Economates

As Matemáticas na Economía

Manuais
Serie manuais didácticos

Autora
Carmen Vázquez Pampín

Carmen Vázquez Pampín

Carmen Vázquez Pampín é doutora en Matemáticas e profesora titular de universidade do Departamento de Matemáticas da Universidade de Vigo dende 1998. A súa investigación situase no ámbito da Economía Matemática, concretamente en Teoría da Utilidade e Elección Social. A súa experiencia docente, tanto en grao como en posgrao, refírese a Matemáticas para Economía e Administración de Empresas, e tamén para graos científicos. Cunha manifesta vocación docente, sempre procurou adaptar o xeito de impartir as súas clases ás particularidades do seu alumnado, ás da materia impartida e ás do grao no que está integrada. A actualización tanto do material empregado como da súa forma de difusión ven sendo unha das súas principais inquedanzas. Conxuntamente con outros compañeiros de departamento, desenvolveu diversos proxectos docentes: proxectos de innovación, de adaptación ao Espazo Europeo de Educación Superior e de uso das novas tecnoloxías e de software de cálculo científico nas aulas. Froito destas experiencias, o grupo leva publicados diversos manuais de Matemáticas (álxebra lineal e cálculo diferencial e integral) dirixidos ás titulacións de Economía, Administración de Empresas, Ciencias do Mar e Química, así como de iniciación a Matlab.

Servizo de Publicacións
Universidade de Vigo

Manuais
Serie de manuais didácticos

n.º 091

Edición
Universidade de Vigo
Servizo de Publicacións
Rúa de Leonardo da Vinci, s/n
36310 Vigo

Deseño da portada
Julinda Molares Cardoso e Tania Sueiro Graña
Área de Imaxe
Vicerreitoría de Comunicacións e Relacións Institucionais

Maquetación
Tórculo Comunicación Gráfica, S. A.

Fotografía da portada
Adobe stock

Impresión
Tórculo Comunicación Gráfica, S. A.

ISBN (Libro impreso)
978-84-1188-033-6

Depósito legal
VG 616-2024

Servizo de Publicacións
Universidade de Vigo

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

Este volume publícase
co financiamento da

XUNTA
DE GALICIA

Economates

As Matemáticas na Economía

Autora

Carmen Vázquez Pampín

Índice

Introdución

Este manual está elaborado co material que actualmente estou a usar para as materias de Matemáticas do Grao de Economía na Universidade de Vigo. Hal Varian, na introdución do seu manual *Microeconomía Intermedia*, comenta a intención de transmitir a idea de que o cálculo diferencial é un instrumento para analizar as mesmas cuestións que se poden examinar tamén verbal ou graficamente. Afirma que moitos argumentos resultan máis sinxelos coas Matemáticas e que tódolos estudantes de Economía deberían sabelo. Por elo, unha das premisas para a elaboración deste material foi tentar que o alumnado se decate da repercusión desta materia no grao de Economía.

Por outra parte, nos últimos anos e sobre todo dende a pandemia, os profesores de Matemáticas vimos observando no alumnado que se incorpora á Universidade serias deficiencias na formación básica referida a nosa materia. Concretamente, no grao de Economía, tamén o profesorado responsable das materias cuantitativas nos vén referindo estas carencias. Atallar estas irregularidades na formación matemática do alumnado de Economía é outra das premisas para a elaboración do material que aquí se recolle. Debo aclarar que descartei de pleno a posibilidade de intentar ofertar un curso de nivelación. Impartín durante algún tempo este tipo de cursos, que foron moi habituais na primeira etapa de implantación do Plan Bolonia. Ao meu modo de ver, estes cursos serven para que o alumno sexa consciente dos contidos que se supón debería dominar ao iniciar a súa educación universitaria, pero non é posible que con eles adquira as destrezas das que carece. Para conseguir tal obxectivo precísase máis tempo do que se dispón nestes cursos.

Dende a miña experiencia, o idóneo é integrar tales contidos dentro da propia materia ao longo do curso, segundo se van precisando. Contidos como, por exemplo, propiedades básicas dos logaritmos ou representación e propiedades das funcións elementais, coméntanse cando se empezan a precisar e aplícanse nos exercicios. De tal xeito que moitos dos exercicios que se refiren propiamente á materia son complementados con cuestións relativas a conceptos básicos relacionados, conceptos que antes dábamos por dominados polo alumnado.

Nesta situación sentín a necesidade de cambiar o enfoque das materias de Matemáticas nesta titulación, das que agora son responsable. Con este novo enfoque, óptase por usar a mesma notación que usan as materias cuantitativas que o alumnado cursará neste grao e inclúense tamén exercicios máis enfocados ás aplicacións á Economía, sen intención de intromisión nos contidos doutras materias. Obviamente, as limitacións de coñecementos esixibles fai que este tipo de exercicios sexan moi sinxelos e non recollan o rigor co que se tratarán noutras materias os conceptos utilizados, simplemente tentase que o alumno albisque a relación das nosas esixencias coa necesidade de destrezas que terá na titulación.

Outro aspecto a considerar é a importancia de forzar ao alumno a realizar cálculos alxébricos habitualmente. Son moitos os docentes que refiren a falta de destreza neste aspecto, esta destreza só se adquire coa práctica. Así podería dicir que, intencionadamente, intercálanse exercicios máis sinxelos dende o punto de vista das operacións con outros máis complexos.

No curto espazo de tempo en que se levan feito as modificacións mencionadas debo manifestar que, aínda que os cambios detectados no alumnado non son todo o bos que deberían, si se aprecia unha notable melloría. Este progreso percíbese nas destrezas do alumno medio e, sobre todo, apréciase un cambio na súa actitude fronte á materia, percíbese que se decata da importancia das Matemáticas para certas materias propias da titulación. Ver este cambio na actitude do alumnado é para min a mellor recompensa que podo recibir. Acollo este labor de cambiar a orientación das materias de Matemáticas no grao de Economía con ilusión, coa esperanza de colaborar na mellora da docencia neste grao.

Obviamente, os cambios realizados precisaron de reorganizar os contidos existentes e de renunciar a unha pequena parte deles. Tentouse desbotar aqueles contidos secundarios que non serán relevantes noutras materias. Estou agradecida a moitos dos profesores que imparten materias cuantitativas no grao de Economía por compartir comigo inquedanzas, apreciacións, recomendacións e suxestións. As súas achegas resultaron sumamente valiosas. Especial recoñecemento a Consuelo Pazó.

O material que aquí se recolle correspóndese co usado como apoio ás clases teóricas e prácticas, é obvio que este material complementase co desenrolo que do mesmo se realiza nas propias clases. Nelas fanse apreciacións, comentarios ou variacións nos exercicios que poden depender das circunstancias e das valoracións que a profesora teña no seguimento do alumnado. Non se trata de un manual completo para seguir a materia de xeito autosuficiente.

Se ben é certo que esta nova proposta precisou de bastante traballo individual para preparar o material aquí recollido, non sería de xustiza atribuír todo o mérito a esta autora. Son profesora do Departamento de Matemáticas dende o ano 1991 e síntome moi xubilosa por ter coincidido con profesores con inquedanzas por mellorar a docencia, por innovar e tratar de conectar co alumnado, sen perder o rigor que as Matemáticas precisan. Froito destas inquedanzas levamos publicado varios manuais. O material de base deste, que presento agora en solitario, forma parte deses recursos que en común elaboramos ao longo deste tempo Manuel Besada, F. Javier García, Miguel Mirás, Carmen Quinteiro e eu mesma.

Especial recoñecemento para o profesor Manuel Besada que foi, hai xa algún tempo, o meu director de tese e, dende entón, un gran compañeiro e aínda mellor amigo. Sempre xeneroso e desprendido, a porta do seu despacho sempre estivo aberta para todos; particularmente sempre me sentín arroupada e apoiada en calquera proxecto no que participei. Agora, xa xubilado, tivo a paciencia de adicarlle bastante tempo a revisar e comentar comigo este manual. Por todo sempre lle estarei enormemente agradecida.

Só engadir que os erros, inexactitudes ou descoidos que podades atopar no texto son exclusivamente da miña responsabilidade.

A autora.
Vigo, outubro 2024.

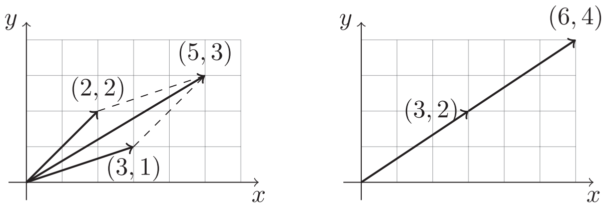
Capítulo 1

Cálculo matricial. Sistemas de ecuacións lineais.

Empezamos este capítulo revisando conceptos e propiedades do cálculo vectorial e matricial que serán precisos para os contidos da materia. Sobre os sistemas de ecuacións lineais, revisamos o teorema de Rouché para aplicalo á discusión e o método de Gauss para a resolución. Facemos especial incidencia nos sistemas con parámetros e a interpretación de resultados nas aplicacións a problemas prácticos.

1.1. Vectores

Cando falamos de vectores no plano pensamos en segmentos orientados que veñen dados por dúas coordenadas, por exemplo $(2, 2)$ ou $(3, 1)$. Vectores que podemos sumar ou multiplicar por un número, operacións que teñen unha visualización gráfica moi sinxela. Así, por exemplo $(2, 2) + (3, 1) = (5, 3)$ e $2(3, 2) = (6, 4)$.



En xeral, denotamos por $\mathbb{R}^n$ ao conxunto $\{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ e os seus elementos chamámolos vectores. En $\mathbb{R}^n$ están definidas as operacións:

- suma: $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.
- produto por un número: $r(x_1, \ldots, x_n) = (rx_1, \ldots, rx_n),\ r \in \mathbb{R}$.

En particular $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Definición 1.1 *Os vectores $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ dise que son* **linealmente independentes** *se dados $r_1, \cdots, r_k \in \mathbb{R}$ tales que $r_1v_1 + \cdots + r_kv_k = \theta$, se ten que $r_1 = \cdots = r_k = 0$.*

É dicir, $v_1, \cdots, v_k$ son linealmente independentes se o único xeito de expresar o vector $\theta = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ como combinación lineal deles é tomando tódolos coeficientes iguais a cero.

En caso contrario, diremos que os vectores $v_1, \cdots, v_k$ son **linealmente dependentes***.*

Exemplos 1.2

1. Os vectores $(1,1)$ e $(-1,0)$ son linealmente independentes porque se $r, s \in \mathbb{R}$ fosen tales que $r(1,1) + s(-1,0) = (0,0)$, entón $r = s = 0$. Efectivamente, como $r(1,1) + s(-1,0) = (r-s, r)$, obtemos que $r - s = r = 0$, de onde $r = s = 0$.

2. Como $(1,1,-5) + 2(-1,4,3) + (1,-9,-1) = (0,0,0)$, os vectores $(1,1,-5)$, $(-1,4,3)$ e $(1,-9,-1)$ son linealmente dependentes.

Obsérvese que os vectores $x_1, \cdots, x_n$ son linealmente dependentes se, e só se, polo menos un deles se pode poñer como combinación lineal dos restantes.

Definición 1.3 *O* **produto escalar** *de dous vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, defínese como o número real $u \cdot v = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$.*

Dous vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ son perperdiculares cando o seu produto escalar é nulo, $u \cdot v = 0$.

Definición 1.4 *Chamamos* **módulo** *ou lonxitude dun vector $u = (u_1, \ldots, u_n)$ ao número real $||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$. Un vector $u \in \mathbb{R}^n$ dise que é* **unitario** *cando $||u|| = 1$.*

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, verifícase:

a) $||x|| = 0$ se, e só se, $x = \theta$.

b) $||tx|| = |t|\ ||x||$ c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

d) $||-x|| = ||x||$ e) $||x|| \geq 0$

Sexan $u, v \in \mathbb{R}^n$. Diremos que u e v están na mesma dirección cando teñan a mesma dirección e sentido, é dicir, se existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ tal que $u = \lambda v$ e diremos que están en dirección oposta cando teñan a a mesma dirección e sentido contrario, é dicir, $u = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0$. Obviamente en ambos casos u e v son linealmente dependentes.

Se $u \in \mathbb{R}^n, u \neq \theta$, entón o vector $\frac{u}{||u||}$ é o vector unitario que está na mesma dirección que u e $-\frac{u}{||u||}$ é o vector unitario que está na dirección oposta a u.

A distancia entre dous puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ é o número real $d(x,y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$. Observemos que, se $x, y \in \mathbb{R}$, entón $d(x,y) = |x - y|$.

Exercicios

1. Son os vectores $(-1,3)$ e $(-2,6)$ linealmente independentes?

2. Se $u = (2,-1,4)$, $v = (-3,0,2)$ e $w = 2u - v$, calcula w. Son os vectores u, v e w linealmente independentes?

3. Calcula a lonxitude dos seguintes vectores, obtén os vectores unitarios na súa mesma dirección e dá un vector perpendicular a cada un:

   $a = (4,1)$ $\quad b = (2,-2)$ $\quad c = (3,4)$ $\quad d = (8,-6)$
   $e = (4,1,0)$ $\quad f = (-3,12,-3)$ $\quad g = (2,4,-1)$ $\quad h = (-1,1,-2)$

4. Calcula o produto escalar dos vectores

   a) $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$ $\quad$ b) $(-2,0)$ e $(2,0)$ $\quad$ c) $(2,0,2)$ e $(-1,-1,0)$

5. Se temos a disposición n produtos con prezo de venda por unidade $p_1,\ldots,p_n$ respectivamente e adquirimos x_1 unidades do primeiro, x_2 unidades do segundo, ... e x_n unidades do último, que interpretación ten o produto escalar dos vectores $P = (p_1,\ldots,p_n)$ e $X = (x_1,\ldots,x_n)$?

1.2. Matrices e determinantes

Chamamos **matriz** sobre $\mathbb{R}$ de orde $m \times n$ a todo conxunto formado por $m \times n$ elementos de $\mathbb{R}$, ordenados en m filas e n columnas. O elemento situado na fila i-ésima e na columna k-ésima diremos que ocupa o lugar ik.
$\mathcal{M}_{m\times n}$ denotará o conxunto das matrices sobre $\mathbb{R}$ de orde $m \times n$.

Exemplo 1.5 Así, un elemento $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ será por exemplo $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Se $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, entón $B \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ e $C \in \mathcal{M}_{2\times 2}$.

En xeral, se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ será do xeito $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, con $a_{ik} \in \mathbb{R}$.

En $\mathcal{M}_{m\times n}$ defínense as operacións:

- suma de matrices: $A + B = (a_{ik}) + (b_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, onde $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$
- produto dun número por unha matriz: $rA = (ra_{ik}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, onde $r \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$
- produto de matrices: $AB = (a_{ij})(b_{jk}) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right) \in \mathcal{M}_{m\times k}$ onde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times k}$

Que propiedades verifican as operacións con matrices?

Definición 1.6 *O* **rango** *dunha matriz é o máximo número de vectores columna linealmente independentes que posúe. Este número coincide co máximo número de vectores fila linealmente independentes que a matriz posúe.*

Exemplo 1.7 Se A, B e C son as matrices do exemplo 1.5, temos que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3A = 3\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$-2C = -2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}\, A = \text{rango}\, B = \text{rango}\, C = 2$$

Tipos especiais de matrices

A *matriz trasposta* de $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ é a matriz que se obtén intercambiando en A filas por columnas. Denótase por A^t. Verifícase que $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}$ e, ademais, $(A^t)^t = A$.

Unha matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ dise que é *simétrica* se coincide coa súa trasposta, é dicir, $A^t = A$ ou equivalentemente $a_{ik} = a_{ki}$, para todo i, k.

Unha matriz $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ dise *diagonal* se $a_{ik} = 0$, para todo $i \neq k$.

Matriz identidade é aquela matriz diagonal na que $a_{ii} = 1$, para todo i.

A matriz *inversa* dunha matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é unha matriz que denotamos A^{-1} e que verifica que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, onde I é a matriz identidade de orde n. A matriz inversa de A, se existe, é única.

Exemplo 1.8 Se A, B e C son as matrices do exemplo 1.5, temos que:

$$A^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A matriz identidade de orde 2 é $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e a matriz identidade de orde 3 é $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exemplo 1.9 Vexamos un exemplo sinxelo de aplicación do cálculo matricial á economía. A linguaxe matricial pode simplificar considerablemente determinados cálculos como os que presentamos a continuación.

Unha pequena xastrería ten tres establecementos e o stock en cada un é o seguinte:
Tenda 1: 100 pantalóns, 300 camisas, 60 chaquetas e 20 traxes.
Tenda 2: 120 pantalóns, 350 camisas, 60 chaquetas e 40 traxes.
Tenda 3: 140 pantalóns, 400 camisas, 65 chaquetas e 30 traxes.

Podemos recoller os stocks de cada tenda nunha matriz cuxas filas corresponden cos distintos establecementos e cada columna co tipo de prenda considerada:

$$E = \begin{pmatrix} 100 & 300 & 60 & 20 \\ 120 & 350 & 60 & 40 \\ 140 & 400 & 65 & 30 \end{pmatrix}$$

Supoñamos que o taller subministra a cada tenda o número de pezas dadas por:
Tenda 1: 10 pantalóns, 40 camisas, 12 chaquetas e 5 traxes.
Tenda 2: 12 pantalóns, 45 camisas, 20 chaquetas e 10 traxes.
Tenda 3: 14 pantalóns, 40 camisas, 25 chaquetas e 15 traxes.

Supoñamos ademais que as vendas despois dun mes de cada tenda son:
Tenda 1: 10 pantalóns, 40 camisas, 15 chaquetas e 6 traxes.
Tenda 2: 15 pantalóns, 50 camisas, 20 chaquetas e 10 traxes.
Tenda 3: 14 pantalóns, 50 camisas, 25 chaquetas e 15 traxes,

Se representamos por A e V as matrices correspondentes ao abastecemento e ás vendas de cada tenda dun xeito análogo ao que fixemos coas existencias temos:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 12 & 5 \\ 12 & 45 & 20 & 10 \\ 14 & 40 & 25 & 15 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 15 & 6 \\ 15 & 50 & 20 & 10 \\ 14 & 50 & 25 & 15 \end{pmatrix}$$

a) Se os prezos de venda de cada peza son: pantalón (50 €), camisa (30 €), chaqueta (75 €) e traxe (120 €), os ingresos durante este mes de cada unha das tendas obteríanse multiplicando a matriz de vendas pola matriz de prezos do seguinte xeito:

$$VP^t = V \begin{pmatrix} 50 & 30 & 75 & 120 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3545 & 4950 & 5875 \end{pmatrix}^t$$

Obtemos así unha matriz fila onde cada un dos elementos son os ingresos da cada unha das tres tendas este mes.

b) As existencias de cada tenda despois deste mes veñen dadas por

$$E' = E + A - V = \begin{pmatrix} 100 & 300 & 57 & 19 \\ 117 & 345 & 60 & 40 \\ 140 & 390 & 65 & 30 \end{pmatrix}$$

As existencias totais da xastrería veñen dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} E' = \begin{pmatrix} 357 & 1035 & 182 & 89 \end{pmatrix}$$

Obtemos así unha matriz fila onde cada un dos elementos son as unidades de cada un dos catro tipos de peza de que se dispón en total nas tres tendas.

c) Ao final do mes, o taller non puido axustar a produción e volve enviar o mesmo abastecemento ás tendas pero as vendas no mes seguinte duplican ás do anterior. Entón as existencias de cada tenda despois deste segundo mes veñen dadas por $E'' = E' + A - 2V = \begin{pmatrix} 90 & 260 & 39 & 12 \\ 99 & 290 & 40 & 30 \\ 126 & 330 & 40 & 15 \end{pmatrix}$

Obsérvese que tamén poderiamos ter recollidos tódolos datos nas matrices E, A e V facendo corresponder as columnas cos distintos establecementos e as filas cos tipo de pezas. Que operacións faríamos neste caso para obter os resultados mencionados?

Determinante dunha matriz cadrada

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, definiremos o **determinante** de A por recorrencia:
Se $n = 1$, $A = (a)$ e $\det(A) = a$.
Se $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
En xeral, se $A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ definimos o seu determinante, que denotamos $\det(A)$ ou $|A|$, como $\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$, onde $A_{ik} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik}$, sendo Δ_{ik} o *menor complementario* de a_{ik}, é dicir, é o determinante da matriz de orde $n-1$ que se obtén de A ao suprimir a fila i-ésima e a columna k-ésima.

Ademais $A_{ik} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik}$ chámase adxunto do elemento a_{ik}.

Observación 1.10 Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, o determinante de A é o número real:

$\det(A) = a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}$.

Esta fórmula chámase regra de Sarrus e é válida para determinantes de orde 3. Os determinantes de orde maior que 3 deben desenrolarse por unha fila ou por unha columna.

Proposición 1.11 *Propiedades dos determinantes*

1. *Un determinante pode obterse desenrolando calquera fila (ou columna), non necesariamente a primeira como figura na definición.*

2. *Intercambiar dúas filas (ou columnas) dun determinante cambialle o signo.*

3. *Un determinante con dúas filas (ou columnas) iguais é nulo.*

4. *Un determinante non varía se a unha fila (ou columna) se lle suma unha combinación lineal das restantes.*

5. *Se B é a matriz que se obtén de multiplicar por un número λ só unha fila ou columna dunha matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, entón $\det(B) = \lambda\det(A)$.*

6. *O determinante é nulo se, e só se, unha fila (ou columna) é combinación lineal das restantes filas (ou columnas).*

Exemplo 1.12 Exemplos de cálculo de determinantes de orde 2, 3 e 4 respectivamente son:

$\det\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 15 + 1 = 16 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 20 - 9 + 6 - 15 + 2 = -35$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2(-3) - 3(-3) = 15$$

Proposición 1.13 *Unha matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ ten inversa se, e só se,* $\det(A) \neq 0$.

Neste caso $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{Adx}(A^t)$*, onde* $\mathrm{Adx}(A^t)$ *é a matriz formada polos adxuntos da matriz trasposta de* A.

Exemplo 1.14 Vexamos algúns exemplos de cálculo da inversa dunha matriz:

1. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 0$ e, polo tanto, non existe A^{-1}.

2. Como o determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ non é nulo, podemos calcular a súa inversa:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad Adx(A^t) = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 1.15 *Chamamos* **menores** *dunha matriz aos determinantes das submatrices cadradas que contén, é dicir, os determinantes das matrices cadradas que se obteñen dela eliminando filas e/ou columnas.*

Proposición 1.16 *O rango dunha matriz coincide coa maior das ordes dos seus menores non nulos.*

Na práctica é de grande utilidade usar este resultado para calcular o rango dunha matriz. Podemos usalo ademais para averiguar se un conxunto de vectores é linealmente independente. Por exemplo, os vectores $\{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$ son linealmente independentes porque $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ e así rango $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$, é dicir, as tres columnas da matriz son un conxunto de vectores linealmente independente. En xeral construiremos unha matriz colocando os vectores en columna (ou en fila) e estudaremos o seu rango, buscando o determinante de maior orde distinto de cero contido na matriz. Os vectores involucrados no menor que nos dá o rango son linealmente independentes e os demais son dependentes deles.

Exercicios

6. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

   Comproba os seguintes resultados:

   $\det(A) = 34,\ \det(B) = 5,\ \det(AB) = 170$

   $$3A + 7B = \begin{pmatrix} 4 & 14 & 2 \\ 3 & -5 & 23 \\ 7 & 16 & 26 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 8 & 13 & 16 \\ 8 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad AD = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$(A-B)C = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 8 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} \quad C^tA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -14 \end{pmatrix} \quad (BC)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

   $$DE = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ED = 1 \quad EC = \begin{pmatrix} 1 & -16 \end{pmatrix}$$

7. Calcula o valor dos determinantes:

   $$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \quad E = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad M = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \quad N = \begin{vmatrix} a^2 & a\,b & b^2 \\ 2\,a & a+b & 2\,b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

   $$D1 = \begin{vmatrix} a^2 & a\,b & a\,b \\ a\,b & a^2 & a\,b \\ a\,b & a\,b & a^2 \end{vmatrix} \quad D2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & a \end{vmatrix} \quad D3 = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

   $$D4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c+1 \end{vmatrix}$$

8. Calcula os valores de x que anulan os seguintes determinantes:

   $$\text{a)} \begin{vmatrix} x-b-a & a & b \\ c & x-c-b & b \\ c & a & x-c-a \end{vmatrix} \quad \text{b)} \begin{vmatrix} a+x & b & c \\ a & b+x & c \\ a & b & c+x \end{vmatrix} \quad \text{c)} \begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix}$$

9. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & k \end{pmatrix}$, calcula o valor de k para que se cumpra que:

   a) $A + B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ b) $AB = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ c) $2A - 4B = \begin{pmatrix} -26 & -12 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$

10. Indica para que valores dos parámetros a, b, c, se cumpre que $AB^t = C$, sendo
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Sexa $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Proba que $A^3 = I$. Usa este resultado para obter A^{-1}.

12. Consideremos a matriz:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Calcula M^2, MM^t e M^tM.

13. Para que valores de m teñen inversa cada unha das seguintes matrices:
a) $\begin{pmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} m & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} m & -1 & -5 \\ 10 & 4 & -1 \\ 4 & 2m & 9 \end{pmatrix}$

14. Calcula o rango das seguintes matrices:
a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -7 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

15. Estuda o rango das seguintes matrices, segundo os valores de m.
a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & m & m \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} m & 3 & 1 \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} m & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & m & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$

16. Unha empresa de construción ofrece tres modelos de vivendas: estilo rústico, estilo moderno e estilo contemporáneo. Os materiais básicos empregados en cada tipo de vivenda son o aceiro, a madeira, o vidro e a pintura, o número de unidades de cada unha recollénse na matriz M.
$$M = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

Cada fila indica a cantidade de materias primas necesarias para un determinado tipo de vivenda na orde mencionada; cada columna indica a cantidade dunha determinada materia prima necesaria para cada tipo de vivenda, tamén na orde mencionada.

a) Se o aceiro custa 2500 € por unidade e a madeira custa 1200 €, o vidro, a pintura e a man de obra custan 800, 150 e 1500 € por unidade, respectivamente, utiliza o cálculo matricial para calcular o custo total de fabricación de cada tipo de casa (materias e man de obra).

b) Se ademais temos un custo de transporte de 45 € por unidade de aceiro e 20, 30 e 5 € por cada unidade de madeira, vidro e pintura respectivamente, utiliza o cálculo matricial para calcular: o custo das materias empregadas en cada tipo de casa, o custo do transporte das mesmas e o custo total.

c) Aceptouse un pedido de cinco vivendas de estilo rústico, sete de estilo moderno e doce de estilo contemporáneo. Indica a operación matricial que nos dá a cantidade total de cada materia prima necesaria para realizar o traballo. Calcula o custo total das materias do pedido.

17. Un supermercado premia mensualmente aos seus empregados máis eficientes cun sobresoldo e con bonos de compra por valor de 10 euros cada un. Cada mes, 15 empregados son recompensados con 200 €, 190 €, 180 €... e 50, 47, 44 ... bonos respectivamente. Recolle estas bonificacións nunha matriz e utiliza o cálculo matricial para obter o valor total en euros das recompensas que recibe cada un dos 15 empregados e o valor total que a empresa inviste nas recompensas.

1.3. Sistemas de ecuacións lineais

Definición 1.17 *Un* **sistema de** m **ecuacións lineais** *con n incógnitas é unha expresión formal do tipo*

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots+ & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \cdots+ & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \cdots+ & a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right\}$$

Este sistema pode escribirse mediante a ecuación matricial $AX = b$, onde $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ e $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^t$.

1. A matriz A denomínase matriz de coeficientes do sistema, X matriz de incógnitas e b matriz de termos independentes.

2. $X_o = (x_{o1}, x_{o2}, \ldots, x_{on})^t$ é unha solución do sistema $AX = b$ se verifica $AX_o = b$.

3. Denotaremos por $(A|b) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}$ a matriz que ten como n primeiras columnas as columnas de A e a columna $n+1$ é a matriz b. Esta matriz denomínase matriz ampliada do sistema e defíneo perfectamente.

4. O sistema $AX = b$ denomínase homoxéneo se $b = (0, 0, \ldots, 0)^t$.

Exemplo 1.18 Os sistemas de ecuacións lineais

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=6\\2x-y+z=3\\-x-y+z=0\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}x+y-3z=\ \ 0\\2x-y-3z=-3\\4x+y-9z=-3\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}x+y-3z=\ \ 0\\2x-y-3z=-3\\4x+y-9z=\ \ 5\end{array}\right\}$$

poden poñerse en forma matricial do xeito seguinte:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&1&-3\\2&-1&-3\\4&1&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-3\\2&-1&-3\\4&1&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\5\end{pmatrix}$$

Un sistema de ecuacións lineais presenta dous problemas para estudar: a existencia de solución e a obtención do conxunto de solucións.

Proposición 1.19 *Sexa X_o unha solución dun sistema $AX = b$.*
Z é unha solución do sistema homoxéneo asociado $AX = \theta$ se, e só se, $Z + X_o$ é solución do sistema completo $AX = b$.

Este resultado afirma que as solucións do sistema son suma dunha solución particular deste sistema con cada unha das solucións do sistema homoxéneo asociado e, polo tanto, se o sistema ten solución, ten a mesma cantidade de solucións que o sistema homoxéneo asociado.

Observacións 1.20

1. Todo sistema homoxéneo é compatible, pois o vector nulo é sempre unha solución del. Ademais, se X_o é unha solución dun sistema homoxéneo $AX = \theta$ entón rX_o tamén é solución do mesmo sistema, para todo $r \in \mathbb{R}$, porque $ArX_o = rAX_o = r\theta = \theta$. Logo un sistema homoxéneo ou ben ten unha única solución (a trivial) ou ten infinitas.

2. Como consecuencia un sistema non homoxéneo pode non ter solución e no caso de tela pode ser única ou ter unha cantidade infinita, non se poden dar máis casos que estes tres.

3. Un sistema $AX = b$ dise que é incompatible se non ten solución. En caso contrario denomínase compatible.

   Se o sistema $AX = b$ é compatible e a solución é única, diremos que o sistema é compatible determinado; e diremos que é compatible indeterminado se ten infinitas solucións.

Teorema 1.21 (Teorema de Rouché-Fröbenius) *O sistema de m ecuacións lineais con n incógnitas, $AX = b$, ten solución se, e só se,* $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|b)$.
Ademais, se $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|b) = n$ *o sistema é compatible determinado e se* $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|b) < n$ *é compatible indeterminado.*

Exemplos 1.22 O sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ -x-y+z=0 \end{array}\right\}$ ten como matriz ampliada $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Como $\det(A) = -6 \neq 0$ entón $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A|b)$, e o sistema resulta ser compatible determinado.

O sistema $\left.\begin{array}{r} x+y-3z=0 \\ 2x-y-3z=-3 \\ 4x+y-9z=-3 \end{array}\right\}$ ten como matriz ampliada $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 4 & 1 & -9 & -3 \end{array}\right)$. Para este sistema de ecuacións lineais, $\det(A) = 0$, pero $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, polo que o rango de A vale 2. Dentro da matriz ampliada, o único xeito de completar o menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ a un menor de orde tres é $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ que tamén é nulo, polo que o rango da matriz ampliada tampouco vale tres, e vale 2.

Entón, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 2 < 3$ e o sistema é compatible indeterminado.

O sistema $\left.\begin{array}{r} x+y-3z=0 \\ 2x-y-3z=-3 \\ 4x+y-9z=5 \end{array}\right\}$ ten como matriz asociada $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 4 & 1 & -9 & 5 \end{array}\right)$. Neste sistema de ecuacións lineais, o rango da matriz A vale 2 pero o rango da matriz ampliada vale 3. Logo o sistema non ten solución, é incompatible.

Exemplo 1.23 Discutiremos o seguinte sistema, para tódolos posibles valores de a.

$$\left.\begin{array}{rrrl} ax & +y & +z & =1 \\ x & +ay & +z & =1 \\ x & +y & +az & =1 \end{array}\right\}$$

As matrices de coeficientes e ampliada son, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

Como $\det(A) = a^3 - 3a + 2$, os únicos valores de a que fan que este determinante sexa cero son $a = 1$ e $a = -2$. Daquela contemplamos os seguintes casos:

1. Se $a \neq 1$ e $a \neq -2$, entón $\text{rango}\, A = \text{rango}(A|b) = 3$ e coinciden co número de incognitas do sistema. O sistema é, pois, compatible determinado.

2. Se $a = 1$, a matriz ampliada é $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Entón $\operatorname{rango}(A|b) = \operatorname{rango} A = 1$ e non coinciden co número de incognitas do sistema, polo que se trata dun sistema compatible indeterminado.

3. Se $a = -2$, a matriz ampliada é $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ e $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, entón $\operatorname{rango} A = 2$. Ademais $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, entón o rango da matriz ampliada é 3 e neste caso o sistema é incompatible.

Método de Gauss para a resolución de sistemas de ecuacións lineais

Dicimos que dous sistemas de ecuacións lineais son *equivalentes* se teñen as mesmas solucións. Verifícase que:

1. Se unha ecuación dun sistema lineal se multiplica por unha constante non nula, o sistema resultante é equivalente.

2. Se a unha ecuación dun sistema lineal se lle suma unha combinación lineal das restantes ecuacións, o sistema resultante é equivalente.

O método de Gauss consiste en utilizar estas propiedades para construír un sistema equivalente o que queremos resolver que teña como matriz asociada unha matriz triangular superior, é dicir, que os coeficientes a_{ij} sexan nulos se $i > j$. As operacións necesarias realízanse directamente nas filas da matriz ampliada asociada ao sistema dado. O sistema equivalente obtido finalmente será moito máis fácil de resolver.

Exemplo 1.24 Resolveremos, empregando o método de Gauss, o sistema

$$\left.\begin{array}{ll} x + y - 3z & = 0 \\ 2x - y - 3z & = 3 \\ 4x + y - 9z & = 3 \end{array}\right\}$$

Facemos as operacións necesarias para obter un sistema equivalente que teña como matriz asociada unha matriz triangular superior. Traballamos directamente na matriz ampliada asociada a este sistema. Así, por exemplo no primeiro paso substituímos a segunda fila polo resultado de restarlle a primeira multiplicada por dous e substituímos a terceira polo resultado de restarlle a primeira multiplicada por catro, resultando

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -9 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-4F_1\to F_3]{F_2-2F_1\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_3-F_2\to F_3 \\ -\frac{1}{3}F_2\to F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

No último paso, substituímos a segunda fila polo resultado de multiplicala por $-\frac{1}{3}$ e a terceira polo resultado de restarlle a segunda.

No sistema equivalente obtido, a última fila non achega ningunha información, pois resulta na ecuación $0x+0y+0z=0$. Deste xeito non obtemos condicións para z, da segunda ecuación temos $y-z=-1$, entón $y=z-1$. Da primeira ecuación, $x+y-3z=0$, obtemos $x=3z-y=3z-(z-1)=3z-z+1=2z+1$.

Logo este sistema é compatible indeterminado e as súas solucións son $x=2z+1$, $y=z-1$, $z\in\mathbb{R}$.

Exemplo 1.25 Aplicamos o método de Gauss para resolver os seguintes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} 3x-4y+z&=2\\ 2x-5y&=0\\ x+y+z&=2 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 3x-4y+z&=3\\ 2x-5y&=1\\ x-y+z&=0 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x+y-z-2t&=\ \ 1\\ 2x+7y+3z-19t+5u&=-8\\ x+3y+z-8t+2u&=-3\\ x-2y-4z+7t-3u&=\ \ 7 \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} x-y-z&=1\\ 2x-2y&=0\\ x-y+z&=0 \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} x+3y+z-t&=6\\ 2x+7y+3z-4t&=15\\ x+y+2z+t&=1 \end{aligned}\right\}$ f) $\left.\begin{aligned} x+2z&=\ \ 1\\ -x+y+z&=-2\\ y+z&=\ \ 3\\ 2x+4z&=\ \ 2 \end{aligned}\right\}$

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2\\ 2 & -5 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & -5 & 0 & 0\\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1\to F_3]{F_2-2F_1\to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -7 & -2 & -4\\ 0 & -7 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_2-F_3\to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -7 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de onde deducimos que $\text{rango}(A)=\text{rango}(A|b)=2$ e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado. As solucións son $x=\frac{10-5z}{7}, y=\frac{4-2z}{7}, z\in\mathbb{R}$.

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 3\\ 2 & -5 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & -5 & 0 & 1\\ 3 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3F_1-F_3\to F_3]{F_2-2F_1\to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{3F_3+F_2\to F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

polo que $\text{rango}(A)=\text{rango}(A|b)=3$ e, daquela, o sistema é compatible determinado. A solución é $x=3, y=1, z=-2$.

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & -19 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & -8 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -4 & 7 & -3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-2F_1\to F_2\\ F_3-F_1\to F_3\\ F_4-F_1\to F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -15 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & 9 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2/5\to F_2\\ F_3/2\to F_3\\ F_4/3\to F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-F_3\to F_3\\ F_2+F_4\to F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posto que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 2$, o sistema é compatible indeterminado. As solucións son $x = 3 + 2z - t + u, y = -2 - z + 3t - u, z, t, u \in \mathbb{R}$.

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-2F_1\to F_2\\ F_3-F_1\to F_3\\ F_4-F_1\to F_4}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2\to F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto, $\text{rango}(A) = 2$ e $\text{rango}(A|b) = 3$. O sistema é incompatible, non ten solución.

e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & -4 & 15 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3\to F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & -4 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-F_2\to F_2\\ F_3-2F_1\to F_3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -1 & -6 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3\to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3/3\to F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Vemos que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3$, polo que o sistema resulta compatible indeterminado. As solucións son $x = -\frac{7}{3} - \frac{11}{3}t, y = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}t, z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t, t \in \mathbb{R}$.

f)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1+F_3\to F_3\\ 2F_1-F_4\to F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3-F_2\to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3$, o sistema é compatible determinado. A solución é $x = 5$, $y = 5$ e $z = -2$.

Exemplo 1.26 Discutimos e resolvemos, nos casos en que sexa posible, os seguintes sistemas para tódolos posibles valores de a e b.

a) $\left.\begin{aligned} 3x-y+2z&=1\\ x+4y+z&=b\\ 2x-5y+az&=-2 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} ax+y&=1\\ x+az&=0\\ ay+z&=b \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} ax+y&=b\\ 2y+z&=a\\ ax-z&=2b \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} x+ay+az&=3\\ x+z&=2\\ ax-(a+1)y-z&=b \end{aligned}\right\}$

e) $\left.\begin{aligned} x-y+3z&=\quad 1\\ 2ay-2z+6t&=\quad 2\\ z-3t&=\ -1\\ 3z-at&=a+1 \end{aligned}\right\}$ f) $\left.\begin{aligned} x-y&=a\\ 2ax+z&=b\\ ax+ay+z&=3 \end{aligned}\right\}$

a) $\det(A)=13a-13$. Se $a\neq 1$, verifícase que $\operatorname{rango}(A)=\operatorname{rango}(A|b)=3=$ nº de incógnitas, polo que o sistema ten solución única.

A solución é: $x=\dfrac{4a+23+ba-10b}{13a-13}$, $y=\dfrac{3ba-a-4b+4}{13a-13}$, $z=\dfrac{-39+13b}{13a-13}$.

Se $a=1$, entón $\operatorname{rango}(A)=2$ porque $\det(A)=0$ e $\begin{vmatrix}3&-1\\1&4\end{vmatrix}\neq 0$. Ademais completando este menor dentro da matriz ampliada temos $\begin{vmatrix}3&-1&1\\1&4&b\\2&-5&-2\end{vmatrix}=-39+13b$. Así, se ademáis $b\neq 3$, $\operatorname{rango}(A|b)=3$, polo que o sistema é incompatible. Se $b=3$, sendo $a=1$, $\operatorname{rango}(A|b)=2$, polo que o sistema é compatible indeterminado. Neste caso o sistema a resolver é: $\left.\begin{array}{rrl} x & +z & =3-4y\\ 2x & +z & =-2+5y \end{array}\right\}$, de onde se ten que $x=-5+9y$, $z=8-13y$, $y\in\mathbb{R}$.

b) $\det(A)=-a^3-1$. Se $a\neq -1$, entón $\operatorname{rango}(A)=\operatorname{rango}(A|b)=3=$ número de incógnitas, polo que o sistema ten solución única. A solución é $x=\dfrac{a^2-ab}{a^3+1}$, $y=\dfrac{a^2b+1}{a^3+1}$ e $z=\dfrac{b-a}{a^3+1}$.

Se $a=-1$, entón $\operatorname{rango}(A)=2$ porque $\det(A)=0$ e $\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}\neq 0$. Ademais completando este menor dentro da matriz ampliada temos $\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&0&0\\0&-1&b\end{vmatrix}=-b-1$. Así, se $b\neq -1$, e o sistema é incompatible. Se $b=-1$, sendo $a=-1$, entón $\operatorname{rango}(A|b)=2$, polo que o sistema é compatible indeterminado e as solucións son $x=z, y=1+z, z\in\mathbb{R}$.

c) $\det(A)=-a$. Se $a\neq 0$, entón $\operatorname{rango}(A)=\operatorname{rango}(A|b)=3=$ número de incógnitas, polo que o sistema ten solución única $x=-1, y=\dfrac{a^2+ab}{a}, z=\dfrac{-2ab-a^2}{a}$.

Se $a=0$, entón $\operatorname{rango}(A)=2$ $\det(A)=0$ e $\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\neq 0$. Ademais completando este menor dentro da matriz ampliada temos $\begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2b \end{vmatrix} = 0$, polo que o sistema é compatible indeterminado para todo $b \in \mathbb{R}$ e as solucións son $y = b, z = -2b, x \in \mathbb{R}$.

d) $\det(A) = a + 1$. Se $a \neq -1$, entón $\text{rango}(A) = \text{rango}((A|b) = 3 =$ número de incógnitas, polo que o sistema ten solución única:

$$x = \frac{3 + 3a - 2a^2 + ab}{1 + a}, \quad y = \frac{1 - b + ba + 3a - 2a^2}{1 + a} \text{ e } z = \frac{-1 - a - ba + 2a^2}{1 + a}.$$

Se $a = -1$, entón $\text{rango}(A) = 2$ porque $\det(A) = 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Ademais completando este menor dentro da matriz ampliada temos $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = b + 2$. Así, se $b \neq -2$, o sistema é incompatible. Se $b = -2$, $\text{rango}(A|b) = 2$, polo que o sistema é compatible indeterminado e a solución é $x = 2 - z$, $y = -1 - 2z$, $z \in \mathbb{R}$.

e) Temos que $\det(A) = 2a(-a + 9)$. Se $a \neq 0$, $a \neq 9$, entón $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 4 =$ número de incógnitas, polo que o sistema ten solución única, $x = \dfrac{-13a}{-a + 9}$, $y = 0$, $z = \dfrac{4a + 3}{-a + 9}$, $t = \dfrac{a + 4}{-a + 9}$.

Se $a = 0$, entón $\text{rango}(A) = 3$ e $\text{rango}(A|b) = 3$, polo que o sistema é compatible indeterminado.

Se $a = 9$, entón $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3$, polo que o sistema é compatible indeterminado.

f) $\text{rango}(A) = 2$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Ademais, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix} = b - a^2 - 3$. Así, se $b = a^2 + 3$, $\text{rango}(A|b) = 2$, polo que o sistema e compatible indeterminado. As solucións son

$$x = \frac{a^2 + 3 - z}{2a}, y = \frac{-a^2 + 3 - z}{2a}, z \in \mathbb{R}$$

Se $b \neq a^2 + 3$, entón $\text{rango}(A|b) = 3$ e o sistema é incompatible.

Ás veces interesaranos resolver sistemas de ecuacións lineais que proveñen dunha situación determinada, entón teremos que interpretar se as solucións obtidas poden considerarse realmente solucións para a situación que esteamos a tratar. Vemos un exemplo.

Exemplo 1.27 Unha empresa elabora tres produtos, A, B e C, que deben ser procesados cada un por tres máquinas, I, II e III. Cada unidade de A requiere 3 horas de procesamento na máquina I, 1 hora na máquina II e 8 horas na máquina III. Cada unidade de B require 2 horas na máquina I e 3 horas en cada unha das outras dúas, mentras cada unidade de C necesita 2, 4 e 2 horas nas máquinas respectivamente. Ademais disponse das máquinas I, II e III por 900, 1200 e 1500 horas, respectivamente. Cantas unidades (enteiras) de cada produto poden elaborarse usando todo o tempo dispoñible nas máquinas?

Se representamos por a, b, c o número de unidades de cada un dos produtos A, B e C que serán elaborados, temos que se deben verificar as condicións:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 3a & +2b & +2c & = & 900 \\ a & +3b & +4c & = & 1200 \\ 8a & +3b & +2c & = & 1500 \end{array}\right\}$$

Como rango $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 900 \\ 1 & 3 & 4 & 1200 \\ 8 & 3 & 2 & 1500 \end{pmatrix} = 2$, trátase de un sistema compatible indeterminado, e as infinitas solucións son:

$$a = \frac{300 + 2c}{7}, \quad b = \frac{2700 - 10c}{7}, \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

Pero destas infinitas solucións só nos interesan os valores de a, b, c que sexan números enteiros non negativos. Por exemplo $c = 0, b = \frac{2700}{7}, a = \frac{300}{7}$ é unha solución do sistema pero non é unha solución válida.

Precisamos que c sexa un número enteiro non negativo e que $300 + 2c$ e $2700 - 10c$ sexan múltiplos de 7, para que a e b sexan tamén números enteiros. Nótese que ademais débese verificar $2700 - 10c \geq 0$, e dicir, $0 \leq c \leq 270$

Probando con $c = 0, 1, \ldots$ vemos que o primeiro que nos vale é $c = 4$, que nos da $a = 44$ e $b = 380$. A partir de aquí deberemos ir sumando a 4 múltiplos de 7, de xeito que os posibles valores de c son:

$$c = 4, 11, 18, \ldots, 270$$

É dicir, $c = 4 + 7k$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$, mentres obteñamos $c \leq 270$, o cal sucede para $k \leq 38$.

Así temos 39 solucións posibles para o problema exposto:

$$\begin{array}{lll} a = 44 & b = 380 & c = 4 \\ a = 46 & b = 370 & c = 11 \\ a = 48 & b = 360 & c = 18 \\ \ldots & \ldots & \\ a = 120 & b = 0 & c = 270 \end{array}$$

Poderiamos cuestionarnos cal é a solución que nos dá o maior número total de unidades producidas. Se engadimos ás solucións anteriores unha terceira columna co total de unidades, $T = a + b + c$, temos:

$$\begin{array}{llll} a = 44 & b = 380 & c = 4 & T = 428 \\ a = 46 & b = 370 & c = 11 & T = 427 \\ a = 48 & b = 360 & c = 18 & T = 426 \\ \ldots & \ldots & & \\ a = 120 & b = 0 & c = 270 & T = 390 \end{array}$$

E vemos que a solución que nos dá o maior total de unidades (enteiras) producidas usando as tres máquinas todo o tempo posible é $a = 44, b = 380, c = 4$ con 428 unidades en total.

De feito, $T = \frac{3000-c}{7}$, polo que aumentando o valor de c diminúe o de T, por eso T é máximo para o valor máis pequeno de c.

Método de Gauss para calcular a inversa dunha matriz

Sexa $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ unha matriz verificando $\det(A) \neq 0$ e denotemos $A^{-1} = (x_1|x_2|\dots|x_n)$ onde $x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ é a columna j-ésima de A^{-1}. Calcular A^{-1} equivale a resolver o sistema $AA^{-1} = I$, é dicir, o sistema $A(x_1|x_2|\dots|x_n) = (Ax_1|Ax_2|\dots|Ax_n) = I$

Equivalentemente, temos que resolver os n sistemas de ecuacións lineais, $Ax_j = e_j$ con e_j a columna j-ésima da matriz identidade. Estes sistemas teñen a mesma matriz de coeficientes, a matriz A, soamente varía a columna de termos independentes e como $\det(A) \neq 0$, todos teñen solución única. Ademais ao resolver estes sistemas polo método de Gauss fixámonos só nos elementos da matriz de coeficientes para decidir as operacións a realizar. Logo podémolos resolver conxuntamente, considerando a matriz formada por dúas submatrices: a propia matriz A, que é a matriz de coeficientes común a tódolos sistemas, e a matriz identidade, que recolle as columnas de termos independentes dos mencionados sistemas.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Utilizando o método de Gauss, transformamos esta matriz primeiro nunha matriz coa primeira submatriz triangular superior e despois noutra matriz con esta submatriz diagonal na forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array}\right)$$

onde cada unha das n columnas últimas sería a única solución do sistema $Ax_j = e_j$, é dicir, as n columnas da matriz A^{-1}. Así, a matriz inversa de A é a segunda submatriz obtida finalmente:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.28 Na práctica, para calcular a inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ podemos realizar as operacións que seguen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_2 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

e, de aquí, temos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exercicios

18. Calcula, se é posible, a inversa de cada unha das seguintes matrices empregando o método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

19. Calcula o valor de a, b e c, sabendo que $(2, 1, -1)$ é unha solución do sistema

$$\left.\begin{array}{r} ax + by + cz = a + c \\ bx - y + bz = a - b - c \\ cx - by + 2z = b \end{array}\right\}$$

20. Multicines SUR ten tres salas, A, B e C. Os prezos de entrada ás salas son de 7, 8 e 9 euros, respectivamente. Nun día determinado, a recadación conxunta dos tres espacios foi de 1540 euros e o total de espectadores 200. Se se intercambiaran os espectadores das salas A e B, a recadación total teríase incrementado en 40 euros. Calcula o número de espectadores que acudiron a cada unha das salas ese día.

21. Antía, Brais e Carmela deben repartir un premio en metálico. Antía debe recibir 3000 € máis que a media de Brais e Carmela, Brais debe recibir a media do que reciban as súas amigas e Carmela debe recibir 3000 € menos que a media do que reciban Brais e Antía. Cantos euros recibirá Antía máis que Brais? Se o premio é de 99000 €, canto recibirá cada un?

22. A produtora cinematográfica Filmtropía vai rodar tres películas nos próximos meses, unha de temática romántica, outra histórica e unha terceira de acción. En cada unha debe contratar un número predeterminado de actrices e actores e un número de intérpretes infantís que pode ser variable. Cada día de rodaxe ten asignada unha cantidade fixa para o pago dos honorarios a tódolos intérpretes, este orzamento diario e a distribución de intérpretes por película figuran no cadro adxunto.

Película	Romántica	Histórica	Acción
Actrices	1	4	3
Actores	2	4	2
Intérpretes infantís	c	3c-3	2c-1
Orzamento diario (miles de €)	18	44	30

A retribución dos actores e das actrices será a mesma, e fixarase en función do número de intérpretes infantís que se contraten. Cal deberá ser o número de intérpretes infantís en cada película? Determina os honorarios de cada intérprete por xornada de traballo.

23. Dous produtos A e B compiten no mercado. As demandas x_A e x_B destes produtos están relacionadas cos seus prezos P_A e P_B polas ecuacións de demanda $x_A = 17 - 2P_A + \frac{1}{2}P_B$ e $x_B = 20 - 3P_B + \frac{1}{2}P_A$. As ecuacións da oferta, que dan os prezos aos cales x_A e x_B estarán dispoñibles no mercado, son $P_A = 2 + x_A + \frac{1}{3}x_B$ e $P_B = 2 + \frac{1}{2}x_B + \frac{1}{4}x_A$. No punto de equilibrio do mercado, dado que a demanda e a oferta deben ser iguais, deben satisfacerse as catro ecuacións. Calcula os valores de equilibrio x_A, x_B, P_A e P_B.

24. M. Rito é xerente dun hotel en Sanxenxo que ten en total 120 habitacións, que estiveron ocupadas na súa totalidade no mes de xullo pasado. As reservas realizaronse por catro vías diferentes: a través da web do hotel, dende a empresa turística madrileña Zarzuela, por unha compañía de Abu Dhabi e a través de chamada telefónica directa.

    No mes de agosto o hotel mantívose cheo, houbo a mesma cantidade de reservas por teléfono e vía web que en xullo, pero a compañía de Abu Dhabi cancelou tódalas súas reservas e a empresa madrileña aumentou as súas nun 50 %. En setembro só se ocuparon 90 habitacións, as reservadas por teléfono duplicaronse, por vía web mantiveronse estables, pero tanto a compañía de Abu Dhabi coma a empresa madrileña renunciaron a tódalas súas reservas.

    Anteriormente, no mes de xuño quedaran sen ocupar 42 habitacións de xeito que, en referencia ao mes de xullo, as reservas por teléfono e vía web foron o 80 %, a compañía de Abu Dhabi reservou o 60 % e a empresa madrileña o 30 %. Que cantidade de reservas se fixo cada mes a través de cada unha das catro vías mencionadas?

25. Unha empresa fabrica cravos, parafusos e roscas, que deben pasar todos por unha máquina cortadora, un torno e unha empaquetadora. Os cravos empaquétanse en caixas de 100 unidades

que requiren un total de 6 minutos na cortadora e 4 minutos no torno por caixa. Os parafusos empaquétanse en caixas de 50 unidades que requiren un total de 6 minutos na cortadora e 8 minutos no torno. As roscas empaquétanse en caixas de 50 unidades que requiren un total de 4 minutos na cortadora e 7 minutos no torno. Se a empaquetadora gasta medio minuto por caixa, determina a produción nunha xornada de 5 horas para que se agoten os tempos dispoñibles na cortadora e no torno fabricando caixas completas. Canto tempo traballa a empaquetadora cada xornada?

26. No taller de GUmersindo CHIvite fanse bolsos artesanalmente reciclando roupa usada. Este material sepárase en tres grupos: pano téxtil, peles (sintéticas e naturais) e pequenos lotes de guarnicións (cremalleiras, botóns, cordóns . . .).

