley, L. S., Shubik, M., 1963. The core of an economy with nonconvex preferences. Tech. Rep. RM-3518, The Rand Corporation. [68, 71, 97]
- Shapley, L. S., Shubik, M., 1966. Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences. Econometrica 34, 805–827. [68, 71, 97]
- Shapley, L. S., Shubik, M., 1969. On market games. Journal of Economic Theory 1, 9–25. [184, 205]
- Shapley, L. S., Shubik, M., 1971. The assignment game i: The core. International Journal of Game Theory 1, 111–130. [40]
- Shapley, L. S., Shubik, M., 1975. Competitive outcomes in the cores of market games. International Journal of Game Theory 4, 229–237. [184, 205]
- Sharkey, W. W., 1982. Cooperative games with large cores. International Journal of Game Theory 11, 175–182. [99, 100, 106]

- Smith, W., 1956. Various optimizers for single-stage production. *Naval Research Logistics Quarterly* 3, 59–66. [215]
- Sprumont, Y., 1990. Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility. *Games and Economic Behavior* 2, 378–394. [97]
- Thomson, W., 2003. Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: A survey. *Mathematical Social Sciences* 45, 249–297. [184, 197]
- Tijs, S. H., 1981. Bounds for the core and the τ -value. En: Moeschlin, O., Pallaschke, D. (Eds.), *Game theory and mathematical economics*. North-Holland, Amsterdam, pp. 123–132. [133, 172]
- Tijs, S. H., 1987. An axiomatization of the τ -value. *Mathematical Social Sciences* 13, 177–181. [174]
- Tijs, S. H., Lipperts, F. A. S., 1982. The hypercube and the core cover of n -person cooperative games. *Cahiers du Centre de Recherche Operationelle* 24, 27–37. [69, 72, 108]
- Tirole, J., 1990. *Theory of industrial organization*. MIT Press, Boston. [17]
- Varian, H. R., 1984. *Microeconomic analysis*. Norton, New York. [184, 205]
- Varian, H. R., 1992. *Economic and financial modeling with Mathematica*. Editorial Telos, Madrid. [19]
- Varian, H. R., 1999. *Intermediate microeconomics. A modern approach*. Norton, New York. [184]
- Vasil'ev, V., 1980. On the H-payoff vectors for cooperative games. *Optimizacija Vyp* 24, 18–32, en ruso. [70, 72, 118]
- Vasil'ev, V., 2001. Extreme points of the Weber polyhedron. *Discrete Analysis and Operations Research*, to appear. [112]
- von Neumann, J., 1928. Zur theorie der gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen* 100, 295–320. [14, 61]
- von Neumann, J., Morgenstern, O., 1944. *Theory of games and economic behaviour*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. [15, 23, 36, 72]

- Weber, R. J., 1988. Probabilistic values for games. En: Roth, A. E. (Ed.), The Shapley value. Essays in honor of L. S. Shapley. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 101–119. [69, 72, 111]
- Weibull, J. W., 1996. Evolutionary game theory. MIT Press, Boston. [18]
- Winter, E., 1992. The consistency and potencial for values of games with coalition structure. Games and Economic Behavior 4, 132–144. [155]
- Young, H. P., 1985. Monotonic solutions of cooperative games. International Journal of Game Theory 14, 65–72. [146, 171]
- Zermelo, E., 1913. Über eine anwendung der mengenlehre auf die theorie des schachspiels. En: Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians. Vol. 2. [14]
- Zhou, L., 1994. A new bargaining set for an n -person game and endogenous coalition formation. Games and Economic Behavior 6, 65–72. [71]