    Elaboran tres modelos de produto: bolsos, totebags e mochilas. Para facer un bolso precisanse 0.75 m^2 de tea, 0.75 m^2 de pel e un lote de guarnicións. Para facer unha totebag precisanse soamente 0.75 m^2 de tea e para facer unha mochila, dous metros cadrados de tea, 0.5 m^2 de pel e tres lotes de guarnicións.

    Acaba de chegar un contedor de roupa usada que xerará 210 m^2 de tea aproveitable, a quinta parte de pel e 126 lotes de guarnicións. Cantos bolsos, totebags e mochilas poderán facer con este material? Cantos poderán facer con T m^2 de téxtil e as proporcións correspondentes de pel e guarnicións?

27. Discute e resolve, nos casos en que sexa posible, os seguintes sistemas para tódolos posibles valores dos parámetros.

    a) $\left.\begin{aligned} ax+y&=1\\ -x+ay+z&=1\\ -x+y+az&=1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} ax+z&=1\\ x+ay&=0\\ y+az&=2 \end{aligned}\right\}$

    c) $\left.\begin{aligned} x+ay+z&=-1\\ 2x+y+az&=0\\ x+2y+z&=-1 \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x-ay+2z&=0\\ x+y-az&=1 \end{aligned}\right\}$

    e) $\left.\begin{aligned} 2x+y-4z&=m\\ 3x-y&=11\\ y+z&=6\\ 2y-z&=m \end{aligned}\right\}$ f) $\left.\begin{aligned} 2x+y+3z+t&=a\\ 4x+2y+5z&=b\\ 6x+3y+8z+at&=1 \end{aligned}\right\}$

    g) $\left.\begin{aligned} 2x-my+2z&=m\\ 2x+2y&=0\\ x+y+z&=m \end{aligned}\right\}$ h) $\left.\begin{aligned} mx+(2+m^2)y&=1+m\\ my-z&=1\\ mx+2y+(2m-4)z&=5 \end{aligned}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{c} mx+y{=}2m \\ x+z{=}0 \\ x+my{==}\,0 \end{array}\right\}$ j) $\left.\begin{array}{c} (m+1)x+z{=}1 \\ (m+1)x+y+z{=}m+1 \\ (m+1)x+my+(m-1)z{=}m \end{array}\right\}$

28. Resolve os sistemas:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.4. Introdución a Matlab. Vectores e matrices con Matlab

En tódolos capítulos deste manual, incluímos unha sección na que damos unhas pequenas pinceladas sobre como resolver cálculos relacionados coa materia tratada utilizando Matlab.

Preténdese dar a coñecer ao alumnado o funcionamento básico do programa Matlab, de xeito que poida utilizar este software individualmente para autocorrexirse ou axudarse na resolución de moitos dos exercicios propostos na clase.

O alumno debe darlle tanta importancia á mecánica das sentenzas usadas como á comprensión dos resultados que Matlab nos ofrece, posto que de nada serve utilizar unha calculadora para facer cálculos se non se saben interpretar os resultados que esta nos amosa.

Operacións con matrices

As matrices en Matlab escríbense entre corchetes. Os datos introdúcense por filas. Os elementos de cada fila sepáranse por espazos en branco ou comas. Ao final de cada fila márcase co punto e coma. Así, as matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ introdúcense como:

```
A=[5 -1 0 3;1 1 -2 4;1 3 -7 5]
B=[-1 0 1;1 -3 2;-2 3 -5]
C=[ 1 1 0;2 1 4;-5 0 3;1 -1 6]
```

A suma e o produto de matrices efectúanse usando os operadores + e `*`, respectivamente. A potencia co operador `^`, de xeito que `A^3` equivale ao produto matricial `A*A*A`. A trasposta dunha matriz `A` calcúlase engadindo á dereita un apóstrofe, `A'`. As ordes `det`, `inv` e `rank` calculan, respectivamente, o determinante, a inversa e o rango dunha matriz.

Se precisamos usar parámetros necesitaremos definilos antes. Por exemplo, para crear a variable simbólica `a`, debemos introducir `syms a`. Así, para introducir a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1-a \end{pmatrix}$ escribiremos:

```
syms a
M=[1 a;1 1-a]
```

Se quixésemos saber os valores de a que anulan o determinate de M, podemos usar a sentenza `solve`:

```
D=det(M)
solve(D)
```

Exercicios

29. Para as matrices definidas anteriormente, calcula, cando sexa posible: $A+B$, $2A^t - C$, A^tB, $\det(A)$, $\text{rango}(A)$, $B(C^t - A)$, $\det(B)$, $\det(CA)$, $\text{rango}(CA)$, $B^{-1}A$, $(AC)^{-1}$, $(AC)^2 - B^3$, $\det(M)$, M^{-1} e $3M^2$.

30. Calcula para que valor de a a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a^3 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ ten inversa.

31. Calcula para que valor de a a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ a & 2a & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ten inversa.

32. Calcula para que valores de a e b a matriz $C = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$ ten inversa.

Os vectores en Matlab considéranse como unha matriz fila. Por exemplo:

```
x=[1 2 -1], y=[4, 2, -3]
```

O comando `dot(x,y)` devolve o produto escalar dos vectores `x` e `y`. Se `x` e `y` son vectores fila, `dot(x,y)` é o mesmo ca `x*y'`, onde `y'` é o vector y^t.

O produto escalar dos vectores $x = (1, 2, -1)$ e $y = (4, 2, -3)$ pode calcularse, pois, dun dos dous xeitos seguintes:

```
x=[1 2 -1], y=[4, 2, -3]
dot(x,y)
x*y'
```

O resultado que nos devolve o programa en ambos os casos é 11.

Para calcular a norma dun vector `x` utilizaremos `norm(x)`. Para obter a distancia entre dous puntos `x` e `y` podemos, pois, empregar a sentenza

```
norm(x-y)
```

1.5. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Para os vectores $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 0)$ e $w = (0, 1, 1)$ unha das seguintes afirmacións é FALSA.
   a) $u,\ v$ e w son linealmente dependentes. b) $u = v + w$
   c) u e $(1, 0, -1)$ son linealmente independentes. d) $||u|| = 1$

2. Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Unha das seguintes afirmacións é FALSA.
   a) $B^t A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
   c) $BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. O rango da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ vale: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

4. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, entón
   a) rango $A = 2$ b) $A^{-1} = A$ c) A é simétrica. d) $\det(A) = 0$

5. Sexa $A \in \mathcal{M}_{5\times 4}$. Pódese afirmar que
   a) rango $A \leq 4$ b) A pode ter 5 filas linealmente independentes.
   c) $\det(A) > 0$ d) rango $A = 4$

6. Cal das seguintes afirmacións é FALSA?
   a) rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 1$ b) rango $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3$
   c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7. Para que valores de m a matriz $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ten inversa?

   a) Se $m = 1$ b) Se $m \neq 0$ c) Se $m \neq 1$ d) Se $m \neq -1$

8. Se $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entón

   a) A é simétrica cando $m = 0$ b) A ten inversa cando $m = 3$
   c) $\det(A) = 0$ cando $m = 3$ d) $\operatorname{rango} A = 1$ cando $m \neq 3$

9. Sexa $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 2$. Cal das seguintes afirmacións é FALSA?

   a) $\operatorname{rango} A = 2$
   b) $\operatorname{rango} A = 4$
   c) O sistema homoxéneo $AX = \theta$ só ten a solución trivial.
   d) O sistema $AX = b$ é compatible determinado, para todo b.

10. O sistema $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 13 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$

    a) ten dúas solucións, $x = 2$ e $y = 3$.
    b) ten infinitas solucións, entre elas $x = 2$, $y = 3$.
    c) é incompatible.
    d) ten solución única.

11. O sistema $\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ -y + 2z &= 1 \\ x + z &= 2 \end{aligned}\right\}$

    a) é compatible determinado. b) é compatible indeterminado.
    c) é incompatible. d) é homoxéneo.

12. Sexa $Ax = b$ un sistema de ecuacións lineais. Se o sistema homoxéneo $Ax = \theta$ é compatible determinado e existe $x_o \in \mathbb{R}^n$ é tal que $Ax_o = b$, entón

    a) x_o é a única solución de $Ax = \theta$ b) $Ax = b$ é compatible indeterminado.
    c) $Ax = b$ é incompatible. d) $Ax = b$ é compatible determinado.

13. Cal das seguintes afirmacións é FALSA?

    a) $x = 1,\ y = 0$ é unha solución do sistema $\left.\begin{aligned} x\ln(1+y) + y^2 &= 0 \\ x + \sqrt{y} &= 1 \end{aligned}\right\}$.

    b) $\left.\begin{aligned} x\ln(1+y) + y^2 &= 0 \\ x + \sqrt{y} &= 1 \end{aligned}\right\}$ é un sistema de ecuacións que non son lineais.

    c) O sistema $\left.\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 3y &= 2 \end{aligned}\right\}$ é un sistema de ecuacións lineais compatible determinado.

d) O sistema $\left.\begin{array}{rl} x-y & =0 \\ 2x-2y & =3 \end{array}\right\}$ é un sistema de ecuacións lineais compatible indeterminado.

14. Sobre as ecuacións $\left.\begin{array}{r} 3x=3 \\ y+z=0 \end{array}\right\}$, pódese afirmar que

    a) non forman un sistema.

    b) forman un sistema compatible indeterminado.

    c) forman un sistema compatible determinado.

    d) forman un sistema incompatible.

1.6. Solucións dos exercicios propostos

3.
$||b|| = 2\sqrt{2};\ \frac{b}{||b||} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ $\qquad ||c|| = 5;\ \frac{c}{||c||} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

$||e|| = \sqrt{17};\ \frac{e}{||e||} = (\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}, 0)$ $\qquad ||h|| = \sqrt{6};\ \frac{h}{||h||} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$

7. $N = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$D1 = a^6 - 3a^4b^2 + 2a^3b^3$
$D2 = a(a-b)(a-c)(b-c)$
$D3 = a^4 - b^4$
$D4 = abc$

8.
a) $x = 0$, $x = a + b + c$ (dobre)
b) $x = 0$ (dobre), $x = -a - b - c$
c) $x = a$, $x = b$, $x = -a - b$

11. $A^{-1} = A^2$

12.
$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$MM^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

$$M^tM = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13. a) Para $m \neq 0, 2$ b) Para todo $m \in \mathbb{R}$ c) Para $m \neq 3, 29$

15. a) Se $m \neq 0$, a matriz ten rango 3. Se $m = 0$, ten rango 1.
b) Se $m \neq 3$, a matriz ten rango 2. Se $m = 3$, ten rango 1.
c) Se $m \neq 2$, a matriz ten rango 3. Se $m = 2$, ten rango 2.
d) Se $m \neq 1$, a matriz ten rango 3. Se $m = 1$, ten rango 1.

20. Acudiron 100 espectadores á sala A, 60 á sala B e 40 á sala C.

21. Antía recibirá sempre 2000 € máis que Brais. Cando o premio é 99000 €, Antía recibirá 35000 €, Brais 33000 € e Carmela 31000 €.

22. Debe haber 3 intérpretes infantís na película romantica, 6 na histórica e 5 na de acción. Os honorarios dos intérpretes adultos son de 4000 € diarios, e de 2000 € para os intérpretes infantís.

23. $x_A = 4$, $x_B = 6$, $P_A = 8$, $P_B = 6$.

24. En xuño: 48 reservas vía web, 9 da empresa madrileña, 9 da compañía de A.D. e 12 por teléfono.

En xullo: 60 reservas vía web, 30 da empresa madrileña, 15 da compañía de A.D. e 15 por teléfono.

En agosto: 60 reservas vía web, 45 da empresa madrileña, ningunha da compañía de A.D. e 15 por teléfono.

En setembro: 60 reservas vía web, ningunha da empresa madrileña nin da compañía de A.D. e 30 por teléfono.

25. A empaquetadora úsase 27 minutos cada xornada, para empaquetar 30 caixas de cravos, 12 de parafusos e 12 de roscas.

26. Co contedor que chegou pódense facer 36 bolsos, 164 totebags e 30 mochilas. En xeral, con T m^2 de téxtil faranse $\frac{6}{35}T$ bolsos, $\frac{82}{105}T$ totebags e $T/7$ mochilas.

28. $x_n = 1/4, x_{n-1} = 1/8, \ldots, x_1 = \frac{1}{2^{n+1}}$

$\alpha_n = 1, \alpha_{n-1} = -1, \alpha_{n-2} = 1, \ldots, \alpha_2 = (-1)^n, \alpha_1 = 0$

Solucións autoavaliación. 1d, 2c, 3c, 4d, 5a, 6b, 7c, 8c, 9a, 10d, 11a, 12d, 13d, 14b

Capítulo 2

Diagonalización de matrices e formas cadráticas.

Recóllense neste capítulo algunhas propiedades das matrices cadradas que precisaremos para o desenrolo da materia. Comezamos traballando cos conceptos de autovalor e autovector.

2.1. Autovalores e autovectores dunha matriz cadrada

Definición 2.1 *Diremos que un vector non nulo $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \theta$, é un* **autovector** *(ou vector propio) da matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ se existe un número real λ de xeito que $Av^t = \lambda v^t$. A este valor λ chamámoslle* **autovalor** *(ou valor propio) da matriz A.*

Exemplo 2.2 Vexamos un par de exemplos sinxelos:

$v = (2, 1)$ é un autovector da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ asociado ao autovalor $\lambda = 3$ porque

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, e

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, temos que -2 tamén é un autovalor de $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, ademais $(1, -2)$ e $(-2, 4)$ son autovectores asociados a este mesmo autovalor.

Tense entón que $\lambda \in \mathbb{R}$ é un autovalor de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ se, e só se, existe un vector $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \theta$, de xeito que $Av^t = \lambda v^t$. É dicir, se existe un vector non nulo, $v \in \mathbb{R}^n$, de maneira que $(A - \lambda I)v^t = \theta$.

Daquela, $\lambda \in \mathbb{R}$ é un autovalor de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ se, e só se, o sistema de ecuacións lineais $(A - \lambda I)v^t = \theta$ ten solución distinta da trivial, é dicir, é compatible indeterminado. Polo teorema de Rouché- Fröbenius, isto equivale a dicir que $\det(A - \lambda I) = 0$. Esta propiedade permitiranos calcular os autovalores dunha matriz cadrada.

Proposición 2.3 *$\lambda \in \mathbb{R}$ é un autovalor da matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ se, e só se, $\det(A - \lambda I) = 0$, sendo I a matriz identidade de orde $n \times n$.*

Observación 2.4 Polo tanto, para calcular os autovalores da matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ resolveremos a ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$. Este determinante proporciona un polinomio en λ que se denomina **polinomio característico** de A.

Daquela, unha matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ ten, ao sumo, n autovalores reais. Podenos resultar útil saber que as matrices simétricas teñen tódolos seus autovalores reais.

Exemplos 2.5

1. O polinomio característico da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ é

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

   Logo os autovalores desta matriz son aqueles valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, é dicir, $\lambda = 3$ e $\lambda = -2$.

2. O polinomio característico de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ é

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 15\lambda + 18 \end{aligned}$$

   Os autovalores desta matriz son aqueles números reais $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 15\lambda + 18 = 0$. Entón, $\lambda = 6$ é o único autovalor real desta matriz.

3. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, entón $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 + 16.$

   Dado que $-\lambda^3 + 12\lambda^2 + 16 = 0$ se, e só se, $\lambda = -2$ (con multiplicidade 2) ou $\lambda = 4$, os autovalores de A son -2 e 4.

Exercicios

1. Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, calcula os autovalores das matrices $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

2. Dada a matriz $T = \begin{pmatrix} a & -5 \\ 10 & b \end{pmatrix}$, calcula os valores de a e b para que o vector $(1,2)$ sexa autovector asociado o autovalor $\lambda = -2$. Cal é o outro autovalor desta matriz?

3. Comproba que o vector $(1,1)$ é autovector asociado á matriz $\begin{pmatrix} 4.2 & -3.1 \\ 6.2 & -5.1 \end{pmatrix}$.

4. Comproba que os vectores $(2,2)$ e $(0,-1)$ son autovectores asociados a $\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-2b & 2b \end{pmatrix}$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$. A que autovalores están asociados?

5. Calcula os autovalores das seguintes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Calcula os autovalores e os autovectores das seguintes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 5 \\ -5 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2. Diagonalización de matrices

Definición 2.6 *Diremos que unha matriz cadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é* **diagonalizable** *se existen unha matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e unha matriz inversible $P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tales que $A = PDP^{-1}$*

As matrices diagonais teñen propiedades interesantes. Pódense multiplicar sen dificultade, os seus determinantes calcúlanse facilmente, pódese determinar rapidamente se tales matrices teñen inversa e, en caso afirmativo, as súas inversas son sinxelas de obter.

Se A é unha matriz diagonalizable, entón tamén é sinxelo calcular calquer potencia de A, xa que como $A = PDP^{-1}$ tense que $A^k = PDP^{-1}PDP^{-1} \overset{k)}{\ldots} PDP^{-1} = PD^kP^{-1}$

Nos non estudiaremos formalmente que condicións se teñen que verificar para que unha matriz sexa diagonalizable, pero si que as comentaremos.

Proposición 2.7 *Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é unha matriz con tódolos seus autovalores reais distintos, entón A é diagonalizable.*

Ademais, o xeito de obter matrices P e D que diagonalizan unha matriz A que teña tódolos seus autovalores reais distintos é o seguinte: os elementos da diagonal principal da matriz diagonal D son os autovalores de A e as columnas da matriz P son autovectores de A asociados a cada un dos diferentes autovalores, colocados na mesma orde que estes. Como se verifica que os autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independentes, esta matriz P é inversible.

En xeral, resultan ser diagonalizables aquelas matrices que, tendo tódolos autovalores reais, posúen tamén tantos autovectores linealmente independentes como indica a multiplicidade do autovalor ao que están asociados. As matrices P e D que a diagonalizan obtéñense dun xeito similar.

Debemos saber que as matrices simétricas están nestas condicións e polo tanto son todas diagonalizables.

Exemplo 2.8 Consideremos a matriz real simétrica $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcularemos A^{20}, diagonalizando previamente A.

O polinomio característico de A é $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36$. Polo tanto, os autovalores de A son as solucións da ecuación $-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 = 0$, é dicir 2, 3 e 6. Como os autovalores de A son distintos, entón A é diagonalizable, é dicir, existen dúas matrices P, D tales que $A = PDP^{-1}$. Para calculalas necesitamos un autovector asociado a cada un dos autovalores de A.

Calculemos un autovector asociado o autovalor $\lambda = 2$. Será un vector $v = (x, y, z), v \neq (0, 0, 0)$, verificando $(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, é dicir,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

As coordenadas de v serán as solucións do sistema $\left.\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ -x + 3y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$ distintas da solución trivial. Así $y = 0, x = -z, z \in \mathbb{R}$ son as solucións do sistema e $v = (-z, 0, z), z \in \mathbb{R}, z \neq 0$ son tódolos autovectores asociados o autovalor $\lambda = 2$. (Obsérvese que $x = y = z = 0$ é unha solución do sistema pero $v = (0, 0, 0)$ non é autovector de A)

Así, por exemplo $(1, 0, -1)$ é un dos autovectores de A asociado o autovalor $\lambda = 2$.

Do mesmo xeito obtemos, por exemplo, que $(1, 1, 1)$ é un autovector asociado o autovalor $\lambda = 3$ e $(1, -2, 1)$ é un autovector asociado o autovalor $\lambda = 6$.

Entón temos, por exemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto

$$A^{20} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{20} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2^{20} & 3^{20} & 6^{20} \\ 0 & 3^{20} & -2 \,.\, 6^{20} \\ -2^{20} & 3^{20} & 6^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \,.\, 2^{20} + 2 \,.\, 3^{20} + 6^{20} & 2 \,.\, 3^{20} - 2 \,.\, 6^{20} & -3 \,.\, 2^{20} + 2 \,.\, 3^{20} + 6^{20} \\ 2 \,.\, 3^{20} - 2 \,.\, 6^{20} & 2 \,.\, 3^{20} + 4 \,.\, 6^{20} & 2 \,.\, 3^{20} - 2 \,.\, 6^{20} \\ -3 \,.\, 2^{20} + 2 \,.\, 3^{20} + 6^{20} & 2 \,.\, 3^{20} - 2 \,.\, 6^{20} & 3 \,.\, 2^{20} + 2 \,.\, 3^{20} + 6^{20} \end{pmatrix}$$

$$A^{20} = \begin{pmatrix} 2^{19} + 3^{19} + 6^{19} & 3^{19} - 2 \,.\, 6^{19} & -2^{19} + 3^{19} + 6^{19} \\ 3^{19} - 2 \,.\, 6^{19} & 3^{19} + 4 \,.\, 6^{19} & 3^{19} - 2 \,.\, 6^{19} \\ -2^{19} + 3^{19} + 6^{19} & 3^{19} - 2 \,.\, 6^{19} & 2^{19} + 3^{19} + 6^{19} \end{pmatrix}$$

Nótese que as matrices P e D non son únicas, podemos cambiar a orde dos autovectores nas columnas da matriz P, cambiando a súa vez a orde dos autovalores de forma axeitada na diagonal da matriz D. Obtemos así outras matrices que verifican igualmente $A = PDP^{-1}$

Exercicios

7. Consideremos a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Como sabemos, existe unha matriz P tal que $A = PDP^{-1}$, sendo D unha matriz diagonal formada polos autovalores de A.

   a) Calcula os autovalores de A

   b) Obtén os autovectores asociados a cada autovalor e obtén as matrices P e D.

   c) Comproba que $A = PDP^{-1}$

   d) Calcula A^{20}

8. Consideremos a matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Calcula os autovalores de M

   b) Obtén os autovectores asociados a cada autovalor.

   c) Atopa unha matriz B e unha matriz diagonal D tales que $M = BDB^{-1}$

   d) Calcula M^{35}

9. Comproba que a matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ é diagonalizable e calcula A^{16}

10. Calcula $\begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k$, sendo $k \in \mathbb{N}$.

11. Calcula: $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{21}$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{30}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^k, k \in \mathbb{N}$

    $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{50}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{61}$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n, n \in \mathbb{N}$

12. Atopa unha matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ da que $(1, 3)$ sexa autovector asociado a $\lambda = 2$ e $(0, 4)$ sexa autovector asociado a $\lambda = -1$. É única esta matriz?

13. Atopa unha matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ con autovalores 3 e 0, da que $(1, 0)$ sexa autovector asociado a $\lambda = 3$. É única esta matriz?

Aplicacións á dinámica de procesos económicos

Entre as aplicacións do cálculo de potencias de matrices cadradas está a análise da evolución no tempo dun modelo económico. Consideramos unha situación caracterizada polo estado de n variables, representado por un vector $X \in \mathbb{R}^n$ cuxas compoñentes expresan os valores de cada variable. Se a situación evoluciona co tempo, modificando os valores en cada período, é posible que a relación entre os estados do sistema en dous períodos consecutivos, X_i e X_{i+1}, se exprese da forma $X_{i+1} = AX_i$ onde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Polo tanto basta coñecer o estado no período inicial X_o para calcular o estado no período i, que sería $X_i = A^i X_o$, posto que $X_i = AX_{i-1} = A^2 X_{i-2} = \cdots = A^i X_o$. Como acabamos de ver, este cálculo simplifícase moito se a matriz A é diagonalizable.

Tamén pode resultar de interese o estudo do comportamento a longo prazo, calculando o límite cando i tende a infinito de $A^i X_o$.

Exemplo 2.9

Nunha cidade hai dúas discotecas: Rux e Kioto. Un estudo de mercado reflicte que Rux conservará de ano en ano o 40 % dos seus clientes, pasando o resto a ser clientes da outra disco e Kioto tenderá a manter o 70 %, cambiándose o resto a Rux. Actualmente Rux ten unha media de 300 clientes e Kioto, 220. Se a tendencia continúa, cantos clientes terá cada unha dentro de 5 anos?

Se denotamos por R os clientes que ten Rux nun determinado momento, por K os que ten Kioto e por R' e K' os que terán respectivamente despois dun ano, chegamos á seguinte relación:

$$R' = 0.4R + 0.3K$$

$$K' = 0.6R + 0.7K$$

Equivalentemente, en forma matricial temos:

$$\begin{pmatrix} R' \\ K' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ K \end{pmatrix}$$

Polo tanto, como $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 186 \\ 334 \end{pmatrix}$, ao cabo dun ano Rux terá 186 clientes e Kioto terá 334.

Do mesmo xeito, como $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 300 \\ 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 173.33 \\ 346.66 \end{pmatrix}$, ao cabo de cinco anos Rux terá 173 clientes e Kioto terá 347.

Para simplificar este último cálculo poderiamos ver se a matriz que modela o proceso é diagonalizable, no noso contexto de traballo poderemos tamén usar Matlab para facer este tipo de cálculos.

Exercicios

14. Feito un estudo anual sobre o hábito de consumo de aceite de oliva en Galicia, veuse que o 80 % dos fogares nos que se consume aceite de oliva continúan a facelo ao cabo dun ano e que o 40 % dos fogares que consumen outro tipo de aceite, ao cabo dun ano, comezan a consumir aceite de oliva.

    a) Plantexa un modelo matricial que permita saber como varía cada ano a porcentaxe de fogares que consumen aceite de oliva.
    b) En concreto, na nosa poboación, 14000 fogares consumen actualmente aceite de oliva e 6000 consumen outros aceites. Indica que operación haberá que realizar para saber en cantos fogares se consumirá aceite de oliva dentro de 10 anos.

15. Nunha pequena cidade de 32500 habitantes hai un só hipermercado e varios supermercados pequenos. Realizado durante os últimos dous anos un estudo da variación trimestral dos clientes, resulta que o 85 % dos clientes habituais do hipermercado seguen a selo o final do trimestre e os que deixan de selo pasan a acudir habitualmente os supermercados pequenos. Dos clientes habituais dos supermercados, permanecen sendoo o final do trimestre o 78 % e o resto convertènse en clientes habituais do hiper.

a) Plantexa en forma matricial un modelo que represente a variación na distribución da clientela.

b) Sabendo que actualmente a metade da poboación son clientes habituais do hipermercado, e supoñendo que se manteña a tendencia estudada, indica a operación que debemos realizar para saber cal será a distribución da clientela dentro de catro anos.

16. Dúas marcas de tabaco controlan o mercado repartíndoo na actualidade nun $60\,\%$ e $40\,\%$. Os consumidores da marca máis exitosa son fieis nun $60\,\%$, cambianse cada ano o $30\,\%$ e o resto deixan de fumar. No caso da outra marca, permanecen fieis o $40\,\%$, optan por cambiar de marca outro $40\,\%$ e o resto deixan o tabaco. Cómo se repartirá o mercado ao cabo de 5 anos supoñendo que se manteña esta tendencia?

17. Unha navieira ten a súa frota de barcos distribuida entre os portos de Barcelona, Málaga e Mallorca. Dos barcos que a principio de cada mes están en Barcelona, a final de mes só volve a metade, un $20\,\%$ vaise a Málaga e o resto atraca no porto de Mallorca. Da frota de barcos que está a principio de mes en Málaga atópase, a fin de mes, un $20\,\%$ en Barcelona, un $40\,\%$ en Mallorca e o resto volta a Málaga. Por último, dos barcos que hai en Mallorca, un $80\,\%$ regresa ao mesmo porto e o resto dirixese a Barcelona.

    Supoñendo que o número total de barcos non varía, pídese:

    a) Plantexa en forma matricial un modelo que represente a variación na distribución da frota.

    b) Sabendo que no instante actual hai 350, 500 e 200 barcos en Barcelona, Málaga e Mallorca, respectivamente, determina o número de barcos que haberá en cada porto ao cabo de dous anos.

18. A empresa Bicitown xestiona o aluguer de bicicletas nunha pequena cidade costeira. Das bicis que pola mañá están no casco vello da cidade, ao final do día só se atopan a metade nesta zona, un $15\,\%$ está na zona nova e o resto está na zona de praia. Das bicis que están a principio do día na zona nova atópanse, á fin do día, un $30\,\%$ no casco vello, un $40\,\%$ na zona de praia e o resto seguen na zona nova. Finalmente, das bicis que hai na zona costeira pola mañá, un $70\,\%$ mantense na misma zona e o resto está no casco vello ao finalizar o día.

    a) Plantexa en forma matricial un modelo que represente a variación na distribución das bicis nas tres zonas da cidade.

    b) Sabendo que esta mañá había 400, 260 e 200 bicis no casco vello, na zona nova e nas praias, respectivamente, indica a operación que debemos realizar para saber como estarán repartidas as bicis dentro de dúas semanas.

19. A poboación activa dun país clasificase en tres categorías profesionais: técnicos superiores, operarios cualificados e operarios non cualificados. Supóñase que:

- Cada traballador activo só ten un fillo.
- O 50 % dos fillos dos técnicos superiores tamén o son, o 25 % é operario cualificado e o 25 % restante é operario non cualificado.
- Os fillos dos operarios cualificados repártense entre as tres categorías segundo as porcentaxes 30 %, 40 % e 30 %.
- Para os fillos de operarios non cualificados as proporcións de reparto entre as categorías son 50 %, 25 % e 25 %.

Pídese:

a) Plantexa en forma matricial un modelo que represente a distribución da poboación activa do país de xeración en xeración.

b) Cál será a distribución dos traballadores a longo prazo?

20. Nunha vila hai tres tafonas: Bopan, Maispan e Todopan. Realizado durante o último ano un estudo da variación trimestral dos clientes, resulta que o 20 % dos clientes de Bopan seguen a ser clientes ao final do trimestre, pasan a ser clientes de Maispan o 60 % e de Todopan o 20 % restante. Dos clientes de Maispan, permanecen fieis ao final do trimestre o 50 % e cambian a Bopan o 30 % e a Todopan o resto. Dos clientes de Todopan, permanecen fieis o 30 % e cambian a Bopan o 30 % e a Maispan o resto.

    a) Plantexa un modelo matricial que represente a variación trimestral da clientela.

    b) Sabendo que actualmente o 15 % dos habitantes consumen produtos procedentes de Bopan, o 73 % son clientes de Todopan, mentres o resto consumen os produtos da outra panadería, e supoñendo que se manteña esta tendencia, indica a operación que debemos realizar para saber cal será a clientela de cada establecemento dentro de seis anos?

2.3. Formas cadráticas. Clasificación

Estudamos neste epígrafe as formas cadráticas e a súa clasificación. As propiedades aquí estudadas serán fundamentais para os capítulos finais deste manual.

Definición 2.10 *Sexa $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ unha matriz simétrica. Chámase* **forma cadrática** *en $\mathbb{R}^n$ asociada a A á aplicación $Q\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$Q(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n)A(x_1,\dots,x_n)^t = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$$

Exemplos 2.11

1. A matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ determina a forma cadrática $Q\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

   $Q(x,y) = (x\ \ y)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x-3y\ \ -3x+5y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x(2x-3y)+y(-3x+5y) = 2x^2-3xy-3xy+5y^2 = 2x^2+5y^2-6xy$

2. A matriz $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ determina a forma cadrática $Q\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ seguinte:

$$Q(x,y,z) = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \cdots = -3x^2 + 5y^2 + 4xy - 2yz + 2xz$$

Observación 2.12 Como vemos este proceso é totalmente mecánico e o resultado é xa previsible. No sucesivo non deberemos realizar todas estas operacións para chegar á expresión da forma cadrática asociada a unha matriz simétrica, senón que o faremos directamente. Así por exemplo a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$, determina a forma cadrática, $Q(x,y) = 2x^2 - 6y^2 + 2xy$. Reciprocamente, dada a expresión alxébrica dunha forma cadrática podemos obter de xeito inmediato a matriz simétrica asociada.

Definición 2.13 *Unha forma cadrática Q en $\mathbb{R}^n$ (ou a matriz simétrica asociada) dise que é*

1. **definida positiva** *se $Q(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \theta$*
2. **semidefinida positiva** *se $Q(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$*
3. **definida negativa** *se $Q(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \theta$*
4. **semidefinida negativa** *se $Q(x) \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$*
5. **non definida** *ou* **indefinida** *se existen $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $Q(x) < 0$ e $Q(y) > 0$*

Observación 2.14 Toda forma cadrática definida positiva é semidefinida positiva.

Toda forma cadrática definida negativa é semidefinida negativa.

A única forma cadrática semidefinida positiva e semidefinida negativa a un tempo é a asociada a matriz nula.

Exemplos 2.15

1. A forma cadrática $Q\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x,y,z) = 2x^2 + 5y^2 + 3z^2$ é definida positiva.
2. A forma cadrática $Q\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x,y) = x^2 - y^2$ é indefinida porque, por exemplo, $Q(1,0) > 0$ e $Q(0,1) < 0$.
3. A forma cadrática $Q\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ é semidefinida positiva porque $Q(x,y) = (x-y)^2 \geq 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Esta forma cadrática non é definida positiva pois, por exemplo, $Q(1,1) = 0$.

Salvo formas cadráticas moi determinadas, non é doado ver directamente cal é o seu signo. En xeral, para averigualo consideraremos dous métodos diferentes, segundo usemos os autovalores ou os menores principais da matriz.

Proposición 2.16 *Sexan $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ a matriz simétrica asociada á forma cadrática Q con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Verifícase:*

1. *Q é definida positiva se, e só se, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$.*
2. *Q é semidefinida positiva se, e só se, $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$.*
3. *Q é definida negativa se, e só se, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_n < 0$.*
4. *Q é semidefinida negativa se, e só se, $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0, \dots, \lambda_n \leq 0$.*
5. *Q é indefinida se, e só se, existen $i, k \in \{1, \dots, n\}$ tales que $\lambda_i > 0$ e $\lambda_k < 0$.*

Clasificar unha matriz segundo o seu signo utilizando os autovalores será práctico para as matrices diagonais e tamén cando usemos software de cálculo simbólico. Noutros casos pode ser máis interesante o resultado que enunciamos a continuación, que usa os menores principais da matriz.

Proposición 2.17 *Sexa $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ a matriz simétrica asociada á forma cadrática Q e denotemos por $D_r = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$, para todo $r = 1, \cdots, n$. Verifícase:*

1. *Q é definida positiva se, e só se, $D_r > 0$, para todo $r = 1, \dots, n$.*
2. *Q é definida negativa se, e só se, $(-1)^r D_r > 0$, para todo $r = 1, \dots, n$.*
3. *Se $D_r > 0$, para todo $r = 1, \dots, n-1$ e $D_n = 0$, entón Q é semidefinida positiva.*
4. *Se $(-1)^r D_r > 0$, para todo $r = 1, \dots, n-1$ e $D_n = 0$, entón Q é semidefinida negativa.*
5. *Se Q non é definida positiva nin definida negativa e $\det(A) \neq 0$, entón Q é indefinida.*

Compre comentar que este último resultado pode non decidir en certos casos, por exemplo para unha matriz simétrica de orde 3×3 tal que $D_1 > 0$, $D_2 = D_3 = 0$, este resultado só garante que a matriz non é definida positiva nen definida negativa, pero non sabemos en cal dos outros tres casos se atopa. Teríamos que recorrer aos autovalores que, en xeral, é un método máis fatigoso nos cálculos, pero sempre clasifica á matriz.

Exercicios

21. Indica cales das seguintes funcións son formas cadráticas:

    a) $F(x, y) = (x + 2y)^2$
    b) $F(x, y) = (x^2 + 3y^2 + 4xy, x^2)$
    c) $F(x, y) = -2x^2 - y^2 + xy + y$
    d) $F(x, y, z) = xy - 2xz$
    e) $F(x, y) = (x - 2)^2 + (y - x)^2 + 4(x - 1)$
    f) $F(x, y, z) = \dfrac{-x^3 + 2y^2 - 3z^2}{x}$

22. Escribe a expresión das formas cadráticas asociadas ás matrices dos exercicios 7 e 8. Cal é o seu signo?

23. Determina a matriz simétrica asociada a cada unha das seguintes formas cadráticas e clasifícaas:
    a) $\varphi(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$
    b) $\varphi(x, y, z) = x^2 - 2xy + y^2 + z^2$
    c) $\varphi(x, y, z) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 2yz + zx + z^2$
    d) $\varphi(x, y, z, w) = x^2 - 2xw + y^2 + 2zw + z^2$

24. Clasifica, segundo o seu signo, as seguintes formas cadráticas:
    a) $Q(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - 4z^2 - 2xy - 2xz$
    b) $Q(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4xy$
    c) $Q(x, y) = -2x^2 - y^2 + xy$
    d) $Q(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy + 12xz + 6yz$
    e) $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + xz$
    f) $Q(x, y, z) = -x^2 - 4y^2 - z^2 + 2xy$
    g) $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xy - 2yz - 2xz$

25. Estuda, segundo os valores de $a \in \mathbb{R}$, o signo da forma cadrática $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4axy$.

26. O obxectivo da política fiscal do goberno basease na redución do deficit público, para o que se está a estudar a posibilidade de introducir un imposto novo en función do pagado (ou devolto) en concepto de imposto sobre a renda das persoas físicas (R) e no imposto sobre o patrimonio (P). Este novo imposto viría dado pola expresión $T = 2R^2 + 4P^2 - 4PR$. Está disposto o goberno a devolver cartos con este novo concepto tributario?

2.4. Autovalores con Matlab

A orde `eig(A)` calcula os autovalores (tanto reais coma complexos) da matriz `A`. Así, por exemplo, tecleando

```
A=[3 -1 1;-1 5 -1;1 -1 3]
eig(A)
```

obtemos que os autovalores de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ son $2, 3, 6$.

O signo dunha forma cadrática está caracterizado polo signo dos autovalores da matriz simétrica asociada. Así, para calcular o signo da forma cadrática $Q(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2xy$, vemos o signo dos autovalores da matriz simétrica que a define coas ordes:

```
A=[2 1 0;1 4 0;0 0 2], eig(A)
```

Posto que os tres autovalores son positivos, a forma cadrática é definida positiva.

Exercicios

27. Estuda o signo das formas cadráticas:

$$Q_1(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2yz + 2yt + 2zt$$

$$Q_2(x,y,z,t) = y^2 + z^2 - 4t^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 4xt$$

$$Q_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = 3x_1^2 + 6x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 6x_3x_4 + 2x_3^2 + 8x_4^2$$

$$Q_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = 7x_1^2 + 7x_3^2 + 4x_4^2 - 4x_1x_2 - 18x_1x_3 - 4x_2x_3$$

$$Q_5(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 3x_4^2 + 8x_3x_4$$

$$Q_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = 5x_1^2+x_2^2+9x_3^2-x_4^2+3x_5^2+4x_1x_2+12x_1x_3+6x_2x_3-x_1x_4+7x_4x_5$$

2.5. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Cal dos seguintes NON é autovector de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$?

   a) $(1,-1)$ b) $(0,2)$ c) $(1,0)$ d) $(-2,2)$

2. É $\lambda = 0$ un autovalor de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$?

   a) Non, porque o cero nunca pode ser un autovalor.
   b) Non, porque $\det(A) = 0$.
   c) Si, porque $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   d) Si, porque $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Os autovalores da matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ son:

   a) -2 e 1 b) -2 e -6 c) 0 e 2 d) -3 e 2

4. A matriz simétrica asociada á forma cadrática $Q(x,y) = 3x^2 - 2y^2 + 2xy$ é

   a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

5. A matriz $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é

   a) definida positiva. b) definida negativa. c) non definida. d) semidefinida negativa.

6. Se $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, entón

   a) Os autovalores de A son: $-2, -3, 0$. b) A é non definida.
   c) A é semidefinida negativa. d) A é definida negativa.

7. A matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ é

   a) semidefinida positiva. b) definida positiva. c) definida negativa. d) indefinida.

8. Cal das seguintes matrices é indefinida?

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

9. A forma cadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy - 2yz$ é

   a) indefinida. b) definida negativa. c) semidefinida positiva. d) definida positiva.

10. A forma cadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xz$ é

    a) definida positiva. b) semidefinida positiva. c) definida negativa. d) indefinida.

2.6. Solucións dos exercicios propostos

2. $a = 8$, $b = -7$. O outro autovalor é $\lambda = 3$

5. Para A: -2, 3, 4.
Para B: 1 (dobre), 3.
C non ten autovalores reais.

6.
Autovectores asociados a A para $\lambda = 2$ (autovalor dobre): $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$
Autovectores asociados a A para $\lambda = 3$: (x, x, x), $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Autovectores asociados a B para $\lambda = 1$ (autovalor dobre): $(x, -x, z)$, $x, z \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ o $z \neq 0$
Autovectores asociados a B para $\lambda = 2$: $(2x, -x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Autovectores asociados a C para $\lambda = -2$ (dobre): $(2x + z, x, x + z)$, $x, z \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ o $z \neq 0$
Autovectores asociados a C para $\lambda = 3$: (x, x, x), $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Autovectores asociados a E para $\lambda = 4$: $(0, 0, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$
Autovectores asociados a E para $\lambda = 2$: $(0, -x, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$
Autovectores asociados a E para $\lambda = 1$: $(x, -x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Autovectores asociados a F para $\lambda = 1$ (autovalor dobre): $(x, z, 0)$, $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$
Autovectores asociados a F para $\lambda = 2$: $(0, x, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Autovectores asociados a G para $\lambda = 0$: $(0, x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$
Autovectores asociados a G para $\lambda = 2$: $(2x, x, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$
Autovectores asociados a G para $\lambda = 1$: $(3x, x, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

11.
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-2)^k + 4^k & 4^k - (-2)^k \\ 4^k - (-2)^k & (-2)^k + 4^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{50} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{50} & 0 & 0 \\ 2^{49} & 2^{49} & -2^{49} \\ 2^{49} & -2^{49} & 2^{49} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} I & \text{se } n \text{ é par} \\ A & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

12. A única matriz posible é $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$

13. Calqueira matriz da forma $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, para $a \in \mathbb{R}$

14. $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.33 \\ 6.66 \end{pmatrix}$

Dentro de 10 anos, 13333 fogares consumirán aceite de oliva.

15. $\begin{pmatrix} 0.85 & 0.22 \\ 0.15 & 0.78 \end{pmatrix}^{16} \begin{pmatrix} 16225 \\ 16225 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19322 \\ 13178 \end{pmatrix}$

Dentro de catro anos 19322 habitantes serán clientes habituais do hipermercado e 13178 habitantes dos supermercados pequenos.

16. $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}^{5} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2856 \\ 0.1860 \end{pmatrix}$

Pasados 5 anos, dos fumadores que había inicialmente, o 28.56 % consumen a marca A e o 18.6 % consumen a marca B. O restante 52.84 % deixan de fumar. O mercado existente en 5 anos repartirase nun 60.56 %, para a marca A, e 39.44 %, para a marca B.

17. $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}^{24} \begin{pmatrix} 350 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 650 \end{pmatrix}$

Ao cabo de dous anos, haberá 300 barcos en Barcelona, 100 en Málaga e 650 en Mallorca.

18. $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.3 \\ 0.15 & 0.3 & 0 \\ 0.35 & 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}^{14} \begin{pmatrix} 400 \\ 260 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 322.5 \\ 69.1 \\ 468.39 \end{pmatrix}$

Dentro de dúas semanas haberá 323 bicis no casco vello, 69 na zona nova e 468 nas praias.

20. $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}^{24} \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27.27 \\ 50.5 \\ 22.22 \end{pmatrix}$

Pasados seis anos, o 27 % serán clientes de Bopan, o 51 % de Maispan e o 22 % de Todopan.

23.
a) Semidefinida positiva.
b) Semidefinida positiva.
c) Indefinida.
d) Indefinida.

24.

a) Definida negativa.	b) Indefinida.
c) Definida negativa.	d) Semidefinida positiva.
e) Definida positiva.	f) Definida negativa.
g) Indefinida.	

26. T é unha forma cadrática definida positiva, polo que $T(R,P) > 0$ para todo $(R,P) \neq (0,0)$, así que nunca se devolverán cartos, sempre se pagará, salvo cando $P = R = 0$, que non se paga nen se devolve nada.

Solucións autoavaliación. 1c, 2d, 3d, 4b, 5c, 6d, 7d, 8b, 9c, 10b

Capítulo 3

Funcións reais de variable real. Límites e continuidade.

Comezamos este capítulo repasando conceptos básicos sobre funcións dunha variable, prestando especial atención ás gráficas das funcións elementais. Será moi importante adquirir competencias na interpretación gráfica de moitos dos conceptos que aparecerán no desenvolvemento desta e doutras materias. Sentamos aquí as bases para adquirir tales habilidades.

3.1. Funcións reais de variable real: Dominio, rango e operacións

Definición 3.1 *Unha* **función real de variable real** *é calquera aplicación do tipo* $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

O conxunto D *denomínase dominio da función* f. *Cando o* **dominio** *da función non se especifica enténdese que é o maior posible.*

O conxunto $\operatorname{Im} f = \{f(x) : x \in D\}$ *chámase rango ou* **imaxe** *da función* f.

Exemplos 3.2

1. Se nos dan a función $f(x) = x + 3$, enténdese que o seu dominio é todo o conxunto $\mathbb{R}$, sen embargo, se nos dan $f\colon [2, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$, enténdese que o seu dominio é o intervalo $[2, 10]$. Calquera función pódese considerar definida no maior dominio posible ou restrinxida a un conxunto máis pequeno.
2. Se nos dan a función $h(x) = \sqrt{x+2}$, enténdese que o seu dominio é o maior posible, isto é, o conxunto $D = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \geq 0\} = [-2, +\infty)$
3. As funcións polinómicas son aquelas que veñen dadas por unha expresión polinómica, como por exemplo $f(x) = 3x^5 - 7x^4 + 2x - 2$ ou $g(x) = x^{20} - \frac{5}{8}x^8 + 2x$. Están definidas en todo o conxunto $\mathbb{R}$.
4. As funcións racionais son aquelas que veñen dadas por un cociente de dúas expresións polinómicas, como por exemplo $f(x) = \frac{7x^5 - x^2 - 2}{x^2 - 9}$. Están definidas no conxunto formado polos números reais que non anulan o denominador. No noso exemplo, o dominio de f é $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.
5. Obviamente, non tódalas funcións veñen determinadas pola mesma expresión para tódolos valores do seu dominio. Tamén son exemplos de funcións reais de variable real as seguintes:

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{se } x \leq 1 \\ -4x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 4 - x & \text{se } 0 < x \leq 4 \\ \ln(x - 3) & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Definición 3.3 *Diremos que* $f\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é unha* **función limitada** *se o seu rango é un conxunto limitado, é dicir, se existen* $m, M\in\mathbb{R}$ *tales que* $m<f(x)<M$*, para todo* $x\in D$.

Exemplos 3.4

1. A función $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ é limitada pois $0\le x^2<1+x^2$, entón $0\le\frac{x^2}{1+x^2}<1$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Do mesmo xeito tamén son limitadas $f(x)=\frac{e^x}{2+e^x}$ ou $g(x)=\frac{3x^4}{1+x^4}$
2. A función $f(x)=x^2$ non é limitada porque, para todo $M>0$, sempre é posible atopar $x_o\in\mathbb{R}$ de xeito que $x_o^2>M$. De feito, o seu rango é $[0,+\infty)$
3. O rango da función $f(x)=x+3$ é $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$ e o de $h(x)=\sqrt{x+2}$ é $\operatorname{Im} h=[0,+\infty)$. Polo tanto ningunha delas é unha función limitada.

Operacións con funcións. Pódense definir distintas operacións, de xeito natural, con dúas funcións $f,g: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

- *Suma:* $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, para todo $x\in D$.
- *Produto por un número:* $(rf)(x)=rf(x)$, para todo $x\in D$, $r\in\mathbb{R}$.
- *Produto:* $(fg)(x)=f(x)g(x)$, para todo $x\in D$.
- *Cociente:* $\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, para todo $x\in D$ tal que $g(x)\neq 0$.
- *Composición:* se $h\colon B\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e, ademais, $f(D)\subset B$, defínese a composición das funcións f e h por $(h\circ f)(x)=h(f(x))$, para todo $x\in D$.
- *Inversa* dunha función f inxectiva: é outra función $f^{-1}\colon \operatorname{Im}(f)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como $f^{-1}(y)=x$ se, e só se, $f(x)=y$. Obviamente, verifícase $(f^{-1}\circ f)(x)=x$ e $(f\circ f^{-1})(y)=y$, para todo $x\in D$, para todo $y\in\operatorname{Im} f$.

3.2. Gráficas das funcións elementais dunha variable

Definición 3.5 *Chamamos* **gráfica dunha función** $f\colon D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *á representación no plano do subconxunto de* $\mathbb{R}^2$, $\{(x,f(x)) : x\in D\}$

Debemos coñecer moi ben como son as gráficas das chamadas funcións elementais, as funcións máis sinxelas, que referimos a continuación.

RECTAS: Se f é unha función polinómica de grao un, $f(x)=ax+b$, a súa gráfica é unha recta. A pendente da recta, isto é, a tanxente do ángulo que forma co eixe X, é o valor a. Así por exemplo, a gráfica de $f(x)=x+2$ é unha recta con pendente 1.

As funcións polinómicas de grao cero, isto é, as funcións constantes, correspóndense con gráficas de rectas paralelas ao eixe de abscisas, por exemplo a gráfica de $f(x)=7$ é a recta paralela o eixe X na altura 7 do eixe Y. As rectas paralelas ao eixe de ordenadas non se corresponden con gráficas de funcións, pero responden á ecuación $x=cte.$, por exemplo $x=3$.

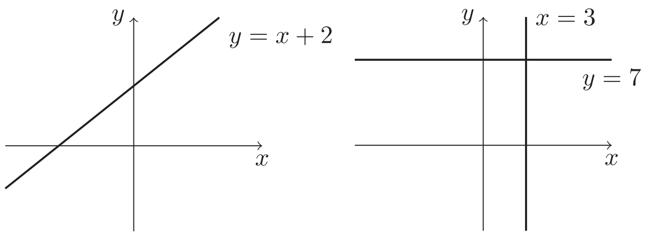


Figura 3.1: Exemplos de representación de rectas.

Seranos de utilidade recordar que a ecuación da recta que pasa polo punto (x_o, y_o) e ten pendente m é $y - y_o = m(x - x_o)$. Por exemplo a recta que pasa polo punto $(1, 2)$ e ten pendente $m = 3$ corresponde á ecuación $y - 2 = 3(x - 1)$, é dicir, $y = 3x - 1$

PARÁBOLAS: Se f é unha función polinómica de grao dous, $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, a súa gráfica é unha parábola con eixe paralelo ao de ordenadas. As ramas da parábola están orientadas cara arriba se $a > 0$, e cara abaixo se $a < 0$. O vértice da parábola localízase en $v_x = \frac{-b}{2a}$. Cales son os puntos de corte dunha parábola co eixe X?

Por exemplo, a gráfica de $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$ é unha parábola con eixe paralelo ao eixe Y, ramas orientadas cara arriba e vértice en $v_x = \frac{-12}{6} = -2$. Como $f(-2) = -3$, o vértice é o punto $(-2, -3)$. Ademais, como $3x^2 + 12x + 9 = 0$ cando $x = -1$ ou $x = -3$, a parábola corta o eixe X en $(-1, 0)$ e $(-3, 0)$

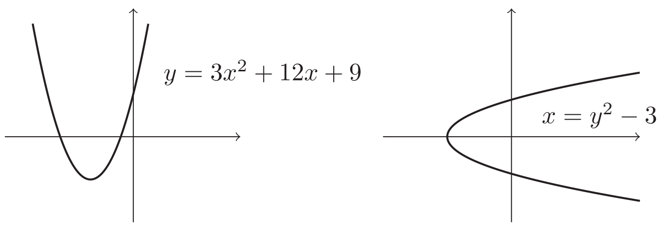


Figura 3.2: Exemplos de representación de parábolas.

As parábolas con eixe paralelo ao de ordenadas non se corresponden con gráficas de funcións, pero responden á ecuación $x = ay^2 + by + c$, con $a \neq 0$.

Por exemplo $x = y^2 - 3$ corresponde a unha parábola con eixe paralelo ao eixe X, ramas orientadas cara a dereita e vértice en $v_y = \frac{0}{2} = 0$. Como para $y = 0$, substituindo na ecuación temos $x = -3$, o vértice é o punto $(-3, 0)$. Ademais, como $y^2 - 3 = 0$ cando $y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$, a parábola corta o eixe Y en $(0, \sqrt{3})$ e $(0, -\sqrt{3})$

FUNCIÓNS POTENCIAIS: Son as funcións da forma $f(x) = x^a$, con $a \in \mathbb{R}$, e teñen un comportamento moi diferente dependendo do valor de a. Comentamos as máis relevantes. No caso de expoñente natural, $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$, segundo n sexa par ou impar temos dous tipos de gráficas:

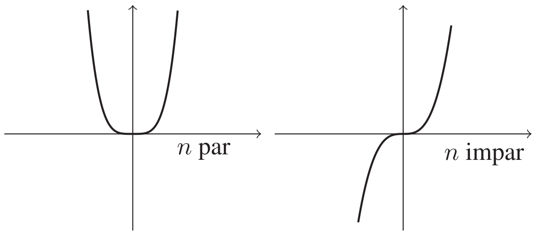


Figura 3.3: $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$

No caso de expoñente negativo $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$, f non está definida se $x = 0$ e temos tamén dous tipos de gráficas segundo n sexa par ou impar:

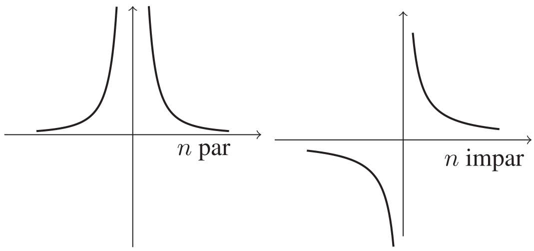


Figura 3.4: $f(x) = 1/x^n, n \in \mathbb{N}$

Cando temos expoñentes racionais, estas expresións poden transformarse en raíces. En concreto interésannos as funcións do tipo $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}$, e tamén debemos distinguir entre que n sexa par ou impar. Ademais cando n é par o dominio de $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é $[0, +\infty)$, mentres que se n é impar f está definida en todo $\mathbb{R}$.

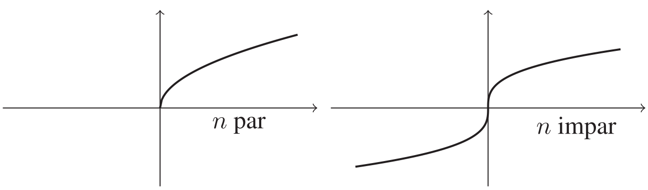
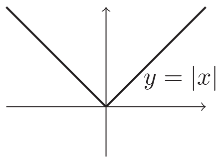


Figura 3.5: $f(x) = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}$

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO: representamos a gráfica de $y = |x|$

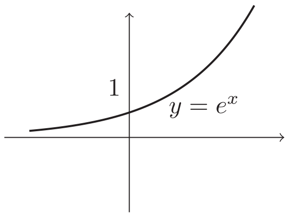
Lembramos que o valor absoluto dun número real $x \in \mathbb{R}$ defínese como ese mesmo número, cando é positivo, e o seu oposto cando non o é. Así, $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

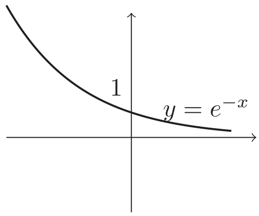


Unha propiedade que usaremos a miúdo: para $a, b \in \mathbb{R}$, $\;|a| \leq b \Longleftrightarrow -b \leq a \leq b$.

FUNCIÓN EXPONENCIAL: representamos as gráficas de $y = e^x$ e $y = e^{-x}$

Para $a \in \mathbb{R}, a > 0$, se ademais $a > 1$ a gráfica de $y = a^x$ é similar á de $y = e^x$, e se $a < 1$ a gráfica de $y = a^x$ é similar á de $y = e^{-x}$

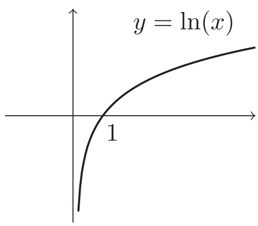




Algunhas particularidades que debemos saber do número e: defínese como o límite da sucesión de números reais $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2, 9/4, 64/27\dots\}$, ademais é un número irracional entre 2 e 3, máis concretamente $e \simeq 2.7182818\dots$, e é a base do logaritmo neperiano, de xeito que $\ln(a) = b$ significa que $e^b = a$.

Como consecuencia tense que: $\ln(e^b) = b$, $\;e^{\ln(a)} = a$, $\;\ln(ac) = \ln(a) + \ln(c)$, $\;\ln(a/c) = \ln(a) - \ln(c)$, $\;\ln(a^b) = b\ln(a)$, para $a, c > 0$.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA: é a función inversa da exponencial. Representamos a gráfica de $y = \ln(x)$. Nótese que o seu dominio é o conxunto $(0, +\infty)$.



CIRCUNFERENCIAS: Finalmente, aínda que non se trata propiamente da gráfica dunha función, debemos recordar que os puntos que verifican a ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ son os da circunferencia de centro (a, b) e raio r.

Por exemplo, os puntos que verifican a ecuación $x^2 + y^2 = 4$ son os da circunferencia de centro $(0, 0)$ e raio $r = 2$ e os que verifican $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ son os da circunferencia de centro $(1, -2)$ e raio $\sqrt{5}$.

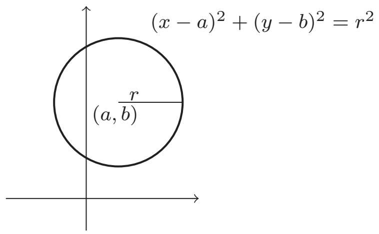
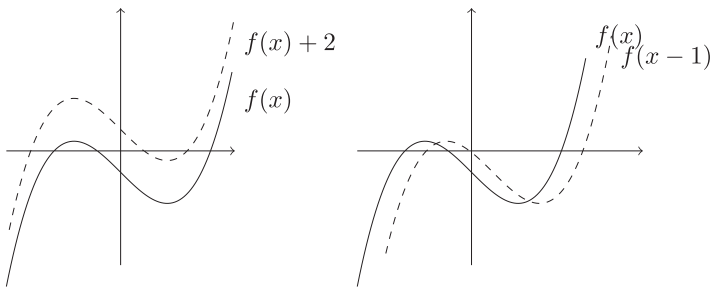


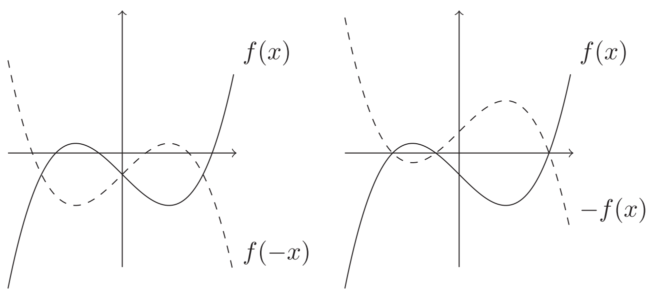
Figura 3.6: Circunferencia de centro (a, b) e raio r.

Translacións e simetrías de gráficas

Determinadas operacións alxébricas nas funcións resultan en translacións das súas gráficas. Así, por exemplo, dada unha función f, a gráfica de $g(x) = f(x) + 2$ obtense da de f "subíndoa en bloque" dúas unidades. Analogamente, a gráfica da función $h(x) = f(x - 1)$ obtense da de f "arrastrándoa cara a dereita" unha unidade.



A gráfica de $p(x) = -f(x)$ é a imaxe especular sobre o eixe X da de f e a gráfica de $q(x) = f(-x)$ é a imaxe especular sobre o eixe Y da de f.



Se f é inxectiva, a gráfica da súa inversa é a imaxe especular sobre a bisectriz $y = x$ da de f, é dicir, intercambiamos os eixes, como ocorre, por exemplo, coas funcións exponencial e logarítmica. É interesante entender esta relación posto que en Teoría Económica, tradicionalmente, o eixe no que se representa a variable independente é o de abscisas e non o de ordenadas.

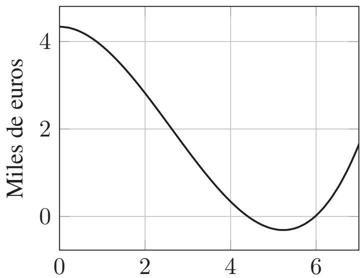
Exercicios

1. Determina o dominio das seguintes funcións:

   $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ $\quad g(x) = |x-3|$ $\quad h(x) = \sqrt{5+2x}$ $\quad k(x) = \sqrt[3]{5+2x}$

   $l(x) = \ln(5-x^2)$ $\quad m(x) = \ln(5+x^2)$ $\quad n(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad p(x) = \frac{1}{2+|x|}$

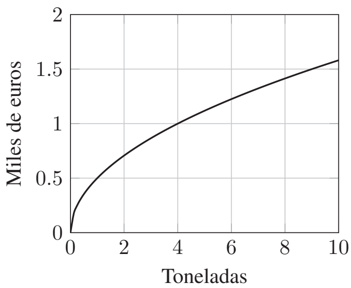
2. Os aforros en euros de Mucha Hucha no período 2015-2021 veñen dados pola función $A(t) = 65t^3 - 510t^2 + 4320$, onde o tempo mídese en anos e $t = 0$ corresponde ao un de xaneiro de 2015. Ademais de facer os cálculos que se piden a continuación, interprétaos na gráfica.



   a) Calcula $A(1)$ e di que representa.
   b) Canto tiña aforrado Mucha o un de xullo de 2016?
   c) Calcula os aforros que tiña ao principio e ao final do período 2015-2021.
   d) Calcula o incremento dos aforros no último medio ano.
   e) Calcula o período aproximado no que Mucha estivo en números vermellos.

3. A fábrica Alume produce diariamente q toneladas de pellets de biomasa. O custo da produción vén dado pola función $C(q)$ representada na gráfica adxunta.

   a) Calcula o custo da produción actual sabendo que é de 4 toneladas.
   b) Calcula o custo medio de producir unha tonelada na actualidade.
   c) Se se aumenta o nivel de produción, aumentará o custo?
   d) O custo de producir unha tonelada máis é sempre o mesmo?
   e) Cando crece máis lentamente o custo, para producións pequenas ou grandes?
   f) Cantas toneladas se producen con 500 €?



4. Cal é a ecuación da recta que pasa por $(0,0)$ e $(3,1)$? E a da que une $(1,-1)$ con $(0,2)$? Calcula a ecuación da recta que pasa por $(-2,1)$ e é paralela a $y = 4x - 1$.

5. Representa os puntos que verifican cada unha das seguintes ecuacións:

   a) $2x + 3y = 5$ b) $4x - y = 8$ c) $y - 3(x+2) = 7$ d) $5x_1 + x_2 = 10$

   e) $x^2 + y^2 = 5$ f) $y^2 = 9 - (x-4)^2$ g) $y = 9 - (x-4)^2$ h) $x_1 x_2 = 3$

6. Mercamos un coche de segunda man hai tres anos por 20000 € e ten neste momento un valor de mercado de 18000 €. Supoñendo que o valor de mercado baixa linealmente, atopa a función que dá a relación entre os anos transcorridos dende a compra do coche e o seu valor de mercado. Cal será este valor dentro de 4 anos?

7. Representa graficamente as seguintes funcións:

   a) $y = 3 + x^4$ b) $y = \frac{1}{x+5}$ c) $y = e^{|x|}$ d) $y = 7 - x^2$

   e) $y = \ln(|x|)$ f) $y = 4 - |x|$ g) $y = |x^2 - 6x + 9|$ h) $y = \ln(-x)$

   i) $y = 2 + (x-3)^4$ j) $y = \sqrt{3 - x^2}$ k) $G(x) = |2 - x^2 - x|$ l) $f(x) = 7^x$

   m) $h(x) = |2 + x|$ n) $g(x) = x^3 + 1$ ñ) $G(x) = |2x^2 - 4x - 6|$ o) $g(x) = \dfrac{2^x}{3^x}$

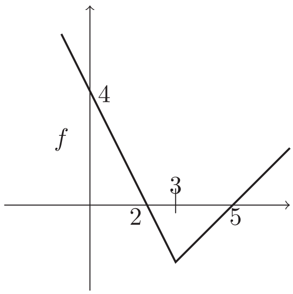
   p) $f(t) = 3 + \dfrac{2}{t^3}$ q) $A(p) = 2\ln(p)$ r) $h(x) = \ln(|x-1|)$

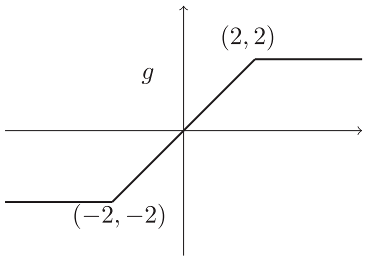
8. Representa graficamente as seguintes funcións:

$$F(x) = \begin{cases} 3^x & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 + \ln(x) & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^x & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - 2x & \text{se } 0 < x < 1 \\ \ln(x) - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} x^4 - 2 & \text{se } x \leq 0 \\ 3x - 2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1/x^3 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

9. Escribe as expresións que definen as funcións f e g cuxas gráficas son:





10. A poboación de bacterias nunha mostra evoluciona segundo a función $f(t) = -t^2 + 4t + 12$, onde t corresponde ao número de semanas dende o inicio do experimento e $f(t)$ é o número de individuos que compoñen a mostra, en millóns de unidades.

    a) Debuxa a gráfica de f e interprétaa.

    b) Cal é o número de bacterias que hai ao inicio do experimento? Haberá a mesma cantidade nalgún outro momento?

    c) Cantas semanas pasarán ata que desaparezan as bacterias?

    d) Cal será o número máximo de individuos da mostra, e cando se producirá?

11. A función $B(p) = ap^2 + bp + c$ describe os beneficios dunha empresa de transporte de viaxeiros, onde p é o prezo que cobra a empresa por cada viaxe. Sabemos que se se cobran 40 euros por viaxe, os beneficios son 19000 €. Ademais, se aumentamos o prezo nun 25 %, o beneficio obtido é o máximo, 20000 €. Determina os valores de a, b e c.

12. O efecto dun medicamento vén dado pola expresión $E(t) = 110t(12 - t)$, mentres $E(t)$ sexa positivo, despois enténdese que o efecto desaparece, onde o tempo t expresa os meses transcorridos dende a inxesta do medicamento. Cando se produce o mellor efecto do medicamento? En que períodos aumenta e diminúe o efecto? Durante canto tempo fai efecto?

13. Supoñamos que os consumidores compran q unidades dun produto cando o prezo de cada un é de $20 - 0.1q$ €. Cantas unidades deben venderse para que os ingresos por vendas non sexan inferiores a 750 €? Cal é o máximo de ingresos que se pode esperar obter?

14. Unha empresa de investigación de mercados estima que t meses despois da introdución dun novo produto, $F(t) = \frac{9}{10}t(18 - t)$ miles de familias utilizarán o. Estima o momento en que o máximo número de familias utilizarán o produto. Cantas serán?

15. Despois dunha campaña de publicidade o ingreso semanal en miles de euros dunha compañía vén dada pola función $I(t) = 200e^{-t/4}$. Canto eran os ingresos da compañía ao inicio da campaña publicitaria? Que ingresos tiña despois dun mes? Cando tivo 100000 € de ingresos? Resulta eficaz a campaña publicitaria?

16. Calcula o prezo de equilibrio dun produto con función de oferta $S(p) = 15p$ e función de demanda $D(p) = \frac{1200}{p} - 30$. Cal é a demanda no equilibrio? Para que prezo a demanda triplica a oferta?

17. A rendibilidade dunha empresa, expresada en porcentaxe, depende da cota de mercado do ben producido, m, segundo a función $R(m) = -0.05m^2 + 3.6m - 35$. Que cota de mercado maximiza a rendibilidade da empresa? Cal é a rendibilidade máxima?

18. Unha máquina que custou 60000 € deprecia o seu valor de mercado nun 15 % anualmente. Canto vale 4 anos despois de mercala? Despois de cantos anos de mercala o seu valor é inferior a 20000 €?

19. A depreciación por saldo decrecente supón que un ben perde o seu valor máis rápido ao comezo da súa vida que posteriormente. Unha porcentaxe fixa do valor restarase cada ano. Supoñendo que o valor inicial dun artigo é C euros e a súa vida útil é de N anos, o valor, V (en euros), do artigo ao cabo de n anos vén dado por $V(n) = C(1 - 1/N)^n$, o que significa que cada ano ten unha depreciación do $100/N\,\%$ sobre o anterior. Se se mercou unha fotocopiadora nova por 1495 € e ten unha vida útil de 5 anos, despois de cantos anos o seu valor cae por debaixo dos 800 €?

20. Na época de colleita nunha plantación de arandos, os quilos recollidos por día, q, dependen do número de empregados, m, onde $q(m) = 30m - \frac{m^2}{2}$. Se o ingreso total recibido pola venda de q quilos vén dado por $r(q) = 6q + \frac{120q}{q+2}$ euros, determina $r \circ q$ e explica o que describe esta función? Calcula $(r \circ q)(10)$ e interpreta o resultado.

21. A empresa cosmética Potingues fabrica un novo serum, o custo de producir q centos de unidades vén dado pola función de custos $C(q) = q^2 - 2q + 20$. Ademais $D(p) = 20 - \frac{p}{4}$ corresponde á demanda (en centos de unidades) dos consumidores en relación ao prezo de venda.

    a) Calcula a composición $C \circ D$ e interprétaa.

    b) Calcula a función de beneficios B. Que significado ten o cálculo de $B(20)$?

    c) Por outra parte, un estudo dos prezos de venda de produtos similares doutras marcas revela que o prezo de venda medio vén dado por $P(c) = 20 + 12c$, onde $c \in (0, 1)$ é un índice que mide a calidade do produto. Calcula a composición $D \circ P$ e interprétaa. Que significado ten o cálculo de $(D \circ P)(0.5)$? A demanda aumenta ou diminúe ao mellorar a calidade do produto?

3.3. Límites e continuidade de funcións reais de variable real

Estudaremos nesta sección aspectos xerais do comportamento das funcións reais de variable real. O concepto de límite prové unha estupenda terminoloxía para describir este comportamento. Usaremos tamén este concepto para estudar o comportamento asintótico dalgunhas funcións.

Comezamos coa definición máis básica de límite para funcións, aínda que na práctica non profundizaremos no cálculo de límites, senón que nos centraremos na súa interpretación xeométrica.

No que segue, denotaremos por I calquera intervalo en $\mathbb{R}$ e por $x_o \in I'$ calquera número real x_o ao que nos podemos achegar con puntos de I.

Definición 3.6 *Sexan $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_o \in I'$ e $\ell \in \mathbb{R}$.*

Diremos que ℓ é o **límite da función** *f no punto x_o (e denótase $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell$) se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in I$, $x \neq x_o$, $d(x, x_o) < \delta$, se verifica que $d(f(x), \ell) < \varepsilon$.*

Polo tanto o concepto $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \ell$ reflicte a idea de que, conforme x toma valores cada vez máis próximos a x_o, as súas imaxes están tan cerca de ℓ como queiramos.

Exemplos 3.7

1. Se f é a función constante $f(x) = 7$, entón $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 7$, para todo $x_o \in \mathbb{R}$.

   En xeral, se $f(x) = k$, entón $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = k$, para todo $x_o \in \mathbb{R}$.

2. Se $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, entón $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = x_o$, para todo $x_o \in \mathbb{R}$.

Observacións 3.8

1. Se na definición 3.6, substituimos $x \neq x_o$ por $x < x_o$, estariamos estudando o comportamento da función f cando x se achega a x_o exclusivamente con valores menores ca x_o. Este concepto denomínase *límite pola esquerda da función f* no punto x_o e denótase $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x)$.

   Analogamente, se na mesma definición substituimos $x \neq x_o$, por $x > x_o$, estariamos estudando o comportamento da función f cando x se achega a x_o con valores maiores ca x_o. Este concepto denomínase *límite pola dereita da función f* no punto x_o e denótase $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)$.

   Verifícase que f ten límite no punto x_o se, e só se, existen os límites laterais de f en x_o e coinciden.

2. Así, por exemplo, o límite da función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ no punto $x_o = 0$ é 0 porque $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 3x^2 = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$. Logo $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

3. Consideremos a función $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 2 \\ 3 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$. Tense que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ non existe porque $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$.

4. Dada a función $f(x) = e^{\frac{|x|}{x}}$, tense que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{-x}{x}} = \frac{1}{e}$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{x}{x}} = e$. Daquela, o $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ non existe.

Outros conceptos que nos importan referentes ao comportamento das funcións son, por exemplo, a tendencia das imaxes a medrar cada vez máis conforme x se achega a un valor concreto, ou a achegarse a un valor ℓ cando x medra indefinidamente.

Definición 3.9 *Sexan $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_o \in I'$. Diremos que f ten límite $+\infty$ no punto x_o (e denótase $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$) se, para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que, para cada $x \in I$, $x \neq x_o$, $d(x, x_o) < \delta$, se verifica que $f(x) > M$.*

Dun xeito análogo defínense os conceptos $\lim_{x\to x_o} f(x) = -\infty$ e, se I é un intervalo non limitado, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exemplos 3.10 Algúns exemplos concretos:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$ b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ non existe

e) $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$ f) $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ g) $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ h) $\lim_{x\to 1} \frac{-2}{(1-x)^2} = -\infty$

i) $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ j) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ k) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{(2x-4)^2} = +\infty$ l) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2+5^x} = 1/2$

m) $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ n) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln^4(x)} = +\infty$ o) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 0$ p) $\lim_{x\to 1} \frac{-2}{1-x}$ non existe

Non será o noso obxectivo facer un estudo demasiado formal e completo do cálculo de límites de funcións, só pretendemos adquirir destreza co coñecemento operativo máis básico así como na detección das indeterminacións. Así por exemplo debemos saber que se $\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} g(x) = 0$ entón non é posible determinar directamente o $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$. Ocorre o mesmo cando $\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} g(x) = \pm\infty$.

Tamén resulta indeterminado o $\lim_{x\to x_o} f(x)g(x)$ cando $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_o} g(x) = \pm\infty$, e tamén $\lim_{x\to x_o} f(x) - g(x)$ cando $\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} g(x) = +\infty$.

Temos indeterminacións tamén en tódolos casos anteriores cando $x \to \pm\infty$ en lugar de $x \to x_o$.

Continuidade de funcións reais de variable real

Definición 3.11 *Sexan $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_o \in I$.*

Diremos que f é **continua** *no punto x_o se $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$.*

Diremos que f é continua en I se é continua en cada punto de I.

Proposición 3.12 *Sexan $f, g\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_o \in I$. Verifícase:*

1. *Se $f, g\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas en x_o, entón as funcións $f+g$, rf (con $r \in \mathbb{R}$), (fg) e $\frac{f}{g}$ (se $g(x_o) \neq 0$) tamén son continuas en x_o.*
2. *Sexan $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $Imf \subset J$. Se f é continua en x_o e g é continua en $f(x_o)$, entón $g \circ f$ é continua en x_o.*

Exemplos 3.13

1. Se $k \in \mathbb{R}$, a función dada por $f(x) = k$ é continua en $\mathbb{R}$.
2. A función identidade $f(x) = x$ é continua en $\mathbb{R}$.

3. As funcións polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$.

4. As funcións racionais son continuas no seu dominio.

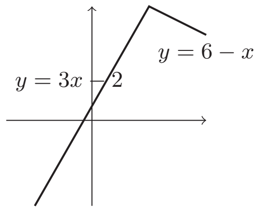
5. As funcións logarítmica e exponencial son continuas no seu dominio.

6. As funcións obtidas con operacións elementais (suma, produto, ...) de funcións continuas son continuas no seu dominio.

Cando estudamos se unha función é continua nun punto x_o realmente só nos fixamos no comportamento da función cerca do punto x_o, é por isto que se a función que estamos a estudar coincide nun intervalo centrado en x_o cunha función continua, temos asegurado que f é continua en x_o. En xeral, se unha función f coincide nun intervalo aberto cunha función g, as dúas teñen as mesmas características respecto da continuidade ou de calquera outra propiedade local en tódolos puntos dese intervalo.

Exemplos 3.14 1. Consideremos a función $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 6-x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$

No intervalo aberto $(-\infty, 2)$, f coincide coa función polinómica $y = 3x - 2$, polo tanto f é continua en $(-\infty, 2)$. Analogamente, no intervalo aberto $(2, +\infty)$, f coincide coa función polinómica $y = 6 - x$, polo tanto f é continua tamén neste conxunto.

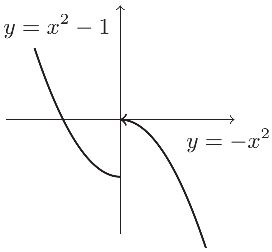


Só nos queda estudar a continuidade de f no punto $x_o = 2$, pero como f non coincide en ningún intervalo aberto que conteña a 2 cunha función da que podamos afirmar a priori a súa continuidade, teremos que estudar a continuidade usando a definición.
Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 3x - 2 = 4$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 6 - x = 4$ e ademais $f(2) = 4$, entón f é continua en $x_o = 2$.

Daquela, f é continua en $\mathbb{R}$.

2. Sexa $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ -x^2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

f é continua nos intervalos abertos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, por coincidir con funcións polinómicas.



Por outro lado,
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 - 1 = -1 = f(0)$

E como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} -x^2 = 0 \neq f(0) = -1$,
f non é continua en $x_o = 0$.

Teoremas relativos á continuidade global

Estudamos nesta sección algúns resultados que se refiren a funcións continuas definidas nun intervalo pechado. Comezamos por un resultado que afirma que unha función continua que alcanza valores de distinto signo en dous puntos do seu dominio ten que cruzar o eixe X nalgún punto intermedio.

Teorema 3.15 (Teorema de Bolzano) *Sexa $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a,b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, entón existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Observación 3.16 Unha aplicación práctica do teorema de Bolzano é a aproximación das raíces dunha ecuación. Ilustraremos esta aplicación cun exemplo concreto: intentaremos atopar de xeito aproximado unha solución da ecuación $x^3 + x - 1 = 0$.

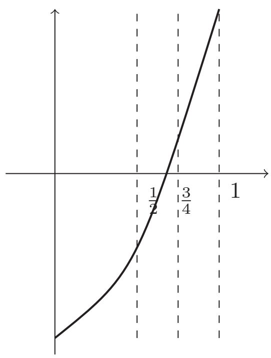
Vexamos primeiro que o polinomio $x^3 + x - 1$ ten algunha raíz real no intervalo $[0,1]$. Para iso consideremos a función $f(x) = x^3 + x - 1$, que é continua en $\mathbb{R}$ (en particular en $[0,1]$), e observamos que $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$. Aplicando o teorema de Bolzano a f en $[0,1]$, sabemos que existe $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$. O teorema non nos dá o valor (ou valores) da raíz, tan só nos asegura a existencia de polo menos unha raíz neste intervalo. Poderiamos considerar o punto medio do intervalo, $m = \frac{1}{2}$ como unha aproximación dunha solución da ecuación. O erro cometido é menor que 0.5

Se queremos mellorar a aproximación, como $f(\frac{1}{2}) < 0$, o teorema de Bolzano (aplicado agora a f en $[\frac{1}{2}, 1]$) permítenos asegurar que existe $c \in (\frac{1}{2}, 1)$ de xeito que $f(c) = 0$.

O punto medio do intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, $m = \frac{3}{4} = 0.75$ é unha aproximación da solución cun erro inferior a 0.25.

Se aínda se quere dar unha mellor aproximación, aplicamos o teorema de Bolzano a f no intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, posto que $f(\frac{3}{4}) > 0$ e $f(\frac{1}{2}) < 0$, de onde sabemos que existe $c \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ de xeito que $f(c) = 0$. Temos neste momento unha raíz do polinomio cun erro inferior a $\frac{1}{8}$.

Continuando este proceso obtemos cada vez mellores aproximacións da raíz buscada, pero se paramos aquí diriamos que o punto medio deste intervalo, 0.625, é unha solución da ecuación $x^3 + x - 1 = 0$, cun erro inferior a 0.125. Con outro paso máis obteriamos xa unha aproximación con un decimal exacto.



Consecuencias do teorema de Bolzano son os teoremas dos valores intermedios e do punto fixo.

Teorema 3.17 (Teorema dos valores intermedios) *Sexan $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función continua nun intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e x_1, $x_2 \in I$ de maneira que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Entón, se y_o está entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$, existe x_o entre x_1 e x_2 tal que $f(x_o) = y_o$.*

O teorema dos valores intermedios asegura que unha función continua que toma dous valores distintos alcanza tamén tódolos valores entre eles.

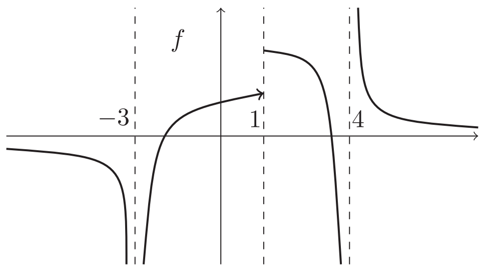
Teorema 3.18 (Teorema do punto fixo) *Se $f\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to [a, b]$ é unha función continua en $[a, b]$, entón existe $c \in [a, b]$ verificando que $f(c) = c$.*

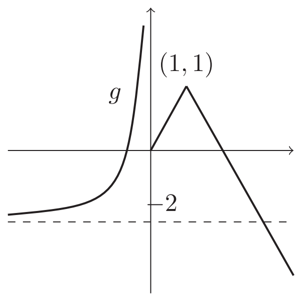
O teorema do punto fixo asegura que unha función continua definida nun intervalo pechado e limitado con imaxe contida nel ten alomenos un punto fixo.

Observación 3.19 Calquera dos tres teoremas enunciados asegura a existencia dun punto no dominio da función verificando unha determinada propiedade, nótese que ese valor pode non ser único.

Exercicios

22. Para as funcións f e g con gráficas





calcula os seguintes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to4} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to0} g(x)$, $\lim\limits_{x\to1} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

23. Se o custo total en euros para producir q unidades dun produto vén dado por $C(q) = 5000+8q$, entón o custo medio por unidade para unha produción de q unidades será $CMe(q) = C(q)/q$. Comproba que o custo medio se achega a un nivel de estabilidade se o produtor aumenta continuamente a produción. Cal é o nivel de estabilidade? Debuxa a gráfica da función de custo medio.

24. Prevese que a poboación dunha determinada cidade pequena dentro de t anos será $N(t) = 32000 + \dfrac{7000}{(t+4)^2}$. Calcula a poboación actual, dentro de 5 anos e a longo prazo.

25. Para que valor de k a función $f(x) = \begin{cases} 2 + e^{-1/x} & \text{se} \quad x < 0 \\ 2x + k & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ é continua en $x = 0$?

26. Cal é o valor de $a \in \mathbb{R}$ para o que a función $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{2}{\ln(x)} + a & \text{se} \quad x \in (0,1) \end{cases}$ é continua en $x_o = 0$?

27. Sexa $f(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Para que valor de $a \in \mathbb{R}$ é f continua en $x_o = 0$?

28. a) Debuxa a gráfica dunha función continua que verifique $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

    b) Debuxa a gráfica dunha función continua que verifique $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

    c) Debuxa a gráfica dunha función continua que verifique $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$, e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

29. O provedor de aceite Olives cobra en función do volume do pedido. A función, F, que representa o importe, en euros, dun pedido de x litros de aceite vén dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } 0 < x < 30 \\ 2x + 30 & \text{se } x \geq 30 \end{cases}$$

    a) Canto se cobra por pedidos de 10, 20 e 40 litros de aceite respectivamente?

    b) O importe F é una función continua?

    c) A canto se aproxima o prezo por litro cando o pedido é moi grande?

30. Unha distribuidora de fariña de trigo acepta pedidos dun mínimo de 25 toneladas e vende o seu produto a 400 € a tonelada para pedidos ata 150 toneladas. Para pedidos maiores o prezo é de 250 € a tonelada máis un fixo de 22500 €.

    Como está definida a función $F(t)$ que nos dá os miles de euros que cobra a distribuidora por un pedido de t toneladas de fariña? É continua?

31. A función $P(t) = 1 + \frac{8}{t+4}$, con $t \geq 0$, describe o prezo, en miles de euros, ao que se pode vender un determinado dispositivo electrónico transcorridos t meses dende que se adquiriu.

    a) Calcula o prezo ao que se pode vender o dispositivo xusto despois de adquirilo.

    b) Calcula o prezo ao que se pode vender o dispositivo despois de 6 meses.

    c) Calcula a que prezo se mercou se despois de tres anos da adquisición se pode vender ao 30 % do que custou.

    d) Cando o valor de mercado será o 50 % do prezo polo que se adquiriu?

    e) Representa a gráfica da función P. O prezo tende a estabilizarse arredor dalgún valor co paso do tempo?

32. Elixe un intervalo pechado concreto da forma $[a, b]$, marca no plano os puntos $(a, 3)$ e $(b, -2)$ e úneos cun trazo continuo que corresponda á gráfica dunha función. Esta podería ser a gráfica dunha función f nas condicións do teorema de Bolzano. Cal sería nesa gráfica o punto c cuxa existencia vén garantida por este resultado?

33. Fai unha interpretación xeométrica dos teoremas dos valores intermedios e do punto fixo similar a pedida no exercicio anterior para o teorema de Bolzano.

34. A función $f(x) = \frac{1}{x}$ toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo $[-2, 2]$ e non se anula nel. Contradí isto o teorema de Bolzano?

35. Proba que as seguintes ecuacións teñen, polo menos, unha solución real no intervalo indicado:
    a) $x^5 - 3x - 1 = 0$ en $[1, 2]$ b) $x^3 + x^2 - 2x = 0$ en $[1/2, 3/2]$
    c) $e^{-x} + 3x = 0$ en $[-1, 0]$ d) $x = 9\ln(x)$ en $[1, e^2]$
    e) $x\ln(x) = 1$ en $[1, e]$

36. Demostra que a ecuación $x^5 - x^3 + 4x^2 + 7 = 0$ ten, polo menos, unha solución real.

37. Dá, se é posible, unha función f continua no intervalo $[-2, 2]$ de xeito que cumpra $f(-2) = 5,\ f(2) = -5$ e f non tome nunca o valor 1.

38. Para a función de beneficios da empresa de transporte do exercicio 11 da páxina 55, pódese establecer un prezo por viaxe de xeito que se obteña un beneficio de 19200 € ?

39. Temos oportunidade de facer unha contribución dun máximo de 2000 € nun determinado negocio, e sabemos que probablemente recibiremos $I(x) = (x-1)^3+1$ miles de euros despois dun tempo determinado, sendo x os miles de euros que investimos inicialmente. Debuxa a gráfica da función I. Pode ser que recibamos a mesma cantidade que investimos inicialmente? En que caso recibiremos máis do investido?

40. Unha persoa sae da súa casa ás 8h para subir a un monte, chegando ao cumio deste ás 10h. Pasa alí o resto do día e, á mañá seguinte, empeza o descenso (seguindo o mesmo camiño) ás 8h, chegando á casa ás 9h ... e asegurando que pasou por un certo punto do camiño os dous días á mesma hora. É iso posible? Razoa a resposta.

3.4. Cálculo simbólico con Matlab: funcións dunha variable

No nivel máis elemental Matlab asemella unha calculadora científica. Cada vez que efectuamos unha operación o programa almacena o resultado na variable chamada `ans` (de «answer», resposta). Naturalmente, podemos escoller o nome da variable na que se garda o resultado dunha operación concreta. O separador decimal é o punto e a prioridade das parénteses é a habitual.

Os símbolos que serven para facer as operacións aritméticas elementais son: + (suma), − (resta), `*` (produto), `/` (division), e `^` (potencia). A sintaxe das funcións elementais é moi sinxela, abonda con escribir o nome da correspondente orde seguido, entre parénteses, do argumento. Os comandos que máis usaremos son: `exp` (función exponencial), `log` (logaritmo neperiano), `sqrt` (raíz cadrada) e `abs` (valor absoluto).

Así, para calcular $3e^{-5}$ e $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$ debemos teclear: `3*exp(-5)` e `log(sqrt(2)/6)`

Exercicio

41. Comproba os resultados das seguintes operacións:

    a) $\left(\dfrac{4}{\ln(2)}\right)^3 = 192.1780$ b) $\sqrt[5]{e^4+3} = 2.2495$ c) $\ln^2(5) = 2.5903$

    d) $\dfrac{3}{e^2} = 0.406$ e) $(3+\ln(4))^5 = 1623.6$ f) $\dfrac{4}{\sqrt{2}+3} = 0.9062$

Para traballar con variables simbólicas, en lugar de variables que representan valores numéricos concretos, debemos introducilas previamente. Por exemplo, para crear as variables simbólicas `x`, `t` usaremos a sentenza `syms x t`

Agora podemos definir outras expresións simbólicas que dependan desas variables, por exemplo, a función $f(x) = e^{-2x}$ sería `f(x)=exp(-2*x)` e para a función $P(t) = 3t^4 - 2\ln(t-1)$ teriamos que introducir `P(t)=3*t^4-2*log(t-1)`

Se quixésemos calcular $f(0)$ e $P(2)$ só teriamos que introducir `f(0)` e `P(2)`

Exercicio

42. Se $f(x) = xe^{-x^2} + \ln(x)$, comproba que $f(2) = 0.7298$

    Se $g(x) = \dfrac{x^4+3x}{x^2-2}$, comproba que $g(-3) = 10.2857$

Gráficos 2D

Para obter con Matlab a gráfica dunha función real de variable real podemos utilizar a representación simbólica utilizando o comando `ezplot`. Así, por exemplo, para debuxar a gráfica da función $f(x) = e^x$ no intervalo $[-10, 20]$, introduciremos na fiestra de comandos:

```
>> ezplot('exp(x)',[-10,20])
```

Se non se indica o intervalo, o programa elixe por defecto o intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ como dominio da función.

Cando representamos funcións no plano para estudar as súas propiedades xeométricas, adoitamos empregar a mesma escala nos dous eixes, de maneira que unha unidade de distanza representa o mesmo no eixe X ca no eixe Y. En Matlab, por defecto, a escala de cada eixe axústase entre o valor mínimo e o máximo dos valores a representar de modo automático, polo que hai que ter coidado á hora de interpretar unha gráfica xa que as distanzas e os ángulos aparecen distorsionados. Isto pode cambiarse coa sentenza: `axis([xminimo, xmaximo, yminimo, ymaximo])`

Exercicios

43. Representa a gráfica das rectas: a) $y = 2x$ b) $y = x + 3$ c) $y = 3x - 2$

44. Representa a gráfica das parábolas: a) $y = 3x^2$ b) $y = -x^2 + 5$ c) $y = x^2 + 3x - 7$

45. Representa a gráfica de: a) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

46. Representa a gráfica das funcións valor absoluto e da raíz cadrada.

47. Representa a gráfica de $f(x) = \mid x^2 + 3x - 7 \mid$

48. Representa a gráfica das funcións exponencial, $f(x) = e^x$, e logaritmo neperiano, $g(x) = \ln(x)$.

49. Representa a gráfica de: a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = e^{-x}$ c) $f(x) = (1/3)^x$

3.5. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Cal é o valor de k para que $f(x) = \begin{cases} 2x + k & \text{se} \quad x < 1 \\ 4 - \ln(x) & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$ sexa continua en $x = 1$?

   a) $k = -1$ b) $k = 1$ c) $k = -2$ d) $k = 2$

2. Cal dos seguintes resultados é FALSO?

   a) $\lim\limits_{x \to 0^+} 5^{\frac{1}{x}} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = 0$

   c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x+2} = 0$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

3. Sexa $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2$. Pódese afirmar que:

   a) Se $f(-1) = 2$, entón f é continua en $(-\infty, 0)$.
   b) Se $f(-1) = 2$, entón f é continua en $x_o = -1$.
   c) Se $f(-1) = 3$, entón f non é continua en ningún punto de $(-\infty, 0)$.
   d) f non é continua en $x_o = -1$, pois non existe o $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

4. Para que valor de $a \in \mathbb{R}$ a función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{2}{\ln(x)} + a & \text{se} \quad x \in (0, 1) \end{cases}$ é continua en $x_o = 0$?

   a) Ningún valor de a. b) $a = 1$ c) $a = -2$ d) $a = -1$

5. Cal das seguintes afirmacións é correcta?

   a) $\ln(0) = 1$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = 0$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 0$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0$

6. O $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^{-x^2}$ vale

   a) $+\infty$ b) 1 c) $-\infty$ d) 0

7. Sexa $f : [2,5] \to \mathbb{R}$, continua en $[2,5]$ tal que $f(2) = 4$ e $f(5) = 1$. Cal das seguintes afirmacións é FALSA?

   a) O Teorema dos valores intermedios asegura que existe $c \in (2,5)$ tal que $f(c) = 3$.

   b) O Teorema de Bolzano asegura que non existe ningún $c \in (2,5)$ tal que $f(c) = 0$.

   c) f ten un mínimo global en $[2,5]$.

   d) f ten un máximo global en $[2,5]$.

8. Sexa $f : [0,4] \to (2,3)$, pódese asegurar que:

   a) Se f é continua en $[0,4]$, existe $x_o \in [0,4]$ tal que $f(x_o) = x_o$.

   b) f é continua en $[0,4]$.

   c) Existe $x_o \in [0,4]$ tal que $f(x_o) = x_o$.

   d) $f(x_o) \neq x_o$, para todo $x_o \in [0,4]$.

9. Cal das seguintes funcións NON verifica as hipóteses do teorema de Bolzano no intervalo indicado?

   a) $f(x) = x - 5$, en $[4,6]$. b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, en $[-1,1]$.

   c) $f(x) = \ln(x)$, en $[\frac{1}{2}, 3]$. d) $f(x) = xe^x$, en $[-1,1]$.

10. Cal das seguintes funcións verifica as hipóteses do teorema de Bolzano no intervalo $[-3,3]$?

    a) $f(x) = e^x$ b) $g(x) = \frac{3}{x}$ c) $h(x) = x^2 + 6$ d) $p(x) = x + 1$

3.6. Solucións dos exercicios propostos

4. $y = \frac{1}{3}x$, $y = 2 - 3x$, $y = 4x + 9$

6. O valor de mercado do coche despois de t anos de mercalo é $V(t) = 20 - \frac{2}{3}t$ miles de euros. Dentro de 4 anos o valor será 15333 €.

10. Ao inicio do experimento hai 12 millóns de bacterias e volve haber a mesma cantidade despois de 4 semanas.

As bacterias desaparecen despois de 6 semanas. O número máximo de individuos da mostra producirase despois de dúas semanas de iniciado o experimento e será de 16 millóns de bacterias.

11. $B(p) = -10p^2 + 1000p - 5000$

12. O medicamento fai efecto durante un ano. Durante os seis primeiros meses aumenta continuamente o seu efecto, alcanzándose entón o mellor efecto, e despois diminue continuamente ata transcorrer o resto do ano.

13. Deben venderse entre 50 e 150 unidades para que os ingresos non sexan inferiores a 750 €. O máximo de ingresos que pode esperarse obter é 1000 €.

14. O máximo número de familias que utilizarán o produto será 72900 e ocorrirá aos 9 meses da súa introdución no mercado.

15. A campaña non resultou nada eficaz. Os ingresos ao principio eran de 200 000 €, e despois dun mes de 73 575.88 € . Os ingresos son de 100 000 € despois de 2 semanas e 5 días. Ademais a función I é decrecente con límite 0 cando t tende a infinito.

16. O prezo de equilibrio son 8 u.m. e a demanda no equilibrio son 120 unidades do produto. A demanda triplica a oferta cando o prezo son 4.82 u.m.

18. O valor de mercado da máquina t anos despois da súa adquisición é $V(t) = 60\,0.85^t$ miles de euros. A máquina ten un valor de 31320 € catro anos despois de mercala e o seu valor será inferior a 20 000 € despois de 6 anos e 9 meses de mercala.

19. O valor da fotocopiadora cae por debaixo de 800 € despois de 2 anos, 9 meses e 18 días da súa adquisición.

23. O custo medio achégase a un nivel de estabilidade de 8 €.

24. Actualmente a cidade ten 32438 habitantes, dentro de 5 anos terá 32086 e a longo prazo terá 32000 habitantes.

25. Para ningún valor de k

26. Para $a = 1$

27. Para todo $a \in \mathbb{R}$

29. O provedor cobra 30 € por 10 litros de aceite, 60 € por 20 litros e 110 € por 40 litros. F é continua. Canto máis grande é o pedido, o custo medio vai baixando e achégase cada vez máis a 2 € por litro.

31. O dispositivo pódese vender por 3000 € xusto despois de adquirilo e despois de 6 meses por 1800 €. Mercouse por 4000 € e o valor de mercado será a metade do prezo polo que se adquiriu ao cabo de catro meses. Co paso do tempo o valor de mercado descende e vai achegándose a 1000 €.

Solucións autoavaliación. 1d, 2b, 3b, 4b, 5d, 6d, 7b, 8a, 9b, 10d

Capítulo 4

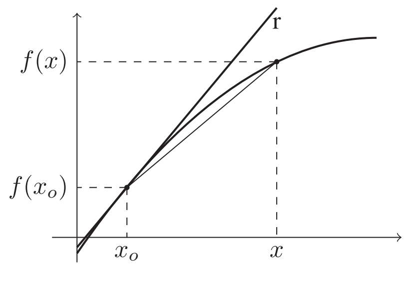
Cálculo diferencial de funcións dunha variable real. Aplicacións.

A análise marxinal en Economía é unha técnica usada para avaliar como os pequenos cambios nunha variable, como o prezo, afectan a outra variable, como os beneficios ou os custos. Este concepto correspóndese co concepto de derivación en Matemáticas.

4.1. Derivada dunha función nun punto

En adiante consideraremos unha función $f\colon (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_o \in (a,b)$.

Sabemos que para cada $x \neq x_o$, o cociente $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ é a pendente da recta que pasa polos puntos $(x, f(x))$ e $(x_o, f(x_o))$. Na gráfica podemos observar cando x se aproxima a x_o, a recta secante que une estes puntos achégase á recta tanxente á gráfica de f en x_o.



Así se existe $\displaystyle\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$, a recta r que pasa por $(x_o, f(x_o))$ e ten por pendente dito límite é a recta tanxente á gráfica de f en $(x_o, f(x_o))$.

Definición 4.1 *Diremos que a función f é* **derivable** *en x_o se existe o límite* $\displaystyle\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$. *En caso de existir, dito límite chámase derivada de f en x_o e denótase por $f'(x_o)$ ou $\frac{df}{dx}(x_o)$.*

Diremos que f é derivable en (a,b) se f é derivable en cada punto do intervalo (a,b). En tal caso defínese a función derivada de f como a función, $f'\colon (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x_o \in (a,b)$ lle fai corresponder o número real $f'(x_o)$.

Observación 4.2 Se f é derivable en x_o, $f'(x_o)$ é, pois, a pendente da recta tanxente á gráfica de f en $(x_o, f(x_o))$. A ecuación desta recta é logo $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$.

Exemplos 4.3

1. A función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é derivable en $\mathbb{R}$. Vexamos que $f'(x_o) = 2x_o$, para todo $x_o \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{x^2 - x_o^2}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{(x - x_o)(x + x_o)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o} x + x_o = 2x_o$$

2. A ecuación da recta tanxente á gráfica da función $f(x) = x^2$ no punto $(3, 9)$ é $y = f'(3)(x - 3) + f(3) = 6(x - 3) + 9$, isto é $y = 6x - 9$.

3. A función $f(x) = \mid x \mid$ non é derivable en $x_o = 0$ pois $\displaystyle\lim_{x\to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ non existe.

Proposición 4.4 *Se f é derivable en $x_o \in (a, b)$, entón f é continua en x_o.*

Observación 4.5 Unha función pode ser continua nun punto e non ser derivable nel, por exemplo $f(x) = \mid x \mid$ é continua en $\mathbb{R}$ e non é derivable en 0.

Facendo cálculos similares aos do exemplo 4.3.1 podemos obter as derivadas das funcións elementais seguintes:

Proposición 4.6 *Suposto que $a \in \mathbb{R}$ é un valor determinado, tense que:*

Se $f\,(x) = a,$ *entón* $f'\,(x) = 0$

Se $f\,(x) = x,$ *entón* $f'\,(x) = 1$

Se $f\,(x) = ax,$ *entón* $f'\,(x) = a$

Se $f\,(x) = x^a,$ *entón* $f'\,(x) = ax^{a-1}$

Se $f\,(x) = \frac{1}{x},$ *entón* $f'\,(x) = -\frac{1}{x^2}$

Se $f\,(x) = \sqrt{x},$ *entón* $f'\,(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Se $f\,(x) = e^x,$ *entón* $f'\,(x) = e^x$

Se $f\,(x) = a^x, ($ *con* $a > 0),$ *entón* $f'\,(x) = a^x \ln(a)$

Se $f\,(x) = \ln(x),$ *entón* $f'\,(x) = \frac{1}{x}$

Proposición 4.7 *Se $f, g\colon (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son derivables en (a, b), tamén son derivables as funcións $f + g$, λf (con $\lambda \in \mathbb{R}$), fg e $\frac{f}{g}$ (se $g(x) \neq 0$). Ademais:*

a) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ *b)* $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$

c) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ *d)* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Exemplos 4.8 1. Se $f(x) = 6x^4 - 3x + 2$, entón $f'(x) = 24x^3 - 3$.

2. Se $f(x) = \dfrac{6x^4 - 3x + 2}{x^3 - 4}$, entón $f'(x) = \dfrac{(24x^3 - 3)(x^3 - 4) - (6x^4 - 3x + 2)3x^2}{(x^3 - 4)^2} = \dfrac{6x^6 - 90x^3 - 6x^2 + 12}{(x^3 - 4)^2}$

3. Se $f(x) = x^2 \ln(x)$, entón $f'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \dfrac{1}{x} = 2x \ln(x) + x$

4. Se $f(x) = 4x^3 e^x + \frac{2}{x}$, entón $f'(x) = 12x^2 e^x + 4x^3 e^x - \frac{2}{x^2} = (12x^2 + 4x^3)e^x - \frac{2}{x^2}$

Observación 4.9 En Economía, o concepto de marxinalidade correspóndese co de derivación. Así, as funcións derivadas das funcións de custo, de ingreso e de beneficio denomínanse, respectivamente, custo marxinal, ingreso marxinal e beneficio marxinal.

Exercicios

1. a) Calcula a pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x) = \ln(x)$ en $x = 4$.
   b) En que punto a recta tanxente a $f(x) = \ln(x)$ é paralela á recta $y = 3x - 8$?
   c) En que punto a recta tanxente a $f(x) = x^3 - 2x$ é paralela á recta $y = 2x + 4$?

2. Calcula as ecuacións das rectas tanxentes ás gráficas das seguintes funcións no punto indicado:
   a) $f(x) = e^{2x}$ no punto $(0, 2)$
   b) $f(x) = \ln(x)$ no punto $(1, 0)$
   c) $f(x) = 6x^4 - 3x + 2$ no punto $(0, 2)$
   d) $f(x) = \dfrac{6x^4 - 3x + 2}{x^3 - 4}$ no punto $(1, -\frac{5}{3})$

4.2. Regra da cadea

Proposición 4.10 (Regra da cadea) *Sexan $f\colon (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon (c, d) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_o \in (a, b)$ de maneira que $f(a, b) \subset (c, d)$.*

Se f é derivable en x_o e g é derivable en $f(x_o)$, entón $g \circ f$ é derivable en x_o e, ademais,

$$(g \circ f)'(x_o) = g'(f(x_o))f'(x_o)$$

Exemplos 4.11 1. Sexa $f(x) = (x^2 - 3x)^4$. Se tomamos $h(x) = x^4$ e $g(x) = x^2 - 3x$, observamos que $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 - 3x) = (x^2 - 3x)^4 = f(x)$. Daquela, como $h'(x) = 4x^3$ e $g'(x) = 2x - 3$, entón

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = 4(g(x))^3(2x - 3) = 4(x^2 - 3x)^3(2x - 3)$$

2. Se $h(x) = \left(\frac{3x-1}{x^3+2}\right)^5$, aplicando a regra da cadea obtemos

$$h'(x) = 5\left(\tfrac{3x-1}{x^3+2}\right)^4 \ \tfrac{3(x^3+2)-(3x-1)3x^2}{(x^3+2)^2} = \tfrac{5(3x-1)^4(-6x^3+3x^2+6)}{(x^3+2)^6}$$

3. Dada $g(x) = \ln(x^2)$, entón $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$

4. Para $f(x) = \ln^2(x)$, $f'(x) = 2\ln(x)\dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln(x)}{x}$

5. Se $g(x) = \sqrt[3]{(3x-1)^2}$, entón $g'(x) = \frac{2}{3}\big(3x-1\big)^{\frac{-1}{3}}\ 3 = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3x-1}}$

6. Se $h(x) = x^3\sqrt{1-x^2}$, $\ h'(x) = 3x^2\sqrt{1-x^2} + x^3\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 3x^2\sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{3x^2-4x^4}{\sqrt{1-x^2}}$

Quédanos por revisar como se derivan funcións nas que aparece unha potencia de xeito que nin a base nin o expoñente son constantes, senón que son expresións alxébricas. Nestes casos utilizaremos propiedades dos logaritmos que simplificarán os cálculos.

Exemplo 4.12 Para derivar a función $f(x) = (3x^5 + 4x)^{3x}$, aplicamos primerio logaritmos neperianos. Así temos que $\ln(f(x)) = \ln(3x^5+4x)^{3x} = 3x\ \ln(3x^5+4x)$. E agora derivamos, de xeito que obtemos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3\ln(3x^5+4x) + \frac{15x^4+4}{3x^5+4x}3x$$

Logo, $f'(x) = f(x)\big(3\ln(3x^5+4x) + \frac{3x(15x^4+4)}{3x^5+4x}\big)$ e

$$f'(x) = (3x^5+4x)^{3x}\Big(3\ln(3x^5+4x) + \frac{45x^5+12x}{3x^5+4x}\Big)$$

4.3. Derivadas de orde superior

Definición 4.13 *Sexa $f\colon (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función derivable en (a,b). Vimos que a función derivada de f defínese como a función, $f'\colon (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada $x \in (a,b)$ lle fai corresponder o número real $f'(x)$.*

Se f' é, á súa vez, derivable en (a,b), defínese $f''\colon (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como a función derivada de f', así $f''(x) = (f')'(x) \in \mathbb{R}$, que se denominará derivada segunda de f ou derivada de orde 2 de f.

E así sucesivamente, é dicir, se $n \in \mathbb{N}$ e $f^{n-1)}\colon (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é unha función derivable en (a,b), defínese a función derivada n-ésima de f ou derivada de orde n de f, $f^{n)}\colon (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como a función derivada de $f^{n-1)}$.

Exemplos 4.14 1. Se $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+2}$, entón $f'(x) = -\dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+x+2)^2}$

$$f''(x) = 2\frac{x^3+3x^2-3x-3}{(x^2+x+2)^3}$$

$$f'''(x) = -6\frac{x^4+4x^3-6x^2-12x-1}{(x^2+x+2)^4}$$

$$f^{4)}(x) = 24\frac{x^5+5x^4-10x^3-30x^2-5x+5}{(x^2+x+2)^5}$$

2. Se $f(x) = x\ln(x^2+1)$, entón $f'(x) = \ln(x^2+1) + \dfrac{2x^2}{x^2+1}$, $f''(x) = \dfrac{2x^3+6x}{(x^2+1)^2}$,

   $f'''(x) = -2\dfrac{x^4+6x^2-3}{(x^2+1)^3}$, $f^{4)}(x) = 4x\frac{x^4+10x^2-15}{(x^2+1)^4}$.

3. Se $f(x) = x^4 - 8x^2 - 5$, entón $f'(x) = 4x^3 - 16x$, $f''(x) = 12x^2 - 16$, $f'''(x) = 24x$, $f^{4)}(x) = 24$ e $f^{n)}(x) = 0$, para todo $n > 4$.

4. Se $f(x) = e^x$, entón $f^{n)}(x) = e^x$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Se $f(x) = \ln(x)$, entón $f^{n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Definición 4.15 *Dise que $f\colon (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de clase n en (a,b), para $n \in \mathbb{N}$, se f admite derivada de orde n en (a,b) e $f^{n)}$ é continua en (a,b).*

O conxunto de tódalas funcións de clase n en (a,b) denótase por $\mathcal{C}^n((a,b))$.

Se f admite derivada de calquera orde en (a,b), dise que f é de clase infinito en (a,b), e denótase por $\mathcal{C}^\infty((a,b))$ o conxunto de tódalas funcións de clase infinito en (a,b).

O conxunto de tódalas funcións continuas en (a,b) denótase por $\mathcal{C}^0((a,b))$.

Exemplos 4.16 1. A función $f(x) = x^4 - 8x^2 - 5$ é de clase infinito en $\mathbb{R}$ porque, como vimos anteriormente, admite derivadas de calquera orde.

2. Tamén é de clase infinito en $\mathbb{R}$ a función $f(x) = e^x$.

3. A función $g(x) = \ln(x)$ é de clase infinito en $(0, +\infty)$.

Son de clase infinito no seu dominio tódalas funcións que resultan de facer operacións coas funcións elementais.

Exercicios

3. Calcula a derivada das seguintes funcións:

   1) $f(x) = x - \dfrac{3}{x^2}$ 2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 3) $f(x) = \sqrt{(2x^2+1)^3}$

   4) $f(x) = \dfrac{x^3-x}{4}$ 5) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{2+\sqrt{x}}\right)^3$ 6) $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^2-8}$

7) $f(x) = \dfrac{x^6}{(3x-2)^5}$ 8) $f(x) = e^{-2x} - 2x^3$ 9) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x\, e^x}$

10) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + e^{2x}$ 11) $f(x) = \left(3x^{-2} + 5x^4\right)^{-1}$ 12) $f(x) = e^{-x}\ln(x)$

13) $f(x) = \dfrac{6x^4 - 3x + 2}{x^3 - 4}$ 14) $f(x) = x^2\ln(x)$ 15) $f(x) = 4x^3e^x + \frac{2}{x}$

16) $f(x) = (x^2 - 3x)^4$ 17) $h(x) = \left(\dfrac{3x-1}{x^3+2}\right)^5$ 18) $f(t) = \sqrt[3]{(3-6t)^2}$

19) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ 20) $g(x) = \sqrt[5]{(4x-1)^3}$ 21) $h(x) = x^3\sqrt{1-x^2}$

22) $f(t) = t^2\ln(\frac{1}{t})$ 23) $f(t) = \left(\dfrac{2t}{t-1}\right)^4$ 24) $f(x) = 3^{\ln(x)}$

25) $f(x) = x^2\ln(3x) + e^{3x}$ 26) $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x^2}}$ 27) $f(x) = x^5 + 5^x$

28) $f(x) = (x^2+1)^{\ln(2x)}$ 29) $f(x) = x^3\ln(\frac{x}{x+1})$ 30) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

31) $f(x) = (2 + 2x + x^2)e^{-x}$ 32) $f(x) = \frac{k}{x^3}$ 33) $f(x) = bx^{\frac{3}{5}}$

34) $f(x) = (x+5)\sqrt[3]{x^2}$ 35) $g(t) = t^{\frac{4}{7}}$ 36) $\alpha(r) = 5r^{\frac{2}{3}}$

37) $\beta(s) = \dfrac{-3}{\sqrt[5]{s^6}}$ 38) $q(a) = 8a^{\frac{1}{3}}$ 39) $g(x) = \frac{2}{7}x^{\frac{-3}{4}}$

40) $F(x) = \sum_{n=1}^{20} nx^n$ 41) $H(x) = \sum_{n=4}^{18} \frac{1}{n}(x-1)^n$ 42) $G(x) = 2a(3-x)^a$

4. Calcula as derivadas de orde n de $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = 3x^5$ e $h(x) = x^k$

5. Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é unha función derivable, calcula a derivada das funcións:

   a) $h(x) = f(x+5)$ b) $h(x) = f(x^2)$ c) $h(x) = f\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ d) $h(x) = \dfrac{f(3x)}{\ln(x)}$

6. Se $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funcións derivables, calcula a derivada das funcións:

   a) $f(x) = g(x + h(2))$ b) $f(x) = g(5xh(3)) + h(0)(x-e)$ c) $f(x) = g(x + g(x))$
   d) $f(x) = g(x)(x-4)$ e) $f(x) = g(x^2) - x$ f) $f(x) = g(x^2 - x)$

7. Sexan $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función derivable e $a \in \mathbb{R}$. Calcula a derivada das funcións:

   a) $f(x) = g(x + g(a))$ b) $f(x) = g(xg(a))$ c) $f(x) = g(ax^2 + g(x))$
   d) $f(x) = g(x)(x-a)$ e) $f(x) = g(a)(x-a)$ f) $f(x+3) = g(x^2)$

8. A función de consumo expresa a relación entre a renda nacional total (Y) e o consumo nacional total (C) e, normalmente, exprésanse en miles de millóns de euros. A propensión marxinal ao consumo defínese como a taxa de variación do consumo con respecto á renda, isto é a derivada de C con respecto a Y. A función de aforro vén dada por $S = Y - C$ e a propensión marxinal ao aforro defínese como a taxa de variación do aforro con respecto á renda.

   Se a función de consumo vén dada por $C = \dfrac{5(2\sqrt{Y^3}+3)}{Y+10}$, determina a propensión marxinal ao consumo e ao aforro cando $Y = 100$.

9. Supoñamos que a función de aforro dun país é $S = \dfrac{Y - \sqrt{Y} - 6}{\sqrt{Y}+2}$ onde a renda nacional, Y, e o aforro nacional, S, mídense en miles de millóns de euros. Atopa a propensión marxinal do país a consumir e a súa propensión marxinal a aforrar cando a renda nacional é de 225000 millóns de euros.

10. O aforro S dun país (en miles de millóns de euros) está relacionado coa renda nacional Y (tamén en miles de millóns de euros) pola expresión $S = \ln\left(\dfrac{3}{2+e^{-Y}}\right)$. Proba que a propensión marxinal ao consumo en función da renda é $\dfrac{e^{-Y}}{2+e^{-Y}}$.

11. Se a ecuación de demanda dun produto é $Q(p) = 1000 - p/5$, onde p é o prezo de venda en euros, acha a función de ingresos marxinais e avalíaa cando $p = 20$.

12. Se a ecuación de demanda dun produto é $Q(p) = 75 - 10\ln(2p+1)$, onde p é o prezo de venda en euros, acha a función de ingresos marxinais.

13. Se a función de custo total dun fabricante vén dada por $C(q) = \frac{4q^2}{q+5} + 6000$, calcula o custo marxinal.

14. Se a función de custo medio dun fabricante vén dada por $CMe(q) = \frac{400}{\ln(q+5)}$, calcula o custo marxinal cando $q = 45$.

15. Para unha empresa, a produción diaria no día t dun ciclo produtivo vén dada por $q = 500(1 - e^{-0.2t})$. Calcula a taxa de variación da produción con respecto a t o décimo día.

16. Nun centro de saúde examináronse as altas dun grupo de pacientes que foron hospitalizados por unha enfermidade concreta, e atopouse que o número total de persoas que recibiron a alta ao final dos t días de hospitalización viña dado por $A(t) = \left(2 + \dfrac{5}{t}\right)^3$. Calcula $A'(30)$.

17. Nunha análise da difusión dun novo proceso nun mercado, faise referencia a unha relación da forma $Y = k\alpha^{\beta^t}$, onde Y é o nivel acumulado de difusión do novo proceso no tempo t, e k, α e β son constantes positivas. Comproba que $\dfrac{dY}{dt} = k\alpha^{\beta^t}\beta^t\ln(\alpha)\ln(\beta)$

4.4. Regra de L'Hôpital

A regra de L'Hôpital é unha ferramenta que nos permitirá resolver facilmente moitas das indeterminacións que nos podemos atopar no cálculo de límites.

Teorema 4.17 (Regra de L'Hôpital) *Sexan f, g derivables en (a, b), con $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, y $x_o \in (a, b)$ tal que $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 0$.*

Entón, se existe $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, verifícase que $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Exemplos 4.18 Os límites que seguen están nas condicións da regra de L'Hôpital.

1. Para calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-\sqrt{x}}$, temos en principio unha indeterminación, xa que $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = \lim\limits_{x\to 1} x - \sqrt{x} = 0$. Aplicando a regra de L'Hôpital, como se ten $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2$, entón $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-\sqrt{x}} = 2$.

2. Para calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 5^x}{x}$, temos en principio unha indeterminación, xa que $\lim\limits_{x\to 0} 2^x - 5^x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Aplicando a regra de L'Hôpital, como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x\ln(2) - 5^x\ln(5)}{1} = \ln(2) - \ln(5)$ $= \ln(\frac{2}{5})$, entón $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 5^x}{x} = \ln(\frac{2}{5})$.

Observacións 4.19

1. A regra de L'Hôpital tamen é válida se se trata de límites nos que x tende a $\pm\infty$, en lugar de a un valor concreto x_o, e tamén se pode aplicar a límites laterais. Cando ℓ é $\pm\infty$ tamén é válida, pero xa non se aplica a máis casos, é dicir só para indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

2. Debemos ser coidadosos ao aplicar a regra de L'Hôpital, xa que se non existe o $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, non se nos asegura que podamos concluír que non existe $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

3. Se as funcións f' e g' tamén están nas condicións da regra de L'Hôpital, esta pode aplicarse de novo a ditas funcións.

Exemplos 4.20

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{2^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{2^x\ln(2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x}{2^x\ln^2(2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{2^x\ln^3(2)} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x\ln(2)}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x\ln^2(2)}{6x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x\ln^3(2)}{6} = +\infty$

3. Se $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = \pm\infty$, entón considerando $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ou $f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, se é posible, resultaría unha indeterminación á que se lle pode aplicar a regra de L'Hôpital. Por exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1}\,\frac{\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{x^2-1} = -2$$

4.5. Crecemento e extremos de funcións dunha variable real

Definición 4.21 *Sexa I un intervalo e $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

f é **monótona crecente** *en I se dados $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$ entón $f(x_1) \leq f(x_2)$. Se $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$ diremos que f é estritamente crecente en I.*

f é **monótona decrecente** *en I se dados $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$ entón $f(x_1) \geq f(x_2)$. Se $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$ diremos que f é estritamente decrecente en I.*

Definición 4.22 *Sexan unha función $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e un punto $x_o \in A$, dise que*

1. *$x_o \in A$ é un* **mínimo relativo ou local** *de f se $f(x) \geq f(x_o)$, para todo $x \in A$ cerca de x_o.*
2. *$x_o \in A$ é un* **mínimo global ou absoluto** *de f se $f(x) \geq f(x_o)$, para todo $x \in A$.*
3. *$x_o \in A$ é un* **máximo relativo ou local** *de f se $f(x) \leq f(x_o)$, para todo $x \in A$ cerca de x_o.*
4. *$x_o \in A$ é un* **máximo global ou absoluto** *de f se $f(x) \leq f(x_o)$, para todo $x \in A$.*

Os máximos e os mínimos de f denomínanse **extremos ou óptimos** da función. Obviamente todo extremo global é un extremo local da función.

Exemplos 4.23

1. $f(x) = |\,x\,|$ ten en $x_o = 0$ un mínimo global porque $f(x) = |\,x\,| \geq 0 = f(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. A función $h(x) = -x^2 + 7$ ten en $x_o = 0$ un máximo global porque $h(x) = -x^2 + 7 \leq 7 = h(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. A función $g(x) = -h(x) = x^2 - 7$ ten en $x_o = 0$ un mínimo global porque $g(x) = x^2 - 7 \geq -7 = g(0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En xeral, x_o é un máximo (resp. mínimo) de f se, e só se, x_o é un mínimo (resp. máximo) de $-f$.
4. Tamén pode resultar de utilidade saber que se $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crecente, x_o é máximo da función f se, e só se, é máximo de $g \circ f$. Analogamente para os mínimos. Así temos que $x_o = 0$ é un máximo global da función $F(x) = e^{-x^2+7}$

   Se g fose decrecente, os máximos de f coincidirían cos mínimos de $g \circ f$ e os mínimos de f coincidirían cos máximos de $g \circ f$.

Proposición 4.24 *Se $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua en $[a,b]$ entón existen $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in [a,b]$. É dicir, x_1 e x_2 son mínimo e máximo globais de f respectivamente.*

Polo tanto, toda función continua definida nun intervalo $[a,b]$ alcanza alomenos un máximo e un mínimo nel.

Proposición 4.25 *Sexa $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f ten un extremo en $x_o \in (a,b)$ e f é derivable en x_o, entón $f'(x_o) = 0$.*

Observacións 4.26

1. Este resultado dános unha condición necesaria para a existencia de extremos, pero non suficiente: a función $f(x) = x^3$ é derivable en $x_o = 0$ e $f'(0) = 0$, pero non ten un extremo nese punto.
2. É fundamental que o punto x_o estea no interior do intervalo, é dicir, que $x_o \in (a,b)$ pois a función $f\colon [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ ten un máximo en $x_o = 1$ e $f'(1) = 1 \neq 0$.
3. Á vista dos comentarios anteriores, os posibles extremos dunha función $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ serían:
   - Aqueles puntos interiores nos que se anula a primeira derivada.
   - Os extremos do intervalo, é dicir, a e b.
   - Aqueles puntos do dominio onde a función non é derivable.

Teorema 4.27 (Teorema de Rolle) *Sexa $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b). Se $f(a) = f(b)$, entón existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Exercicio 4.28 Interpreta xeometricamente este teorema e fíxate como afirma que, se a recta que une os puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é paralela ao eixe X, entón existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que a recta tanxente á gráfica de f en $(c, f(c))$ é, tamén, paralela ao eixe X.

Teorema 4.29 (Teorema do valor medio) *Se $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é unha función continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b), entón existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Exercicio 4.30 Interpreta xeometricamente este teorema e fíxate como afirma que existe polo menos un punto $c \in (a,b)$ tal que a recta tanxente á gráfica de f en $(c, f(c))$ é paralela á recta que une os puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Como consecuencia do Teorema do valor medio obtemos os seguintes resultados:

Proposición 4.31 *Sexa $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b).*

1. *$f'(x) = 0$, para todo $x \in (a,b)$ se, e só se, f é constante.*
2. *$f'(x) \geq 0$, para todo $x \in (a,b)$ se, e só se, f é crecente.*

3. *Se $f'(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$, entón f é estritamente crecente.*

4. *$f'(x) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$ se, e só se, f é decrecente.*

5. *Se $f'(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$, entón f é estritamente decrecente.*

Observación 4.32 A función $f(x) = x^3$ é estritamente crecente e, non obstante, $f'(0) = 0$. É dicir, non se ten o recíproco do apartado 3 (nin, de xeito análogo, do 5) da proposición.

Proposición 4.33 *Sexan $f \in \mathcal{C}^n((a, b))$ e $x_o \in (a, b)$ tal que $f^{k)}(x_o) = 0$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$ e $f^{n)}(x_o) \neq 0$. Entón:*

1. *Se n é par e $f^{n)}(x_o) < 0$, f ten un máximo relativo en x_o.*

2. *Se n é par e $f^{n)}(x_o) > 0$, f ten un mínimo relativo en x_o.*

3. *Se n é impar, x_o non é un extremo de f.*

Exemplos 4.34

1. A función $f(x) = 2x^9$ non ten un extremo en $x_o = 0$ porque $f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{8)}(0) = 0$ e $f^{9)}(0) \neq 0$

2. A función $g(x) = e^x + e^{-x} - x^2$ ten un mínimo en $x_o = 0$ porque

   $g'(x) = e^x - e^{-x} - 2x,\; g'(0) = 0$

   $g''(x) = e^x + e^{-x} - 2,\; g''(0) = 0$

   $g'''(x) = e^x - e^{-x},\; g'''(0) = 0$

   $g^{4)}(x) = e^x + e^{-x},\; g^{4)}(0) = 2 > 0$

3. Estudemos os extremos de $f(x) = x\sqrt{x(4-x)}$. O dominio desta función é o intervalo $[0, 4]$ e, polo tanto, os posibles extremos son $x = 0$, $x = 4$ e aqueles puntos do intervalo $(0, 4)$ nos que f' se anula.

   Como $f(x) \geq 0 = f(0) = f(4)$, para todo $x \in (0, 4)$, $x = 0$ e $x = 4$ son mínimos globais da función. Ademais, para cada $x \in (0, 4)$,

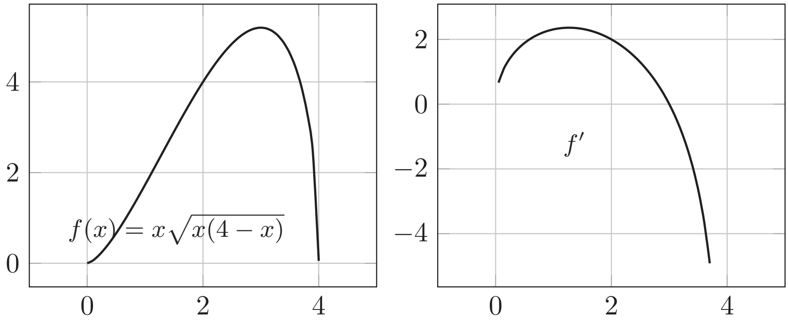
   $$f'(x) = \sqrt{x(4-x)} + x\frac{4-2x}{2\sqrt{x(4-x)}} = \frac{2x(3-x)}{\sqrt{4x - x^2}}$$

   que só se anula cando $x = 3$. Para saber se este punto é ou non un extremo de f estudamos o signo da primeira derivada:

   - Se $x \in (0, 3)$, $f'(x) > 0$ e, polo tanto, f é crecente nese intervalo.
   - Se $x \in (3, 4)$, $f'(x) < 0$ e, polo tanto, f é decrecente nese intervalo.

   Entón, $x = 3$ é un máximo de f. Doutro xeito poderiamos ter calculado $f''(x)$ para comprobar que $f''(3) < 0$.

Vemos as gráficas de f e de f' e comprobamos nelas os resultados obtidos.



4.6. Concavidade e convexidade

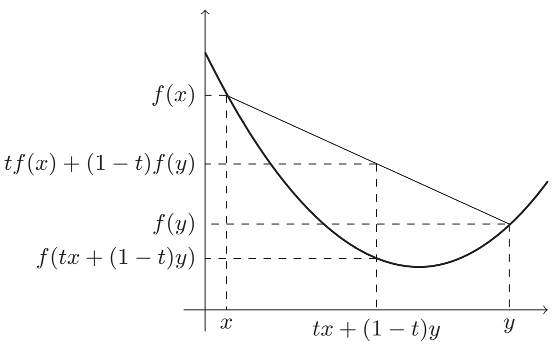
Definición 4.35 *Sexan I un intervalo e $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dise que*

1. *f é* **convexa** *en I se, para cada $x, y \in I$ e cada $t \in [0,1]$, se verifica que $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.*

2. *f é* **cóncava** *en I se, para cada $x, y \in I$ e cada $t \in [0,1]$, se verifica que $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$.*

Se as desigualdades anteriores son estritas dise que a función é estritamente convexa ou estritamente cóncava respectivamente.

Observación 4.36 Tendo en conta que se t toma tódolos valores do intervalo $[0,1]$, entón obtemos que $(X(t), Y(t)) = (tx + (1-t)y, tf(x) + (1-t)f(y))$ é o segmento que une os puntos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$. Vemos que unha función é convexa se, e só se, a gráfica de f no intervalo $[x, y]$ queda por debaixo do segmento que une $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ como se ve na figura adxunta.



Do mesmo xeito, unha función é cóncava se, e só se, a gráfica de f no intervalo $[x, y]$ queda por enriba do segmento que une $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$.

Cando ademais a función é derivable, resulta que é cóncava se, e só se, a recta tanxente á gráfica de f en cada punto queda por enriba dela. Do mesmo xeito, unha función derivable é convexa se, e só se, a recta tanxente á gráfica de f en cada punto queda por debaixo dela.

Proposición 4.37 *Se $f\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é unha función convexa en $[a, b]$, entón f é continua en $[a, b]$. Analogamente, se f é cóncava.*

Definición 4.38 *$x_o \in (a, b)$ dise que é un* **punto de inflexión** *de $f\colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se existe $r > 0$ tal que f é convexa (resp. cóncava) en $(x_o - r, x_o)$ e cóncava (resp. convexa) en $(x_o, x_o + r)$.*

Proposición 4.39 *Sexa $f \in \mathcal{C}^2((a, b))$, $x_o \in (a, b)$ é un punto de inflexión de f, entón $f''(x_o) = 0$.*

Observación 4.40 Este resultado danos unha condición necesaria para que $x_o \in (a, b)$ sexa un punto de inflexión dunha función de clase dúas. Non nos dá unha condición suficiente pois a función $f(x) = x^4$ verifica que $f''(0) = 0$ e, aínda así, $x_o = 0$ non é un punto de inflexión.

Proposición 4.41 *Sexa $f \in \mathcal{C}^2((a, b))$. Verifícase que:*

1. *f é convexa en (a, b) se, e só se, $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in (a, b)$.*
2. *f é cóncava en (a, b) se, e só se, $f''(x) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$.*
3. *Se $f''(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$, entón f é estritamente convexa en (a, b).*
4. *Se $f''(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$, entón f é estritamente cóncava en (a, b).*

Observación O recíproco dos apartados 3 e 4 non se verifica en xeral: a función $f(x) = x^4$ é estritamente convexa e $f''(0) = 0$.

Proposición 4.42 *Sexan $f \in \mathcal{C}^n((a, b))$ e $x_o \in (a, b)$ de xeito que $f^{k)}(x_o) = 0$, para todo $k = 2, \ldots, n-1$ e $f^{n)}(x_o) \neq 0$. Entón:*

1. *Se n é impar, f ten un punto de inflexión en x_o.*
2. *Se n é par, x_o non é un punto de inflexión de f.*

Exemplo 4.43 A función $f(x) = 2x^9$ ten un punto de inflexión en $x_o = 0$ porque $f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{8)}(0) = 0$ e $f^{9)}(0) \neq 0$

Exemplo 4.44 Estudaremos crecemento, decrecemento, extremos relativos, concavidade, convexidade e puntos de inflexión da función $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Observamos primeiro que esta función é de clase infinito en $\mathbb{R}$, polo que podemos usar tódolos resultados que coñecemos relacionados coa derivación para realizar o estudo. Para atopar os seus extremos, calculamos a derivada de f:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$$

Como esta función só se anula cando $x = 0$ e $x = 2$, os únicos posibles extremos de f son estes dous puntos.

Estudamos o signo da derivada:

- Se $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) < 0$ e, polo tanto, f é decrecente en $(-\infty, 0)$.
- Se $x \in (0, 2)$, $f'(x) > 0$ e, daquela, f é crecente en $(0, 2)$.
- Se $x \in (2, +\infty)$, $f'(x) < 0$ e, daquela, f é decrecente en $(2, +\infty)$.

Xa podemos concluír que f presenta un mínimo en $(0, 0)$ e un máximo en $(2, 4e^{-2})$. Aínda que tamén poderiamos telo comprobado vendo que $f''(0) > 0$ e que $f''(2) < 0$

A segunda derivada, $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$, anúlase para $x = 2 + \sqrt{2}$ e para $x = 2 - \sqrt{2}$. Estudamos o signo da segunda derivada:

- Se $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2})$, $f''(x) > 0$ e, polo tanto, f é convexa nese intervalo.
- Se $x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, $f''(x) < 0$ e, daquela, f é cóncava nese intervalo.
- Se $x \in (2 + \sqrt{2}, +\infty)$, $f''(x) > 0$ e, daquela, f é convexa nese intervalo.

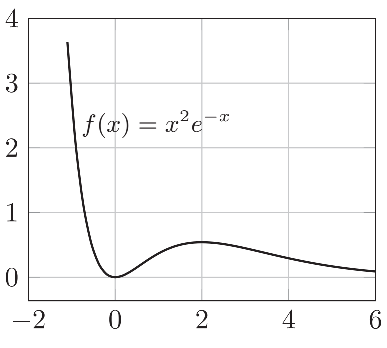
Podemos concluír que f presenta puntos de inflexión para $x = 2 + \sqrt{2}$ e para $x = 2 - \sqrt{2}$, aínda que tamén poderiamos comprobalo vendo que a derivada terceira non se anula nestes puntos.

Para mellor esbozar a gráfica da función $f(x) = x^2e^{-x}$, podemos tamén estudar o seu comportamento cando x tende a $+\infty$ e $-\infty$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Así a gráfica de f será:



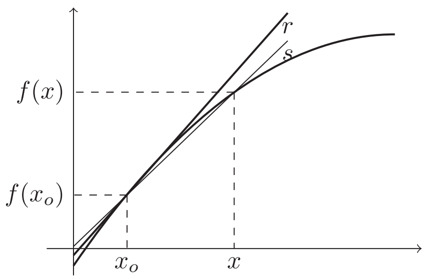
4.7. Incrementos. Análise marxinal

En xeral o incremento dunha magnitude refírese á variación que esta experimenta, é dicir, a diferenza entre o valor final e o valor inicial, e represéntase usando a letra grega delta maiúscula (Δ). Imos ver que cando esta magnitude está representada por unha función derivable, o incremento para variacións pequenas da variable pode calcularse de xeito aproximado usando a derivada da función.

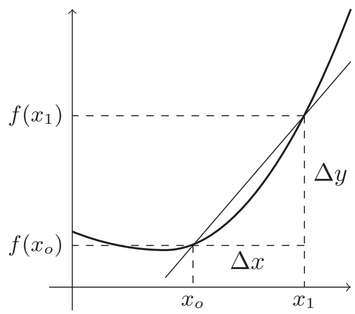
Aproximación de incrementos usando a derivada

Recordamos o concepto de derivada e a súa interpretación xeométrica. Como xa vimos, a derivada dunha función $f\colon (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no punto $x_o \in (a,b)$, denótase por $f'(x_o)$ e é a pendente da recta r, tanxente á gráfica de f en $(x_o, f(x_o))$.

Se $x \neq x_o$, o cociente $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ é a pendente da recta s, secante que pasa polos puntos $(x, f(x))$ e $(x_o, f(x_o))$.



Cando x está moi cerca de x_o a pendente da recta tanxente r é parecida á pendente da recta secante s. Se representamos $f(x) - f(x_o)$ como Δy (a variación que experimenta f) e $x - x_o$ como Δx (a variación que experimenta x), poderemos entón usar $f'(x_o)$ como unha aproximación de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$. Así, a pendente reflicte a taxa de variación de f con respecto a x.



Temos logo que, se f é derivable en x_o, para Δx suficientemente pequeno, $f'(x_o) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ou equivalentemente $\Delta y \approx f'(x_o)\Delta x$

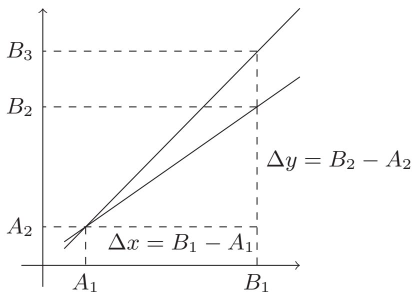
Supoñamos, por exemplo, que $C(q) = 700 + 8q^2$ representa os custos de producir q unidades dun determinado produto. Se o nivel de produción actual é de 100 unidades e o fabricante quere saber en canto se incrementa o custo se aumenta a produción a 102 unidades, debemos calcular $C(102) - C(100) = 83932 - 80700 = 3232$. Obtemos así o custo real de producir dúas unidades máis, cando se fabrican xa 100.

Se queremos obter unha aproximación desta variación no custo, usando a aproximación por incrementos, temos que $\Delta C \approx C'(100)\Delta q = 1600 \cdot 2 = 3200$

Resulta habitual usar este xeito de aproximación para o caso en que $\Delta x = 1$, cando se traballa con cantidades relativamente grandes. Neste caso $f'(x_o)$ aproxima a variación de f cando se pasa de x_o a unha unidade máis, $x_o + 1$. Así, se por exemplo, $A(t)$ representa o número total de pacientes que foron hospitalizados por unha enfermidade concreta e recibiron a alta ao final de t días de hospitalización, $A'(300)$ interprétase como unha aproximación da diferenza entre o número de pacientes que recibiron a alta ao cabo de 301 días e os que tardaron un día menos en recibila.

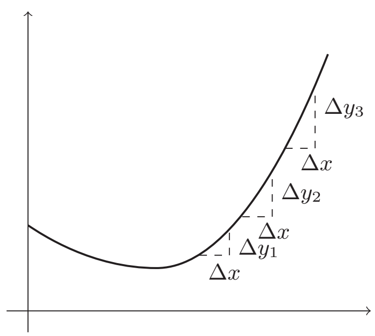
Variación da pendente de funcións cóncavas e convexas

Lembramos que a recta que pasa por dous puntos, $A = (A_1, A_2)$ e $B = (B_1, B_2)$, ten pendente $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{B_2 - A_2}{B_1 - A_1}$. A pendente aumenta coa inclinación da recta. Así a pendente da recta que pasa polos puntos $A = (A_1, A_2)$ e $B' = (B_1, B_3)$, con $B_3 > B_2$, é $\frac{B_3 - A_2}{B_1 - A_1}$, que é maior que $\frac{B_2 - A_2}{B_1 - A_1}$



Consideremos unha función $f\colon (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dúas veces derivable e convexa en (a, b). Sabemos que entón $f''(x) \geq 0$, para $x \in (a, b)$, así a función f' é crecente en (a, b).

Como consecuencia, para unha función f convexa, ao ser f' crecente, para a mesma variación Δx, conforme aumenta o valor x_o, Δy é cada vez maior, como se aprecia na seguinte gráfica.



Analogamente, para unha función f cóncava, ao ser f' decrecente, para a mesma variación Δx, conforme aumenta o valor x_o, Δy é cada vez menor.

Exercicios

18. Calcula os seguintes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x - e}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3^x}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{\ln(e^x + x)}$ e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(2x)}{\ln(x)}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2^x}{1-x^3}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{a+x}}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4 - x^2}{3^x}$ i) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)\ln(x-1)$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$ l) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{e^{x-2}-1}$

m) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln(\ln(x))}{x-e}$ n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+4x^2}{x^4-2x^2}$ o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^3+x^2-4}{x^2-1}$

p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+4x^2+3}{x^4-2x^2}$ q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^4-x^2-1}{3x^4+2x^2-x}$

19. Sexa f unha función polinómica de grao 3, cun máximo en $(0,0)$ e un mínimo en $(2,-4)$. Determina a función f e debuxa a súa gráfica.

20. Sexa $f(x) = e^x(2x-1)$. Calcula os intervalos de crecemento e decrecemento e a ecuación da recta tanxente á gráfica de f no punto de abscisa $x = 0$.

21. Dada a función $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcula os valores de a, b, c tales que g ten un extremo relativo en $(1,-1)$ e a recta tanxente á gráfica de g en $x = 0$ é paralela á recta $y = 4x$.

22. Sexa $f(x) = x^2e^{-ax}$, con $a \neq 0$.

    a) Calcula o valor de a para que f teña un extremo relativo no punto $x = 2$.

    b) Cando $a = 2$, clasifica os seus extremos relativos.

23. Consideremos a función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

    a) Calcula a relación que deben satisfacer os parámetros a, b e c para que f teña un extremo relativo en $x = 1$

    b) Calcula o valor do parámetro a para que exista un punto de inflexión de f en $x = 0$

    c) Da a relación entre os parámetros a, b e c sabendo que que a gráfica de f corta o eixe x en $x = 2$

    d) Calcula o valor dos parámetros a, b e c para que se cumpran simultaneamente as tres propiedades anteriores.

24. Comproba que as funcións de demanda $Q(p) = 1000 - p/5$ e $Q(p) = 75 - 10\ln(2p+1)$, onde p é o prezo de venda, son decrecentes.

25. A cantidade dun determinado produto que un consumidor adquire estímase dada pola función $D(r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\ln\left(10 - \frac{150}{r}\right)$, sendo r a renda anual do consumidor, en miles de euros.

    a) Indica cal é o maior dominio desta función. Cal é o dominio que debemos considerar atendendo á interpretación económica?

    b) Calcula $\lim\limits_{r\to+\infty} D(r)$ e interpreta o resultado.

    c) Comproba que D é crecente. A demanda medra sempre a mesma celeridade?

26. Unha factoría produce q miles de artigos por semana, e a súa función de ingreso en miles de euros é $I(q) = q^3 - \frac{3}{2}q^2 + 70$. Estuda cando a función de ingreso é crecente. Cal é o ingreso mínimo da factoría?

27. Un equipo científico estudou a evolución da poboación dunha pequena illa da Polinesia. Como conclusión, determinou que, para obter unha boa estimación da poboación, hai que empregar a expresión $P(t) = 400 + 18t - 6t^{3/2}$, onde t indica os anos transcorridos dende o inicio do estudo.

    a) Determina a poboación da illa cando se iniciou o estudo, e ao cabo dun ano. Cal foi en porcentaxe a taxa de crecemento neste período?

    b) Despois de cantos anos transcorridos dende o inicio do experimento deixou de crecer a poboación da illa? Cal foi o número máximo de habitantes?

28. Os beneficios, en centos de euros, dunha empresa de transporte de viaxeiros descríbense mediante a función $B(p) = 5p^2 - \dfrac{p^4}{40} - 100$, onde p é o prezo que cobra a empresa por cada viaxe. Estuda cando a función de beneficio é decrecente. Cal é o beneficio máximo da empresa?

29. Unha fábrica produce cada día x toneladas do produto A e $\frac{40-5x}{10-x}$ toneladas do produto B. A cantidade máxima de produto A que se pode producir é de 8 toneladas. O prezo de venda do produto A é de 100 € por tonelada e o do produto B é de 250 € por tonelada.

    a) Calcula os ingresos diarios, supoñendo que se vende toda a produción.

    b) Calcula cantas toneladas de cada produto hai que producir diariamente para obter o máximo de ingresos, e verifica que realmente é un máximo absoluto. Cal é ese ingreso máximo?

30. O custo de produción de x unidades dun determinado artigo é de $C(x) = 40x + 375$ euros. Se o prezo de venda por unidade é $p(x) = 100 - \frac{x^2}{9}$, a que prezo se alcanza o beneficio máximo?

31. A evolución no tempo da capacidade de produción dunha empresa fundada en 1985 vén dada pola función $P(t) = \frac{38500}{700+(t-20)^2}$, sendo t os anos transcorridos dende a fundación. En que ano alcanzou esta empresa a súa máxima capacidade de produción? Cal era esa capacidade? E a capacidade actual?

32. Supoñamos que os consumidores compran q centos de unidades dun produto cando o prezo de cada unidade é de $120 - 0.1q^2$ €.

a) Canto se ingresa pola venda de 1000 unidades? E canto máis se ingresa se se venden 1100 unidades? Calcula o ingreso marxinal para $q = 10$ e interpreta o resultado.

b) Cantas unidades deben venderse para maximizar os ingresos por vendas. Cal é o máximo de ingresos que se pode obter? A que prezo se vende cada unidade neste caso?

33. O custo de fabricar q centos de unidades dun produto vén dado, en miles de euros, pola función $C(q) = 2 + \dfrac{q^2 - 4}{q + 10}$. Canto custa fabricar 200 unidades? Cal é o custo de fabricación por unidade neste caso? E canto máis custa producir 210 unidades? Aproxima esta diferenza usando o custo marxinal.

34. Sexa $f(x) = |x|$. Ten f algún extremo no intervalo $[-1, 2]$? E en $(-1, 1)$?

35. Debuxa, se é posible, a gráfica dunha función $f\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ que non sexa derivable en $x_o = 0$ e que teña en $x_o = 0$ un mínimo e un punto de inflexión.

36. Obtén os máximos, mínimos e puntos de inflexión das seguintes funcións:

    a) $f(x) = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$ b) $f(x) = (x+1)e^{-x}$ c) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

    e) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{2}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ g) $f(x) = x^3 - 9x$ h) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

37. Se $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, obtén os extremos das seguintes funcións:

    $f(x) = ax + \dfrac{4a^3}{x}$ $g(x) = (x+a)e^{-x}$ $h(x) = (x+a)^3(x-a)$

4.8. Derivación con Matlab

Derivadas de funcións dunha variable

Empregamos o comando `diff(f,x,n)` para calcular a derivada de orde `n` da función `f`, respecto da variable `x`.

Para calcular a terceira derivada da función $f(x) = e^{x-2} + x^4$ en $x = 2$ empregamos os comandos:

```
syms x
f(x)=exp(x-2)+x^4
f3=diff(f,x,3)
f3(2)
```

Así $f'''(x) = 24x + e^{x-2}$ e $f'''(2) = 49$

Para calcular a derivada da función $h(x) = x\ln(3x^2 + x)$ tecleamos

```
h(x)=x*log(3*x^2+x)
diff(h,x,1)
```

ou tamén serve `diff(h,x)` ou simplemente `diff(h)`

Entón $h'(x) = \ln(3x^2 + x) + \frac{x(6x+1)}{3x^2+x}$

Cálculo de extremos e puntos de inflexión

Utilizaremos os comandos vistos antes xunto coa sentenza `solve(f)`, que calcula os ceros da función f, para calcular os extremos e os puntos de inflexión dunha función real de variable real. Seguiremos os seguintes pasos, que ilustramos para o caso da función $f(x) = x^2e^x$

1. Definimos a función: `f(x)=x^2*exp(x)`

2. Calculamos a derivada de f: `df=diff(f,x)`
   Así pois, $f'(x) = x^2e^x + 2xe^x$.

3. Obtemos os puntos onde a derivada de f é nula, é dicir, resolvemos a ecuación $f'(x) = 0$:
   `E=solve(df)`
   Temos entón que os únicos puntos que anulan a primeira derivada son $x = -2$ e $x = 0$.

4. Calculamos a derivada segunda de f: `d2f=diff(f,x,2)`
   Logo, $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$.

5. Avaliamos a segunda derivada nos puntos para os que a primeira derivada era cero:
   `d2f(-2), d2f(0)`
   Dado que $f''(-2) = -2e^{-2} < 0$, f ten en $x = -2$ un máximo relativo. Como $f''(0) = 2 > 0$, f ten en $x = 0$ un mínimo relativo.

Para calcular os puntos de inflexión de f resolvemos a ecuación $f''(x) = 0$. No noso exemplo,
`I=solve(d2f)`

Obtemos que a segunda derivada é nula nos puntos $x_1 = -2 - \sqrt{2}$ e $x_2 = -2 + \sqrt{2}$. Estudando a terceira derivada nestes puntos:

```
I=solve(d2f)
d3f=diff(f,x,3)
eval(d3f(-2^(1/2) - 2))
eval(d3f(2^(1/2) - 2))
```

Deducimos que os puntos x_1 e x_2 son puntos de inflexión de f.

Sempre é aconsellable representar a gráfica da función f nunha fiestra adecuada, que comprenda os extremos e puntos de inflexión: `ezplot(f,[-6 1])`

Exercicios

37. Calcula os extremos da función $R(t) = (t^2 + 10t + 25)e^{-0.05t}$

38. Un fabricante determinou que o custo medio (en centos de euros) do seu produto vén dado por $CMe(q) = \dfrac{324}{\sqrt{q^2 + 35}} + \dfrac{5}{q} + 2$.

    a) A medida que aumenta a produción, o custo medio achégase a unha cantidade constante. Cal é esta cantidade?

    b) Determina o custo marxinal do fabricante cando se producen 17 unidades por día.

c) O fabricante determina que se a produción e as vendas aumentasen a 18 unidades por día, os ingresos crecerían en 275 euros. Debería facer este incremento?

39. Unha empresa comprobou que ao gastar A euros en publicidade, o número de artigos vendidos será de $x = 2000(1 - e^{-0.001A})$. Determina canto debe gastar en publicidade para maximizar o seu beneficio neto, se por cada artigo do seu produto que vende obtén un beneficio de 5 euros.

4.9. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. A ecuación da recta con pendente -1 que pasa polo punto $(-2, 2)$ é

   a) $y = -x$ b) $y = -x + 2$ c) $y = -x + 4$ d) $y = -2x - 1$

2. Se sabemos que a función $h(x) = ax^5 + bx + c$ ten un extremo en $(1, -6)$ e que a recta tanxente á gráfica de h en $x = 0$ é paralela á recta $y = -10x$, entón

   a) $c = 2$ b) $c = -2$ c) $c = 3$ d) $c = -3$

3. A ecuación da recta tanxente á gráfica da función $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ en $x = 0$ é

   a) $y = 0$ b) $y = x$ c) $y = 1$ d) $y = x + 1$

4. Dada a función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ -x + 2 & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$ tense que:

   a) f non ten extremos en $[0, 2]$ porque $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in [0, 2]$
   b) f ten un máximo relativo en $x_o = 1$
   c) f non é limitada.
   d) Podemos aplicar Teorema de Rolle a f, xa que $f(0) = f(2) = 0$

5. Se $f(x) = \ln(x)$, cal das seguintes afirmacións é FALSA?

   a) f non ten extremos. b) f é de clase infinito en $(0, +\infty)$.
   c) f é convexa $(0, +\infty)$. d) f é crecente $(0, +\infty)$.

6. A función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ é cóncava no intervalo

   a) $(0, 2)$ b) $(-\infty, 0)$ c) $(0, +\infty)$ d) $(-\infty, 2)$

7. Se $f(x) = e^{-x}$, cal das seguintes afirmacións é FALSA?

   a) f non ten extremos. b) $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
   c) f é cóncava en $\mathbb{R}$. d) f é decrecente en $\mathbb{R}$.

8. Sexa $f : [-1, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$. Cal das seguintes afirmacións é FALSA?

   a) $x = 0$ é o único extremo de f. b) $x = 0$ é máximo global de f.
   c) $x = 5$ é mínimo global de f. d) $x = -1$ é mínimo relativo de f.

9. Sexa $f : (0,2) \to \mathbb{R}, \mathcal{C}^3$, tal que $f'(1) = f''(1) = 0$ e $f^{3)}(1) > 0$. Entón

   a) $x_o = 1$ é un máximo de f. b) $x_o = 1$ é un mínimo de f.
   c) $x_o = 1$ non é un extremo de f. d) f é cóncava en $(0,2)$

10. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é unha función de clase infinito verificando que $f'(2) = f''(2) = f'''(2) = 0$ e $f^{4)}(2) = -8$, podemos afirmar que

    a) f ten un máximo en $x = 2$. b) f ten un mínimo en $x = 2$.
    c) f é decrecente. d) $x = 2$ non é un extremo de f.

11. A cal das seguintes funcións se lle pode aplicar o teorema de Rolle no intervalo $[-1,1]$?

    a) $f(x) =\mid x \mid -2$ b) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ c) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 1$ d) A todas elas.

12. Cal das seguintes funcións verifica as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo $[-2,2]$?

    a) $f(x) = e^{-x}$ b) $p(x) = x^2 + 3$ c) $h(x) = \ln(x)$ d) $g(x) = \frac{1}{x^2}$

13. Sexa $h(x) = \ln^2(f(x))$. Sabendo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = -1$, o valor de $h'(0)$ é

    a) 2 b) -1 c) 0 d) 1

14. Sexa $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unha función derivable. Se $f(x) = h(x^3 + 2)$, entón

    a) $f'(x) = h'(x^3 + 2)$ b) $f'(x) = 3x^2 h'(x^3 + 2)$
    c) $f'(x) = h'(3x^2)$ d) $f'(x) = 3x^2 h'(x)$

15. Se é f unha función derivable, a derivada da función $F(x) = 5^{f(x)}$ é:

    a) $F'(x) = 5^{f(x)} f'(x) \ln 5$ b) $F'(x) = f(x)5^{f(x)-1} f'(x)$
    c) $F'(x) = 5^{f(x)} f'(x)$ d) $F'(x) = f(x)5^{f(x)-1} \ln(5)$

16. Se h e g son funcións derivables e $f(x) = h(xe^{g(x)})$, entón $f'(x)$ é

    a) $h'(xe^{g(x)})[e^{g(x)} + xg'(x)e^{g(x)}]$ b) $h'(xe^{g(x)})e^{g(x)} \ln(x)$

    c) $h'(xe^{g(x)})[xg(x)e^{g(x)-1} + e^{g(x)}]$ d) $h'(e^{g(x)}) + h'(x)g'(x)e^{g(x)}$

4.10. Solucións dos exercicios propostos

8. A propensión marxinal ao consumo é de 535.95 millóns de euros, porque $C'(100) = 0.53595$
A propensión marxinal ao aforro é de 464.05 millóns de euros, porque $S'(100) = 0.464049$

9. A propensión marxinal ao consumo é de 33.33 millóns de euros.
A propensión marxinal ao aforro é de 966.67 millóns de euros.

15. $q'(10) = 13.53$

16. $A'(30) = -0.078$
O número de pacientes que reciben a alta pasados trinta e Δt días de hospitalización son aproximadamente $0.078\Delta t$ pacientes menos que os que reciben a alta pasados trinta días de hospitalización.

18.a) $\frac{e}{2}$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $+\infty$ e) 1 f) $-\infty$ g) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ h) 0
i) 0 j) $-\frac{1}{6}$ k) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ l) 1 m) $\frac{1}{e}$ n) -2 o) $-\infty$ p) 0 q) $\frac{5}{3}$

19. $f(x) = x^3 - 3x^2$

21. $g(x) = -x^4 + 4x - 4$

22. a) f ten un extremo relativo en $x = 2$ cando $a = 1$, e ademais é un máximo relativo de f.
b) Cando $a = 2$, ten un mínimo relativo en $x = 0$ e un máximo relativo en $x = -1$.

23. a) $b = -3 - 2a$, $a \neq -3$
b) $a = 0$
c) $c = -8 - 4a - 2b$
d) $a = 0$, $b = -3$, $c = -2$

26. A función de ingreso é crecente cando $q \in (1, +\infty)$, é dicir, cando se producen máis de 1000 artigos.
O ingreso é mínimo se $q = 1$, é dicir, cando se producen 1000 artigos por semana; e este ingreso mínimo é de 44 000 €.

27. a) A poboación da illa cando se iniciou o estudo era de 400 habitantes, e ao cabo dun ano, 412. A taxa de crecemento neste período foi do 1.5 %
b) A poboación da illa deixou de crecer despois de 4 anos transcorridos dende o inicio do experimento. O número máximo de habitantes foi 424.

28. A función de beneficio é decrecente en $(10, +\infty)$, é dicir, cando o prezo de cada viaxe é maior de 10 euros. O beneficio máximo acádase cando o prezo de cada viaxe é de 10 euros e este beneficio máximo é de 15 000 €.

29. a) $I(x) = 100x + 250\frac{40-5x}{10-x}$ euros son os ingresos diarios por vender toda a produción.
b) O máximo de ingresos é de 1250 €, para o que hai que producir diariamente 5 toneladas do produto A e 3 do produto B.

32. a) Pola venda de 1000 unidades ingrésanse 110 000 €, e por vender 1100 unidades ingrésanse 8690 € máis. O ingreso marxinal para $q = 10$ é 9000, e esta é unha aproximación do resultado anterior, é dicir $I'(10)$ aproxima canto máis se ingresa se se venden 1100 unidades en vez de 1000.

b) Para maximizar os ingresos por vendas deben venderse 2000 unidades a un prezo de 80 € por unidade, de xeito que o ingreso máximo é de 160 000 €.

33. Fabricar 200 unidades custa 2000 €, 10 € por unidade.
Producir 210 unidades custa exactamente 33.90 € máis que producir 200.
O custo marxinal para $q = 2$ é $C'(2) = 0.3333$, polo tanto, usando o custo marxinal para aproximar esta diferencia, obtemos que $\Delta C \approx C'(2)\Delta q = 0.3333 \cdot 0.1 = 0.0333$, é dicir, 33.33 €.

37. f ten un mínimo relativo en $x = 2a$ e un máximo relativo en $x = -2a$.
g ten un máximo relativo en $x = 1 - a$.
h ten un mínimo relativo en $x = a/2$. ($x = -a$ non é un extremo, é un punto de inflexión)

38. A medida que aumenta a produción, o custo medio achégase a 200 €.
O custo marxinal do fabricante cando se producen 17 unidades por día é de 394.44 euros.
Se a produción e as vendas aumentasen a 18 unidades por día, os custos de produción aumentarían 380.12 €. Como os ingresos aumentarían soamente 275 €, non debería facer este incremento na produción.

39. Para maximizar o beneficio neto debe gastar 2302.58 € en publicidade.

Solucións autoavaliación. 1a, 2a, 3c, 4b, 5c, 6a, 7c, 8a, 9c, 10a, 11c, 12b, 13c, 14b, 15a, 16a

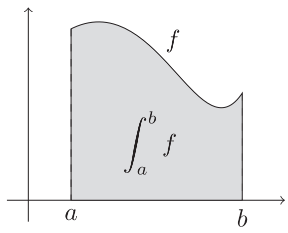
Capítulo 5

Integración de funcións dunha variable.

Neste capítulo repasamos os conceptos básicos, propiedades e interpretacións xeométricas relacionadas coa integración de funcións dunha variable.

5.1. Áreas baixo curvas. Cálculo de primitivas

Definición 5.1 *Sexa $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función continua e non negativa. Defínese a* **integral** *de f en $[a,b]$ como a área da rexión do plano limitada pola gráfica da función, o eixe X, e as rectas $x = a$ e $x = b$, e denótase $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.*



Exercicio 5.2 Calcula, utilizando argumentos de xeometría, $\displaystyle\int_1^3 4\,dx$ e $\displaystyle\int_0^5 2t\,dt$

Observación 5.3 Se $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función continua e non positiva, defínese $\displaystyle\int_a^b f = -\int_a^b (-f)$, é dicir, se A é a área da rexión do plano limitada pola gráfica da función, o eixe X, e as rectas $x = a$ e $x = b$, entón $\displaystyle\int_a^b f = -A$.

Se f está limitada en $[a,b]$ e é continua en (a,b), tamén se pode definir $\displaystyle\int_a^b f$ do mesmo xeito, dividindo o intervalo $[a,b]$ en intervalos onde f teña signo constante. No caso de que f fose unha función limitada cunha cantidade finita de discontinuidades, de xeito que a podemos considerar definida nunha unión finita de intervalos, en cada un dos cales é unha función nas condicións anteriores, entendemos por $\displaystyle\int_a^b f$ a suma das integrais de f en cada un deses intervalos.

Destas funcións diremos que son integrables e $\displaystyle\int_a^b f$ chámase a integral definida de f entre a e b.

Proposición 5.4 *Sexa $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función integrable. Verifícase que:*

1. $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$*, para todo $c \in [a,b]$.*
2. $\displaystyle\int_a^b rf = r\int_a^b f$*, para todo $r \in \mathbb{R}$.*

Definición 5.5 *Sexa $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Unha función $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dise que é unha* **primitiva** *da función f se g é derivable e $g'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a,b]$.*

Proposición 5.6 *Sexa $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.*

1. *Se $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha primitiva de f entón $g+C$ é outra primitiva de f, para todo $C \in \mathbb{R}$.*
2. *Se $g_1,\ g_2\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son dúas primitivas de f entón $g_1 - g_2$ é constante.*

Tradicionalmente, denótase por $\displaystyle\int f$ ou $\displaystyle\int f(x)\,dx$ o conxunto de tódalas funcións primitivas de f. Debemos distinguir entre a integral definida, $\displaystyle\int_a^b f$, que é un número real, e a integral indefinida, $\displaystyle\int f$ que representa un conxunto infinito de funcións.

En xeral, o cálculo de primitivas non é doado. Existen diversos métodos que permiten calcular primitivas de moitas funcións que teñen determinadas características, pero este non será o noso obxectivo.

Exemplo 5.7 Vemos algúns exemplos de primitivas que resultan inmediatas cando se domina a derivación de funcións dunha variable.

1. $\displaystyle\int 6x^5 - x^4\,dx = x^6 - \tfrac{1}{5}x^5 + C$

2. $\displaystyle\int x^{-3}+7x^3\,dx = -\tfrac{1}{2}x^{-2}+\tfrac{7}{4}x^4+C$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \tfrac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \tfrac{1}{4}\ln(1+x^4)+C$

4. $\displaystyle\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}+C$

5. $\displaystyle\int e^{-5x}\,dx = -\frac{1}{5}e^{-5x}+C$

6. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = -\int \frac{-1}{x^2}e^{1/x}\,dx = -e^{1/x}+C$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2}\,dx = -\frac{1}{x+5}+C$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{(7-x)^2}\,dx = \frac{1}{7-x}+C$

9. $\displaystyle\int \frac{3}{(2x+5)^2}\,dx = -\frac{3}{2}\frac{1}{2x+5}+C$

10. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3+4)^3}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3+4)^{-3}\,dx = -\frac{1}{6}(x^3+4)^{-2}+C = \frac{-1}{6(x^3+4)^2}+C$

11. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x+7}\,dx = \int (x+7)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{4}(x+7)^{\frac{4}{3}}+C$

12. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x^2+7}\,dx = \tfrac{1}{2}\int 2x(x^2+7)^{\frac{1}{3}}\,dx = \tfrac{3}{8}(x^2+7)^{\frac{4}{3}}+C = \tfrac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+7)^4}+C$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x^3+5}}\,dx = \tfrac{1}{6}\int 6x^2(2x^3+5)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \tfrac{1}{6}\tfrac{3}{2}(2x^3+5)^{\frac{2}{3}}+C = \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{(2x^3+5)^2}+C$

O teorema que segue é importante porque establece a relación entre a integral dunha función nun intervalo e unha primitiva calquera desta función, o que resulta unha ferramenta moi útil para calcular a integral definida dunha función nun intervalo.

Teorema 5.8 (Regra de Barrow) *Se $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha primitiva dunha función integrable $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, entón $\displaystyle\int_a^b f = g(b)-g(a)$.*

5.2. Teorema fundamental do cálculo integral

Definición 5.9 *Se* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é unha función integrable, chámase* **función integral** *de* f *á función* $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

A función integral dunha función integrable sempre é continua. O seguinte resultado danos condicións que aseguran que tamén sexa derivable.

Teorema 5.10 (Teorema fundamental do cálculo integral) *Se* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é unha función continua entón a súa función integral,* $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$*, é derivable e ademais* $F'(x) = f(x)$*, para todo* $x \in (a,b)$.

Como vemos no exemplo que segue, este resultado permítenos calcular facilmente a derivada das funcións integrais ou das súas composicións con outras funcións.

Exemplo 5.11

1. Se queremos calcular a derivada da función $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\,dt$ non temos máis que considerar a función continua $f\colon [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$. Deste xeito F é a función integral de f e, aplicando o teorema fundamental do cálculo integral, podemos afirmar que $F'(x) = f(x)$. Así $F'(x) = x^2$

   Se quixésemos calcular a derivada da función $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^4} t^2\,dt$, como se ten que $G(x) = F(x^4)$, aplicando a regra da cadea, $G'(x) = F'(x^4)4x^3 = f(x^4)4x^3 = x^8 4x^3 = 4x^{11}$

   Para calcular a derivada de $H(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^4} t^2\,dt$, consideramos que $H(x) = \displaystyle\int_0^{x^4} t^2\,dt - \int_0^{2x} t^2\,dt = F(x^4) - F(2x)$, logo $H'(x) = 4x^3F'(x^4) - 2F'(2x) = 4x^3 f(x^4) - 2f(2x) = 4x^{11} - 8x^2$

2. A función $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x \ln(t^2 + 2t + 3)\,dt$, é a función integral da función continua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$. O teorema fundamental do cálculo integral asegura que $F'(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$.

   A función $H(x) = \displaystyle\int_x^{3x^2} \ln(t^2 + 2t + 3)\,dt$ pode expresarse do seguinte xeito:

   $$H(x) = \int_a^{3x^2} \ln(t^2 + 2t + 3)\,dt - \int_a^x \ln(t^2 + 2t + 3)\,dt = F(3x^2) - F(x)$$

   Entón, aplicando o teorema fundamental do cálculo integral e a regra da cadea,

   $$H'(x) = 6xF'(3x^2) - F'(x) = 6x\ln(9x^4 + 6x^2 + 3) - \ln(x^2 + 2x + 3)$$

3. Por ser $F(x) = \displaystyle\int_a^x 3t^2 + t\,dt$ a función integral de $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + x$, o teorema fundamental do cálculo integral asegura que $F'(x) = 3x^2 + x$.

   Se $G(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{e^{x^2}} 3t^2 + t\,dt$, entón

$$G(x) = \int_a^{e^{x^2}} 3t^2 + t\,dt - \int_a^{x^3} 3t^2 + t\,dt = F(e^{x^2}) - F(x^3)$$

   e, así, $G'(x) = 2xe^{x^2}F'(e^{x^2}) - 3x^2F'(x^3) = 2xe^{x^2}(3e^{2x^2} + e^{x^2}) - 3x^2(3x^6 + x^3) = 6xe^{3x^2} + 2xe^{2x^2} - 9x^8 - 3x^5$

Exercicios

1. Calcula xeometricamente $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$, sendo $f(x) = -3$

2. Calcula xeometricamente $\displaystyle\int_{-1}^2 2x\,dx$

3. Se $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, calcula xeometricamente $\displaystyle\int_2^4 a\,dx$ e $\displaystyle\int_0^2 ax\,dx$

4. Calcula e interpreta xeometricamente os resultados:

   a) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^1 t^2\,dt$ c) $\displaystyle\int_{-1}^1 t^3\,dt$ d) $\displaystyle\int_1^2 16 - x^4\,dx$

5. Calcula a área da rexión limitada polas curvas:

   a) $y = x^2 + 2,\ y = -x,\ x = 0$ e $x = 1$ b) $y = 2 - x^2$ e $x = y$
   c) $x = 3 - y^2$ e $x - y = 1$ d) $y = x^2 - 6x$ e $y = 0$
   e) $y = \frac{4}{x},\ x = 0,\ y = 4$ e $y = 1$ f) $x = y^2$ e $x - y = 2$

6. a) Debuxa a rexión limitada polas curvas $y = 6 - x^2$ e $x = y$ e calcula a súa área.

   b) Debuxa o recinto do primeiro cadrante limitado por $y = \frac{4}{x^2}$ e $y = 5 - x^2$ e calcula a súa área.

7. Calcula:

1) $\displaystyle\int \frac{3}{x+5}\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3+6x}\,dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3-5}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{7}{(x-5)^3}\,dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{4}{x}\ln(x^2)+3\,dx$ 7) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{\sqrt[6]{x}}\,dx$ 8) $\displaystyle\int \frac{1}{x^5}-e^{8x}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{5}{x}\ln(x^2)\,dx$ 10) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}+5e^{-2x}\,dx$ 11) $\displaystyle\int 1+e^{4x}\,dx$ 12) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-5}}\,dx$

13) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$ 14) $\displaystyle\int \tfrac{1}{x}(\ln(x)+2)\,dx$ 15) $\displaystyle\int \frac{1}{e-x}\,dx$ 16) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-3x}\,dx$

17) $\displaystyle\int \frac{1}{x-\pi}\,dx$ 18) $\displaystyle\int x(x^4+3x^3-1)\,dx$ 19) $\displaystyle\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$ 20) $\displaystyle\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,dx$

21) $\displaystyle\int e^{1-t}\,dt$ 22) $\displaystyle\int \frac{1}{x}+\frac{1}{x}\ln(x)\,dx$ 23) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}\,dx$ 24) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+4}}\,dx$

25) $\displaystyle\int (r-4)^2\,dr$ 26) $\displaystyle\int \frac{3}{1+t}+\frac{2}{(1+t)^2}\,dt$ 27) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1+t}}\,dt$ 28) $\displaystyle\int \sqrt{3t+2}\,dt$

29) $\displaystyle\int e^{\sqrt{2}r}\,dr$ 30) $\displaystyle\int \frac{1}{8}r^3+4r^{-3}\,dr$ 31) $\displaystyle\int 3t^{50}+2\,dt$ 32) $\displaystyle\int \frac{18}{\sqrt{r}}\,dr$

33) $\displaystyle\int 4e^{2r}\,dr$ 34) $\displaystyle\int r^4-3r^2+\frac{5}{r}\,dr$ 35) $\displaystyle\int \frac{1}{x^7}\,dx$ 36) $\displaystyle\int e^{-6t}\,dt$

8. Se $a,b\in\mathbb{R}$, $a,b\neq 0$, calcula:

$\displaystyle\int ax^3-bx^2\,dx$ $\displaystyle\int ax^b\,dx$ $\displaystyle\int e^{ax}\,dx$ $\displaystyle\int ae^{b-x}\,dx$

9. Avalía o valor actual dun fluxo continuo de ingresos de 2000 € ao ano para 5 anos ao 6 % composto continuamente, sabendo que vén dado por $\displaystyle\int_0^5 2000e^{-0.06t}\,dt$.

10. Avalía os gastos totais dunha empresa durante os próximos sete anos sabendo que veñen dados por $\displaystyle\int_0^7 3500e^{-0.04t}\,dt$.

11. Para un determinado grupo poboacional, estudouse a renda media anual actual (en euros) que unha persoa con x anos de estudos especializados pode esperar recibir cando busca o seu primeiro emprego. Estimouse que a taxa de variación da renda con respecto á educación vén dada por $\dfrac{dy}{dx}=100x^{3/2}$ para $2\le x\le 16$. Se ademais sabemos que para 9 anos de estudos

especializados a renda media anual é de 23220 €, atopa a expresión da renda media anual actual. Cal é a renda media anual actual se se teñen 6 anos de estudos especializados?

12. Se a función de ingresos marxinais dun fabricante é $\dfrac{dI}{dq} = 3000 - 25q - 4q^2$, calcula a función de ingreso. (Lembra que o ingreso é nulo cando non se vende ningunha unidade)

13. Na fabricación dun produto, os custos fixos por semana son 4000 €. Se a función de custo marxinal é $\dfrac{dc}{dq} = 10^{-6}(0.03q^2 - 3q) + 0.4$, onde c é o custo total (en euros) de producir q quilos de produto por semana, acha o custo de producir 10000 quilos nunha semana. (Observa que os custos fixos son constantes, independentemente da demanda, entón c(0)=4000)

14. A taxa de cambio no valor dunha casa que nova custa 350 000 € pódese modelar como $\dfrac{dV}{dt} = 8e^{0.05t}$, onde t son os anos transcorridos dende a construción da casa e V é o seu valor (en miles de euros). Determina $V(t)$ e o valor da casa 3 anos despois da súa construción. Canto tempo debe pasar para que o valor da casa chegue aos 400 000 €?

15. O economista Pareto estableceu unha lei empírica de distribución da renda, que dá o número N de persoas que reciben x ou máis dólares. Se $\dfrac{dN}{dx} = -Ax^{-B}$, onde A e B son constantes, obtén mediante unha integral definida o número total de persoas con ingresos entre a e b, se $a < b$.

16. Calcula a función integral de $f\colon [-1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$

17. Calcula a función integral de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & \text{se} \quad x \in [1,3) \\ -x+5 & \text{se} \quad x \in [3,5] \end{cases}$

18. Para a función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in [0,2) \\ 10 - x & \text{se } x \in [2,6] \end{cases}$

    a) Calcula a función integral de f

    b) Interpreta xeometricamente e calcula $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,dt$

19. Para a función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & \text{se } x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{x^4} & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$

    a) Calcula a función integral de f

    b) Interpreta xeométricamente e calcula $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$

20. Calcula a función integral de $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \in [0,1) \\ \dfrac{3}{x} & \text{se } x \in [1,3] \end{cases}$

21. Obtén as funcións integrais de f e h e represéntaas graficamente. Son continuas?

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \in [0,1) \\ 2 & \text{se } x \in [1,2) \\ 2x-1 & \text{se } x \in [2,4] \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in (1,2) \\ x-1 & \text{se } x \in [2,4] \end{cases}$$

22. Calcula a función integral de $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \in [0,1) \\ 6-2x & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$

23. Calcula a derivada das seguintes funcións:

a) $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \ln(t)\, dt$ b) $H(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt$ c) $F(t) = \displaystyle\int_{-t}^{t} x^4 dx$

d) $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} t^2\, dt$ e) $H(x) = \displaystyle\int_x^{2x} t^2 + 1\, dt$ f) $D(r) = \displaystyle\int_1^{3r} e^{2t} dt$

g) $H(x) = \displaystyle\int_{\ln(2x)}^{x^2} e^t\, dt$ h) $H(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{t}{1-t^2}\, dt$ i) $H(x) = \displaystyle\int_{\ln(x)}^{x} e^{-t}\, dt$

24. Calcula a derivada da seguintes funcións, sendo h e p derivables e f continua:

a) $H(x) = \displaystyle\int_{h(x)}^{p(x)} f(t)\, dt$ b) $H(x) = \displaystyle\int_{h(x)}^{h(x^2)} f(t)\, dt$ c) $H(x) = \displaystyle\int_1^{h(2x)} t^2\, dt$

25. Nunha análise de inventario faise referencia á función $g(x) = \frac{1}{k}\displaystyle\int_1^{1/x} ku^r\, du$, onde k e r son constantes, $k > 0, r > -2$ e $x > 0$. Comproba que $g'(x) = -\dfrac{1}{x^{r+2}}$.

5.3. Integración con Matlab

`int(f,x)` calcula a integral indefinida da expresión simbólica `f` respecto da variable `x`.
`int(f,x,a,b)` calcula a integral definida da expresión simbólica `f` respecto da variable `x` en $[a,b]$.
Así por exemplo, unha primitiva para $f(x) = \ln^2(x)$ obtense coa sentenza

```
int(log(x)^2,x)
```

Entón vemos que $\displaystyle\int \ln^2(x)\, dx = x(\ln^2(x) - 2\ln(x) + 2) + C$

As integrais $\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(x+3)\, dx$ e $\displaystyle\int_0^{\pi} 4x\ln(x)\, dx$ calcúlanse do seguinte xeito:

```
int(log(x+3),x,-1,1)
int(4*x*log(x),x,0,pi)
```

Obtemos entón $\int_{-1}^{1} \ln(x+3)\, dx = \ln(64) - 2 = 2.1589$ e $\int_{0}^{\pi} 4x \ln(x)\, dx = 2(\pi^2 \ln(\pi) - 1/2) = 12.7265$

Exercicio

26. Comproba as seguintes igualdades:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2}}\, dx = \frac{5\sqrt[5]{(x^4+2)^4}}{16}$

b) $\displaystyle\int xe^x\, dx = e^x(x-1)$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \tfrac{1}{3}(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3})$

d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} dx = \frac{-1}{e^x+1}$

e) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln(x) dx = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln(x) - \tfrac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx = 2 + 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{x+1})$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x} dx = x - \ln(e^x+1)$

Representación de curvas e cálculo de áreas

Para representar a función $f(x) = x^2$, no intervalo $[-2, 2]$, podemos utilizar a sentenza

```
ezplot('x^2',[-2,2])
```

Se non se indica o intervalo, tómase $[-2\pi, 2\pi]$ por defecto.
Representase a circunferencia de centro $(0, 0)$ e raio 1 da seguinte maneira:

```
ezplot('x^2+y^2-1')
```

Para representar as curvas $y = 4x^2 + 4$ e $2x + y = 6$ na mesma xanela:

```
ezplot('4*x^2+4',[-4,2])
hold on
ezplot('6-2*x',[-4,2])
```

Se queremos saber os puntos de corte das dúas gráficas:

```
S=solve(4*x^2+4-y,6-2*x-y)
P=[S.x,S.y]
```

devólvenos os puntos de corte $(1/2, 5)$ e $(-1, 8)$. Así a área da rexión limitada por ambas as curvas será $\displaystyle\int_{-1}^{1/2} 6 - 2x - (4x^2 + 4)\, dx = \frac{9}{4}$, que calculamos coa sentenza

```
int(6-2*x-(4*x^2+4),x,-1,1/2)
```

5.4. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Sexa $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. A función integral de f vén dada por:

   a) $F(x) = \displaystyle\int_1^x t\, dt = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$, para todo $x \in [1, 2]$

   b) $F(x) = \displaystyle\int_1^2 t\, dt = \frac{3}{2}$

   c) $F(x) = \displaystyle\int_1^x t\, dt = \frac{x^2}{2}$, para todo $x \in [1, 2]$

   d) $F(x) = \displaystyle\int_1^x t\, dt = x - 1$, para todo $x \in [1, 2]$

2. Unha primitiva de $f(x) = \dfrac{4}{x+5}$ é

   a) $g(x) = -\dfrac{4}{(x+5)^2}$ b) $g(x) = \ln(x + 5)$

   c) $g(x) = 4 \ln(x + 5)$ d) $g(x) = \frac{1}{4} \ln(x + 5)$

3. Unha primitiva de $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ é

   a) $g(x) = \frac{7}{4} x^{4/7}$ b) $g(x) = \frac{3}{7} x^{7/3}$ c) $g(x) = \frac{4}{7} x^{7/4}$ d) $g(x) = \frac{3}{4} x^{-1/4}$

4. Unha primitiva de $f(x) = \frac{2}{5-x}$ é

   a) $g(x) = 2 - \ln(5 - x)$ b) $g(x) = -\frac{1}{2} \ln(5 - x)$

   c) $g(x) = -2 \ln(5 - x)$ d) $g(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$

5. Se $f(x) = \displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 5}\, dx$, entón

   a) $f(x) = \ln(x^2 + 5) + C$ b) $f(x) = 2 \ln(x^2 + 5) + C$

   c) $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) + C$ d) $f(x) = \ln x^2 + 5$

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2}\, dt$ vale

   a) $\ln(2)$ b) $1 + \ln(2)$ c) 0 d) $\ln(2) - 1$

7. Se $g(x) = \int_1^{2x} t^2 \, dt$, entón

   a) $g'(x) = 8x^2$ b) $g'(x) = 4x$ c) $g'(x) = 4x^2 - 1$ d) $g'(x) = 8x^2 - 1$

8. Se $g(x) = \int_0^{x^2} t \ln(t) \, dt$, entón

   a) $g'(x) = 2x^2 \ln(x^2)$ b) $g'(x) = x^2 \ln(2x)$
   c) $g'(x) = 2x \ln(x^2)$ d) $g'(x) = x^2 \ln(x^2)$

9. Se $f(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} 2t \, dt$, entón

   a) $f'(x) = 2(x^2 + 1) - 2x^2$ b) $f'(x) = (x^2 + 1)^2 - x^4$
   c) $f'(x) = 4x$ d) $f'(x) = 2x(x^2 + 1) - 2x(x^2)$

10. Se $f(x) = \int_1^{x} e^{t^2} \, dt$, entón $f'(x)$ é

    a) $2te^{t^2}$ b) $2xe^{x^2}$ c) e^{x^2} d) $e^{x^2} - 1$

11. Se $H(x) = \int_1^{x^3} \ln(t) \, dt$, entón

    a) $H'(x) = 3x^2 \ln(x^3)$ b) $H'(x) = \ln(3x^2)$ c) $H'(x) = \ln(x^3)$ d) $H'(x) = 3x^2 \ln(t)$

5.5. Solucións dos exercicios propostos

5. a) $17/6$, c) $9/2$, d) 36, f) $9/2$

6. a) $125/6$

9. 8 639.40 €

10. 21 368.90 €

11. $y(x) = 40x^{5/2} + 13500$. A renda media anual actual se se teñen 6 anos de estudos especializados é de 17 027.26 €.

12. $I(q) = 3000q - \frac{25}{2}q^2 - \frac{4}{3}q^3$

13. $c(q) = 10^{-8}q^3 - 10^{-6}1.5q^2 + 0.4q + 4000$. O custo de producir 10 000 quilos nunha semana é de 17 850 €

14. $V(t) = 160e^{0.05t} + 190$. O valor da casa 3 anos despois da súa construción é de 375 893 €. Deben pasar 5 anos e 5 meses para que o valor da casa chegue aos 400 000 €.

15. O número total de persoas con ingresos entre a e b é $\displaystyle\int_b^a -Ax^{-B}\,dx = \frac{A}{1-B}(b^{1-B} - a^{1-B})$

Solucións autoavaliación. 1a, 2c, 3c, 4c, 5c, 6a, 7a, 8a, 9c, 10c, 11a

Capítulo 6

Derivadas de funcións de varias variables.

Na práctica diaria, cando traballamos con máis de dúas variables económicas, físicas, tecnolóxicas, etc. a veces existe unha relación de dependencia entre elas, de forma que o valor que toma algunha das variables, que se denomina variable dependente, depende do valor que toman as restantes, que denominamos variables independentes. Se esta relación está regulada mediante unha ecuación funcional, de modo que para cada valor que tomen as variables independentes corresponde un único valor da variable dependente, entón dicimos que estas variables están relacionadas mediante unha función de varias variables.

6.1. Funcións de varias variables

Definición 6.1 *Denomínase función de varias variables reais a toda aplicación* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Igual que para o caso das funcións dunha variable, as funcións de varias variables poden ter un dominio máis restrinxido, non sendo a totalidade de $\mathbb{R}^n$. Por comodidade, nos resultados teóricos non nos pararemos neste detalle.

Unha función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ determina m funcións diferentes, $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que se denominan *compoñentes ou coordenadas da función* f e denótase por $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ ou $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$.

Exemplo 6.2 Para a función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(x,y) = (x+y, e^{2x} - y, x^2 + xy)$, as súas funcións coordenadas son $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$f_1(x,y) = x + y \qquad f_2(x,y) = e^{2x} - y \qquad f_3(x,y) = x^2 + xy$

Definición 6.3 *Denomínase* **conxunto de nivel** *ou curva de nivel* $k \in \mathbb{R}$ *de* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, ao conxunto formado polos puntos* $x \in \mathbb{R}^n$ *que verifican* $f(x) = k$.

O grafo dunha función, $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, defínese como o conxunto* $G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Como xa vimos, se $n = m = 1$, é dicir, $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, G_f está formado polos puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que verifican $y = f(x)$, con $x \in A$, e a súa representación gráfica é unha curva en $\mathbb{R}^2$.

Se $n = 2$ e $m = 1$, é dicir, $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, G_f está formado polos puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que verifican $z = f(x,y)$, con $(x,y) \in A$, e a súa representación gráfica é unha superficie en $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 6.4

1. O conxunto de nivel 4 de $f(x,y) = x^2 + y^2$ fórmano os puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que verifican $x^2 + y^2 = 4$, que é a circunferencia de centro $(0,0)$ e raio 2.

   En xeral, para esta función, o conxunto de nivel k serán os puntos que verifican $x^2 + y^2 = k$, que representa a circunferencia de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{k}$. Neste caso debe considerarse $k \geq 0$, e o nivel aumenta co raio da circunferencia.

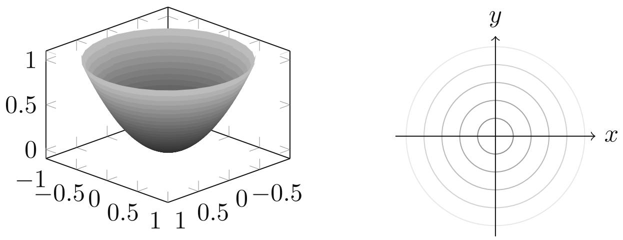
   

   Figura 6.1: Exemplo dun paraboloide e as súas curvas de nivel

   G_f compóñeno os puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que verifican $z = x^2 + y^2$ e a súa representación gráfica é o paraboloide da figura 6.1.

2. Para $f(x,y) = x + y$, G_f son os puntos do plano $z = x + y$.

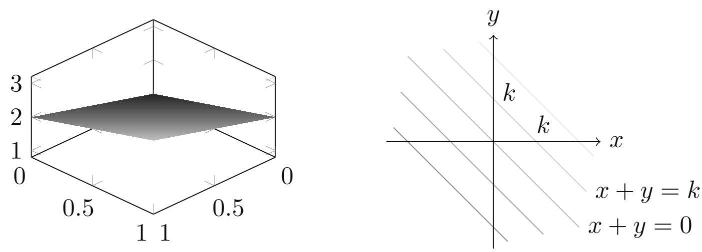
   

   Figura 6.2: Exemplo dun plano e as súas curvas de nivel

   As curvas de nivel de f, $x + y = k$, con $k \in \mathbb{R}$, son as rectas paralelas que están debuxadas no plano XY, na figura 6.2. Estas curvas cortan os eixes nos puntos $(0,k)$ e $(k,0)$, entón podemos interpretar calquera dos cortes cos eixes como a medida do nivel da curva.

3. As curvas de nivel da función $f(x,y) = ye^{-x}$ son as curvas $y = ke^x$, para $k \in \mathbb{R}$. Estas curvas cortan o eixe Y no punto $(0,k)$, entón podemos interpretar a altura do corte co eixe Y como a medida do nivel da curva.

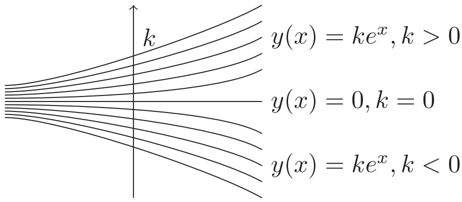


Figura 6.3: Curvas de nivel de $f(x, y) = ye^{-x}$

4. A composición dunha función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cunha función monótona estrita $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \circ f$, ten as mesmas curvas de nivel que f. Que diferenza hai se g é crecente ou se é decrecente?

Exercicios

1. A demanda mensual, en litros, dun consumidor do refresco Cara-Cola vén dada por $D(r, p) = -3r^2 + 20r/p$, onde r é a renda mensual do consumidor (en miles de euros) e p é o prezo (en euros) dun litro de refresco. Actualmente o prezo é 2 € por litro e o consumidor ten uns ingresos de 1800 € por mes.

   a) Cal é a demanda actual? Atopa outra combinación de prezo e renda que leve á mesma demanda.

   b) Calcula cal sería a demanda se o consumidor dispusexe dunha renda mensual de 2200 €. E se, coa renda actual, o prezo subise 10 céntimos?

   c) Co prezo actual, que ingresos mensuais farían que o consumidor limitase o seu consumo a 8 litros ao mes?

   d) Calcula a que prezo o consumidor non estaría disposto a comprar o refresco cos seus ingresos actuais.

   e) Calcula en que porcentaxe se tería que reducir o prezo da Cara-Cola para que o consumidor manteña a demanda actual despois de sufrir unha rebaixa salarial do 20 %.

   f) Calcula canto se tería que reducir o prezo da Cara-Cola para que o consumidor manteña a demanda actual despois de sufrir unha determinada rebaixa salarial.

   g) Representa as funcións $D(r, 2)$ e $D(r, 3)$. Calcula $\lim_{r \to +\infty} D(r, 2)$ e interpreta o resultado.

2. Lola traballa nunha consultoría e o seu aforro mensual, en euros, vén dado pola función $A(r, p, l) = \frac{4r}{lp^2} + l^2$, onde r é o seu salario en euros, p é un indicador do prezo medio dos produtos de primeira necesidade e l é un indicador do prezo medio dos artigos de luxo que lle interesan. Actualmente, Lola gaña 2400 € por mes e os indicadores son $p = 4$ e $l = 3$.

   a) Calcula o aforro actual. Canto aforraría se lle subisen o soldo un 5 % pero o indicador dos artigos de luxo fose $l = 4$.

   b) Debuxa a gráfica do aforro fronte a p, para os valores actuais de r e l. Representa o punto que corresponde á situación actual e interpreta a gráfica.

3. A empresa Xus fabrica diariamente $S(L,K) = 10L^{2/3}K^{1/3}$ pares de zapatos, onde K é o capital investido na produción (en euros) e L é o número de traballadores. Actualmente o capital da empresa é 120 000 € e a súa plantilla consta de 15 traballadores. Por outra banda, estímase que a demanda diaria do seu produto é $D(p,M) = 1470\sqrt{M}\ /p$, onde p é o prezo de venda en euros de cada par de zapatos e M é o investimento mensual en marketing.

   a) Calcula a produción diaria actual da empresa.

   c) Cal debe ser a relación entre capital investido e número de traballadores para manter a produción actual?

   b) Se actualmente o investimento en marketing son 1600 €, cal debería ser o prezo de venda para que a demanda coincida coa produción?

   d) Calcula o incremento da demanda resultante dun incremento de 164 € en marketing mantendo o prezo de venda obtido no apartado anterior.

4. Consideremos a función $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$.
   a) Determina o conxunto de nivel 4 de f.
   b) Atopa dous puntos que estean no mesmo conxunto de nivel que $(1,2)$.
   c) Para $a \in \mathbb{R}$, están os puntos $(0,2a)$ e (a,a) no mesmo conxunto de nivel de f?

5. a) Determina os conxuntos de nivel $0, 1$ e -1 de $f(x,y) = ye^x$.
   b) Determina os conxuntos de nivel $0, 1$ e -3 de $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4y + 1$.

6. Dada a función de utilidade $u(x_1,x_2) = 5x_1 + x_2$, determina a ecuación da curva de indiferenza que pasa polo punto $(2,2)$ e representaa graficamente.

7. Dada a función de utilidade $u(x,y) = (x+1)(y+3)$, determina a ecuación da curva de indiferenza que pasa polo punto $(2,1)$ e representaa graficamente.

8. a) Describe e representa as curvas de nivel de $u(x,y) = ye^{-x}$.

   b) Atopa un punto que estea na curva de nivel 5 de u.

   c) Atopa un punto que estea na mesma curva de nivel de u que $(0,2)$.

   d) Para que valor de a o punto $(a,1)$ está na curva de nivel 3 de u.

9. Representa as curvas de nivel das seguintes funcións:

   $f(x,y) = x - y$ $\quad$ $g(x,y) = ye^x$ $\quad$ $h(x,y) = xe^{-y}$ $\quad$ $p(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

10. Representa as curvas de nivel das seguintes funcións e dí que relación hai entre elas:

    $u(x_1,x_2) = x_1x_2$ $\quad$ $v(x_1,x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$ $\quad$ $w(x_1,x_2) = \frac{1}{x_1x_2}$

11. a) Proba que as funcións $u(x_1,x_2) = x_1^c x_2^d$ e $v(x_1,x_2) = c\ln(x_1) + d\ln(x_2)$ teñen os mesmos conxuntos de nivel, para todo $c,d \in \mathbb{R}$, sendo $x_1, x_2 > 0$.

    b) Atopa os valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha + \beta = 1$ e ademais $u(x_1,x_2) = x_1^c x_2^d$ e $v(x_1,x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ teñen os mesmos conxuntos de nivel.

6.2. Derivadas parciais. Matriz xacobiana

Antes de estudar o concepto de derivabilidade para funcións de varias variables deberiamos ter visto os conceptos de límite e continuidade, tal como fixemos para funcións reais dunha variable. Dado que ditos estudos son semellantes e que as funcións que resultan de compoñer funcións elementais teñen un comportamento suficientemente regular, traballaremos só con este tipo de funcións e abordaremos directamente o estudo da súa variación na dirección de cada un dos eixes coordenados.

Definición 6.5 *Sexan $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función e $x_o \in \mathbb{R}^n$.*

Para cada $i = 1, \ldots, n$, denomínase **derivada parcial** *i-ésima da función f no punto $x_o = (x_{o1}, \ldots, x_{on})$, ao límite , se existe,*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_{o1}, \ldots, x_{oi} + t, \ldots, x_{on}) - f(x_o)}{t}$$

e denótase $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)$

Observacións 6.6

1. Para dúas variables, se consideramos as funcións dunha variable $g(x) = f(x, y_0)$ e $h(y) = f(x_0, y)$, coa definición das derivadas parciais de f temos que poden poñerse da forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(x_0 + t) - g(x_0)}{t} = g'(x_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{h(y_0 + t) - h(y_0)}{t} = h'(y_0)$$

   Dos segundos membros destas igualdades, resulta que as dúas derivadas parciais de f , $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, son as derivadas ordinarias no punto x_0 e y_0 das funcións dunha variable real, $g(x) = f(x, y_0)$ e $h(y) = f(x_0, y)$, respectivamente. Desta forma, para o cálculo práctico das dúas derivadas parciais podemos, e debemos, utilizar tódalas regras da derivación ordinaria, sen máis que supoñer que a outra variable permanece constante. No caso de máis de dúas variables, os argumentos siguen sendo válidos.

2. En xeral, para o cálculo práctico de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, pódense, e débense, utilizar tódalas regras da derivación ordinaria, sen máis que supoñer que f depende da variable i-ésima e tódalas demais variables permanecen constantes. Por exemplo, se $f(x, y) = x^2y^2 + 2x + y + 1$, por cálculo directo, derivando f con respecto a x, e supoñendo que a variable y permanece constante, resulta $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 2$.

3. A figura adxunta axudanos a entender a interpretación xeométrica das derivadas parciais.

   Podemos ver a gráfica dunha función $f\colon\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, na que a súa intersección co plano $x = x_o$, resulta a función dunha variable $h(y) = f(x_o, y)$, da que a súa derivada en y_o, $h'(y_o) =$

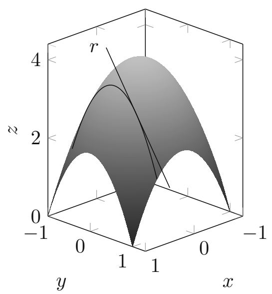


Figura 6.4: Interpretación da derivada parcial.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$. É dicir, a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$ é a pendente da recta r, tanxente á gráfica de h en y_o.

4. As aproximacións dos incrementos dunha función dunha variable referidos na sección 4.7 teñen similar aplicación para o caso das derivadas parciais de funcións de varias variables.

Definición 6.7 *Sexan $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $f_1, f_2, ..., f_m$ as súas funcións compoñentes, a matriz de orde $m \times n$*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_o) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_o) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_o) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_o) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_o) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_o) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_o) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_o) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_o) \end{pmatrix}$$

denomínase **matriz xacobiana** *de f no punto x_o e será denotada por $Df(x_o)$.*

Definición 6.8 *$x_o \in \mathbb{R}^n$ é un* **punto crítico** *de $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, se $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.*

Exemplo 6.9 Dada a función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$, para obter os seus puntos críticos resolvemos o sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x - y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x - y) = 0$$

Sumando ambas ecuacións temos $x^3 + y^3 = 0$, é dicir, $y^3 = -x^3$, entón $y = -x$. Substituíndo, por exemplo, na primeira ecuación temos $4x^3 - 8x = 0$, que ten como solucións, $x = 0$, $x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$. Así, os puntos críticos de f son $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

6.3. Derivadas de orde superior. Matriz hessiana

Se unha función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admite derivadas parciais en tódolos puntos do seu dominio, cada unha destas pode admitir, de novo, derivadas parciais. Neste caso, a derivada parcial k-ésima da función $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, isto é $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big)$, se existe, denomínase derivada parcial de segunda orde, con respecto a x_k e x_i, da función f, e denotarase por $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$.

Se $i = k$, a derivada parcial de segunda orde con respecto a x_i dúas veces, da función f denótase $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Do mesmo xeito pódense definir as derivadas parciais de orde m, con $m \in \mathbb{N}$.

Exemplo 6.10 A función $f(x, y, z) = x + xy^2 + 2zy$ está definida en $\mathbb{R}^3$. Existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, en todo $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2z$, polo que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 2$.

Definición 6.11 *Se existen tódalas derivadas parciais de segunda orde dunha función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nun punto $x_o \in \mathbb{R}^n$, a matriz cadrada de orde n, $\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x_o)\Big)_{1\le i,k\le n}$ denomínase* **matriz hessiana** *de f en x_o, e denótase por $H_f(x_o)$.*

Definición 6.12 *Diremos que $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é de clase unha, $f \in \mathcal{C}^1$, se existen tódalas funcións derivadas parciais de f e son continuas en $\mathbb{R}^n$. Unha función, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, é de clase dúas en $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^2$, se existen e son continuas en $\mathbb{R}^n$ as derivadas parciais de segunda orde de f.*

En xeral, unha función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, é de clase m en $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^m$, se existen e son continuas en $\mathbb{R}^n$ as derivadas parciais de orde m de f. Se f admite derivadas parciais de calquera orde, dise que é de clase infinito e denótase $f \in \mathcal{C}^\infty$

Como sucede coas funcións dunha variable, son de clase infinitio no seu dominio tódalas funcións que resultan de facer operacións coas funcións elementais.

Proposición 6.13 *Se $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2$, entón $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, para todo $i, k = 1, \ldots, n$. Logo a matriz hessiana de f é simétrica.*

Exemplos 6.14

1. Para a función $f(x, y) = x^3 e^{2-y}$, derivando obtemos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 e^{2-y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x^3 e^{2-y}$. Derivando de novo, $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6xe^{2-y} & -3x^2 e^{2-y} \\ -3x^2 e^{2-y} & x^3 e^{2-y} \end{pmatrix}$. Por exemplo, a hessiana de f no punto $(1, 2)$ é $H_f(1, 2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2. A matriz hessiana de $f(x, y, z) = x + xy^2 + 2zy$ nun punto calquera $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 0 \\ 2y & 2x & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Para obter os puntos críticos da función $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 9x^2 + 9y^2 + 12x + 12y + 15$, calculamos os puntos que anulan as dúas derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \ \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 + 18y + 12 = 6(y^2 + 3y + 2) = 0 \ \Leftrightarrow y = -1 \text{ ou } y = -2$$

Así os puntos críticos de f son, pois, $(1, -1)$, $(1, -2)$, $(2, -1)$ e $(2, -2)$.

Podemos calcular a matriz hessiana en cada un destes puntos. Obtemos a matriz hessiana de f en todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x - 18 & 0 \\ 0 & 12y + 18 \end{pmatrix}$$

Polo tanto, $H_f(1, -1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $H_f(1, -2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $H_f(2, -1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ e $H_f(2, -2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

6.4. Regra da cadea

Proposición 6.15 (Regra da cadea) *Sexan $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ dúas funcións $\mathcal{C}^1$, entón $D(g \circ f)(x_o) = Dg(f(x_o))Df(x_o)$, para todo $x_o \in \mathbb{R}^n$.*

Observación 6.16 Se a función g é da forma $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, a partir da regra da cadea obtemos

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

Ademais, se denotamos por $y_j = f_j(x)$ e $z = g(y)$, a igualdade anterior tamén se pode poñer como

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

Exemplo 6.17 Sexa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definamos $F(x, y) = f(y^2, xy)$. Sabendo que $Df(1, -2) = (1, 0)$, calcularemos $DF(2, 1)$.

Se consideramos $g(x,y) = (y^2, xy)$, temos que $F = f \circ g$. Entón para calcular $DF(x,y)$ usaremos a regra da cadea:

$$DF(x,y) = Df(g(x,y))Dg(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(y^2,xy) & \frac{\partial f}{\partial y}(y^2,xy) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ y & x \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} y\frac{\partial f}{\partial y}(y^2,xy) & 2y\frac{\partial f}{\partial x}(y^2,xy) + x\frac{\partial f}{\partial y}(y^2,xy) \end{pmatrix}$$

Se ademais denotamos $u = y^2$, $v = xy$, teríamos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)0 + \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)y = y\frac{\partial f}{\partial y}(y^2,xy)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)2y + \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)x = 2y\frac{\partial f}{\partial x}(y^2,xy) + x\frac{\partial f}{\partial y}(y^2,xy)$$

Doutro xeito, denotando $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)$ e $\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y}(u,v)$, entón

$$\frac{\partial F}{\partial x}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial v}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2y\frac{\partial f}{\partial u} + x\frac{\partial f}{\partial v}$$

Se $x = 2$ e $y = -1$, temos que $u = 1$ e $v = -2$, polo que $\frac{\partial F}{\partial x}(1,-1) = 0$ $\frac{\partial F}{\partial y}(1,-1) = -2$ e a matriz xacobiana de F en $(0,-2)$ é $DF(2,-1) = (0,-2)$.

Exercicios

12. Calcula as derivadas parciais das seguintes funcións:

a) $f(x,y) = x^3 - 2xy + 3y^4$	b) $f(x,y) = x^4 - 3x^2y^2 + y^7$
c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + \ln(x)}$	d) $f(x,y) = \ln(x - 3y)$
e) $f(x,y) = (\frac{y}{x})^4$	f) $f(x,y) = (2x - 4y)^2$
g) $f(x,y,z) = \ln^2(xy + 3z)$	h) $f(x,y,z) = \frac{xy}{x-y+z}$
i) $f(x,y) = e^{x^2-y^3}$	j) $f(x,y) = 7\sqrt[3]{xy^2}$
k) $f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{1-x^2+2y^2}}$	l) $f(x,y,z) = (x + 2y + 3z)^{-2}$
m) $f(x,y) = \dfrac{x}{2x - y}$	n) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{y}$
o) $f(x,y) = y^3e^{xy}$	p) $f(x,y) = y\sqrt[3]{x^2}$
q) $f(x,y) = x^2\ln(xy)$	r) $f(x,y) = \ln(3x^2 - 2xy)$
s) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - ey}$	t) $f(x,y) = 2x^{1/4}y^{2/3}$

13. Calcula as derivadas parciais de primeira orde das funcións:

$L(a,b,c) = ae^{bc}$ $\quad M(v,w) = \frac{v^3}{2w}$ $\quad \alpha(k,n) = k^{\frac{1}{n}}$

$H(z,t) = 2\dfrac{e^z - e^{-t}}{3}$ $\quad F(r,s) = \frac{e^r}{s}$ $\quad W(p,q) = (p^2 - 2q^2)^5$

$G(\alpha,\beta) = \ln(\alpha - \beta)$ $\quad m(a,b) = \frac{2b}{a+b}$ $\quad Q(L,K) = L^{2/7}K^{-2}$

14. Calcula as matrices xacobianas das seguintes funcións:

a) $f(x,y) = (\ln(x-y), x(x-2y)^3)$ b) $f(x) = (x^2, \sqrt[3]{x^2})$
c) $f(x,y,z) = (-\ln(1+\frac{1}{y^2}), z\ln(x), x^2yz^3)$ d) $f(x,y) = (x^y, x/y)$
e) $f(x,y,z) = (xe^{yz}, x^{-2}y^3z^{-1/4})$ f) $f(x,y) = (x^{2y}, x - xy)$
g) $\gamma(\alpha,\beta) = (5\alpha, 3\alpha^4\beta)$ h) $H(r,s) = \left(\frac{r}{s}, e^{rs}, \sqrt{r^3s}, 4^r\right)$

15. Nunha economía con tres bens, as preferencias dun axente consumidor están determinadas pola función de utilidade $u(x,y,z) = xyz$. Calcula as utilidades marxinais para cada un dos bens.

16. A relación entre os inputs capital, K, e traballo, L, dun sistema económico e o valor da produción está dada pola función de *Cobb-Douglas* $Q(L,K) = AL^\alpha K^\beta$. Calcula as produtividades marxinais do capital e do traballo. Comproba que $L\dfrac{\partial Q}{\partial L} + K\dfrac{\partial Q}{\partial K} = (\alpha+\beta)Q$

17. Unha empresa fabrica dous tipos de esquís, os modelos Light e Alpine. A función de custos conxuntos de producir L pares do modelo Light e A pares do modelo Alpine é $c(L,A) = 0.07L^2 + 75L + 0.85AL + 6000$, onde c se expresa en euros. Determina os custos marxinais $\dfrac{\partial c}{\partial L}$ e $\dfrac{\partial c}{\partial A}$ cando $L = 100$ e $A = 50$, e interpreta os resultados.
Calcula o custo de fabricar 50 pares de cada modelo. Se se fabrican 40 pares do modelo Light, cantos pares do outro modelo se poden fabricar para igualar este custo de produción. E se se fabrican 40 pares do modelo Alpine, co mesmo custo, cantos pares do outro modelo se poden fabricar.

18. O volume de vendas dun novo produto en función do tempo, t (en meses), e da cantidade gastada en publicidade, A (en miles de euros), está dado por $X = 200(5-e^{-0.002A})(1-e^{-t})$. Comproba que o volume de vendas incrementase respecto do tempo e tamén respecto do gasto en publicidade. Calcula as derivadas parciais de X, avalíaas para $t = 1$ e $A = 400$ e interpreta o resultado.

19. A función de produción dun modelo de xoguete é $Y = 10\sqrt{LK}$, onde L é o número de horas de traballo empregadas e K son os centos de euros necesarios para a produción de Y unidades do xoguete en cuestión. Determina as funcións de produtividade marxinal e avalíaas cando $L = 400$ e $K = 16$. Interpreta os resultados.

20. A demanda do produto que fabrica unha empresa vén dada por $D(r,p,q) = \dfrac{\sqrt[4]{r}q}{4p}$, sendo r a renda do consumidor, p o prezo por unidade do artigo producido pola empresa e q o prezo por unidade dun artigo similar producido pola competencia. Comproba que $\frac{\partial D}{\partial r} > 0$, $\frac{\partial D}{\partial q} > 0$, $\frac{\partial D}{\partial p} < 0$, para $r,p,q > 0$ e interpreta estes resultados.

21. Comproba que a función u verifica a ecuación indicada:

    a) $u(x,y) = y + \frac{x^2}{2} + k$ verifica a ecuación $\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = x + u$
    b) $u(x,y,z) = 4 - \frac{x^2}{2} + y^2 - z^2$ verifica a ecuación $yz\frac{\partial u}{\partial x} + xz\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = -xyz$
    c) $u(x,y) = \frac{(x-y+2)^2}{4}$ verifica a ecuación $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 2u$
    d) $u(x,y) = \frac{1-x^2}{2} + y$ verifica a ecuación $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) = u$
    e) $u(x,y) = x^2y$ verifica a ecuación $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + y^2\frac{\partial u}{\partial y} = 5yu$
    f) $u(x,y) = \frac{1}{xy}$ verifica a ecuación $x(u^2 - y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + y(x^2 - u^2)\frac{\partial u}{\partial y} = u(y^2 - x^2)$
    g) $u(x,y) = \frac{xy}{xy-y+2x}$ verifica a ecuación $x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} = u^2$
    h) $u(x,y) = \sqrt{-2x + y^2}$ verifica a ecuación $(xy - u^2)\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = u$

22. O modelo de determinación da renda dun país é $Y(T,G) = \dfrac{1}{1-b}(C_o - bT + I_o + G)$ sendo C_o, I_o e $b \neq 1$ constantes, T os impostos e G o gasto público. Calcula as taxas de variación da renda respecto dos impostos e do gasto, $\frac{\partial Y}{\partial T}$ e $\frac{\partial Y}{\partial G}$.

23. Para a función de produción $F(x,y) = kx^a y^b$, con $k, a, b > 0$, determina a produtividade marxinal de cada factor. Cada unha das produtividades marxinais depende das cantidades do outro factor? Comproba que a produción é crecente respecto de cada factor.

24. Calcula as matrices hessianas das funcións que seguen:

    a) $f(x,y,z) = x^2y^3z^4$ b) $f(x,y,z) = yze^{-x}$ c) $f(x,y,z) = \frac{x}{y+z}$
    d) $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/2}$ e) $f(x,y,z) = \ln(\frac{x}{y-z})$ f) $f(x,y,z) = 4z - x\ln(y)$
    g) $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$ h) $f(x,y,z) = y + ze^{-x}$ i) $f(x,y,z) = (4z - x)\ln(y)$

25. Obtén os puntos críticos das funcións que se indican, calcula tamén as matrices hessianas nos puntos obtidos:

    a) $f(x,y) = (x+1)(y-2)$ b) $f(x,y) = x^2y^3 - (y+1)^2$
    c) $f(x,y) = xy(x-1)$ d) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
    e) $f(x,y) = x^3 + 3x^2 - y^2 + 4$ f) $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^4 - 50$
    g) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ h) $f(x,y) = x^2 + 3y^4 - 4y^3 - 12y^2$
    i) $f(x,y,z) = x\ln(y) + z\ln(x) - y$
    j) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$
    k) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + yz$
    l) $f(x,y,z) = x^3 + \frac{2}{3}y^3 + 6x^2 - 2y^2 + az^2$, $(a \neq 0)$
    m) $f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - az - 4x + \frac{z^2}{2}$
    n) $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4axy$

26. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$, calcula as derivadas parciais de

    a) $F(x,y,z) = f(xy,z)$ b) $F(x,y,z) = xz^3f(x,y)$
    c) $F(x,y) = f(y^2, y-x)$ d) $F(x,y) = f(xy, \ln(y^2+1))$
    e) $F(x,y) = xe^{f(y,y)}$ f) $F(x,y) = f(\frac{x}{y}, x^2\ln(y))$
    g) $F(x,y,z) = \ln(zf(y,x))$ h) $F(x,y,z) = \frac{x^3}{z}f(x^2, y+xz)$

27. Se $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é unha función derivable tal que $g(1) = 2$, $g'(1) = -2$. Se $F(x, y, z) = (xg(z^2), zg(xy))$, calcula a matriz xacobiana de F no punto $(-1, -1, 1)$

28. Se $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é unha función derivable, tal que $h(1) = 0$ e $h'(1) = 2$, calcula as derivadas parciais no punto $(-1, 1, 1)$ da función $f(x, y, z) = h(x^2y^4) + xe^{5h(z^3)}$

29. Sexan $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$, e $F(x, y) = f(e^{-2x}, x^2y, x^2 + y)$, calcula as derivadas parciais de F en $(0, 1)$, sabendo que $Df(1, 0, 1) = (2, -2, 2)$.

30. Sexan $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$, e $F(x, y, z, t) = \dfrac{3z^2}{2t} f(\frac{x}{y}, x^2 \ln(y))$, calcula as derivadas parciais de F en $(1, 1, 2, 2)$, sabendo que $Df(1, 0) = (1, -1)$, $f(1, 0) = 3$.

31. Consideremos a función $F(x, y) = f(xg(x), \ln(y+x^2))$, sendo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^1$. Calcula as derivadas parciais de F en $(0, 1)$, sabendo que $Df(0, 0) = (-1, 2)$, $g(0) = 3$ e $g'(0) = 1$.

32. A produción dunha empresa depende do capital K e do traballo L e vén dada pola función $Q(L, K) = 10KL - \sqrt{K} - \sqrt{L}$. Se o capital e o traballo son función do tempo, $L(t) = e^{0.1t}$, $K(t) = 1 + 0.2t$, aplica a regra da cadea para calcular a taxa de variación da produción respecto do tempo, $\dfrac{dQ}{dt}$, no momento inicial $t = 0$.

6.5. Derivadas parciais con Matlab

Para obter as derivadas parciais dunha función de varias variables, empregaremos a sentenza `diff`, de xeito que `diff(F,v,n)` calcula a derivada de orde `n` da expresión `F` respecto da variable `v`.

Dada a función $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2} + \ln(\frac{x}{y})$, para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e despois o valor de cada unha destas derivadas no punto $(1, -2)$, procedemos do seguinte xeito

```
syms x y
f(x,y)=x*y*exp(-x^2-y^2)+log(x/y)
Dxf=diff(f,x)
Dyyf=diff(f,y,2)
Dxyf=diff(diff(f,y),x)
Dxf(1,-2)
Dyyf(1,-2)
Dxyf(1,-2)
```

Logo temos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = ye^{-x^2-y^2} - 2\,x^2ye^{-x^2-y^2} + \frac{1}{x}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6\,xye^{-x^2-y^2} + 4\,xy^3e^{-x^2-y^2} + \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-x^2-y^2} - 2\,x^2e^{-x^2-y^2} - 2\,y^2e^{-x^2-y^2} + 4\,x^2y^2e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -2) = 1.0135 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -2) = 0.1152 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -2) = 0.0472$$

A orde `jacobian(F,[x1,...,xk])` permítenos obter a matriz xacobiana de `F` respecto das variables `x1,...,xk`. Así, para calcular a matriz xacobiana da función $f(x,y,z) = b\ln(\frac{y}{z}) + ce^{xy}$, introducimos:

```
syms x y z  b c
f(x,y,z)=b*log(y/z)+c*exp(x*y)
Df=jacobian(f,[x,y,z])
Df(0,1,1)
```

Obtemos que $Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} cye^{xy} & \frac{b}{y} + cxe^{xy} & -\frac{b}{z} \end{pmatrix}$ e $Df(0,1,1) = (c \ \ b \ -b)$

Dada a función $f(x,y,z) = \left(e^{xyz}, \frac{x}{y}, \ln(z(x+1))\right)$, calculamos $Df(0,1,1)$ coas sentenzas

```
f=[exp(x*y*z),  x/y,  log(z*(x+1))]
Df=jacobian(f,[x,y,z])
Df(0,1,1)
```

Obtemos entón

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 0 \\ \frac{1}{x+1} & 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} \qquad Df(0,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular a matriz hessiana usamos o comando `hessian`. Se $f(x,y) = \frac{y}{x}$, para obter a matriz hessiana de f no punto (2,0), os pasos a seguir son:

```
f(x,y)=y/x
H= hessian(f,[x,y])
H(2,0)
```

Así temos que $H_f(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}$

Exercicios

33. Se $f(x,y,z) = x^3\ln(\frac{z}{y}) + zxy^4$, comproba que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\dfrac{x^3}{z^2}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(-1,-1,3) = 4$.

34. Calcula a matriz xacobiana das funcións que seguen, no punto que se especifica:
    a) $f(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \ln\sqrt{x^2+y^2})$, en $(1,2)$.
    b) $g(x,y,z) = (xe^{yz}, ze^{2x+z})$, en $(2,0,-4)$.
    b) $h(x,y) = (x^4+xy^3, x^2y^2-3x^2, xy^4)$, en $(1,-1)$.

35. Calcula as matrices hessianas das funcións: $f(x,y,z) = yze^{-x}$ $\quad g(x,y,z) = \frac{x}{y+z}$

36. Calcula as hessianas das seguintes funcións nos puntos que se indican.

a) $f(x,y,z,t) = x^4 e^{yz} + \dfrac{x^3}{t^2}$ en $(3,-5,0,2)$

b) $g(x,y,z,t) = (z+1)\ln(x^2y+t)$ en $(-2,1,7-2)$

c) $h(x,y,z,t) = x^3y^2 + 3z^2t^{-3} - \dfrac{3}{4}yt^5 + 7x^2zt$ en $(1,2,3,4)$

d) $p(x,y,z,t,w) = \dfrac{x^2yz^3 + tw^2 - 8y^3w^3}{y^2z^3 - 3xw}$ en $(2,1,2,1,1)$ e en $(5,3,1,1,3)$

e) $q(x,y,z,t,w) = z^4 \ln\left(\dfrac{x^2+y^3}{w}\right) - 8t^3e^{x^2-yw}$ en $(2,1,2,1,1)$

37. Calcula o determinante da hessiana de $u(x,y) = 20x^{-1/5}y^{3/7}$

6.6. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Se $f(x,y) = x+y$, cal das seguintes afirmacións é FALSA:

   a) A curva de nivel 0 de f está formada polos puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $y = -x$

   b) As curvas de nivel de f son rectas.

   c) O punto $(1,1)$ está na curva de nivel 1 de f.

   d) Os puntos $(1,5)$ e $(-2,8)$ están no mesmo conxunto de nivel de f.

2. Se $f(x,y,z) = \dfrac{y-\ln(z)}{x}$, entón:

   a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-1}{x^2}$ b) $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{-1}{xz}$ c) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$ d) $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1-\ln(z)}{x^2}$

3. Se $f(x,y) = x - ye^x$, entón $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é

   a) $1-ye^x$ b) $x-ye^x$ c) $1-y$ d) $1-e^x$

4. Se $H(\alpha,\beta) = \dfrac{\alpha}{\beta-\alpha}$, entón $\dfrac{\partial H}{\partial \alpha}$ é

   a) $\dfrac{1}{\beta}$ b) $\dfrac{\beta-2\alpha}{(\beta-\alpha)^2}$ c) $\dfrac{\beta}{\beta-\alpha}$ d) $\dfrac{\beta}{(\beta-\alpha)^2}$

5. Se $G(\alpha,\beta) = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, entón $\dfrac{\partial G}{\partial \alpha}$ é

   a) $\dfrac{1}{\beta}$ b) $\dfrac{-1}{\beta}$ c) $\dfrac{-1}{\alpha}$ d) $\dfrac{1}{\alpha}$

6. Se $f(x,y,z) = x\sqrt{y+z}$, entón $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é

   a) $\sqrt{y+z}$ b) 0 c) $\dfrac{x}{2\sqrt{y+z}}$ d) $\dfrac{1}{2\sqrt{y+z}}$

7. Se $P(r,s) = r^2 s^3$, entón

   a) $\dfrac{\partial^2 P}{\partial r^2} = 2 + s^3$ b) $\dfrac{\partial P}{\partial r} = 2r$ c) $\dfrac{\partial^2 P}{\partial r \partial s} = 2r + 3r^2$ d) $\dfrac{\partial^2 P}{\partial s^2} = 6r^2 s$

8. Se $T = r^3 \ln\left(\dfrac{4s}{s^4+1}\right)$, entón $\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ é

   a) $6r \ln\left(\dfrac{4s}{s^4+1}\right)$ b) $6r$ c) $3r^2 \dfrac{s^4+1}{4s}$ d) $3r^2 \ln\left(\dfrac{4s}{s^4+1}\right) + r^3 \dfrac{s^4+1}{4s}$

9. Se $f(x,y) = (e^{xy}, \frac{2x}{y})$, entón a matriz xacobiana de f é

   a) $\begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ \frac{2}{y} & \frac{2x}{y^2} \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} e^{y} & e^{x} \\ \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \end{pmatrix}$

10. Se $f(x,y) = (x^3 y^2, x - y)$, entón a matriz xacobiana de f é

    a) $\begin{pmatrix} 3x^2y^2 & 2x^3y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3x^2 & 2y \\ 1 & x \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3x^2y^2 & 2x^3y \\ -y & x \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3x^2 & 2y \\ 1 & -y \end{pmatrix}$

11. Se $f(x,y) = (ye^{-x}, x^5 + y^2)$, entón a matriz jacobiana de f é

    a) $Df(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{-x} & e^{-x} \\ 5x^4 + y^2 & x^5 + 2y \end{pmatrix}$ b) $Df(x,y) = \begin{pmatrix} -ye^{-x} & e^{-x} \\ 5x^4 & 2y \end{pmatrix}$

    c) $Df(x,y) = \begin{pmatrix} -e^{-x} & -e^{-x} \\ 5x^4y^2 & 2yx^5 \end{pmatrix}$ d) $Df(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{-x} & 1 \\ 5x^4 & 2y \end{pmatrix}$

12. Se $f(x,y) = \frac{1}{x} - xy$, entón a matriz hessiana de f é

    a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & -y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{x^3} & -x \\ -y & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. Se $f(x,y) = x^3 - xy^2$, entón $H_f(1,0)$ é

    a) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

14. Se $f(x,y) = y \ln(x)$, entón $H_f(1,2)$ é

    a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

15. Cal dos seguintes NON é punto crítico da función $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2x^2y$?

    a) $(2, -4)$ b) $(0, 0)$ c) $(1, -1)$ d) $(-1, -1)$

16. Cal dos seguintes NON é punto crítico da función $f(x, y) = 4xy^2$?

    a) $(3, 0)$ b) $(0, 0)$ c) $(-\sqrt{2}, 0)$ d) $(0, 1)$

17. Sexan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$, e $F(x, y) = f(x^2 - y, xy)$, entón $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ é

    a) $f'(-1, x)$ b) $-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2 - y, xy) + x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^2 - y, xy)$

    c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2 - y, xy) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^2 - y, xy)$ d) $-xDf(x^2 - y, xy)$

18. Sexan $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$, e $G(x, y) = f(\frac{x}{y}, x^3 + \ln(y))$, entón $\dfrac{\partial G}{\partial y}$ é

    a) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-\frac{x}{y^2}, \frac{1}{y})$

    b) $-\frac{x}{y^2}\dfrac{\partial f}{\partial x}(\frac{x}{y}, x^3 + \ln(y)) + \frac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial y}(\frac{x}{y}, x^3 + \ln(y))$

    c) $-\frac{x}{y^2}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial y}$

    d) $(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y})\dfrac{\partial f}{\partial y}(\frac{x}{y}, x^3 + \ln(y))$

19. Sexan $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$, e $G(x, y) = x^2 f(y, xy)$, entón $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ é

    a) $2xf(y, xy) + x^2\dfrac{\partial f}{\partial x}(y, xy)$

    b) $2xf(y, xy) + x^2y\dfrac{\partial f}{\partial y}(y, xy)$

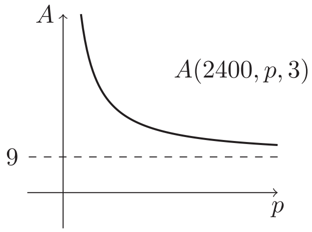
    c) $2x\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y)$

    d) $2x\dfrac{\partial f}{\partial x}(y, xy)$

6.7. Solucións dos exercicios propostos

2. a) O aforro actual é de $A(2400, 4, 3) = 209$ €. Se lle subisen o soldo un 5 % pero o indicador dos artigos de luxo fose $l = 4$, aforraría $A(2520, 4, 4) = 173.50$ €.

b) Para os valores actuais de r e l, $\lim_{p\to+\infty} A(2400, p, 3) = 9$, vemos na gráfica que ao aumentar o indicador de prezos o aforro diminúe e acércase cada vez máis a 9 €.



3. a) Actualmente fabrícanse 3000 pares de zapatos diariamente.

b) $K(L) = 27000000/L^2$

c) Investindo en marketing 1600 €, o prezo de venda para que a demanda coincida coa produción debería ser 120 € cada par.

d) A demanda aumenta en 150 pares de zapatos cun incremento de 164 € en marketing mantendo o prezo de venda en 120 €.

11. b) $\alpha = \frac{c}{c+d}$, $\beta = \frac{d}{c+d}$.

17. $\dfrac{\partial c}{\partial L}(100, 50) = 131.50$, entón se se fabrican 100 pares de esquís do modelo Light e 50 do modelo Alpine, o custo de fabricar un par máis de Light é aproximadamente de 131.50 €.

$\dfrac{\partial c}{\partial A}(100, 50) = 85$, entón se se fabrican 100 pares de esquís do modelo Light e 50 do modelo Alpine, o custo de fabricar un par máis de Alpine é aproximadamente de 85 €.

O custo de fabricar 50 pares de cada modelo é de 12 050 €. Se se fabrican 40 pares do modelo Light, pódense fabricar 86 pares do outro modelo para igualar este custo de produción. E se se fabrican 40 pares do modelo Alpine, co mesmo custo, pódense fabricar 53 pares do outro modelo.

19. $\dfrac{\partial Y}{\partial L}(400, 16) = 1$, logo se se están a empregar 400 horas de traballo e 1600 €, a producción aumentará aproximadamente nunha unidade ao aumentar unha hora de traballo.

$\dfrac{\partial Y}{\partial K}(400, 16) = 25$, logo se se están a empregar 400 horas de traballo e 1600 €, a producción aumentará aproximadamente en 25 unidades ao aumentar 100 € o capital.

32. $\dfrac{dQ}{dt}(0) = 2.85$

Solucións autoavaliación. 1c, 2b, 3a, 4d, 5d, 6d, 7d, 8a, 9a, 10a, 11b, 12b, 13b, 14a, 15a, 16d, 17b, 18b, 19b

Capítulo 7

Gradiente dunha función. Funcións homoxéneas.

7.1. Derivadas direccionais e derivadas parciais

Estudamos neste epígrafe o concepto de derivación para funcións de varias variables, atendendo ás diferenzas en relación ás funcións dunha variable.

Definición 7.1 *Sexan $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función e $x_o, u \in \mathbb{R}^n$.*

Denomínase **derivada segundo o vector** *u da función f en x_o ao número real, se existe,*

$$D_u f(x_o) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + tu) - f(x_o)}{t}$$

Se este límite existe, dise que f é derivable en x_o na dirección do vector u. En tal caso, tamén existe $D_{ku} f(x_o)$, para todo $k \in \mathbb{R}$ e ademais $D_{ku} f(x_o) = k D_u f(x_o)$

Exemplo 7.2 Sexa $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+1}$. Para obter a derivada de f en $(0,0)$ segundo o vector $u = (3,4)$, $D_{(3,4)} f(0,0)$, calculamos o seguinte límite:

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t(3,4)) - f(0,0)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{f(3t,4t) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{3t}{9t^2+16t^2+1}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{3}{25t^2+1} = 3\end{aligned}$$

logo, $D_{(3,4)} f(0,0) = 3$.

Estudaremos un xeito mellor para calcular derivadas direccionais para funcións con un bo comportamento. Empezaremos polas derivadas segundo os vectores da base canónica. En $\mathbb{R}^n$ existen n direccións particularmente especiais que corresponden aos vectores unitarios da base canónica, $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $e_n = (0,\ldots,0,1)$, e que coinciden coas direccións dos eixes coordenados para $n = 2$ e $n = 3$. Así a derivada de f en $x_o = (x_{o1}, \ldots, x_{on})$ segundo o do vector e_i, é

$$D_{e_i} f(x_o) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + te_i) - f(x_o)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_{o1}, \ldots, x_{oi} + t, \ldots, x_{on}) - f(x_o)}{t}$$

é dicir, é a **derivada parcial** i-ésima da función f no punto x_o, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)$.

Observacións 7.3 1. Interpretación xeométrica das derivadas direccionais: Na figura 7.1 represéntase a gráfica dunha función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, na que a súa intersección co plano $x = x_o$, resulta a gráfica da función dunha variable $g(y) = f(x_o, y)$. A derivada desta función en y_o, $g'(y_o) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$, é a pendente da recta r, que é a recta tanxente á gráfica de g en y_o. Así, a derivada parcial segunda de f en (x_o, y_o) é a pendente da recta tanxente á gráfica de f en (x_o, y_o) na dirección do vector $(0, 1)$.

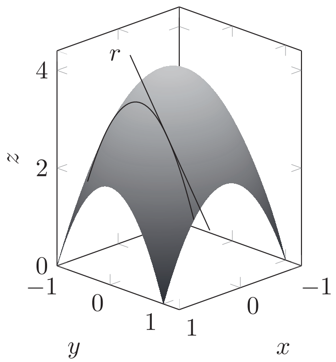


Figura 7.1: Interpretación da derivada parcial.

Conclusión análoga obtense para calquera derivada segundo un vector unitario, $D_u f(x_o, y_o)$, esta é a pendente da recta tanxente á gráfica de f en (x_o, y_o) na dirección do vector u, se $\|u\| = 1$.

2. Sabemos que as derivadas parciais miden as taxas de variación da función nas direccións dos vectores da base canónica, do mesmo xeito, as derivadas direccionais proporcionan medidas das taxas de variación da función noutras direccións.

3. Obviamente, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é derivable en $x_o \in \mathbb{R}^n$ segundo calquera vector $u \in \mathbb{R}^n$, existen tódalas derivadas parciais de f en x_o; non obstante, o recíproco non é certo, pois poden existir tódalas derivadas parciais dunha función nun punto x_o e non existir algunha outra derivada direccional.

4. Relación coa continuidade: Sabemos que para funcións dunha variable real, toda función derivable nun punto é continua nese punto. Non obstante, para funcións de varias variables a existencia de tódalas derivadas direccionais nun punto non é condición necesaria, nin suficiente, para a continuidade de f. É dicir, unha función pode ser derivable nun punto dado en tódalas direccións e non ser continua e tamén pode ocorrer que sexa continua a función nun punto e que non sexa derivable en algunha dirección nese punto. En consecuencia a derivabilidade segundo vectores para funcións de varias variables non se corresponde co concepto de derivabilidade de funcións dunha variable.

5. Cando traballamos con funcións de varias variables, o concepto que realmente se corresponde co concepto de derivabilidade de funcións dunha variable é o de diferenciabilidade. Como non temos adicado tempo ao estudo das aplicacións lineais, non podemos traballar coa defición formal de diferenciabilidade, pero bastaranos con saber que as funcións elementais son diferenciables no seu dominio e tódalas funcións que teñen tódalas derivadas parciais continuas son diferenciables, é dicir, as funcións C^1 son diferenciables.

   Ademais as funcións diferenciables son continuas, son derivables en calquer dirección e teñen un bo comportamento respecto a álxebra de funcións (a suma, produto, cociente e composición de funcións diferenciables é diferenciable).

7.2. Gradiente dunha función real

Definición 7.4 *Sexan $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_o \in \mathbb{R}^n$ tales que existen tódalas derivadas parciais de f en x_o. O vector $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_o), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_o)\right)$ denomínase* **vector gradiente** *da función f no punto x_o e denótase por $\nabla f(x_o)$.*

O seguinte resultado proporciona un xeito cómodo de obter derivadas direccionais de funcións diferenciables.

Proposición 7.5 *Se f é diferenciable no punto x_o, entón f é derivable nese punto na dirección de calquera vector $u \in \mathbb{R}^n$ e verifícase $D_u f(x_o) = \nabla f(x_o).u$*

Exemplo 7.6 Para $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+1}$, temos que $\nabla f(0,0) = (1,0)$, entón se usamos a propiedade anterior para obter a derivada de f en $(0,0)$ según o vector $u = (3,4)$, temos que

$$D_{(3,4)} f(0,0) = \nabla f(0,0).(3,4) = (1,0).(3,4) = 3$$

O seguinte resultado resume as propiedades máis importantes do vector gradiente para funcións diferenciables.

Proposición 7.7 *Sexan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_o \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x_o) \neq \theta$ e $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|u\| = 1$. Verifícase que:*

1. $-\parallel \nabla f(x_o) \parallel \leq D_u f(x_o) \leq \parallel \nabla f(x_o) \parallel$
2. $D_u f(x_o) = \parallel \nabla f(x_o) \parallel$ *se, e só se, u está na dirección de $\nabla f(x_o)$*
3. $D_u f(x_o) = -\parallel \nabla f(x_o) \parallel$ *se, e só se, u está na dirección de $-\nabla f(x_o)$*
4. *A dirección de maior crecemento de f en x_o é a de $\nabla f(x_o)$.*
5. *A dirección de maior decrecemento de f en x_o é a de $-\nabla f(x_o)$.*
6. *O crecemento é nulo na dirección dos vectores $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq \theta$ tales que $\nabla f(x_o).u = 0$*

Observacións 7.8 1. O valor máximo da derivada direccional de f en x_o segundo un vector unitario alcánzase na dirección do vector gradiente de f en x_o.

2. O valor mínimo da derivada direccional de f en x_o segundo un vector unitario alcánzase na dirección oposta á do vector gradiente de f en x_o.

3. En calquera dirección perpendicular á do gradiente de f, o crecemento da función f é nulo. Por outra parte, é obvio que o crecemento de f é nulo, se x se move sobre unha curva de nivel, de aquí que o gradiente de f no punto x_o sexa perpendicular á curva de nivel que contén a x_o.

Aproximación de incrementos usando o gradiente

O gradiente dunha función, é dicir as súas derivadas parciais nun punto, poden utilizarse para aproximar o cambio que se produce nesa función a partir dos cambios das súas variables. Así, para unha función de dúas variables, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, para $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ e $\Delta x, \Delta y$ suficientemente pequenos tense que:

$$\Delta f(x_o, y_o) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\Delta y = D_{(\Delta x, \Delta y)} f(x_o, y_o)$$

Entón a derivada direccional da función f en (x_o, y_o) segundo o vector $u = (\Delta x, \Delta y)$ aproxima a variación da función na dirección elexida, é dicir, aproxima o valor

$$\Delta f(x_o, y_o) = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o)$$

Supoñamos, por exemplo, que nunha fábrica a produción diaria responde á función $Q(K, L) = 60K^{1/2}L^{1/3}$, onde K representa o capital en miles de euros e L as horas de traballo. Se na actualidade se invirten 900 000 euros e se empregan cada día 1000 horas de traballo, para estimar a variación da produción que resulta de aumentar a inversión en 2000 euros e as horas de traballo en 5, aplicando a fórmula da aproximación mencionada teríamos:

$\Delta Q \approx D_{(2,5)}Q(900, 1000) = \nabla Q(900, 1000).(2, 5) = 2\dfrac{\partial Q}{\partial K}(900, 1000) + 5\dfrac{\partial Q}{\partial L}(900, 1000) = 20 + 30 = 50$

Obsérvese que a variación real sería $\Delta Q = Q(902, 1005) - Q(900, 1000) = 49.97$

En xeral, para unha función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ suficientemente pequenos tense que:

$$\Delta f(x_1, \dots, x_n) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n = D_{(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)} f(x_1, \dots, x_n)$$

Exercicios

1. Se $f(x, y) = x^3 y^{-2}$, calcula $D_{(1,1)}f(2, 1)$.

2. Se $f(x, y) = x^4 e^{2y}$, calcula $D_{(-1,3)}f(-2, 0)$.

3. Obtén a derivada de $f(x, y) = x^3 - y^2$ no punto $(-2, 1)$ segundo o vector $(-1, 3)$.

4. Obtén a derivada de $f(x, y, z) = x - y^2 - z^3$ no punto $(2, 1, 0)$ segundo o vector $(-1, 1, 1)$.

5. Sexa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^2, tal que $D_{(1,2)}f(0,0) = -6$, $D_{(-3,-1)}f(0,0) = -2$. Obtén as derivadas parciais de f en $(0,0)$ e calcula $D_{(5,-1)}f(0,0)$

6. a) Calcula a derivada de $f(x,y,z) = (x+z)e^{x-y}$ en $(1,1,-1)$ segundo o vector $(1,2,-3)$.

   b) Indica cal é a dirección de máis crecemento de $u(x_1,x_2) = 8\sqrt{x_1} + 5\sqrt{x_2}$ no punto $(4,1)$. Dá unha dirección na que o crecemento sexa nulo.

7. Indica a dirección de maior decrecemento de $f(x,y,z) = \frac{x-y^2}{xz}$ no punto $(1,1,1)$. Dá unha dirección na que o crecemento sexa nulo.

8. Cal é o valor mínimo de $D_v f(1,-1)$, se $f(x,y) = \frac{2y}{x}$ e $v \in \mathbb{R}^2$ é un vector unitario.

9. Para as funcións que seguen, calcula o valor máximo da derivada direccional para vectores unitarios no punto que se especifica.

   a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ en $(1,2)$
   b) $g(x,y) = \frac{2x}{1-x^2-y^2}$ en $(0,0)$
   c) $h(x,y,z) = xe^{yz}$ en $(2,0,-4)$
   d) $p(x,y,z) = xy^2z^2$ en $(2,1,1)$

10. Unha empresa produce $P(K,L) = 100K^{1/4}L^{3/4}$ unidades dun produto ao utilizar L unidades de man de obra e K unidades de capital. Calcula a produción cando $K = 16$ e $L = 81$ e aproxima o efecto de reducir a man de obra a 80 e aumentar o capital a 17.

11. A función de produción dunha empresa é $F(L_1,L_2) = L_1^2L_2$ sendo L_1, L_2 as horas de man de obra cualificadas e non cualificadas respectivamente. Actualmente estanse a utilizar 16 horas de man de obra cualificada e 32 de man de obra non cualificada. Ante a proposta de incrementar nun 5 % as horas de traballo cualificado, estima o cambio que se debe realizar nas horas de traballo non cualificado para manter o mesmo nivel de produción.

12. A función de custos dunha empresa é $C(x,y) = 220\ln(3x+5y+4)$, onde x e y son a cantidade de toneladas dos dous produtos X e Y que fabrica a empresa. Se actualmente produce 100 toneladas de cada produto e debe facer lixeiras modificacións na produción, como debe modificar a produción para lograr a máxima diminución dos custos?

13. $F(K,L) = 30K^2L^{1/3}$ é o número de unidades producidas nunha factoría cando se empregan K unidades de capital e L unidades de traballo. Sabendo que neste momento estamos a empregar 2 unidades de capital e 8 unidades de traballo, en que proporción debemos facer pequenas variacions no capital e no traballo para que a variación da produción sexa máxima.

14. A demanda dunha empresa vén dada, en función dos prezos p_1 e p_2 aos que venden os seus dous artigos, por $D(p_1,p_2) = \frac{5000}{p_1(1+p_2)}$. Se na actualidade o prezo de venda dos artigos é de 2 e 5 euros respectivamente e debe varialos lixeiramente, en que proporción debemos variar os prezos para que a variación da demanda sexa máxima. E en que proporción se deben variar para que a demanda non varíe.

15. A compañía Refresquillos S.A. produce tres tipos diferentes de refrescos que vende cun beneficio semanal, en centos de euros, $B(L,N,C) = (L-1)^2 + (N-1)^2 + (C-2)^2$, sendo L, N e C as toneladas demandadas dos refrescos de limón, laranxa e cola respectivamente. Actualmente estanse a demandar 5 toneladas do refresco de limón, 6 do de laranxa e 8 do de cola, estima cal sería o aumento do beneficio se se incrementa a demanda de cada refresco nun $7\,\%$? Como se debería aumentar a demanda dos refrescos de laranxa e cola, incrementando nun $7\,\%$ o de limón, para conseguir o máximo incremento do beneficio?

16. Dá a fórmula da aproximación da variación de $F(L,K) = aL^\alpha K^\beta$, sendo $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

17. A función de produción dunha empresa está dada por $Q(L,K) = 20(\frac{1}{3}K^{-1/2} + \frac{1}{4}L^{-1/2})^{-2}$, onde L representa o factor traballo e K o capital. Se actualmente os niveis son $L = 4$ e $K = 9$, aproxima a variación do nivel de produción se se incrementa o capital en 0.01 e se rebaixa o traballo en 0.05 unidades.

18. A produción dunha empresa depende do capital K e do traballo L e vén dada pola función $Q(L,K) = 10KL - \sqrt{K} - \sqrt{L}$. Aproxima o incremento da produción cando se pasa de $K = L = 1$ a $K = 0.9$ e $L = 1.2$

7.3. Funcións homoxéneas.

Un tipo de funcións especialmente importante en Economía son as funcións homoxéneas así, por exemplo, é habitual considerar funcións de produción homoxéneas. Definiremolas e veremos algunhas das súas propiedades.

Definición 7.9 *Dise que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é* **homoxénea** *de grao $\alpha \in \mathbb{R}$ se verifica que $f(tx_1, \ldots tx_n) = t^\alpha f(x_1, \ldots x_n)$, para todo $(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n, t > 0$*

A homoxeneidade dunha función significa que cando tódalas variables se ven alteradas nunha mesma proporción t, con $t > 0$, o valor da función multiplícase por unha determinada potencia de t.

Exemplos 7.10

1. $f(x,y,z) = x^4 - 2y^4 + 7xyz^2$ é homoxénea de grao 4.
2. $f(x,y,z) = \sqrt{3x^2 + 2y^2 + 5z^2}$ é homoxénea de grao 1.
3. $f(x,y) = \frac{y^4}{x^4+x^2y^2} + \frac{x^3}{x^2y+5y^3}$ é homoxénea de grao 0.
4. $f(x,y) = \frac{1}{2x+3y}$ é homoxénea de grao -1.
5. $f(x,y) = \sqrt[3]{xy\ln(\frac{x}{y})}$ é homoxénea de grao $\frac{2}{3}$.
6. $f(x,y) = \frac{xy^2+y^3e^{\frac{x}{y}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é homoxénea de grao 2.
7. A función de Cobb-Douglas, $F(L,K) = aL^\alpha K^\beta$, é homoxénea de grao $\alpha + \beta$.

Proposición 7.11 *Sexa $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Se f é homoxénea de grao α, entón as derivadas parciais de f, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, son homoxéneas de grao $\alpha - 1$.*

O seguinte resultado danos unha caracterización das funcións homoxéneas.

Teorema 7.12 (Teorema de Euler) *Sexa $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Verifícase que:*

f é homoxénea de grao α se, e só se, para todo $(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha f(x_1, \dots x_n) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots x_n), + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots x_n)$$

Exercicios

19. Indica cales das seguintes funcións son homoxéneas:

a) $f(x, y) = x^3 + y^2$	b) $g(x, y) = x^3 y^2$	c) $p(r, w) = r + 5w$
d) $h_1(x, y) = \ln(x) + \ln(y)$	e) $h_2(x, y) = \ln(xy)$	f) $P(x, y) = 5\ln(x/y)$
g) $F(x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4$	h) $G(x_1, x_2) = \ln(x_1^4 - x_2^4)$	i) $p(u, v) = \ln(\frac{3u}{4v})$
j) $T(a, b) = be^{2a/b}$	k) $t(a, b) = 5e^{2a/b}$	l) $\mathcal{T}(a, b) = 5e^{2ab}$
m) $C(a, b) = 2a^{1/2}b^{3/5}$	n) $h(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1 x_2}$	o) $H(a, b, c) = a^{1/9}b^{5/9}c^{8/9}$

20. Se $a, b, c, k, m \in \mathbb{R}$, indica o grao de homoxeneidade das seguintes funcións homoxéneas:

$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{z}}{x+y+z}$	$F(x, y, z) = k\frac{(xyz)^3}{x^2+y^2+z^2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})$
$R(p, t) = \sqrt{pt^3}\ln(\frac{t}{p+t})$	$C(x_1, x_2, x_3) = (ax_1^k + bx_2^k + cx_3^k)^m$
$H(x, y, z) = x^{k-b}z^b + y^{k-a}z^a$	$G(x, y) = (x^{ka}y^{kb})^{2/(a+b)}$
$g(x) = \sum_{i=1}^n x_i^k$, con $x \in \mathbb{R}^n$	$h(x) = \prod_{i=1}^n x_i^k$, con $x \in \mathbb{R}^n$

21. Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son homoxéneas de grao α e β respectivamente, estuda se son homoxéneas as seguintes funcións: $f + g,\ 5f,\ fg,\ f/g, f(x_1^4, \dots, x_n^4)$.

22. Existe algunha función homoxénea tal que a súa primeira derivada parcial sexa $4x^3y^2 + xy^3$? Existe algunha función homoxénea que teña por derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x} = xy^3$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^5 - y^5$?

23. Obtén a función homoxénea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que ten como derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2$. Existe algunha función non homoxénea que teña estas mesmas derivadas parciais?

24. Consideremos a función $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{7}} x_2^{\frac{3}{7}}$, obtén as derivadas parciais de u e comproba que:

    a) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{4}{7}u(x_1, x_2)$

    b) $\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{x_2}{3x_1}$

25. Indica o grao de homoxeneidade das seguintes funcións e calcula, para cada unha, $\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}$:

    a) $u(x_1,x_2)=x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{1}{3}}$ b) $u(x_1,x_2)=x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}$ c) $u(x_1,x_2)=x_1^2x_2$ d) $u(x_1,x_2)=x_1^ax_2^b$

26. Sexa f unha función de clase 2 en $\mathbb{R}^2$ e homoxénea de grao α.

    a) Sabendo que $f(-1,1)=1$ e $f(-2,2)=1$, calcula α.

    b) Se $\alpha=2$, calcula $f(1,4)$, sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,4)=6$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,4)=7$

    c) Se $\alpha=2$, calcula $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)$ para $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=2$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=1$

27. Sexa $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ unha función de clase 2 e homoxénea de grao 3. Razoa se son verdadeiras ou falsas as seguintes igualdades:

    a) $f(3,3)=3f(1,1)$ b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,3)=3\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$

    c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}=4y^2+3$ d) $2\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-1)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-1)=4f(2,-1)$

    e) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(3,3)=3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)$ f) $6\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(6,3)+3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,3)=2\dfrac{\partial f}{\partial y}(6,3)$

28. Se $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ é unha función de clase 2, homoxénea de grao 3, calcula $\nabla f(4,2,-6)$ sabendo que $\nabla f(2,1,-3)=(-2,5,1)$

29. Se $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ é unha función homoxénea e de clase 2 que verifica $f(1,-1,4)=6$ e $\nabla f(1,-1,4)=(0,2,1)$, cal é o grao de homoxeneidade de f?

30. Se $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é unha función de clase 2, homoxénea de grao 5, calcula o valor de k en cada unha das seguintes igualdades:

    a) $f(4,-2)=kf(2,-1)$ b) $4\dfrac{\partial f}{\partial x}(8,-2)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(8,-2)=kf(8,-2)$

    c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,-2)=k\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-1)$ d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(6,-3)=k\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-1)$

31. Consideremos a función $u(x_1,x_2)=x_2^{-4}(x_1^3+x_1x_2^2)$

    a) Estuda se u é homoxénea

    b) Calcula $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e dí se é homoxénea

    c) Determina canto vale $x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}$

32. Comproba a igualdade de Euler para as funcións $F(L,K)=aL^\alpha K^\beta$ e $V(L,K)=(\alpha L^a+\beta K^a)^{1/a}$, sendo $a,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

33. Consideremos unha función de utilidade $u(x,y)$ con derivadas parciais continuas que verifique $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = a$, para un valor a constante non nulo. Proba, usando o Teorema de Euler, que a función $v(x,y) = u(x,y) - a\ln(x+y)$ é homoxénea. A función u é homoxénea?

34. Sexa $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ homoxéneas de grao 3 e 5 respectivamente, estuda se son homoxéneas as funcións:

    $F(x,y) = f(-3xy, y^2 - 4x^2)$

    $G(x,y,z) = g(xz^2 - yx^2, f(x,y))$

    $H(x,y,z) = x^2 f(\frac{x^3}{y}, xz)$

35. Sexa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, estuda se $F(x,y) = x^2 f(y/x)$, para $x \neq 0$ é homoxénea.

7.4. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Se $f(x,y) = \ln(xy)$, entón $\nabla f(1,1)$ é

   a) $(-1,1)$ b) $(-1,-1)$ c) $(1,1)$ d) $(1,-1)$

2. Se $f(x,y) = \frac{2y+\ln(x)}{y}$, entón

   a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}$ b) $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\ln(x)}{y^2}$
   c) $\nabla f(1,1) = (1,2)$. d) ningunha das respostas anteriores é correcta.

3. Sexa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $(-1,2)$ e tal que $\nabla f(-1,2) = (0,1)$. Cal das seguintes afirmacións é FALSA?

   a) $(0,1)$ está na dirección de maior crecemento de f en $(-1,2)$ b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = 0$
   c) $|D_u f(-1,2)| \leq \|(0,1)\|$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| = 1$ d) $D_{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})} f(-1,2) = \sqrt{2}$

4. Sexa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\nabla f(1,5) = (-4,3)$. Se $u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$, pódese afirmar que

   a) $D_u f(x,y) = -4x + 3y$ b) $\|\nabla f(1,5)\| = \sqrt{26}$
   c) Se $||u|| = 1$, entón $|D_u f(1,5)| \leq 5$ d) $D_{(3,4)} f(1,5) = 11$

5. Se $f(x,y) = x^2 y$, entón $D_{(1,2)} f(1,1)$ vale

   a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

6. Se $f(x,y,z) = x^2 y + xz^2$ e $v = (-1,1,-1)$, entón $D_v f(-1,1,1)$ é

   a) 6 b) -4 c) 4 d) 0

7. Sexan $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x_o \in \mathbb{R}^n$ e $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Unha das seguintes afirmacións é, en xeral, FALSA.

   a) $D_u f(x_o) = x_o \cdot \nabla f(u)$ b) $D_u f(x_o) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_o)u_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_o)u_n$

   c) $D_u f(x_o) = \nabla f(x_o) \cdot u$ d) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_o) = D_{(1,0,\ldots,0)} f(x_o)$

8. Sexa $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_o \in \mathbb{R}^3$ tal que $\nabla f(x_o) = (4, 0, -3)$. Se $u = (u_1, u_2, u_3)$, $||u|| = 1$, cal das seguintes afirmacións é FALSA?

   a) $D_u f(x_o) = 4u_1 - 3u_3$ b) $\|\nabla f(x_o)\| = 25$

   c) $|D_u f(x_o)| \leq 5$ d) Se $u = (0, 1, 0)$, $D_u f(x_o) = 0$

9. A dirección de maior crecemento de $f(x, y, z) = xye^z$ no punto $(-1, 2, 0)$ é a do vector

   a) (ye^z, xe^z, xye^z) b) $(-1, 2, 0)$ c) $(2, -1, -2)$ d) $(0, 0, 0)$

10. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciable e homoxénea de grao 3, entón

    a) $3f(2, 2) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(2, 2) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 2)$ b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é homoxénea de grao 2.

    c) $f(2, 2) = 2\dfrac{\partial f}{\partial x}(2, 2) + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 2)$ d) $f(2, 2) = 2f(1, 1)$

11. Sexa $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, homoxénea de grao 2 e tal que $\nabla f(1, -1) = (0, 2)$. Tense que

    a) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, -2) = 16$ b) $f(1, -1) = -2$

    c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -1)$ d) $f(3, -3) = -6$

12. Sexa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciable e homoxénea de grao 2. Se $\nabla f(1, 2) = (-3, 4)$, entón

    a) $f(1, 2) = 5$ b) $f(1, 2) = 10$ c) $f(1, 2) = \frac{5}{2}$ d) $f(x, y) = \frac{5}{2}$

13. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciable e homoxénea de grao 5, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$, tense que

    a) $5f(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$ b) $f(tx, ty) = t^5 f(x, y)$

    c) $f(x, y) = 5\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)$ d) $f(tx, ty) = 5tf(x, y)$

14. Cal das seguintes funcións NON é homoxénea?

    a) $h(a, b, c) = a^{1/9}b^{5/9}c^{8/9}$ b) $f(x, y) = x^4 - y^4$

    c) $g(x, y) = \ln(x^4 - y^4)$ d) $p(u, v) = \ln(\frac{3u}{4v})$

15. Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é diferenciable e homoxénea de grao -1, entón

    a) $f(1, 0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 0)$ b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é homoxénea de grao 0

    c) $2f(2, 2, 2) = f(1, 1, 1)$ d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2, 2, 2) = 4\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)$

16. Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función de clase dúas, homoxénea de grao α, entón

    a) $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ é homoxénea de grao $1 - \alpha$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

    b) $f(x)= x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$, para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

    c) $f(3x) = 3\alpha f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

    d) $f(2x) = 2^\alpha f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

7.5. Solucións dos exercicios propostos

10. A produción cando $K = 16$ e $L = 81$ é 5400 unidades. Ao reducir a man de obra a 80 e aumentar o capital a 17 a produción aumenta aproximadamente 34.38 unidades.

11. Débense diminuir 3 horas e 12 minutos a man de obra non cualificada.

12. Por cada quilo do primeiro produto que se deixe de producir, débense reducir 1.66 quilos na produción do segundo.

13. A proporción entre K e L debe ser de 24 a un.

14. Por cada céntimo que se rebaixe o prezo do segundo artigo, débense baixar 3 céntimos no prezo do primeiro se queremos que a demanda medre o máis rápidamente posible.

E para que a demanda non varíe, por cada céntimo que se rebaixe o prezo do segundo artigo, débense subir 3 céntimos no prezo do primeiro ou, o que é o mesmo, por cada céntimo que se suba o prezo do segundo artigo, débense baixar 3 céntimos no prezo do primeiro.

17. A produción baixa 2.19 unidades.

18. A produción aumenta 0.95 unidades.

20. f é homoxénea de grao $1/2$
F é homoxénea de grao 6
R é homoxénea de grao 2
C é homoxénea de grao km
H é homoxénea de grao k
G é homoxénea de grao $2k$
g é homoxénea de grao k
h é homoxénea de grao kn

34. F é homoxénea de grao 6, G é homoxénea de grao 15, H é homoxénea de grao 8.

Solucións autoavaliación. 1c, 2b, 3d, 4c, 5b, 6c, 7a, 8b, 9c, 10b, 11c, 12c, 13b, 14c, 15c, 16d

Capítulo 8

Derivación de funcións definidas implicitamente.

A técnica da derivación implícita é de moita utilidade en Economía xa que, con frecuencia, as funcións que resultan dos modelos económicos están definidas só de forma implícita por unha ecuación ou por un sistema de ecuacións, e precisamos derivalas para coñecer o seu comportamento. Os nosos obxectivos serán saber que é e cando existe unha función implícita e de que xeito se poden calcular, se é posible, as súas derivadas.

8.1. Funcións definidas implicitamente

Nalgunhas ocasións no estudo de certos procesos, a relación existente entre unha magnitude e as variables das que depende é coñecida de forma explícita, a través dunha expresión $y = y(x)$ ou ben vén dada a través dunha igualdade que as relaciona de forma implícita, é dicir, a través dunha expresión $F(x, y) = cte$.

Por exemplo, podemos saber que a función de custos dunha empresa é $C(q_A, q_B) = 220 \ln(3q_A + 5q_B + 4)$, onde q_A e q_B son a cantidade de toneladas dos dous produtos A e B que fabrica a empresa, e así temos a función de custos definida explícitamente. Tamén pode suceder que a función de custos está implicitamente definida, por exemplo, pola ecuación $C + \sqrt{C} - q_A\sqrt{9 + q_B^2} = 12$, onde C denota o custo total (en euros) de producir q_A unidades do produto A e q_B unidades do produto B.

Empezamos considerando o caso máis sinxelo, no que interveñen só dúas variables. Inicialmente podemos dicir que unha variable y é función implícita doutra variable x, é dicir $y = \varphi(x)$, cando esta función φ está dada indirectamente por medio dunha ecuación funcional $F(x, y) = 0$. Isto é, se ao substituir y pola función $\varphi(x)$ na ecuación $F(x, y) = 0$ esta é válida, ou sexa, $F(x, \varphi(x)) = 0$ para os distintos valores de x.

Nalgúns casos somos quen de despexar a variable y na ecuación $F(x, y) = 0$, resultando que a función implícita φ está, de feito, definida en forma explícita. Pero, en xeral, esta transformación non será posible, e haberá que estudar as propiedades da función φ, no caso de que exista, na súa forma implícita.

Empezaremos por algúns exemplos sinxelos.

Exemplo 8.1 Se consideramos a ecuación $x^2y + 3y - xe^x = 6$, da que temos $(x^2 + 3)y = xe^x + 6$, entón podemos despexar y en función de x:

$$y = \frac{xe^x + 6}{x^2 + 3}$$

Temos entón que y non é unha variable independente, senón que é función de x, $y = y(x)$. Se nos interesa estudar a variación de y respecto de x, derivamos:

$$y'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(x^2+3) - (6 + xe^x)2x}{(x^2+3)^2}$$

Ademais $(x, y) = (0, 2)$ verifica a ecuación inicial, logo $y(0) = 2$, e da relación anterior temos $y'(0) = 1/3$.

Como podemos obter $y'(0)$ sen necesidade de despexar y na ecuación inicial? Se sabemos que se pode despexar y quere dicir que existe unha función $y(x)$ de xeito que:

$$x^2 y(x) + 3y(x) - xe^x = 6$$

Se nesta relación derivamos respecto da única variable independente que temos, x, temos:

$$2xy(x) + x^2 y'(x) + 3y'(x) - e^x - xe^x = 0$$

Para $x = 0$, obtemos $3y'(0) - 1 = 0$, de onde chegamos a $y'(0) = 1/3$.

Deste xeito podemos obter a derivada da función $y(x)$ que vén definida pola ecuación inicial sen necesidade de despexar y. Este método coñecese como método de derivación implícita. Ademais podemos simplificar aínda máis os cálculos, abusando da notación, escribindo cando derivamos:

$$2xy + x^2 y' + 3y' - e^x - xe^x = 0,$$

entendendo que y representa a $y(x)$ e y' representa a $y'(x)$.

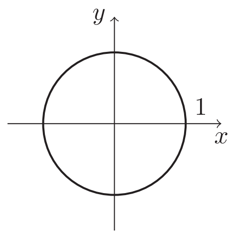
Exemplo 8.2 A ecuación $\ln(x+y)+x^3y^2+y^3 = 1$ tal vez defina implicitamente unha das variables en función da outra, pero en calquera caso non somos capaces de obter unha expresión explícita desa función, ou sexa, non somos capaces de despexar na ecuación $\ln(x + y) + x^3y^2 + y^3 = 1$ ningunha das variables en función da outra. Podemos igualmente derivar implicitamente? Veremos que non sempre é posible.

Consideremos, en xeral, unha función $F\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e unha curva de nivel de F, por exemplo a curva de nivel cero, é dicir, os puntos $(x, y) \in D$ que verifican $F(x, y) = 0$.

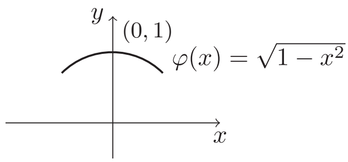
Preguntamonos se a curva de nivel cero de F coincide coa gráfica dunha única función derivable φ, de xeito que, por exemplo, se $y = \varphi(x)$, se verifique que $F(x, \varphi(x)) = 0$ para todo x do dominio de φ? Se a resposta desta cuestión fose negativa, poderiamos formular unha pregunta máis sinxela: Se o conxunto de nivel non coincide na súa totalidade coa gráfica dunha única función, tal vez de xeito parcial ou local, "anacos" del poidan representarse mediante gráficas de funcións. Vexamos un exemplo.

Exemplo 8.3 Para a función $F(x, y) = x^2 + y^2$, a curva de nivel un, é dicir, os $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2 + y^2 = 1$ forman á circunferencia de centro $(0, 0)$ e raio un.

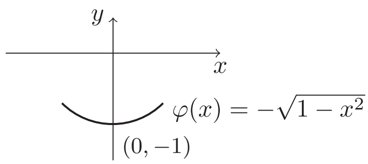
Como apreciamos na gráfica, esta ecuación non define a y como función implícita global de x, de feito ao despexar y temos dúas posibles solucións $y = \sqrt{1 - x^2}$ e $y = -\sqrt{1 - x^2}$.



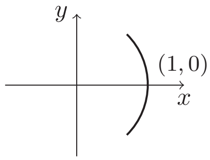
Non obstante, se abordamos o problema localmente, existen infinidade de puntos da circunferencia cerca dos cales existe función implícita. En efecto, consideremos por exemplo o punto $(0,1)$. A gráfica da curva de nivel un de F, restrinxida a unha veciñanza de $(0,1)$, representa á gráfica da función $y=\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$, para todo x cerca de 0. Ademais esta función é de clase un e verifica $\varphi(0)=1$ e $F(x,\varphi(x))=F(x,\sqrt{1-x^2})=x^2+(\sqrt{1-x^2})^2=1$, para todo x cerca de 0.



Se considerasemos o punto $(0,-1)$, a gráfica da curva de nivel un de F, restrinxida aos que están cerca de $(0,-1)$, representa á gráfica da función $y=\phi(x)=-\sqrt{1-x^2}$, para todo x cerca de 0. Esta función tamén é de clase un e verifica $\phi(0)=1$ e $F(x,\phi(x))=F(x,-\sqrt{1-x^2})=x^2+(-\sqrt{1-x^2})^2=1$, para todo x cerca de 0.



Destaquemos que poderiamos facer o mesmo para tódolos puntos da circunferencia excepto para $(-1,0)$ e $(1,0)$, para eles tal función non existe. Ningún anaco de circunferencia cerca de $(1,0)$ pode ser a gráfica dunha función.



Nótese que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(-1,0)=\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,0)=0$, xa que $\dfrac{\partial F}{\partial y}=2y$. Vexamos que o feito de que se anulen estas derivadas non é casual.

En xeral, se $G(x) = F(x, \varphi(x)) = 0$ en todo punto x cerca de x_o, entón

$$G'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0,$$

de onde se deduce que

$$\varphi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))},$$

polo que debe verificarse que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \neq 0$, nos puntos en que exista $\varphi'(x)$.

Acabamos de ver que a existencia de función implícita local non é trivial. Veremos máis adiante un resultado que establece condicións suficientes para a súa existencia. Aínda sen coñecer a expresión da función que vén definida implicitamente por unha ou varias ecuacións funcionais, podemos obter as súas derivadas sempre e cando teñamos garantida a súa existencia. Vexamos o caso dunha ecuación con tres variables, podemos proceder da mesma forma sabendo cal é a variable dependente e cales as independentes.

Exemplo 8.4 Supoñendo que a ecuación funcional $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$, define implicitamente a variable z en función das variables (x, y) cerca de $(6, -3, -2)$, podemos obter as derivadas parciais da función implícita no punto $(6, -3)$.

Supoñamos entón que existe unha función $z = z(x, y)$ diferenciable para todo (x, y) cerca de $(6, -3)$ e verificando que $z(6, -3) = -2$ e $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Entón verifícase que

$$x^2 + y^2 + (z(x, y))^2 - 49 = 0 \tag{8.1}$$

Derivando nesta igualdade respecto de x temos que

$$2x + 2z(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

é dicir, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{z(x, y)}$. Doutro xeito, se denotásemos por comodidade $z = z(x, y)$, a ecuación (8.1) quedaría na relación que tiñamos inicialmente, $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$, onde x e y son variables e z é función delas. Así, derivando nesta igualdade respecto de x obteríamos

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

é dicir, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{z}$, onde, non convén esquecelo, $z = z(x, y)$.

Analogamente, derivando respecto de y, temos $2y + 2z\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, ou sexa, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{z}$

A partir de aquí podemos obter, por exemplo, as derivadas parciais da función implícita en $(6, -3)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(6, -3) = 3 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(6, -3) = -\tfrac{3}{2}.$$

Temos visto entón como derivar implicitamente nunha ecuación que define unha relación entre variables independentes e variables que dependen delas, pero vimos tamén que é fundamental ter garantido que, polo menos cerca dun punto dado, estas variables dependentes son realmente función das outras, cun bo comportamento.

8.2. Teorema da función implícita

Estudamos aquí as condicións que garanten a existencia de funcións definidas implicitamente. De xeito xeral, temos o seguinte resultado formal:

Teorema 8.5 (Existencia local de funcións implícitas)
Sexan $F\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$*,* $F \in \mathcal{C}^1$*, e* $(x_{o1}, \ldots, x_{on}, y_{o1}, \ldots, y_{om}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ *tales que* $F(x_{o1}, \ldots, x_{on}, y_{o1}, \ldots, y_{om}) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$.

Se $\det D_{y_1,\ldots,y_m} F(x_{o1}, \ldots, x_{on}, y_{o1}, \ldots, y_{om}) \neq 0$*, entón existe unha única función* $\mathcal{C}^1$*, definida cerca de* $x_o = (x_{o1}, \ldots, x_{on})$*,* $\varphi\colon A(x_o) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, verificando que* $\varphi(x_{o1}, \ldots, x_{on}) = (y_{o1}, \ldots, y_{om})$ *e* $F(x, \varphi(x)) = \theta$*, para todo* $x \in A(x_o)$*.*

Observacións 8.6

1. Estamos a supoñer que temos unha función de clase un, $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, e un punto $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^{n+m}$ que verifican $F(x, y) = \theta \in \mathbb{R}^m$. Con isto estamos utilizando un sistema de m ecuacións con $n + m$ variables, das que pretendemos saber se é posible, despexar as m variables $(y_1, \ldots, y_m)$ en función das n restantes, $(x_1, \ldots, x_n)$.

   Así, o sistema de m ecuacións dado definiría, cerca de x_o, as funcións implícitas C^1, $y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$.

2. A condición $\det D_{y_1,\ldots,y_m} F(x_{o1}, \ldots, x_{on}, y_{o1}, \ldots, y_{om}) \neq 0$ esixe que o determinante da matriz formada polas derivadas parciais de F respecto das variables $(y_1, \ldots, y_m)$ (as que serán función das restantes), substituido no punto (x_o, y_o), non se anule.

Exemplo 8.7 Estudemos se a ecuación $\ln(x + y) + x^3y^2 + y^3 = 1$ define unha función implícita do tipo $y = y(x)$ cerca do punto $(0, 1)$.

Comprobemos en primeiro lugar, se se verifican as hipóteses do teorema da función implícita. Sexa $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, a función $F(x, y) = \ln(x + y) + x^3y^2 + y^3 - 1$. Verifícase que

1. $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$
2. $F(0, 1) = 0$
3. $D_yF(x, y) = \dfrac{1}{x + y} + 2x^3y + 3y^2$, polo que $D_yF(0, 1) = 4 \neq 0$

En consecuencia, o teorema da función implícita asegura a existencia dunha única función $\mathcal{C}^1$, definida cerca de 0, $y\colon A(0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando $y(0) = 1$ e $F(x, y(x)) = 0$, para todo $x \in A(0)$.

Se queremos calcular $y'(0)$, podemos derivar respecto a x directamente na ecuación $\ln(x+y)+x^3y^2-x+y^3=1$, recordando que y é unha función de x, $y=y(x)$. Temos entón

$$\frac{1+y'}{x+y}+3x^2y^2+2x^3yy'+3y^2y'=0$$

De onde, substituindo (x,y) por $(0,1)$, obtemos $1+4y'(0)=0$, logo $y'(0)=-1/4$

Exemplo 8.8 Estudemos se o sistema de ecuacións

$$\begin{aligned} x^2+xy+z^2+tu&=0\\ x+y+zut^2+1&=0 \end{aligned}$$

define implicitamente ás variables x e y como funcións diferenciables de (z,t,u), para valores cerca de $(x_o,y_o,z_o,t_o,u_o)=(0,-1,0,1,0)$. En caso afirmativo, calcularemos $\dfrac{\partial x}{\partial z}(0,1,0)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial z}(0,1,0)$.

Comprobemos en primeiro lugar, se se verifican as hipóteses do teorema da función implícita. Sexa $F\colon \mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y,z,t,u)=(x^2+xy+z^2+tu, x+y+zut^2+1)$. Verifícase que

1. $F\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^5)$, por seren F_1 e F_2 funcións polinómicas.
2. $F(0,-1,0,1,0)=(0,0)$
3. $DF_{xy}(x,y,z,t,u)=\begin{pmatrix}2x+y & x\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, polo que $\det D_{xy}F(0,-1,0,1,0)=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

En consecuencia, o teorema da función implícita asegura a existencia de dúas únicas funcións $\mathcal{C}^1$, $x=x(z,t,u)$, $y=y(z,t,u)$, $x,y\colon A(0,1,0)\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, verificando $x(0,1,0)=0$, $y(0,1,0)=-1$ e $F(x(z,t,u),y(z,t,u),z,t,u)=0$, para todo (z,t,u) cerca de $(0,1,0)$.

Para calcular $\dfrac{\partial x}{\partial z}(0,1,0)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial z}(0,1,0)$, primeiro derivamos respecto de z nas dúas ecuacións, recordando que z,t e u son as variables e x e y pasan a ser funcións. Así temos

$$\begin{aligned} 2x\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial x}{\partial z}y+x\frac{\partial y}{\partial z}+2z&=0\\ \frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial y}{\partial z}+ut^2&=0 \end{aligned}$$

Substituindo agora (x,y,z,t,u) por $(0,-1,0,1,0)$, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{\partial x}{\partial z}(0,1,0)&=0\\ \frac{\partial x}{\partial z}(0,1,0)+\frac{\partial y}{\partial z}(0,1,0)&=0 \end{aligned}$$

entón $\dfrac{\partial x}{\partial z}(0,1,0)=\dfrac{\partial y}{\partial z}(0,1,0)=0$.

Exercicios

1. Calcula a expresión das funcións implícitas que se indican:

   a) $z = z(x, y)$ definida pola ecuación $y^2 \ln(\frac{z}{x}) = 10$

   b) $z = z(x, y)$ definida pola ecuación $x^2 y^{-3} e^z = 1$

   c) $z = z(w_1, w_2)$ definida pola ecuación $(3w_1 + 2w_2)^{z+1} = q$

   d) $K = K(L)$ definida pola ecuación $K^{1/6} L^{3/4} = a$

2. Deriva as seguintes ecuacións sabendo que y é función implícita da variable x.

   a) $x^2 - 3xy + y^2 - 2x + y - 5 = 0$ b) $x^3 + y^3 = 3x + 3y$

   c) $\ln\big(\sqrt{x^2 + y^2}\big) + x^3 y = 4$ d) $\frac{x}{x^2+y^2} - y^4 = 6$

   e) $3xy + \ln(xy^2) = 7$ f) $\frac{x}{y} + \ln(\frac{y}{x}) = 6$

   g) $x^2 + y^2 = e^{x+y}$ h) $xy^2 - x^2 y + ye^{-x} = 0$

3. Deriva as seguintes ecuacións sabendo que z é función implícita das outras variables que aparecen na ecuación.

   a) $xyz + 3x^2 y^3 - \ln z^3 = 0$ b) $e^{xz} = x^2 y + 3z$

   c) $x \ln(y) + y^2 z + z^2 = 8$ d) $\ln(x + y + z) + 2xyz = ze^{x-y}$

   e) $q^3 + w^2 t + z^3 - 3z = 0$ f) $qz - 2qw + 7t + z^4 = 2$

4. Consideremos a ecuación $3e^{xy} + e^{xz} + xe^{yz} = 5$. Sabendo que x é función implícita de (y, z), calcula as derivadas parciais da función implícita no punto $(y_0, z_0) = (0, 0)$.

5. Sexa $y = y(x, z)$ a función de clase unha definida implicitamente pola ecuación $x^2 yz + xy^3 = -8$ cerca do punto (x_0, z_0)= $(1, 0)$. Calcula as derivadas da función implícita nese punto.

6. Comproba que a ecuación $xe^z + z \ln(1 + x^2 + y^2) = 0$, define a z como función implícita de (x, y) cerca de $(0, 1)$, non cal $z = 0$. Calcula as derivadas parciais da función implícita no punto $(0, 1)$.

7. Sabendo que a ecuación $z \ln(w + 1) + t^2 (z - 1) + e^{1-t} = 1$ define a z como función implícita de (w, t) cerca do punto $(w_o, t_o) = (0, 1)$, calcula as derivadas parciais da función implícita nese punto.

8. Demostra que o sistema de ecuacións $x^2 y + zt = 0, \ln(x^2) + e^y - z^2 = 0$ define implicitamente a z e a t como función de (x, y), cerca do punto $(x_o, y_o, z_o, t_o) = (1, 0, 1, 0)$.

9. Comproba que o sistema de ecuacións $x^2 y + e^{z-3} = 3$, $z^2 - xyz = 3$, define a x e a y como función implícita de z cerca do punto $(x_o, y_o, z_o) = (1, 2, 3)$.

10. Comproba que o sistema de ecuacións $x^2 + y - z^2 - w^2 = 0$, $x^2 - y - z^2 - w = 0$ define a z e w como funcións implícitas de (x, y) cerca do punto $(x_o, y_o) = (2, 1)$ cos valores $(z_o, w_o) = (1, 2)$. Calcula as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial x}$ en $(2, 1)$.

11. Comproba que o sistema de ecuacións $uy + vx + w + x^2 = 0$, $uvw + x + y + 1 = 0$, define a x e a y como función de (u, v, w) cerca do punto $(u_o, v_o, w_o) = (2, 1, 0)$ con valores $(x_o, y_o) = (-1, 0)$ neste punto.

12. a) Comproba que o sistema de ecuacións $z\ln(x) + t(y+1)^2 = 1$, $\quad xe^y + t^2 z = 0$ define a y e a z como funcións implícitas de (x, t) cerca do punto $(x_o, y_o, z_o, t_o) = (1, 0, -1, 1)$.

    b) Deriva implicitamente nas dúas ecuacións anteriores respecto da variable x.

    c) Calcula $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial x}(1, 1)$

13. Consideremos a ecuación: $wq^2 + w^2 + \ln(qt) = 2$.

    a) Estuda se cerca do punto $(1, -1, -1)$, a variable w é función implícita de (q, t), $w = w(q, t)$.

    b) En caso afirmativo, calcula $\nabla w(-1, -1)$, $\dfrac{\partial w}{\partial q}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ en tódolos puntos do dominio de w.

    c) Calcula $\dfrac{\partial^2 w}{\partial q \partial t}(-1, -1)$.

14. a) Comproba que a ecuación $\dfrac{xy}{z} + \ln(y^2) - \ln(z) = 0$ define a z como función implícita das variables (x, y), $z = z(x, y)$, cerca do punto $(x_o, y_o, z_o) = (0, 2, 4)$.

    b) Calcula $\nabla z(0, 2)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, para todo (x, y).

    c) Comproba, utilizando a igualdade de Euler, que a función implícita é homoxénea de grao 2.

15. Unha función de custos está implicitamente definida pola ecuación $C + \sqrt{C} = 12 + q_A\sqrt{9 + q_B^2}$, onde C denota o custo total (en euros) de producir q_A unidades do produto A e q_B unidades do produto B.

    a) Se $q_A = 6$ e $q_B = 4$, atopa o correspondente valor de C.

    b) Determina os custos marxinais con respecto a q_A e q_B, cando $q_A = 6$ e $q_B = 4$.

16. A función $U(x, y, z) = x^2 y^3 z^{3/2}$ representa a utilidade que obtén un consumidor da adquisición de tres bens A, B e C en cantidades x, y, z, respectivamente. O devandito consumidor quere obter un nivel 100 de utilidade.

    a) Escribe a ecuación da curva de indiferenza escollida polo consumidor.
    b) Se quere manter o nivel de utilidade 100, adquirindo 10 unidades do ben A e 9 do ben B, cantas unidades debe adquirir do ben C?
    c) Comproba que a ecuación da curva de indiferenza escollida define a z como función implícita de (x, y) cerca das cantidades referidas anteriormente.

d) Calcula a derivada $\dfrac{\partial z}{\partial x}(10,9)$ derivando implicitamente e tamén de forma explícita.

17. Unha fábrica produce dous produtos en cantidades x e y, con unha fronteira de posibilidades de produción que vén dada pola ecuación $2x^2 + y^3 = 80$. A produción actual é de 6 e 2 unidades respectivamente.

    a) Comproba que a ecuación anterior permite considerar y como función implícita de x, $y = y(x)$ para producións similares á actual.

    b) Calcula a razón de substitución de produtos $RSP = \dfrac{dy}{dx}(6)$ derivando implicitamente, e interpreta o resultado.

    c) Calcula a RSP derivando explicitamente.

18. A demanda dun artigo vén dada pola función $D(r,p) = 3000\sqrt[3]{r/p} - 20\ln(p)$, onde r é a renda media dos consumidores e p o prezo, ambos en euros. Actualmente $r = 16000$ e $p = 4$.

    a) Escribe a ecuación para a curva do nivel da demanda actual.

    b) Comproba que dita ecuación define a p como función implícita de r para valores próximos os actuais.

    c) Calcula e interpreta a derivada $\dfrac{dp}{dr}(16000)$

8.3. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Sabendo y vén definida implicitamente pola ecuación $x\ln(y) - x^2 + xy^3 = 0$, cerca de $(x_o, y_o) = (1,1)$, tense que

   a) $y'(x) = -1/2$ b) $y'(1) = 1/4$ c) $y'(-1) = -2$ d) $\frac{\partial y}{\partial x}(-1,1) = 1/4$

2. Dados $\alpha, \beta > 0$, consideremos a función $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$ definida se $x, y > 0$. A ecuación $f(x,y) = 1$ define unha función implícita $y = y(x)$ cerca do punto $(1,1)$. Verifícase que

   a) $y'(1) = 0$ b) $x^\alpha \beta y^{\beta-1} y' = 0$, para x cerca de 1.

   c) $y' = \frac{\alpha x}{\beta y}$, para x cerca de 1. d) $xy' = -\frac{\alpha}{\beta} y$, para x cerca de 1.

3. Se z vén definida implicitamente pola ecuación $\frac{z}{y} + xe^y - \ln(z) = 0$, derivando respecto da variable x obtemos a relación:

   a) $\frac{\partial z}{\partial x} + xe^y - \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial x}} = 0$ b) $\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + e^y - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

   c) $e^y = 0$ d) $\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + xe^y - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

4. Se $z = z(x,y)$ é a función implícita definida pola ecuación funcional $xe^{z+1} - z^2 y + 1 = 0$ cerca do punto $(x_o, y_o, z_o) = (1, 2, -1)$, entón

a) $\nabla z(1,2) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{xe^{z+1} - 2y}$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,2) = -1/5$

d) $z(1,2) = 0$

5. Dada a ecuación $e^{-yz} + z(x^2 + y) = 1$, o teorema da función implícita garante a existencia dunha función implícita do tipo $z = z(x, y)$ cerca do punto

   a) $(2, 1, 0)$ b) $(1, 0, -1)$ c) $(0, 1, 0)$ d) $(0, 0, 1)$

6. Dada a ecuación $xy^2 + x^2 + \ln(yz) = 2$, o teorema da función implícita garante a existencia dunha función implícita do tipo $x = x(y, z)$ cerca do punto

   a) $(1, -1, -1)$ b) $(0, 1, e)$ c) $(0, 1, 1)$ d) $(-2, 2, 1)$

7. Sexa $z = z(x, y)$ a función definida implícitamente pola ecuación $x^2yz + xz^3 = -1$ cerca do punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Cal das seguintes afirmacións é correcta?

   a) $\nabla z(1,0) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ b) $\nabla z(1,0) = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{6})$

   c) $\nabla z(1,0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ d) $\nabla z(1,0) = (0, 0)$

8.4. Solucións dos exercicios propostos

1.
a) $z(x,y) = xe^{10y^{-2}}$

b) $z(x,y) = \ln(x^{-2}y^3)$

c) $z(w_1,w_2) = \dfrac{\ln(q)}{\ln(3w_1+2w_2)} - 1$

d) $K(L) = a^6L^{-9/2}$

4. $\dfrac{\partial x}{\partial y}(0,0) = -3$, $\dfrac{\partial x}{\partial z}(0,0) = -1$

6. $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,1) = \frac{-1}{\ln(2)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 0$

7. $\dfrac{\partial z}{\partial w}(0,1) = -1$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}(0,1) = 1$

10. $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2,1) = 0$, $\dfrac{\partial w}{\partial t}(2,1) = 2$

12. $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -3/2$, $\dfrac{\partial y}{\partial x}(1,1) = 1/2$

13. $\dfrac{\partial w}{\partial q} = \frac{-2wq-1/q}{2w+q^2}$, $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \frac{-1}{t(2w+q^2)}$, $\nabla w(-1,-1) = (1,1/3)$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial q\partial t}(-1,-1) = 0$

14. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{xy+z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \frac{xyz+2z^2}{xy^2+yz}$, $\nabla z(0,2) = (2,4)$

15. $C = 36$, $\dfrac{\partial C}{\partial q_A}(6,4) = \frac{60}{13}$, $\dfrac{\partial C}{\partial q_B}(6,4) = \frac{288}{65}$

16. $x^2y^3z^{3/2} = 100$, $z(x,y) = 10^{4/3}x^{-7/3}y^{-2}$, $z(10,9) = 1/81$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(10,9) = -0.0016$

17. $y(x) = \sqrt[3]{80-2x^2}$, $RSP = y'(6) = -2$

18. $3000\sqrt[3]{r/p} - 20\ln(p) = D(16000,4)$
$150r^{1/3}p^{-1/3} - \ln(p) = 30(1-\ln(4))$, $p'(32000) = 1/8020$

Solucións autoavaliación. 1b, 2d, 3b, 4c, 5a, 6a, 7c

Capítulo 9
Funcións cóncavas e convexas.

9.1. Funcións cóncavas e convexas

Neste capítulo imos estudar conceptos relacionados coa convexidade de funcións de varias variables. Para traballar con estas propiedades precisamos que o dominio da función sexa un conxunto convexo.

Definición 9.1 *Diremos que un conxunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é un* **conxunto convexo** *se dados dous puntos calquera de A o segmento que os une está contido en A, é dicir, $tx + (1-t)y \in A$, para todo $t \in [0,1]$, $x, y \in A$.*

Exemplos 9.2 Son exemplos de conxuntos convexos:

1. En $\mathbb{R}$: Un intervalo de números reais.
2. En $\mathbb{R}^2$: Un círculo, con ou sen a circunferencia que o limita.
3. En $\mathbb{R}^3$: O volume limitado por unha esfera, un cono, un cilindro ou un elipsoide.
4. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x \leq 1\}$

NON son convexos, por exemplo, os conxuntos:

1. Unha coroa circular.
2. O exterior dun círculo.
3. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$

Definición 9.3 *Sexan $A \subset \mathbb{R}^n$ un conxunto convexo e $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función.*

1. *f é* **cóncava** *se $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$, para todo $x, y \in A, t \in [0,1]$*
2. *f é* **estritamente cóncava** *se $f(tx+(1-t)y) > tf(x)+(1-t)f(y)$, para todo $x, y \in A, x \neq y, t \in (0,1)$*
3. *f é* **convexa** *se $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$, para todo $x, y \in A, t \in [0,1]$*

4. *f é* **estritamente convexa** *se $f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y)$, para todo $x, y \in A, x \neq y, t \in (0,1)$*

Obviamente f é (estritamente) convexa se, e só se, $-f$ é (estritamente) cóncava.

Veríficase que se f é unha función cóncava, o subgrafo de f, $Subg(f) = \{(x,y); y \leq f(x)\}$ é un conxunto convexo, e se f é unha función convexa, o epigrafo de f, $Epg(f) = \{(x,y); y \geq f(x)\}$ é un conxunto convexo.

Tamén resulta sinxelo comprobar que se cumplen certas propiedades referentes á álxebra de funcións como por exemplo, se f, g son cóncavas e $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, entón $af + bg$ tamén é cóncava.

Observación 9.4 Debemos comentar que $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (sendo A convexo) é cóncava se, e só se, cumpre a desigualdade de Jensen, $f(\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i f(x_i)$, para $x_1, ..., x_k \in A$ e $\lambda_1, ..., \lambda_k \in [0,1]$, con $\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$.

Obsérvese que, para $k = 2$ a propiedade anterior coincide coa definición de función cóncava.

Teorema 9.5 *Sexa $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con A convexo. Se f é cóncava (convexa) en A, entón f é continua en tódolos puntos do interior de A.*

A seguinte propiedade recolle unha ferramenta moi práctica para estudar a convexidade das funcións de varias variables. Trátase dun resultado análogo ao criterio da derivada segunda para o estudo das funcións reais de variable real.

Proposición 9.6 *Sexan A aberto e convexo e $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase dúas. Verifícase:*

1. *f é cóncava en $A \Leftrightarrow H_f(x)$ é semidefinida negativa, para todo $x \in A$*
2. *f é convexa en $A \Leftrightarrow H_f(x)$ é semidefinida positiva, para todo $x \in A$*
3. *Se $H_f(x)$ é definida negativa $\forall x \in A$, entón f é estrictamente cóncava en A*
4. *Se $H_f(x)$ é definida positiva $\forall x \in A$, entón f é estrictamente convexa en A*

Exemplos 9.7

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ é estritamente convexa en $\mathbb{R}^3$
2. $f(x,y,z) = x - y^2 - z^2$ é cóncava en $\mathbb{R}^3$
3. $f(x,y,z) = x - y^2 + z^2$ non é nin cóncava nin convexa en $\mathbb{R}^3$

9.2. Funcións cuasicóncavas

Definición 9.8 *Sexan $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo e $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*

f é **cuasicóncava** *cando para calqueira $k \in \mathbb{R}$, o conxunto de sobrenivel ou k-corte superior $\{x \in A : f(x) \geq k\}$ é un conxunto convexo, é dicir, se para $x, y \in A$, $k \in \mathbb{R}$ tales que $f(x), f(y) \geq k$ entón $f(tx + (1-t)y) \geq k$, para todo $t \in [0,1]$.*

Non debe confundirse o conxunto de sobrenivel, que é un subconxunto de $\mathbb{R}^n$ co epígrafo de f, que é un subconxunto de $\mathbb{R}^{n+1}$. O concepto de cuasiconcavidade é importante en Economía, así por exemplo, se supoñemos unha función de utilidade cuasicóncava, entón calquera combinación convexa $tx_1 + (1-t)x_2$ de dúas cestas x_1, x_2 con utilidade maior ou igual que un valor k tamén ten utilidade maior ou igual que k. Esta propiedade, que se coñece como convexidade das preferencias, tamén equivale a pedir que calquera combinación convexa de dúas cestas de bens sexa a lo menos tan preferida para o consumidor como á cesta que menos lle gusta das dúas.

Proposición 9.9 *Sexan $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo e $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.*
f é cuasicóncava se, é só se, $f(tx+(1-t)y) \geq$ mín $\{f(x), f(y)\}$, para todo x, y en A, $t \in [0,1]$.

Na práctica será de utilidade a seguinte propiedade. Supoñamos que $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é unha función de clase dúas tal que $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$ e que as ecuacións $u(x,y) = k$ definen funcións dunha variable $y = y(x)$ tamén de clase dúas. Resulta útil saber que u é cuasicóncava se, e só se, estas funcións $y = y(x)$ son convexas. Así, se traballamos con preferencias monótonas, pedir curvas de indiferenza asociadas a gráficas de funcións convexas equivale a pedir que a utilidade u sexa cuasicóncava ou, equivalentemente, que as preferencias sexan convexas.

De forma análoga poderiamos definir o concepto de cuasiconvexidade, de xeito que f dirase cuasiconvexa se $-f$ é cuasicóncava, é dicir, cando para calqueira $k \in \mathbb{R}$, o conxunto de baixonivel ou k-corte inferior $\{x \in A; f(x) \leq k\}$ sexa un conxunto convexo. Equivalentemente, f é cuasiconvexa se, é só se, $f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$, para todo x, y en A, $t \in [0,1]$. Non afondaremos neste concepto porque non ten aplicacións económicas de interese. Por outra parte, a cuasiconcavidade é unha propiedade máis débil que a concavidade.

Proposición 9.10 *Se f é cóncava entón f é cuasicóncava.*

O recíproco desta propiedade non se verifica en xeral, como mostra o seguinte exemplo. A función $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2-x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ é cuasicóncava en $\mathbb{R}$ pero non é cóncava en $\mathbb{R}$, xa que non é continua.

Non obstante, ese recíproco si se verifica para certas funcións homoxéneas.

Proposición 9.11 *Sexan $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo e $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.*
Se f é homoxénea de grao $\alpha \in (0,1]$, verifícase que f é cóncava se, e só se, f é cuasicóncava.

Aínda que non serán obxeto do noso estudo, debemos saber que existen resultados similares aos recollidos na proposición 9.6, para funcións cuasicóncavas de clase dúas. Respecto á alxebra de funcións cuasicóncavas, tamén se teñen resultados interesantes, pero non exactamente os mesmos que no caso das funcións cóncavas.

Por exemplo, a composición dunha función cuasicóncava con unha función estrictamente monótona crecente resulta unha función cuasicóncava. Pero, a diferenza do que sucede coas funcións cóncavas, a suma de funcións cuasicóncavas non é necesariamente cuasicóncava. Por exemplo, $f(x) = x^3$ e $g(x) = -x$ son ambas cuasicóncavas e cuasiconvexas pero a súa suma, $H(x) = x^3 - x$ non é nin cuasicóncava nin cuasiconvexa.

Exercicios

1. Estuda a convexidade das funcións:
   a) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - 2z - 7x + 5$ b) $f(x,y,z) = x - 3y^2 - 5z^2$
   c) $f(x,y) = (x-3)^2 + (y+1)^2$ d) $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2$
   e) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^3 - 7x + 2yz^2$ f) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4z^2$
   g) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 7x + 2y + z^2$ h) $f(x,y) = e^{xy}$
   i) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - 2z - 7x + 12$ j) $f(x,y) = y - x^2$
   k) $f(x,y) = (xy)^{1/4}$, con $x, y > 0$ l) $f(x,y,z) = e^{2x-3y}$
   m) $f(x,y) = \ln(x+y+1)$ n) $f(x,y) = \ln(2x+y)$
   o) $f(x_1,x_2) = x_1^{1/4}x_2^{1/8}$, con $x_1, x_2 > 0$ p) $f(x_1,x_2) = \sqrt{x_1x_2}$, con $x_1, x_2 > 0$

2. Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, estuda a convexidade das funcións $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, $g(x,y) = ax + by$, $h(x,y) = e^{ax+by}$

3. Estuda a convexidade das funcións:
   a) $f(x,y) = \ln(x-y)$ b) $C(p,q) = \ln(pq)$
   c) $h(r,s,t) = 2r + e^{2s} + 3t^2$ d) $Q(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3$
   e) $p(a,b) = (a-3)^4 + (b-1)^2 + 6$ f) $P(x,y,z) = (x-3)^4 + (y-1)^2 + z$
   g) $R(s,t) = e^{-s} + e^{5t} - s + 2t$ h) $F(x,y) = \frac{1}{4}(x+y)^4 - (x-y)^2$
   i) $G(x,y) = (x+y)^4 + (2+x)^2$ j) $f(x,y) = 20x^{1/3}y^{1/2}$, con $x, y > 0$

4. Sexan $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Proba que se f é unha función convexa e g é unha función convexa e crecente, entón $g \circ f$ é convexa. Mostra cun exemplo que a hipótese de que g sexa crecente non pode suprimirse.

5. Proba que se $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función convexa, a función $h\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = e^{f(x)}$ tamén é convexa. Aplica este resultado á función $f(x,y,z) = e^{x^2+xy+y^2+z^2}$. Mostra cun exemplo que o recíproco non é certo, h pode ser convexa sen que f o sexa.

6. Dá un exemplo de dúas funcións convexas cuxo produto non sexa unha función convexa.

7. Sexa $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, C^2, estrictamente crecente e estrictamente convexa. Definimos $F(x,y) = f(x) + f(y^2)$. Se sabemos que $f'(1) = 2$,
   a) calcula a derivada de F no punto $(1,1)$ segundo o vector $(3,-5)$.
   b) estuda o signo da matriz hessiana de F e razoa, a partir dese resultado, se F é ou non convexa.

8. Estuda a convexidade (concavidade) de $f(x,y,z) = e^y - 2\ln(z) - \ln(x) + x^2$.

9. Dada a función de utilidade $u(x_1,x_2) = x_1x_2$, definida para $x_1, x_2 > 0$. Proba que:
   a) u non é cóncava nin convexa.

b) u representa preferencias monótonas.

c) calqueira curva de nivel de u define implícitamente unha función estritamente convexa.

d) u representa preferencias convexas.

10. Dada a función $u(x,y) = x^{3/7}y^{1/7}$, definida para $x, y > 0$:

    a) Estuda se u é homoxénea.

    b) Calcula $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ e estuda o seu signo. Son funcións homoxéneas?

    c) Estuda se u é cóncava.

    d) Estuda se u é cuasicóncava.

    e) A curva de nivel un de u define implícitamente unha función dunha variable $y = y(x)$. Razoa se esta función é cóncava ou convexa.

11. a) Estuda se $u(x,y) = 8x^{1/4}y^{1/2}$ é homoxénea, sendo $x, y > 0$

    b) Calcula $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Son funcións homoxéneas?

    c) Estuda se u é cóncava.

    d) Estuda se u é cuasicóncava. A curva de nivel 3 de u define implícitamente unha función dunha variable $y = y(x)$. Razoa se esta función é cóncava ou convexa.

12. Dada a función $u(x,y) = x^3\sqrt{y}$, definida para $x, y > 0$:

    a) Estuda se u é homoxénea.

    b) Calcula $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Son funcións homoxéneas?

    c) Estuda se u é cóncava.

    d) Estuda as curvas de nivel de u para averiguar se u é cuasicóncava.

13. a) Estuda se $u(x,y) = 10x^{2/5}y$ é homoxénea, sendo $x, y > 0$

    b) Calcula $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Son funcións homoxéneas?

    c) Estuda se u é cóncava.

    d) Estuda se u é cuasicóncava.

    e) A curva de nivel 5 de u define implícitamente unha función dunha variable $y = y(x)$. Razoa se esta función é cóncava ou convexa.

14. Comproba que a función de Cobb-Douglas $Q(L,K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$, sendo $L, K > 0$, $\alpha, \beta > 0$ e $A > 0$, é cuasicóncava. Proba que se ademais $\alpha + \beta < 1$, entón Q é estritamente cóncava.

9.3. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Se $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy - 7x + 2$, entón

   a) f é cóncava en $\mathbb{R}^2$. b) f non é cóncava nin convexa.
   c) f é convexa en $\mathbb{R}^2$ d) $H_f(x,y)$ é indefinida, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Se $f(x,y) = 3x - 2y - x^2$, entón

   a) f é convexa en $\mathbb{R}^2$. b) $H_f(x,y)$ é definida negativa, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   c) f é cóncava en $\mathbb{R}^2$. d) $H_f(x,y)$ é indefinida, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Se $f(x,y) = y^4 + e^{-x}$, entón

   a) f é convexa en $\mathbb{R}^2$. b) f non é cóncava nin convexa.
   c) f é cóncava en $\mathbb{R}^2$ d) $H_f(x,y)$ é indefinida, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4. Se $f(x,y) = 4y + \ln(x-1)$, entón

   a) f é cóncava no seu dominio. b) f non é cóncava nin convexa.
   c) f é convexa no seu dominio. d) $H_f(x,y)$ é indefinida, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5. Se $f(x,y) = x^4 - 3\ln(y)$, entón

   a) f é cóncava no seu dominio. b) f non é cóncava nin convexa.
   c) f é convexa no seu dominio. d) $H_f(x,y)$ é indefinida, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

6. Se $u(x,y) = xy$, con $x, y > 0$ entón

   a) u é cóncava. b) u é estrictamente cóncava.
   c) u é convexa. d) u é cuasicóncava.

7. Se $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é unha función cuasicóncava e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, pódese afirmar que

   a) $u(tx_1 + (1-t)x_2) \geq \text{mín}\{u(x_1), u(x_2)\}$, para todo $t \in [0,1]$
   b) $u(tx_1 + (1-t)x_2) \leq \text{mín}\{u(x_1), u(x_2)\}$, para todo $t \in [0,1]$
   c) $u(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tu(x_1) + (1-t)u(x_2)$, para todo $t \in [0,1]$
   d) A función $y = \varphi(x)$ definida implícitamente pola ecuación $u(x,y) = k$ é cóncava.

8. Se $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é unha función cuasicóncava e $t \in [0,1]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, pódese afirmar que

   a) u é cóncava. b) $u(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tu(x_1) + (1-t)u(x_2)$
   c) u é convexa. d) $u(tx_1 + (1-t)x_2) \geq \text{mín}\{u(x_1), u(x_2)\}$

9.4. Solucións dos exercicios propostos

4. Por exemplo, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x$, entón f é convexa, g non é crecente e $g \circ f(x) = -x^2$ non é convexa.

5. Por exemplo, se $f(x) = \ln(x)$, entón $h(x) = e^{\ln(x)} = x$ é convexa, sen que f o sexa.

6. Por exemplo, se $f(x) = x$ e $g(x) = -x$, ambas son convexas pero o seu produto $f(x)g(x) = -x^2$ non.

Solucións autoavaliación. 1c, 2c, 3a, 4a, 5c, 6d, 7a, 8d

Capítulo 10

Optimización de funcións de varias variables.

Traballamos neste capítulo os resultados relativos ao cálculo dos extremos dunha función de varias variables. Ademais do interés que estes resultados teñen por si mesmos, son tamén fundamentais cando se engaden restricións de igualdade e de desigualdade ao dominio.

10.1. Optimización sen restricións

Definición 10.1 *Sexan unha función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_o \in \mathbb{R}^n$, dise que,*

1. *x_o é un* **mínimo local** *ou relativo de f se $f(x) \geq f(x_o)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ cerca de x_o.*

2. *x_o é un* **máximo local** *ou relativo de f se $f(x) \leq f(x_o)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ cerca de x_o.*

3. *x_o é un* **mínimo global** *ou absoluto de f se $f(x) \geq f(x_o)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

4. *x_o é un* **máximo global** *ou absoluto de f se $f(x) \leq f(x_o)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Os máximos e mínimos de f denomínanse **extremos ou óptimos** da función. Obviamente todo extremo global é un extremo local da función. Igual que para funcións dunha variable, podemos falar de extremos estritos. Tamén pode resultar de utilidade recordar que un punto x_o é máximo dunha función f se, e só se, este punto x_o é mínimo de $-f$; ou que a composición cunha función crecente conserva os óptimos.

Lembramos a definición de punto crítico vista en 6.8.

Definición 10.2 *$x_o \in \mathbb{R}^n$ é un* **punto crítico** *de $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, se $\nabla f(x_o) = \theta$, é dicir, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Proposición 10.3 (Condición necesaria de primeira orde) *Sexa $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función diferenciable. Se $x_o \in \mathbb{R}^n$ é un extremo relativo de f entón x_o é un punto crítico de f.*

Esta condición de existencia de extremos é necesaria pero non suficiente en xeral, como se comproba no exemplo que segue. Así, existen puntos nos que se anulan tódalas derivadas parciais dunha función que non son extremos da mesma.

Exemplo 10.4 O punto $(0,0)$ é un punto crítico da función $f(x,y) = x^3y^3$, non obstante non é un mínimo relativo de f, xa que $f(t,-t) = -t^6 < 0 = f(0,0)$ para t tan pequeno como queiramos. Tampouco é un máximo relativo de f, xa que $f(t,t) = t^6 > 0 = f(0,0)$ para t tan pequeno como queiramos.

Definición 10.5 *Un punto crítico dunha función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que non é máximo nin mínimo de f denomínase* **punto de sela** *de f.*

Unha equivalencia evidente da definición de punto de sela establece que este é un punto crítico, x_o, tal que existen puntos x e y tan próximos como queiramos a x_o verificando $f(x) \leq f(x_o) \leq f(y)$.

Debemos saber que os puntos críticos das funcións cóncavas e convexas son sempre extremos.

Proposición 10.6 (Extremos de funcións convexas) *Sexa $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función diferenciable.*

1. *Se f é convexa en $\mathbb{R}^n$ e $x_o \in \mathbb{R}^n$ é un punto crítico de f, entón x_o é mínimo global de f.*

2. *Se f é cóncava en $\mathbb{R}^n$ e $x_o \in \mathbb{R}^n$ é un punto crítico de f, entón x_o é máximo global de f.*

Proposición 10.7 (Condición necesaria de segunda orde) *Sexa $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función de clase dúas.*

1. *Se $x_o \in \mathbb{R}^n$ é un mínimo relativo de f entón $H_f(x_o)$ é semidefinida positiva.*

2. *Se $x_o \in \mathbb{R}^n$ é un máximo relativo de f entón $H_f(x_o)$ é semidefinida negativa.*

Este resultado ten unha importancia relativa na clasificación dos puntos críticos dunha función f, no senso de eliminar a posibilidade de que un punto crítico sexa un máximo ou un mínimo. En efecto, se x_o é punto crítico de f de xeito que a matriz $H_f(x_o)$ é semidefinida negativa e distinta da matriz nula, entón o punto x_o pode ser un máximo de f ou un punto de sela de f, pero non pode ser mínimo. Se $H_f(x_o)$ é semidefinida positiva e distinta da matriz nula, entón o punto crítico x_o pode ser un mínimo de f ou un punto de sela de f, pero non pode ser máximo.

Enunciamos a continuación unha condición suficiente para clasificar os puntos críticos.

Proposición 10.8 (Condición suficiente para a existencia de extremos) *Sexan $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función de clase dúas e $x_o \in \mathbb{R}^n$ un punto crítico de f. Verifícase que:*

1. *Se $H_f(x_o)$ é definida positiva entón o punto x_o é un mínimo relativo de f.*

2. *Se $H_f(x_o)$ é definida negativa entón x_o é un máximo relativo de f.*

3. *Se $H_f(x_o)$ é indefinida entón x_o é un punto de sela de f.*

Exemplo 10.9 Dada a función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$, para obter os seus puntos críticos resolvemos o sistema formado polas ecuacións:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x-y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x-y) = 0$$

Sumando ambas ecuacións temos $x^3 + y^3 = 0$, é dicir, $y = -x$. Substituíndo, por exemplo, na primeira obtemos a ecuación $4x^3 - 8x = 0$, que ten como solucións, $x = 0$, $x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$.

Así, os puntos críticos de f son $(0,0)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Para clasificar os puntos críticos, en primeiro lugar, obtemos a matriz hessiana de f en todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix},$$

e, posteriormente, estudamos o signo da matriz hessiana en cada un dos puntos críticos:

- $Hf(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = Hf(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$, logo $D_1 = 20 > 0$, e $D_2 = 384 > 0$, polo que a matriz hessiana en ámbolos puntos é definida positiva. Pola condición suficiente, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ son mínimos relativos de f.
- $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, de onde $D_1 = -4 < 0$ e $D_2 = 0$, polo que $H_f(0,0)$ é semidefinida negativa e non nula. Pola condición necesaria de segunda orde, o punto $(0,0)$ pode ser un máximo ou un punto de sela de f.

  Para clasificar este punto, temos que utilizar a definición de máximo, de xeito que $(0,0)$ sería un máximo relativo de f se $f(x,y) \leq f(0,0) = 0$, para todo (x,y) cerca de $(0,0)$. Pero como $f(t,t) = 2t^4 > 0 = f(0,0)$, para t tan pequeno como queiramos, tense que $(0,0)$ non é un máximo e, polo tanto, $(0,0)$ é un punto de sela de f.

Exercicios

1. Clasifica os puntos críticos das seguintes funcións:

a) $f(x,y) = (x-3)(y+5)$
b) $f(x,y) = x^3 - 3x + (y-1)^2$
c) $f(x,y) = xy - 4x - y + 7$
d) $f(x,y) = x + y + \frac{4}{x} + \frac{9}{y}$
e) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x + 2$
f) $f(x,y) = (x + y^2)e^x$
g) $f(x,y) = (x+y)(xy+1)$
h) $f(x,y) = x - x^2 - y^2 - 2y + 60$
i) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2$
j) $f(x,y) = x^2 + y^3 + 2y$
k) $f(x,y) = y^3 + x^3 + 3xy$
l) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 8\ln(x)$
m) $f(x,y) = x(e^x - e^y)$
n) $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$
o) $f(x,y) = x + y - \ln(xy)$
p) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$
q) $f(x,y,z) = z^3 - x^2 - y^2 + 2xz - 50$
r) $f(x,y,z) = y\ln(x) + z\ln(y) - x$
s) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$
t) $f(x,y) = 2x^2 + 2x + y^4 + 5$
u) $f(x,y) = \ln(y) - x^4 - 2y^2$
v) $f(x,y) = 10 - (x+1)^4 - 3y^2$

2. Clasifica os puntos críticos das seguintes funcións:

   a) $f(x,y) = x^4 - 2px^2 - y^2 + 3$, con $p > 0$

   b) $f(x,y) = x^2 + 2xy + by^2 + x + y + 5$, con $b > 1$

   c) $f(x,y) = x^3 + y^3 + axy$

   d) $f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy^2 - az - 4x + \frac{z^2}{2}$

   e) $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4axy$

   f) $f(x,y,z) = x^3 + \frac{2}{3}y^3 + 6x^2 - 2y^2 + az^2$, con $a \neq 0$

3. Son $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,2)$ e $(0,-1)$ extremos de $f(x,y) = 6x^4y$?

4. Calcula os valores dos parámetros a, b, para que $(1,1,0)$ sexa un punto crítico da función $f(x,y,z) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + z^2$? Para os valores obtidos, é $(1,1,0)$ un extremo de f?

5. Para que valores de k a función $f(x,y) = x^2 + 3xy + ky^2$ ten un extremo en $(0,0)$?

6. Cal é o valor mínimo que alcanza a función $P(r,t) = r^2 - 4r + 2(t-4)^2 + 4t - 8$?

7. Nunha oficina, os ordenadores M e P utilizanse m e p horas diarias respectivamente. Se a facturación diaria vén dada pola relación $Q(p,m) = 180m - 5mp - 10m^2 - 20p^2 + 200p$, atopa os valores de p e m que maximizan a facturación da oficina. Cal é esa facturación máxima?

8. Supoñamos que $Q(K,L) = 6K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$ é unha función de produción, onde K é o capital e L o traballo. Sexan $p = 0.5$ o prezo de mercado da mercadoría producida, $r = 0.1$ o custo por unidade de capital e $w = 1$ o salario por unidade de traballo. Determina a función de beneficio de producir e vender $Q(K,L)$ unidades. Calcula o beneficio máximo.

9. Unha empresa produce dous artigos con prezos de venda no mercado $p_1 = 14$ e $p_2 = 11$ respectivamente. O custo de produción vén dado por $C(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2$, sendo x_1 e x_2 as unidades producidas de cada un dos dous artigos. Calcula as unidades de cada artigo que deben ser demandadas para maximizar o beneficio. Cal é o beneficio máximo?

10. Unha fábrica utiliza dous tipos de materias primas, A e B para a elaboración do seu produto. Usando x toneladas de A e y toneladas de B, a fábrica pode elaborar $Q = 0.6x + 0.5y + 0.2xy - 0.1x^2 - 0.15y^2$ miles de unidades do produto. Se o custo de cada tonelada das materias primas é de 5 e 2 € respectivamente, e a empresa vende toda a súa produción a 15 céntimos cada unidade, que cantidades de materia prima debe utilizar para maximizar o beneficio? Cantas unidades produce neste caso e cal é o beneficio máximo.

11. Supoñendo que a función de custos $C = q_A^2 + 3q_B^2 + 2q_Aq_B + aq_A + bq_B + d$ ten un valor mínimo de 15 € cando $q_A = 3$ e $q_B = 1$. Determina os valores das constantes a, b e d.

12. A marca Dentaplus comercializa pasta dentífrica en tubos de 75 e 100 mililitros. O custo de produción de cada tubo pequeno é de 50 céntimos de euro e de 80 para os grandes. A demanda mensual de cada un é de $x_1 = 10(p_2 - p_1)$ e $x_2 = 50 + 5(p_1 - 5p_2)$ miles de unidades respectivamente, sendo p_1 e p_2 os prezos de venda de cada tipo de tubo. Calcula os prezos de venda que maximizan o beneficio da marca.

13. Un obrador produce tres tipos de doces: canas, melindres e amendoados. Os custos medios de produción por unidade son constantes de 30 céntimos para as canas e os melindres e 50 para os amendoados. As demandas diarias dos tres doces son $x_1 = 400(p_3 - p_2 - p_1)$, $x_2 = 400(p_3 - 3p_2)$ e $x_3 = 2000 + 200(p_1 + p_2 - 5p_3)$ respectivamente, sendo p_1, p_2 e p_3 os prezos en euros de venda por unidade de cada tipo de doce. Calcula os prezos de venda que maximizan o beneficio. Calcula o beneficio máximo e a cantidade de cada doce que é demandada.

10.2. Optimización sen restricións usando Matlab

Analizaremos os problemas de optimización sen restricións dende o punto de vista gráfico e simbólico. A análise gráfica só é posible para funcións de dúas variables, mentres que a análise simbólica pode realizarse para calquer número de variables.

Optimización de funcións de dúas variables: análise gráfica

O estudo das curvas de nivel dunha función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ indícanos onde se atopan os extremos e os puntos de sela. Para representar as curvas de nivel dunha función de dúas variables nun dominio rectangular utilizamos a sentenza, `ezcontour`. Usaremos a sentenza `ezmesh` para representar a súa gráfica.

Por exemplo, para representar a gráfica da función $f(x) = x^2 - y^2$, no recinto $[-2, 2] \times [-1, 3]$, podemos empregar `ezmesh('x^2-y^2',[-2,2,-1,3])`

Se desexamos obter as curvas de nivel de f, podemos facelo con
`ezcontour('x^2-y^2',[-2,2,-1,3])`

Exercicios

14. Comproba graficamente que a función $f(x, y) = x^2 - y^2$ ten en $(0, 0)$ un punto de sela.

15. Comproba graficamente que $g(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy$ ten un extremo no punto $(-3, -3)$

16. Comproba graficamente que $(0, -3)$ e $(0, 3)$ son dous extremos de $h(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2 + 9}$

Optimización sen restricións: análise simbólica

Lembrar que para traballar con variables simbólicas temos que definilas usando a orde `syms`. Os comandos `jacobian(F,[x1,...,xk])` e `hessian(F,[x1,...,xk])` permítenos obter as matrices xacobiana e hessiana de `F` respecto das variables `x1`,...,`xk`.

Así, para calcular analiticamente os extremos dunha función real de varias variables reais seguiremos os pasos que ilustramos a continuación coa función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. Definimos a función: `syms x y, f(x,y)=x^4+y^4-2*(x-y)^2`

2. Calculamos a matriz xacobiana de f: `Df=jacobian(f)`
   Así pois, $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x + 4y & 4y^3 - 4y + 4x \end{pmatrix}$.

3. Obtemos os puntos críticos de f, coas ordes: `S=solve(Df); PC=[S.x S.y]`
   Certamente, de entre as solucións que calcula o programa só consideramos aquelas que sexan números reais, no noso caso, os puntos $(0,0)$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ e $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

4. Calculamos a matriz hessiana de f: `Hf=hessian(f)`
   Logo, $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$.

5. Avaliamos a matriz hessiana nos puntos críticos de f e, para clasificalas, calculamos os seus autovalores:

```
H1=Hf(0 ,0), eig(H1)
H2=Hf(-sqrt(2), sqrt(2)), eig(H2)
H3=Hf(sqrt(2), -sqrt(2)), eig(H3)
```

   Tamén poderiamos ter escrito:

```
H1=Hf(PC(1,1),PC(1,2)), eig(H1)
H2=Hf(PC(4,1),PC(4,2)), eig(H2)
H3=Hf(PC(5,1),PC(5,2)), eig(H3)
```

   Dado que $H_f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = H_f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ e os autovalores desta matriz son 16 e 24, ambos positivos, f ten en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ e en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ dous mínimos relativos estritos.

   Ademais, $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ que é unha matriz semidefinida negativa xa que os seus autovalores son -8 e 0. Polo tanto, o punto $(0,0)$ non é un mínimo da función f, de feito, como veremos graficamente, é un punto de sela de f.

Para localizar os puntos críticos, podemos representar as curvas de nivel da función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ no rectángulo $[-3,3] \times [-4,4]$ con:

```
ezcontour('x^4+y^4-2*(x-y)^2', [-3 3 -4  4])
```

Exercicios

17. Para as seguintes funcións, calcula e clasifica os puntos críticos e despois comproba o resultado graficamente.

$$g(x,y) = y^2(x-1)^2 + x^2(y+4)^2$$

$$h(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 3x(x^2+y^2) + 2x^2$$

$$p(x,y) = 3x^3 - 5y^2 - 225x + 70y + 23$$

18. Calcula e clasifica os puntos críticos das seguintes funcións:

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + xy + 3xz + 5yz$$

$$g(x,y) = 3x^3 + \tfrac{3}{2}y^2 - 18xy + 17$$

$$h(x,y,z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$$

$$p(x,y) = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$$

19. Clasifica os puntos críticos da función $f(x,y) = ax^2 + by^2 - 4x + 2y + c$, segundo os valores dos parámetros a, b, c. Para qué valores destes parámetros o valor mínimo da función é 10 e alcánzase no punto $(2,-1)$?

20. Unha empresa produce tres bens con prezos de mercado $p_1 = 16$, $p_2 = 12$ e $p_3 = 20$. A función de custos da empresa é $C(q_1,q_2,q_3) = q_1^2 + 2q_2^2 + 3q_3^2 + 2q_1q_3 + 25$, onde q_1, q_2 e q_3 representan as cantidades producidas de cada un dos tres bens. Se se vende toda a produción, cal é o beneficio máximo da empresa? Obtén as cantidades que de cada un dos tres bens para alcanzar ese máximo.

10.3. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Sexa $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $H_f(x,y)$ é semidefinida positiva, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Cal das seguintes afirmacións é FALSA?

   a) f é cóncava en $\mathbb{R}^2$ b) Se (x_o,y_o) é punto crítico de f, entón (x_o,y_o) é mínimo de f.
   c) f é convexa en $\mathbb{R}^2$ d) f non ten máximos.

2. Sexa $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función diferenciable e convexa. Pódese afirmar que

   a) existe $x_o \in \mathbb{R}^n$ que é mínimo absoluto de f.
   b) f non ten puntos de sela.
   c) existe $x_o \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_o) \geq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
   d) todo punto crítico de f é máximo relativo de f.

3. Sexa $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unha función de clase dúas. Pódese afirmar que

   a) Se $\nabla f(x_o) = \theta$, entón x_o é un máximo de f.

   b) Se x_o é un punto de sela de f, entón $H_f(x_o)$ é indefinida.

   c) Se x_o é un máximo relativo de f, entón $H_f(x_o)$ é semidefinida negativa.

   d) f é estrictamente cóncava se, e só se, $H_f(x)$ é definida negativa para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Se os puntos críticos dunha función de clase dúas $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son $(-1,0)$ e $(1,0)$ e a súa hessiana é $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$, cal das seguintes afirmacións é correcta?

   a) $(1,1)$ é un mínimo relativo de f. b) $(-1,0)$ é un mínimo relativo de f.
   c) $(1,0)$ é un máximo relativo de f. d) $(-1,0)$ é un punto de sela de f.

5. Se $(1,5)$ é un punto crítico dunha función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase dúas tal que $H_f(1,5) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, podemos afirmar que

   a) f é convexa en $\mathbb{R}^2$. b) $(1,5)$ é un punto de sela de f.
   c) $(1,5)$ é un máximo relativo de f. d) $(1,5)$ é un mínimo relativo de f.

6. Sexa $f(x,y) = x^2y + 2y^2 + x^2$. Cal das seguintes afirmacións é FALSA?

   a) $(0,0)$ é un punto crítico de f. b) $(2,-1)$ é un punto de sela de f.
   c) $(-2,-1)$ é un punto de sela de f. d) $(0,0)$ é un máximo de f.

7. Sexan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase dúas e (x_o, y_o) un mínimo relativo de f. Cal das seguintes afirmacións é, en xeral, FALSA?

   a) f non é cóncava en $\mathbb{R}^2$.
   b) Se f é convexa en $\mathbb{R}^2$, entón $f(x,y) \geq f(x_o,y_o)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   c) $\nabla f(x_o,y_o) = (0,0)$
   d) $H_f(x_o,y_o)$ é definida positiva.

8. Sexa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unha función de clase dúas tal que $D_1f(3,3) = D_2f(3,3) = 0$. Pódese afirmar que:

   a) $(3,3)$ é un extremo de f.
   b) Se $(3,3)$ é un máximo relativo de f, entón $H_f(3,3)$ é definida positiva.
   c) Se $H_f(x,y)$ é semidefinida positiva para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entón $(3,3)$ é un mínimo de f
   d) Se $H_f(3,3)$ é semidefinida positiva, entón $(3,3)$ é un mínimo relativo de f

9. Se $f(x,y) = x(e^x - e^y)$, entón unha das seguintes afirmacións é FALSA.

   a) $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $H_f(0,0)$ é definida negativa.
   c) $(0,0)$ é o único punto crítico de f. d) $(0,0)$ é punto de sela de f.

10. Consideremos a función $f(x,y) = x^3y + 2xy^2 - x^2y^2 + 2xy$. Cal das seguintes afirmacións é FALSA?

    a) $(0,0)$ e $(0,-1)$ son puntos críticos de f. b) $(0,0)$ é un punto de sela de f.
    c) $H_f(0,-1)$ é semidefinida negativa. d) $(0,-1)$ é un punto de sela de f.

11. Consideremos a función $f(x,y) = x^3 - 3x + (y-1)^2 + 3$. Cal das seguintes afirmacións é FALSA?

    a) $(1,1)$ é mínimo de f. b) $(-1,1)$ é punto de sela de f.
    c) $(-1,0)$ é punto de sela de f. d) $(-1,0)$ non é punto crítico de f.

12. Se $f(x,y) = x + y - \ln(xy)$, entón

    a) $(0,0)$ é punto crítico de f. b) $H_f(1,1)$ é definida negativa.
    c) $(1,1)$ é mínimo de f. d) f é cóncava no seu dominio.

13. Consideremos a función $f(x,y) = 4xy^2$. Cal das seguintes afirmacións é FALSA?

    a) $(0,0)$ e $(3,0)$ son puntos críticos de f. b) $(0,0)$ é un mínimo relativo de f.
    c) $H_f(3,0)$ é semidefinida positiva. d) $(3,0)$ é mínimo relativo de f.

14. Sexa $f(x,y) = x^2 + ay^2 + bxy$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Cal das seguintes afirmacións é FALSA?

    a) $(0,0)$ é punto crítico de f, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

    b) Se $a = \frac{b^2}{4}$, f é convexa en $\mathbb{R}^2$.

    c) Se $a = b = -1$, $(0,0)$ é un máximo relativo estrito de f.

    d) Se $a = 9$, $b = 6$, $(-3y, y)$ é un mínimo global de f, para todo $y \in \mathbb{R}$.

10.4. Solucións dos exercicios propostos

1.
a) $(3,-5)$ é punto de sela de f
b) $(-1,1)$ é punto de sela e $(1,1)$ é máximo relativo de f
c) $(1,4)$ é un punto de sela de f
d) $(-2,3)$ e $(2,-3)$ son puntos de sela, $(-2,-3)$ é máximo e $(2,3)$ é mínimo relativo de f
e) $(0,1)$ e $(0,-1)$ son puntos de sela, $(-1,0)$ é máximo e $(1,0)$ é mínimo relativo de f
f) $(-1,0)$ é mínimo relativo de f
g) $(-1,1)$ e $(1,-1)$ son puntos de sela de f
h) $(1/2,-1)$ é máximo relativo de f
i) $(1,-1)$ é mínimo relativo de f
j) f non ten puntos críticos
k) $(0,0)$ é punto de sela e $(-1,1)$ é máximo relativo de f
l) $(2,0)$ é mínimo relativo de f
m) $(0,0)$ é punto de sela de f
n) $(0,0)$ é punto de sela e $(4/3,4/3)$ é máximo relativo de f
o) $(1,1)$ é mínimo relativo de f
p) $(0,0,0)$ é mínimo relativo de f
q) $(0,0,0)$ é punto de sela e $(-2/3,0,-2/3)$ é máximo relativo de f
r) $(1,1,0)$ é punto de sela de f
s) $(x,-x,-x)$ son mínimos globais de f, para todo $x \in \mathbb{R}$
t) $(-1/2,0)$ é mínimo global de f
u) $(0,1/2)$ é máximo global de f
v) $(-1,0)$ é máximo global de f
2.
a) $(0,0)$ é máximo relativo, $(\sqrt{p},0)$ e $(-\sqrt{p},0)$ son puntos de sela de f
b) $(-1/2,0)$ é mínimo relativo de f
c) $(0,0)$ é punto de sela de f.
Se $a<0$, $(-a/3,-a/3)$ é mínimo relativo de f.
Se $a>0$, $(-a/3,-a/3)$ é máximo relativo de f.
d) $(2,0,a)$ é mínimo relativo de f e $(0,2,a)$, $(0,-2,a)$, $(-2,0,a)$ son puntos de sela
e) Se $-1 \leq a \leq 1$, $(0,0,0)$ é mínimo global de f e cando $a>1$ ou $a<-1$, $(0,0,0)$ é punto de sela
Se $a=-1$, $(x,x,0)$ son mínimos globais de f, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Se $a=1$, $(-x,x,0)$ son mínimos globais de f, para todo $x \in \mathbb{R}$.
f) $(0,0,0)$ e $(-4,2,0)$ son puntos de sela de f. Ademais, se $a<0$, $(0,2,0)$ tamén é punto de sela e $(-4,0,0)$ é máximo relativo de f; e se $a>0$, $(0,2,0)$ é mínimo relativo de f e $(-4,0,0)$ é punto de sela.

4. $a=2$, $b=-6$. $(1,1,0)$ é mínimo global de f

5. Se $k>9/4$, $(0,0)$ é mínimo global de f

6. O valor mínimo que alcanza P é 2 e alcánzase en $(2,3)$.

7. A facturación máxima son 1120 u.m., e tense con $p=4$ e $m=8$.

8. O beneficio máximo son 1687.5 u.m., e tense con $K = 15^4$ e $L = 15^3$.

9. A empresa deben producir 3 unidades do primeiro artigo e dúas do segundo para maximizar o beneficio. O beneficio máximo son 32 u.m.

11. $a = -8$, $b = -12$, $d = 33$

12. O beneficio máximo son 15806.50 €, e tense con $p_1 = 1.32e$ e $p_2 = 1.69e$. Nese caso véndense 3742 tubos de 75 mililitros e 14193 tubos de 100 mililitros.

13. O beneficio máximo son 823.08 €, e tense con prezos de venda por unidade de 0.99 € cada cana, 0.38 € cada melindre e 1.54 € cada amendoado. Nese caso véndense 68 canas, 162 melindres e 733 amendoados.

Solucións autoavaliación. 1a, 2b, 3c, 4d, 5d, 6d, 7d, 8c, 9b, 10c, 11c, 12c, 13b, 14c

Capítulo 11
Optimización de funcións de varias variables con restricións.

11.1. Optimización con restricións de igualdade

As variables que aparecen nos problemas económicos de optimización están habitualmente sometidas a certas restricións. Impóñense, por exemplo, limitacións nas cantidades consumidas, cotas na produción ou limitacións orzamentarias. Un exemplo económico típico é o de un consumidor que desexa maximizar a súa utilidade $u(x_1, \ldots, x_n)$ suxeita a unha restrición presupostaria, $p_1x_1 + \cdots + p_nx_n = r$, sendo $x_1, \ldots, x_n$ as cantidades de cada un dos bens que consume con $p_1, \ldots, p_n$ os prezos destes bens por unidade e r a renta da que dispón o consumidor.

Nesta sección estudamos o problema da procura dos óptimos dunha función cando as variables de decisión están suxeitas a restricións de igualdade.

11.1. O método dos multiplicadores de Lagrange. Condicións suficientes.

Sexan entón $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g = (g_1, \ldots, g_m)$ e $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, sendo $m < n$. De entre tódolos puntos $x \in \mathbb{R}^n$ que verifiquen as igualdades $g_1(x) = b_1, \ldots, g_m(x) = b_m$, que podemos indicar abreviadamente como $g(x) = b$, pretendemos atopar aqueles que minimicen ou maximicen a función f.

Escribiremos o problema que pretendemos resolver como

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{mín(máx)}: & f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{suxeito a} & g_1(x_1, \ldots, x_n) = b_1 \\ & \ldots \\ & g_m(x_1, \ldots, x_n) = b_m \end{array}} \tag{P1}$$

f chámase a función obxectivo do problema, $g_1, \ldots, g_m$ son as funcións que definen as restricións e $b = (b_1, \ldots, b_m)$ son os valores que limitan as restricións.

Definición 11.1 *Sexan $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Se denotamos por $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = b\}$ ao conxunto de solucións factibles do problema (P1), diremos que*

1. *$x_o \in S$ é un* **mínimo relativo** *de f en S se $f(x) \geq f(x_o)$, para todo se $x \in S$ cerca de x_o.*
2. *$x_o \in S$ é un* **máximo relativo** *de f en S se $f(x) \leq f(x_o)$, para todo se $x \in S$ cerca de x_o.*

Un punto $x_o \in S$ dise que é un óptimo ou un extremo relativo de f en S, se é un mínimo o un máximo relativo de f en S. Nas definicións anteriores podemos utilizar indistintamente as expresións extremo de f en S, extremo de f suxeito a $g_j(x) = b_j$, para todo $j = 1, \ldots, m$, ou extremo de f suxeito a $g(x) = b$.

De xeito análogo definiríanse os extremos globais ou absolutos e os extremos estritos de f en S.

O seguinte resultado, coñecido como teorema de Lagrange ou teorema dos multiplicadores de Lagrange, establece unha condición necesaria de existencia de solución do problema de optimización con restricións de igualdade formulado.

Utilizaremos a seguinte función auxiliar. Dados m números reais, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, denomínase **función lagranxiana** asociada ao problema, á función $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$L(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \big(g_j(x) - b_j\big)$$

é dicir,

$$L(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda_1\big(g_1(x_1, \ldots, x_n) - b_1\big) - \cdots - \lambda_m\big(g_m(x_1, \ldots, x_n) - b_m\big)$$

Teorema 11.2 (Teorema dos multiplicadores de Lagrange) *Sexan $f, g \in \mathcal{C}^1$ e $x_o \in S$ tales que se verifica* $\operatorname{rango} Dg(x_o) = m < n$*. Se x_o é un extremo relativo de f en S, entón existen m números reais únicos, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, tales que x_o é un punto crítico da función lagranxiana asociada. Isto é,*

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_o) = 0, \ \textit{para todo}\ i = 1, \ldots, n.$$

Debemos comentar que non se pode prescindir da hipótese $\operatorname{rango} Dg(x_o) = m$, que se coñece como condición do rango, tal como se comproba no seguinte exemplo.

Exemplo 11.3 Consideramos o problema $\text{mín}\colon\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, suxeito a $g(x,y,z) = (z, z^2 - (y-1)^3) = (0,0)$. Posto que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, y = 1\}$, obviamente f ten un mínimo en $(0,1,0)$. Sen embargo, $\operatorname{rango} Dg(0,1,0) = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 < 2$, e non existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $(0,1,0)$ sexa punto crítico da lagranxiana asociada xa que $\dfrac{\partial L}{\partial y}(0,1,0) = 2 \neq 0$

Na práctica, para atopar os posibles extremos do problema, se f e g están nas condicións do teorema de Lagrange, é preciso calcular os puntos críticos da función lagranxiana que verifican as restricións. Isto é, temos que resolver o sistema de $n + m$ ecuacións con $n + m$ incógnitas, $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0, &\quad i = 1, \ldots, n \\ g_j(x_1, \ldots, x_n) = b_j, &\quad j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Unha vez calculadas as posibles solucións do problema mediante a condición necesaria, clasificamos os citados puntos utilizando as condicións suficientes que enunciamos a continuación.

Teorema 11.4 (Condición suficiente forte)

1. *Se $x_o \in S$ é un mínimo relativo da función lagranxiana L, entón x_o é un mínimo relativo de f suxeito a $g(x) = b$.*

2. *Se $x_o \in S$ é un máximo relativo da función lagranxiana L, entón x_o é un máximo relativo de f suxeito a $g(x) = b$.*

Como consecuencia temos as propiedades seguintes:

Corolario 11.5 *Sexan $f, g \in \mathcal{C}^1$ e $x_o \in \mathbb{R}^n$ un punto que verifica o teorema de Lagrange.*

1. *Se $H_L(x_o)$ é definida positiva, entón x_o é un mínimo relativo de f en S.*

2. *Se $H_L(x_o)$ é definida negativa, entón x_o é un máximo relativo de f en S.*

3. *Se $H_L(x)$ é semidefinida positiva, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entón x_o é un mínimo global de f en S.*

4. *Se $H_L(x)$ é semidefinida negativa, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entón x_o é un máximo global de f en S.*

Observación 11.6 Nótese que se $x_o \in \mathbb{R}^n$ é un punto que verifica o teorema de Lagrange tal que $H_L(x_o)$ é indefinida, entón x_o non é un extremo da función lagranxiana pero podería ser solución do problema plantexado, é dicir, podería ser un máximo ou un mínimo de f en S.

Exemplo 11.7 O problema $\text{mín}(\text{máx})\colon\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ suxeito a $x + y + z = 1$ verifica a hipótese do rango, pois a matriz $Dg(x, y, z) = (1, 1, 1)$ ten rango un, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en particular para solución do problema. A función lagranxiana é $L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - 1)$, e resolvemos as ecuacións

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2z - \lambda = 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

das tres primeiras temos $x = \frac{\lambda}{2}$, $y = \frac{\lambda}{2}$, $z = \frac{\lambda}{2}$ e substituindo na última obtense que $\lambda = \frac{2}{3}$.

Así o único punto crítico da función lagranxiana que verifica a restrición é $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, con $\lambda = \frac{2}{3}$. Este sería o único candidato a resolver o problema plantexado.

Ademais a matriz hessiana da lagranxiana, $H_L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, é definida positiva, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, entón L é convexa, polo que o punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ é un mínimo global de L e consecuentemente mínimo global do problema.

O teorema 11.4 é un resultado moi forte, no senso de que existen bastantes situacións prácticas nas que este resultado non clasifica ao punto crítico de L que estamos estudando. Para emendar, en parte, esta situación, existe unha condición suficiente máis débil que a anterior. Este resultado obtense estudando a matriz borde da hessiana da lagranxiana no punto x_o, que é a matriz cadrada de orde $m+n$ definida como

$$BH(x_o) = \begin{pmatrix} 0 & Dg(x_o) \\ Dg(x_o)^t & H_L(x_o) \end{pmatrix}$$

Deberemos analizar o signo dos $n-m$ últimos menores principais desta matriz: $D_{m+n}(x_o)$, $D_{m+n-1}(x_o), \ldots, D_{2m+1}(x_o)$

Teorema 11.8 (Condición suficiente débil)
Sexan $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ e $x_o \in S$ un punto que verifica o teorema de Lagrange.

1. *Se $(-1)^m D_i(x_o) > 0$, para todo $i = 2m+1, \ldots, m+n$, entón x_o é un mínimo relativo estrito de f suxeito a $g(x) = b$.*

2. *Se $(-1)^{m+i} D_i(x_o) > 0$, para todo $i = 2m+1, \ldots, m+n$, entón x_o é un máximo relativo estrito de f suxeito a $g(x) = b$.*

Observación 11.9 Para a aplicación práctica deste resultado debemos ter en conta que é preciso avaliar os últimos $n-m$ menores principais (a diferenza entre variables e restricións) e sempre hai que calcular o determinante da matriz borde (cadrada de orde $m+n$). Debemos fixarnos ademais que o criterio dos signos cambia en función de que m sexa par ou impar.

Por exemplo, para $n = 2$ e $m = 1$, debemos calcular só un menor principal, o da matriz borde que é de orde 3, $D_3(x_o) = \det(BH(x_o))$. Neste caso:

- Se $D_3(x_o) < 0$, entón x_o é un mínimo relativo de f en S.
- Se $D_3(x_o) > 0$, entón x_o é un máximo relativo de f en S.

Para $n = 3$ e $m = 2$, calculamos un menor principal, o da matriz borde que é de orde 5, $D_5(x_o) = \det(BH(x_o))$. Neste caso:

- Se $D_5(x_o) > 0$, entón x_o é un mínimo relativo de f en S.
- Se $D_5(x_o) < 0$, entón x_o é un máximo relativo de f en S.

Por último, para $n = 3$ e $m = 1$, debemos calcular dous menores principais, o de orde 3 e o da matriz borde que é de orde 4. Neste caso:

- Se $D_3(x_o) < 0$ e $D_4(x_o) < 0$, entón x_o é un mínimo relativo de f en S.
- Se $D_3(x_o) > 0$, e $D_4(x_o) < 0$, entón x_o é un máximo relativo de f en S.

Exemplo 11.10 Consideremos o problema $\text{máx}: f(x,y,z) = xyz$ suxeito a $x+y+z=3$.

Verifícase a hipótese do rango pois $\text{rango}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} = 1$, en todo $\mathbb{R}^3$, en particular na solución do problema. A función lagranxiana é $L(x,y,z) = xyz - \lambda(x+y+z-3)$. Resolvemos o sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} = yz - \lambda &= 0\\ \frac{\partial L}{\partial y} = xz - \lambda &= 0\\ \frac{\partial L}{\partial z} = xy - \lambda &= 0\\ x+y+z &= 3\end{aligned}$$

Das tres primeras ecuacións, $\lambda = yz = xz = xy$, e, como ningunha coordenada pode ser nula, obtemos que $x = y = z$, que substituido na restrición dá $x = 1$, polo que o único candidato a resolver o problema é $(1,1,1)$.

Para clasificar o punto crítico de L, calculamos a matriz hessiana da función lagranxiana que é

$$H_L(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y\\ z & 0 & x\\ y & x & 0\end{pmatrix}$$

e, polo tanto, $H_L(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, que é indefinida. Así $(1,1,1)$ non é extremo de L, estamos pois nun caso no que a condición suficente forte non decide e precisamos usar a débil.

Neste caso, $m = 1$ e $n = 3$, e a matriz borde da hessiana e os seus menores de orde 3 e 4 son:

$$BH(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = 2 > 0, \text{ e } D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = -3 < 0.$$

Entón $(1,1,1)$ é un máximo relativo de f suxeito á restrición $x+y+z=3$.

Exemplo 11.11 Atoparemos os extremos de $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$, suxeito a $x^2 + 4y^2 = 16$.

Para este problema verifícase a condición do rango na solución, pois $\text{rango}\begin{pmatrix}2x & 8y\end{pmatrix} = 0$ se, e só se, $(x,y) = (0,0)$; pero este punto non é unha solución factible do problema. Así, se $(x,y) \in S$, entón $\text{rango}\, Dg(x,y) = 1$.

Da función lagranxiana asociada ao problema, $L(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 16)$, plantexamos as ecuacións correspondentes para calcular os puntos críticos de L que verifican a restrición,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} =& 2(x-1) - 2\lambda x = 0\\ \frac{\partial L}{\partial y} =& 2y - 8\lambda y = 2y(1-4\lambda) = 0\\ & x^2 + 4y^2 = 16\end{aligned}$$

Da segunda ecuación temos que $y = 0$, ou $\lambda = \frac{1}{4}$. Se $y = 0$, da restrición obtemos que $x = \pm 4$. Así, se $x = 4$, da primeira ecuación tense $\lambda = \frac{3}{4}$; e se $x = -4$, da primeira ecuación tense $\lambda = \frac{5}{4}$. Por outra parte, se $\lambda = \frac{1}{4}$, da primeira ecuación temos que $x = \frac{4}{3}$, e da restrición, $y = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

En resumen, temos catro puntos críticos da función lagranxiana que verifican a restrición, que son

$$(4,0), \text{ con } \lambda = \tfrac{3}{4}; \quad (-4,0), \text{ con } \lambda = \tfrac{5}{4}; \quad (\tfrac{4}{3}, \tfrac{4\sqrt{2}}{3}), \text{ con } \lambda = \tfrac{1}{4}; \quad (\tfrac{4}{3}, -\tfrac{4\sqrt{2}}{3}), \text{ con } \lambda = \tfrac{1}{4}.$$

Por outra parte, a matriz hessiana da lagranxiana é $H_L(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & 0 \\ 0 & 2-8\lambda \end{pmatrix}$

Para $\lambda = \frac{1}{4}$, temos que $H_L(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é semidefinida positiva, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, de onde deducimos que a función lagranxiana asociada é convexa en $\mathbb{R}^2$, e polo corolario da condición suficiente forte, os puntos $(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$ e $(\frac{4}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3})$ son mínimos globais de f suxeito a $x^2 + 4y^2 = 16$.

Se $\lambda = \frac{5}{4}$, entón $H_L(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ é definida negativa, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, de onde deducimos que a función lagranxiana asociada é cóncava en $\mathbb{R}^2$, polo que $(-4,0)$ é un máximo global de L e logo tamén de f suxeito a $x^2 + 4y^2 = 16$.

Para $\lambda = \frac{3}{4}$, temos que $H_L(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = H_L(4,0)$ é indefinida, e temos que utilizar a condición suficiente débil. A matriz borde da hessiana é $BH(4,0) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 8 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $m = 1$ e $n = 2$ e o determinante $D_3 = \det(BH(4,0)) = 256 > 0$, polo que $(4,0)$ é un máximo relativo de f suxeito a $x^2 + 4y^2 = 16$.

11.1. Teorema da envolvente

Con frecuencia, nas funcións que definen un problema de optimización interveñen distintos parámetros que influen nas solucións do mesmo. O teorema da envolvente estuda como inciden as variacións destes parámetros na solución do problema.

Consideremos entón o problema máis xeral de optimización suxeito a restricións de igualdade,

$$\begin{aligned} \text{mín(máx)}: \quad & f(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \\ \text{suxeito a} \quad & g_1(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = b_1 \\ & \ldots \\ & g_m(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = b_m \end{aligned} \tag{P2}$$

onde $f, g_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ dependen tamén de k parámetros, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

O problema plantexado resólvese nas variables $x = (x_1, \ldots, x_n)$, supoñendo que os parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ permañecen constantes.

Así, se o problema ten solución x, tanto esta como os multiplicadores de Lagrange asociados, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, dependen dos parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. É dicir, $x_i = x_i(\alpha)$, $\lambda_j = \lambda_j(\alpha)$. Agora, a función lagranxiana asociada ao problema é

$$L(x, \alpha) = f(x, \alpha) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x, \alpha) - b_j)$$

Teorema 11.12 (Teorema da envolvente) *Sexan $f, g_1, \ldots, g_m$ funcións $\mathcal{C}^2$. Para un valor fixado dos parámetros $\alpha_o \in \mathbb{R}^k$, supoñamos que x_o é unha solución do problema (P2) que verifica o teorema de Lagrange con multiplicadores asociados $\lambda_o \in \mathbb{R}^m$ e tal que* $\det(BH(x_o)) \neq 0$.

Entón existen dúas funcións $\mathcal{C}^1$, $x\colon A(\alpha_o) \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\lambda\colon A(\alpha_o) \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tales que $x(\alpha)$ é solución do problema con multiplicadores de lagrange asociados $\lambda(\alpha)$, para cada α cerca de x_o, $\alpha \in A(\alpha_o)$.

Ademais, se $\bar{f}(\alpha) = f(x(\alpha), \alpha)$ é o valor óptimo da función obxectivo, verifícase que

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \alpha_r}(\alpha) = \frac{\partial L}{\partial \alpha_r}(x(\alpha), \alpha), \ \text{\textit{para todo} } r = 1, \ldots, k.$$

Á función $\bar{f}(\alpha)$ chamámoslle función de valor óptimo asociada ao problema.

Exemplo 11.13 Consideremos o problema $\text{mín} : f(x, y) = x^2 + y^2$, suxeito a $x - y = 2m$ (con $m \in \mathbb{R}$).

Se $(x(m), y(m))$ é a solución do problema dado, para cada valor do parámetro m, e $\bar{f}(m) = f(x(m), y(m))$ a función valor óptimo, interesanos coñecer a variación do valor óptimo respecto ao parámetro m, é dicir $\dfrac{d\bar{f}}{dm}$.

Considerando a función lagranxiana asociada ao problema, $L(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(x - y - 2m)$, e dado que, trivialmente, a condición do rango cúmprese en todo punto, calcularemos os puntos críticos de L que verifican as restricións, resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + \lambda = 0 \\ x - y &= 2m \end{aligned}$$

De aquí obtense que $(m, -m)$ con $\lambda = 2m$, é o único punto crítico da lagranxiana que verifica a restrición.

A matriz $H_L(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ é definida positiva, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, polo que $(m, -m)$ é un mínimo global do problema. Claramente, $\bar{f}(m) = f(m, -m) = 2m^2$, entón $\dfrac{d\bar{f}}{dm}(m) = 4m$.

Doutro xeito, poderiamos ter aplicado o teorema da envolvente para obter esta derivada. Así

$$\frac{d\bar{f}}{dm}(m) = \frac{\partial L}{\partial m}(x(m), y(m), m) = 2\lambda = 4m.$$

Exercicios

1. Resolve os seguintes problemas:

   a) $\text{mín}(\text{máx})\colon 4x^2 + y^2$ suxeito a $x + y = 5$
   b) $\text{mín}(\text{máx})\colon x - y$ suxeito a $x^2 + y^2 = 2$
   c) $\text{mín}(\text{máx})\colon 6 - x - 2y$ suxeito a $x^2 + y^2 = 5$
   d) $\text{mín}(\text{máx})\colon 3xy$ suxeito a $x - y = 4$
   e) $\text{mín}(\text{máx})\colon 2xy$ suxeito a $x - y = 10$
   f) $\text{mín}(\text{máx})\colon 2x + 3y - 3xy - x^2 - y^2$ suxeito a $x + 3y = 3$
   g) $\text{mín}(\text{máx})\colon (x - 3)y + (x - 1)(y - 6)$ suxeito a $x + y = 7$
   h) $\text{mín}(\text{máx})\colon e^x + e^y$ suxeito a $x + y = 2$
   i) $\text{mín}(\text{máx})\colon y + \ln x$ suxeito a $3x + y = 6$
   j) $\text{mín}(\text{máx})\colon 4xy - x^2 - 2y^2 - 12z - 5z^2$ suxeito a $x^2 - z = 0$
   k) $\text{mín}(\text{máx})\colon x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ suxeito a $2x + y - z - 2u = 5$
   l) $\text{mín}(\text{máx})\colon x^2 + y^2 + z^2$ suxeito a $x + y = 1$, $z - x = 1$
   m) $\text{mín}(\text{máx})\colon \frac{1}{2}x^4 + x^2 + y^2 + y + 3z^2 + z$ suxeito a $x + y + z = 10$, $2x + y + z = 12$
   n) $\text{mín}(\text{máx})\colon z - x^2 - y^2$ suxeito a $x - y = 1$, $x + y + z = 6$
   ñ) $\text{mín}(\text{máx})\colon y(x^2 + 1)$ suxeito a $x + y = 2$
   o) $\text{mín}(\text{máx})\colon -2x^2y$ suxeito a $x + y = 6$
   p) $\text{mín}(\text{máx})\colon \ln(x) + \ln(y)$ suxeito a $2x^2 + y^2 = 4$
   q) $\text{mín}(\text{máx})\colon 2x^3 + 9y^2 + 12x$ suxeito a $x + y = 0$
   r) $\text{mín}(\text{máx})\colon x^3 + y^2 + 2xy$ suxeito a $x + y = 2$
   s) $\text{mín}(\text{máx})\colon 25 - x^2 - (y - \frac{1}{2})^2$ suxeito a $y = x^2 - 1$
   t) $\text{mín}(\text{máx})\colon x^2 + y^2 - xy + x + y$ suxeito a $xy = 1$

2. Comproba se $(1, -1, 3)$, $(0, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$ e $(1, 1, 1)$ son óptimos de $xy + yz$ suxeito a $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$

3. Obtén a solución do problema $\text{mín}\colon f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$ suxeito a $x - y = 2k$.

   Se $\bar{f}(k)$ é o valor óptimo da función obxectivo, calcula $\dfrac{d\bar{f}}{dk}$

4. Obtén a solución do problema $\text{máx}\colon f(x, y) = (x - k)(y - k)$ suxeito a $x + y = 4k$.

   Se $\bar{f}(k)$ é o valor óptimo da función obxectivo, calcula $\dfrac{d\bar{f}}{dk}$

5. Calcula a variación respecto a k da función de valor óptimo do problema $\text{máx}\colon f(x, y) = x + 2y$ suxeito a $x^2 + y^2 = k^2$, para $k > 0$.

6. Resolve o problema $\text{mín}(\text{máx}): x-2y+2z$ suxeito a $x^2+y^2+z^2=k^2$. Calcula as derivadas das funcións de valor máximo e de valor mínimo.

7. Supoñamos unha empresa con función de produción diaria descrita por $Q(L,K)=L^2K$, sendo os prezos por unidade dos inputs produtivos L e K fixos en 2 e 25 respectivamente. Determina a combinación de inputs produtivos axeitada se se desexa producir do xeito máis barato posible 40 unidades de produto Q.

8. Unha empresa fabrica $Q(x_1,x_2)=x_1^{1/4}x_2^{1/4}$ toneladas de produto, calcula o custo mínimo cando fixamos o nivel de produción en 5 toneladas, se os prezos por unidade dos inputs son 1 e 4 respectivamente.

9. Unha empresa fabrica un determinado produto segundo á función de produción $Q(x_1,x_2)=x_1x_2$, sendo x_1 e x_2 as unidades das dúas materias primas utilizadas.

   O custo de produción vén dado por $C(x_1,x_2)=50+x_1^2+x_2^2+\dfrac{x_1x_2}{2}$. Calcula as unidades de cada materia prima necesarias para producir 16 artigos co mínimo custo. Cal é este custo mínimo?

10. Consideremos a función $Q(x,y)=x^2+(y-1)^2$. Cal é a combinación de factores x,y verificando $Q(x,y)=9$ que mínimizan a función $C(x,y)=-4x+(y-1)^2+60$? Cal é o valor mínimo que alcanza C?

    Se cambiamos a condición $Q(x,y)=9$ por $Q(x,y)=q$, estuda a variación do valor mínimo de C respecto a q.

11. Para cubrir un pedido de 100 unidades do seu produto, unha empresa quere repartir a produción entre as súas dúas plantas. O custo total vén dado por $c(q_1,q_2)=0.1q_1^2+7q_1+15q_2+1000$, onde q_1 e q_2 son o número de unidades producidas nas plantas 1 e 2, respectivamente. Como se debe distribuír a produción para minimizar os custos?

12. Unha empresa ten un orzamento mensual para publicidade de 60 000 €. O seu departamento de mercadotecnia estima que se gastan x euros cada mes en publicidade online e y euros cada mes en publicidade en medios de comunicación, as vendas mensuais serán $S=90x^{1/4}y^{3/4}$ euros. Se o beneficio é do 10 % das vendas menos o custo da publicidade, determina como repartir o orzamento en publicidade para maximizar o beneficio mensual. Cal é o beneficio máximo?

13. Queremos maximizar a función de utilidade $U(x,y)=\ln(1+x)+\ln(1+y)$, suxeita á restrición orzamentaria $3x+4y=m$. Obtén o valor óptimo $U^*(m)$. Canto vale $\frac{dU^*}{dm}$?

14. A función de utilidade dun consumidor é $u(x,y)=xy$, onde x,y representan as cantidades consumidas de cada un dos dous bens que están dispoñibles. Se p_1 e p_2 son os prezos unitarios de cada un dos bens e m é a cantidade de cartos que o consumidor vai gastar na adquisición destes bens, pídese:

    a) Calcula a cantidade a consumir de cada un dos bens, en función dos parámetros p_1,p_2 e m, se o obxectivo é maximizar a utilidade.

b) Obtén a función de utilidade indirecta $u^*(p_1, p_2, m)$

c) Calcula $\frac{\partial u^*}{\partial p_1}$ derivando directamente en $u^*(p_1, p_2, m)$, e tamén utilizando a función lagranxiana, comprobando que se obtén o mesmo resultado.

d) Proba que un aumento en m produce un incremento na utilidade máxima, e que un aumento en calqueira dos prezos por unidade dá lugar a unha diminución na utilidade máxima.

15. A función de utilidade de un consumidor é $u(x_1, x_2)$, $\mathcal{C}^2$, con x_1 e x_2 as cantidades consumidas de cada un dos dous bens. Os prezos por unidade dos dous bens son p_1 e p_2 respectivamente, e a renda do consumidor é m.
Proba que, se $x_o = (x_{o1}, x_{o2})$ é a cesta óptima do consumidor no seu conxunto presupuestario, verifícase que
$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_o)}{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_o)} = \frac{p_1}{p_2}$$

16. Sabendo que na figura 1 represéntanse as curvas de nivel da función $f(x, y) = e^x + e^y$, atopa graficamente a solución do problema $\text{mín}(\text{máx}) : e^x + e^y$ suxeito a $4x + 3y = 12$

17. Sabendo que na figura 2 represéntanse as curvas de nivel da función $f(x, y) = 4x^2 + y^2$, atopa graficamente a solución do problema $\text{mín}(\text{máx}) : 4x^2 + y^2$ suxeito a $2x + y = 5$

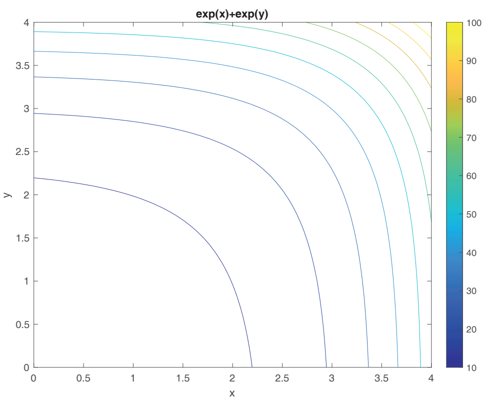


Figura 1

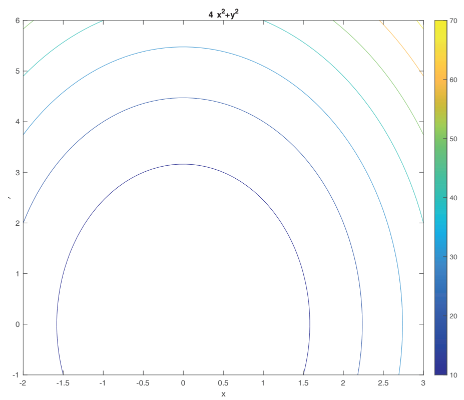


Figura 2

18. Debuxa as curvas de nivel da función $f(x, y) = x + y$ e atopa gráficamente a solución do problema $\text{mín}(\text{máx}) : x + y$ suxeito a $x^2 + y^2 = 1$

19. Debuxa as curvas de nivel da función $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$ e atopa gráficamente a solución do problema $\text{mín}(\text{máx}) : \dfrac{y}{x}$ suxeito a $y = 1 + x^2$

11.1. Optimización con restricións de igualdade usando Matlab

De novo faremos uso da capacidade gráfica de Matlab, esta vez para comprender mellor as implicacións xeométricas dos problemas de optimización con restricións de igualdade.

Para resolver analiticamente un problema de optimización con restricións de igualdade seguiremos os pasos que ilustramos co problema:

$$\begin{array}{ll} \text{mín(máx)}: & f(x,y) = x - y \\ \text{suxeito a:} & x^2 + y^2 = 2 \end{array}$$

Definimos a función obxectivo, a restrición e a función lagranxiana:

```
syms x y m; f=x-y; g=x^2+y^2-2; L=f-m*g
```

Calculamos a matriz xacobiana de función lagranxiana `DL=jacobian(L,[x,y])`. Calculamos os puntos críticos de L que cumplen a restrición:

```
S=solve(DL(1),DL(2),g);PC=[S.x,S.y,S.m]
```

Vemos que os puntos críticos da lagranxiana que verifican a restrición son $(-1,1)$ con $\lambda = -\frac{1}{2}$ e $(1,-1)$ con $\lambda = \frac{1}{2}$. Tentamos clasificalos usando a matriz hessiana da lagranxiana:

```
HL=hessian(L,[x,y])
```

Calculamos o valor da matriz hessiana de L en cada un dos puntos críticos e os autovalores destas matrices:

```
HL1=HL(-1,1,-1/2),a1=eig(HL1)
HL2=HL(1,-1,1/2), a2=eig(HL2)
```

Vemos que a matriz hessiana en $(-1,1)$ é definida positiva, logo este punto é un mínimo relativo estrito da lagranxiana e, polo tanto, un mínimo relativo estrito do problema. Tamén vemos que a matriz hessiana en $(1,-1)$ é definida negativa, logo este punto é un máximo relativo estrito da lagranxiana e, polo tanto, un máximo relativo estrito do problema.

Podemos facer unha análise xeométrica dos problemas de optimización con restricións de igualdade sempre e cando se trate de problemas con dúas variables e unha soa restrición. Por exemplo, para o problema anterior, representamos no plano tanto a restrición como as curvas de nivel da función obxectivo, por exemplo, no recinto $[-3,3] \times [-3,3]$.

```
ezcontour('x-y',[-3 3 -3 3])
hold on
ezplot('x^2+y^2-2',[-3 3 -3 3])
```

Podemos observar como as curvas de nivel dos puntos $(-1,1)$ e $(1,-1)$son tanxentes á restrición neles. Ademais os puntos cercanos a $(-1,1)$ que están na restrición sitúanse en niveles superiores a el, polo que efectivamente trátase dun mínimo relativo do problema dado. Situacion analoga observase co punto $(1,-1)$.

Outro exemplo, para resolver graficamente o problema $\text{mín(máx)}: 25 - x^2 - (y - \frac{1}{2})^2$ suxeito a $y = x^2 - 1$ debuxamos as curvas de nivel da función obxectivo xunto coa restrición, no recinto $[-3,3] \times [-3,3]$, coas sentenzas:

```
ezcontour('25-x^2-(y-1/2)^2',[-3 3 -3 3])
hold on
ezplot('x^2-1',[-3 3 -3 3])
```

e buscamos os puntos para os que a súa curva de nivel toca tanxencialmente á restrición. Para clasificalos fixaremonos na dirección de crecemento das curvas de nivel que atravesan a restrición cerca deles.

Exercicios

20. Comproba graficamente que $(1, 4)$ é solución do problema:
    $\text{mín}(\text{máx})\colon 4x^2 + y^2$ suxeito a $x + y = 5$.

21. Comproba graficamente que $(2, -2)$ é solución do problema:
    $\text{mín}(\text{máx})\colon 3xy$ suxeito a $x - y = 4$.

22. Comproba graficamente que $(5, -5)$ é solución do problema:
    $\text{mín}(\text{máx})\colon 2xy$ suxeito a $x - y = 10$.

23. Comproba graficamente que $(3, 4)$ é solución do problema:
    $\text{mín}(\text{máx})\colon (x - 3)y + (x - 1)(y - 6)$ suxeito a $x + y = 7$.

24. Resolve, coa axuda de Matlab, os seguintes problemas:

    a) $\text{mín}(\text{máx})\colon x^2 + 12xy + 2y^2$ suxeito a $4x^2 + y^2 = 25$

    b) $\text{mín}(\text{máx})\colon x^3y + xy^3$ suxeito a $x^2 + y^2 = 4$

    c) $\text{mín}(\text{máx})\colon x^3 + y^3$ suxeito a $x^2 + y^2 = 1$

    d) $\text{mín}(\text{máx})\colon x^2 - y^2 - z^2$ suxeito a $x + y + z = 4$, $x - y = 4$

    e) $\text{mín}(\text{máx})\colon y^2 - x^2 + z$ suxeito a $x + 2y + z = 0$, $2x + y = 0$

11.2. Optimización con restricións de desigualdade

Os problemas de optimización con restricións de desigualdade son, en xeral, máis representativos da actividade económica que aqueles con restricións de igualdade xa que, por exemplo, se se dispón de determinados recursos en cantidades limitadas as restricións de desigualdade permiten non consumilos na súa totalidade se non é para mellorar o resultado.

A formulación xeral dun problema con restricións de desigualdade é a seguinte:

$$\boxed{\begin{array}{rl} \text{mín}(\text{máx})\colon & f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{suxeito a} & g_j(x_1, \ldots, x_n) \leq b_j \;\; j = 1, \ldots, m \end{array}} \tag{P3}$$

onde $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a función obxectivo do problema,
$g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$, é a función que define as restricións,

$b = (b_1, \dots, b_m)$ son os valores que limitan as restricións e $g(x) \le b$ equivale a expresar $g_j(x) \le b_j$ para todo $j = 1, \dots, m$.

Considerando $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \le b\}$ o conxunto de solucións factibles do problema (P3), a definición formal de extremo de f en S e similar á que fixemos na sección anterior.

Nótese que un punto x_o estará no conjunto S cando verifique tódalas desigualdades $g_j(x_o) \le b_j$, de xeito que pode darse a igualdade ou a desigualdade pode ser estricta, independentemente, en cada unha delas.

Definición 11.14 *Un punto $x_o \in S$ dise que* **satura a restrición** g_j *se* $g_j(x_o) = b_j$. *Se* $g_j(x_o) < b_j$ *entón dise que a restrición g_j non se satura en $x_o \in S$.*

Definimos a función lagranxiana asociada ao problema para os multiplicadores: $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

$$L(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (g_j(x) - b_j)$$

Teorema 11.15 (Teorema de Kuhn-Tucker) *Sexan $f, g_j \in C^1$ e $x_o \in S$ tal que os vectores gradientes das restricións que se saturan en x_o son linealmente independentes.*
Se x_o é un máximo relativo do problema (P3), entón existen m-números reais únicos, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que

a) $\dfrac{\partial L}{\partial x_i}(x_o) = 0$, *para todo* $i = 1, \dots, n$.

b) $\lambda_j \ge 0$, *para todo* $j = 1, \dots, m$.

c) $\lambda_j (g_j(x_o) - b_j) = 0$, *para todo* $j = 1, \dots, m$.

Se x_o é un mínimo do problema (P3), entón a condición b) *muda por $\lambda_j \le 0$, para $j = 1, \dots, m$.*

Os puntos que están nas condicións deste teorema chámanse **puntos de Kuhn-Tucker**.

Observacións 11.16

1. O teorema de Kuhn-Tucker, en problemas de optimización con restricións de desigualdade, é equivalente ao teorema de Lagrange para problemas de optimización con restricións de igualdade. Ambos expresan unha condición necesaria para a existencia de extremos en problemas con restricións.

2. A esixencia de que os vectores gradientes das restricións que se saturan en x_o sexan linealmente independentes, é equivalente á condición do rango no teorema de Lagrange.

3. A propiedade a) do teorema de Kuhn-Tucker equivale a dicir que x_o é un punto crítico da función lagranxiana.

4. Da propiedade c) dedúcese que se a restrición g_j non se satura no punto x_o, entón o multiplicador de Kuhn-Tucker asociado vale cero, $\lambda_j = 0$.

5. Os puntos $x_o \in S$ que verifiquen a condición do rango e as propiedades do teorema de Kuhn-Tucker denomínanse puntos de Kuhn-Tucker e son os candidatos a resolver o problema (P3). Cando tódolos multiplicadores asociados a x_o sexan positivos non todos nulos, se x_o é solución do problema ten que ser un máximo e por eso dicimos que o punto é punto de Kuhn-Tucker candidato a máximo. Analogamente, cando tódolos multiplicadores asociados sexan negativos non todos nulos, dicimos que o punto é punto de Kuhn-Tucker candidato a mínimo, pois se é solución do problema será mínimo. Cando tódolos multiplicadores asociados sexan todos nulos, se o punto é solución pode ser máximo ou mínimo e dicimos que é punto de Kuhn-Tucker candidato a máximo e a mínimo.

6. Na práctica, para obter os puntos de Kuhn-Tucker asociados a un problema, procederemos a estudar tódalas posibilidades de saturación das restricións e obter en cada caso os puntos de S que verifiquen as propiedades a), b) e c). Ademais o signo dos multiplicadores indicanos se o punto pode ser máximo ou mínimo.

Teorema 11.17 *Sexan $f, g \in C^1$.*

Se $x_o \in S$ é un punto de Khun-Tucker candidato a máximo e é ademais un máximo relativo da lagranxiana, entón x_o é un máximo relativo de f suxeito ás restricións $g_j(x) \leq b_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Se $x_o \in S$ é un punto de Khun-Tucker candidato a mínimo e é ademais un mínimo relativo da lagranxiana, entón x_o é un mínimo relativo de f suxeito ás restricións $g_j(x) \leq b_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Tamén se verifica nestas condicións que se x_o é extremo global da lagranxiana entón é extremo global do problema.

Exemplo 11.18 Resolvamos o problema

$$\begin{array}{rl} \text{mín(máx)}: & x + y \\ \text{suxeito a} & y + 4 \geq 0 \\ & y \leq -x^2 \end{array}$$

Primeiro reescribimos o problema na forma adecuada:

$$\begin{array}{rl} \text{mín(máx)}: & f(x,y) = x + y \\ \text{suxeito a} & g_1(x,y) = -y - 4 \leq 0 \\ & g_2(x,y) = y + x^2 \leq 0 \end{array}$$

Consideremos a función lagranxiana asociada ao problema

$$L(x,y) = x + y - \lambda_1(-y - 4) - \lambda_2(y + x^2)$$

As súas derivadas parciais e a súa matriz hessiana son

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2\lambda_2 x$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda_1 - \lambda_2$$

$$H_L(x,y) = \begin{pmatrix} -2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos tódolos puntos de Kuhn-Tucker do problema, diferenciamos catro casos dependendo da saturación das restricións.

1. Puntos que non saturan ningunha restrición, é dicir $-y-4<0,\ y+x^2<0$, entón $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e tense que $\dfrac{\partial L}{\partial y} \neq 0$. Entón, neste caso, non hai puntos de Kuhn-Tucker.

2. Puntos que non saturan a primeira restrición e si a segunda, é dicir $-y-4<0,\ y+x^2=0$, entón temos que verificar a condición do rango. Temos que $\text{rango}\, Dg_2(x,y) = \text{rango}(2x\ \ 1) = 1$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, en particular nos puntos deste caso.

   Entón

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 - 2\lambda_2 x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1 - \lambda_2 = 0 \\ -y &< 4 \\ y + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

   e o único punto crítico da lagranxiana que satura a segunda restrición e verifica a primeira é

$$(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}),\ \ \text{con } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1.$$

   Como $H_L(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é semidefinida negativa, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, L é cóncava e o punto é máximo global de L. Ademais $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ é un punto de Kuhn-Tucker candidato a máximo entón $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ é máximo global do problema.

3. Puntos que non saturan a segunda restrición e si a primeira, é dicir $-y-4=0,\ y+x^2<0$, entón $\lambda_2 = 0$ e $\dfrac{\partial L}{\partial x} \neq 0$. Entón non hai puntos de Kuhn-Tucker neste caso.

4. Puntos que saturan ambas restricións, é dicir $-y-4=0,\ y+x^2=0$, os únicos puntos que o verifican son $(2,-4)$ e $(-2,-4)$. A condición do rango neste caso pide que se verifique $\text{rango}\, Dg(x,y) = \text{rango}\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$, e isto verifícase nos dous puntos posibles.

   O primero é un punto crítico da lagranxiana só para $\lambda_1 = -\frac{3}{4} < 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{4} > 0$, polo que non é un punto de Kuhn-Tucker. O segundo é punto crítico da lagranxiana só para $\lambda_1 = -\frac{5}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$, polo que é un punto de Kuhn-Tucker candidato a mínimo do problema.

   Como $H_L(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é semidefinida positiva, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, L é convexa e este punto é mínimo global de L. Entón $(-2,-4)$ é mínimo global do problema, por ser ademais punto de Kuhn-Tucker candidato a mínimo.

Exercicios

25. Resolve os problemas:

    a) $\text{mín}(\text{máx})\colon\ f(x,y) = x^2 + y^2 + y - 1$ suxeito a $x^2 \leq 1 - y^2$

    b) $\text{mín}(\text{máx})\colon\ f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 3$ suxeito a $x + 3y \geq 3$

    c) $\text{mín}(\text{máx})\colon\ f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ suxeito a $x^2 + y \leq 4$

    d) $\text{mín}(\text{máx})\colon\ f(x,y,z) = -3y + 4z$ suxeito a $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

    e) $\text{mín}(\text{máx})\colon\ f(x,y) = 2x + 2y$ suxeito a $x \geq y^2,\ x \leq 1$

26. Resolve os problemas:

    a) $\text{mín}\colon\ f(x,y) = x^2 + (y-5)^2$ suxeito a $y \geq x^2$, $y \leq 1$

    b) $\text{mín}\colon\ f(x,y) = xy + 2x^2 + 3y^2$ suxeito a $x + y \leq 2$

    c) $\text{máx}\colon\ f(x,y) = x - y^2 - 3$ suxeito a $x^2 + y^2 \leq 1$

27. Proba que o punto $(2,2)$ verifica as condicións de Kuhn-Tucker e que é un óptimo para o problema $\text{mín}(\text{máx})\colon\ 3x + 7y$ suxeito a $-x + y \leq 1$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$

28. Proba que o punto $(2,1)$ verifica as condicións de Kuhn-Tucker e que é un óptimo para o problema $\text{mín}(\text{máx})\colon\ 6x + 3y - x^2 + 4xy - 4y^2$ suxeito a $x + y \leq 3$, $4x + y \leq 9$, $x, y \geq 0$

29. Comproba se os puntos $(2,-6)$ e $(0,-8)$ verifican as condicións de Kuhn-Tucker e se son óptimos para o problema $\text{mín}(\text{máx})\colon\ (x-2)^2 + (y-2)^2$ suxeito a $x - y \geq 8$, $x + y \leq -4$

30. Comproba se o punto $(2,0)$ é unha solución do problema $\text{mín}(\text{máx})\colon\ x^2 + 4y^2 + 2xy$ suxeito a $x^2 + y^2 \leq 6,\ x + y \geq 2$

31. A función de produción dunha empresa é $Q(L,K) = 12L + 20K - L^2 - 2K^2 + 400$. O custo de L e K para a empresa é 4 e 8 por unidade, respectivamente. Se a empresa quere que o custo total dos insumos non sexa superior a 88, atopa a máxima produción posible suxeita a este control orzamentario. Cal é o custo da produción máxima?

32. A publicidade dos partidos políticos sempre ten algúns efectos negativos. Un determinado partido asumiu que os tres temas máis importantes, X, Y e Z, para as eleccións, deberían mencionarse nos anuncios televisivos con espazos de x, y e z segundos, respectivamente. O efecto adverso combinado desta publicidade estimouse como $E(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$.

    As consideracións estéticas determinaron que o espazo total adicado os temas X e Y xuntos non debería ser superior a 28 segundos, e consideracións obxectivas suxeriron que o espazo total asignado a Y e Z xuntos debería ser alomenos de 21 segundos. Que tempos para cada tema en cada anuncio producirían o menor efecto negativo?

11.3. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Para atopar tres números que sumen 15 de xeito que o seu produto sexa máximo podemos resolver o problema

   a) $\text{máx}\colon\ xyz - 15$ b) $\text{máx}\colon\ 15 - x - y - z$

   c) $\begin{array}{ll} \text{máx}\colon & x+y+z \\ \text{suxeito a} & xyz = 15 \end{array}$ d) $\begin{array}{ll} \text{máx}\colon & xyz \\ \text{suxeito a} & x+y+z = 15 \end{array}$

2. A función de utilidade dun consumidor é $u(x, y) = xy$, onde x, y representan as cantidades dos dous bens consumidos nun período de tempo dado, con prezos unitarios 30 e 20 respectivamente. Se R é a cantidade de cartos que o consumidor vai gastar na adquisición destes bens, para atopar a cesta (x, y) que maximiza a utilidade gastando todo o seu presuposto, debemos resolver o problema:

   a) $\text{mín}(\text{máx})\colon\ u(x, y)$ suxeito a $30x + 20y = R$
   b) $\text{máx}\colon\ u(x, y)$ suxeito a $30x + 20y = R$
   c) $\text{máx}\colon\ xy - 20x - 30y$ suxeito a $x + y = R$
   d) $\text{máx}\colon\ 30x + 20y$ suxeito a $xy = R$

3. Para o problema $\text{mín}(\text{máx})\colon\ f(x, y) = x^2 + 4y^2$ suxeito a $x + y = 5$, tense que

   a) $(4, 1)$ é mínimo de f
   b) $(4, 1)$ é máximo de f suxeito a $x + y = 5$
   c) $(4, 1)$ é máximo da función lagranxiana asociada.
   d) $(4, 1)$ é mínimo de f suxeito a $x + y = 5$

4. Se $(2, 0)$ é un punto crítico da función lagranxiana asociada ao problema $\text{mín}(\text{máx})\colon\ f(x, y)$ suxeito a $x^2 + y^2 = 4$, tal que $H_L(2, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, entón

   a) $(2, 0)$ non é solución do problema dado. b) $(2, 0)$ é máximo do problema dado.
   c) $(2, 0)$ é mínimo do problema dado. d) $(2, 0)$ é extremo da función lagranxiana.

5. Dado o problema $\text{mín}(\text{máx})\colon\ f(x, y, z)$, suxeito a $x+2y+z = 3$, con hessiana da lagranxiana asociada $H_L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1+\lambda x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Se $(1, 1, 0)$ con $\lambda = 2$ é un punto crítico da función lagranxiana, tense que

   a) $(1, 1, 0)$ é un máximo relativo estrito de f suxeito a $x + 2y + z = 3$.
   b) $(1, 1, 0)$ é un mínimo relativo estrito de f suxeito a $x + 2y + z = 3$.
   c) $(1, 1, 0)$ non é unha solución do problema pois é un punto de silla da función lagranxiana.

d) cos datos do enunciado non se pode clasificar o punto.

6. Consideremos o problema $\text{mín}(\text{máx})\colon x^2 - 2x + y^2$, suxeito a $2x + 3y^2 = 4$, entón

   a) $(2, 0)$ é un punto de silla do problema. b) $(-1, \sqrt{2})$ é un mínimo do problema.
   c) $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ é un mínimo do problema. d) $(3, 0)$ é un máximo do problema.

7. Para o problema $\text{mín}(\text{máx})\colon f(x, y) = y - x^2$ suxeito a $x^2 + y^2 = 1$, verifícase que

   a) $(0, 1)$ é un mínimo relativo de f suxeito a $x^2 + y^2 = 1$.
   b) $(0, 1)$ é un máximo relativo de f suxeito a $x^2 + y^2 = 1$.
   c) $(0, 1)$ non é un máximo relativo da lagranxiana asociada ao problema.
   d) $(0, 1)$ é un máximo de f.

8. Dado o problema $\text{mín}(\text{máx})\colon f(x, y) = x^2 + (y - \frac{1}{2})^2$ suxeito a $x^2 - y - 1 = 0$. Pódese afirmar que

   a) $(0, 1)$ é un mínimo do problema. b) $(0, -1)$ é un máximo do problema.
   c) $(1, 0)$ é un máximo do problema. d) $(-1, 0)$ non é solución do problema.

9. Para o problema $\text{mín}(\text{máx})\colon f(x, y) = x^2 + 4y^2$ suxeito a $xy = 2$, tense que

   a) $(2, 1)$ é mínimo de f b) $(2, 1)$ é mínimo de f suxeito a $xy = 2$
   c) $(2, 1)$ é máximo da función lagranxiana. d) $(2, 1)$ é máximo de f suxeito a $xy = 2$

10. Sexa $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^2. Consideremos o problema $\text{mín}(\text{máx})\colon f(x, y)$ suxeito á restrición $y = x^2 - 3$. Se sabemos que $(-2, 1)$ e $(3, 6)$ son puntos críticos da función lagranxiana tales que $H_L(-2, 1) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $H_L(3, 6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, cal das seguintes afirmacións é FALSA?

    a) $(-2, 1)$ é máximo de f suxeito á restrición $y = x^2 - 3$
    b) $(-2, 1)$ non é mínimo de f suxeito á restrición $y = x^2 - 3$
    c) $(3, 6)$ é máximo de f suxeito á restrición $y = x^2 - 3$
    d) $(3, 6)$ é mínimo de f suxeito á restrición $y = x^2 - 3$

11. Consideremos o problema $\text{mín}\colon f(x, y) = x^2 + (y - 4)^2$, suxeito a $x - y = 4k$, sendo $\bar{f}(k)$ o valor de f no mínimo. Pódese afirmar que:

    a) $(2 + 2k, 2 - 2k)$ é o valor mínimo que se alcanza.
    b) $\bar{f}(k) = 16k + 16$
    c) $\dfrac{d\bar{f}}{dk} = \dfrac{\partial L}{\partial k} = \lambda$
    d) $\dfrac{d\bar{f}}{dk} = 16(k + 1)$

12. Consideremos o problema de maximizar a función de utilidade $u(x, y) = xy$ suxeito a $x+y = R$. Se $x(R), y(R)$ son os valores que resolven o problema e $\bar{u}(R) = u(x(R), y(R))$, unha das seguintes afirmacións é FALSA:

    a) $x(R) = y(R) = \frac{R}{2}$

    b) $\bar{u}(R) = \frac{R}{2}$

    c) $BH_L(x(R), y(R)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz borde da hessiana no punto $(x(R), y(R))$.

    d) $\dfrac{d\bar{u}}{dR}(R) = \lambda = \dfrac{R}{2}$

13. Para o problema $\text{mín}(\text{máx}):\ f(x, y) = x^2 + y^2 + y - 1$ suxeito a: $x^2 + y^2 \leq 1$, tense que

    a) $(0, 1)$ non é solución do problema dado.
    b) $(0, 1)$ non satura a restrición.
    c) $(0, 1)$ é mínimo do problema dado.
    d) $(0, 1)$ é máximo do problema dado.

11.4. Solucións dos exercicios propostos

1.
a) $(1, 4)$ é un mínimo relativo do problema.
b) $(-1, 1)$ é un mínimo relativo e $(1, -1)$ é un máximo relativo do problema.
c) $(1, 2)$ é un mínimo relativo e $(-1, -2)$ é un máximo relativo do problema.
d) $(2, -2)$ é un mínimo relativo do problema.
e) $(5, -5)$ é un mínimo relativo do problema.
f) $(-6, 3)$ é un máximo relativo do problema.
g) $(3, 4)$ é un máximo relativo do problema.
h) $(1, 1)$ é un mínimo relativo do problema.
i) $(1/3, 5)$ é un máximo global do problema.
j) $(0, 0, 0)$ é un máximo relativo do problema.
k) $(1, 1/2, -1/2, -1)$ é un mínimo relativo do problema.
l) $(0, 1, 1)$ é un mínimo relativo do problema.
m) $(2, 6, 2)$ é un mínimo global do problema.
n) $(0, -1, 7)$ é un máximo global do problema.
ñ) $(1, 1)$ é máximo relativo do problema e $(1/3, 5/3)$ é mínimo relativo do problema.
o) $(0, 6)$ é máximo relativo e $(4, 2)$ é mínimo relativo do problema.
p) $(1, \sqrt{2})$ é máximo global do problema.
q) $(-2, 2)$ é máximo relativo do problema e $(-1, 1)$ é mínimo relativo do problema.
r) $(0, 2)$ é máximo relativo do problema e $(2/3, 4/3)$ é mínimo relativo do problema.
s) $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ son máximos relativos do problema e $(0, -1)$ é mínimo relativo do problema.
t) $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ son mínimos relativos do problema.

3. A solución é $(k + 1, 1 - k)$ e $\dfrac{d\bar{f}}{dk} = 4k + 4$

4. A solución é $(2k, 2k)$ e $\dfrac{d\bar{f}}{dk} = 2k$

6. O mínimo está en $(\frac{k}{3}, -\frac{2k}{3}, \frac{2k}{3})$ e o máximo en $(-\frac{k}{3}, \frac{2k}{3}, -\frac{2k}{3})$.
$\dfrac{d}{dk}\text{Valor}_{\text{máx}} = 3$, $\dfrac{d}{dk}\text{Valor}_{\text{mín}} = -3$

7. Para producir do xeito máis barato posible 40 unidades de produto, a combinación de inputs produtivos axeitada é $K = 0.4$ e $L = 10$

8. O custo mínimo, cando fixamos o nivel de produción en 5 toneladas, é de 100, e alcánzase cos inputs $x_1 = 50$ e $x_2 = 12.5$

9. Para producir 16 artigos co mínimo custo precísanse 4 unidades de cada unha das materias primas utilizadas, e o custo mínimo é de 90 u.m.

10. A combinación de factores que minimizan C s.a. $Q = 9$ é $x = 3$ e $y = 1$. O valor mínimo é 48

A variación de C respecto a q vén dada por $\dfrac{dC_{\text{mín}}}{dQ} = -2Q^{-1/2}$

11. Para minimizar os custos débense producir 40 unidades do produto na planta 1 e 60 na planta 2. O custo mínimo é 2340 u.m.

12. O beneficio máximo é de 247 733.45 €, e obtense invertindo 15 000 € en publicidade online e 45 000 € en medios de comunicación.

13. $U^*(r) = \frac{(r+7)^2}{48}$, $\dfrac{dU^*}{dr} = \frac{r+7}{24}$

25.
a) $(0,-1/2)$ é un mínimo relativo do problema.
$(0,1)$ é un máximo relativo do problema.
$(0,-1)$ é un punto de Kuhn-Tucker candidato a máximo pero non se pode clasificar utilizando o teorema 11.17.
b) $(\frac{6}{11},\frac{9}{11})$ é un mínimo global do problema.
c) $(0,1)$ é un mínimo global do problema.
$(0,-2)$ é un mínimo relativo do problema.
$(0,2)$ é un punto de Kuhn-Tucker candidato a máximo pero non se pode clasificar utilizando o teorema 11.17.
d) $(0,-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ é un máximo relativo do problema.
$(0,\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$ é un mínimo relativo do problema.
e) $(\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$ é un mínimo global do problema.
$(1,1)$ é un máximo global do problema.

26.
a) $(0,1)$ é un mínimo global do problema.
b) $(0,0)$ é un mínimo global do problema.
c) $(1,0)$ é un máximo global do problema.

31. A máxima produción posible é 486, acádase cando $L = 6$ e $K = 5$ e ten un custo de 64 u.m.

32. Os tempos para cada tema que producirían o menor efecto negativo son 14 segundos para o tema Y, 7 para o tema Z e nengún para o tema X.

Solucións autoavaliación. 1d, 2b, 3d, 4b, 5b, 6c, 7b, 8b, 9b, 10d, 11d, 12b, 13d

Bibliografía

[1] R. Barbolla, E. Cerdá, P. Sanz. *Optimización: cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía*. Pearson Educación.

[2] R. Barbolla, E. Cerdá, P. Sanz. *Optimización: programación matemática y aplicaciones a la economía*. Garceta.

[3] M. Besada, F.J. García, M. Mirás, C. Quinteiro, C. Vázquez. *MATLAB: todo un mundo*. Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo.

[4] M. Besada, F.J. García, M. Mirás, C. Vázquez. *Cálculo de varias variables*. Prentice Hall.

[5] G.L. Bradley, K.J. Smith. *Cálculo de varias variables*. Prentice Hall. Vol. 2.

[6] C. Calvo, C. Ivorra. *Las Matemáticas en la Economía a través de ejemplos en contextos económicos.* Tirant to Blanch.

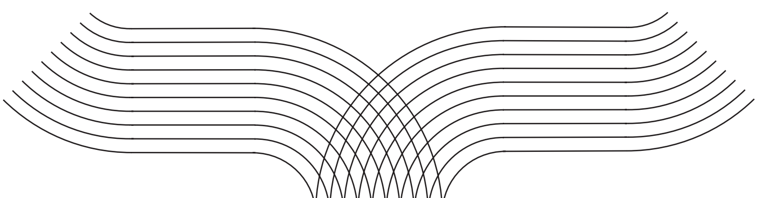
[7] E.F.Jr. Haeussler, R.S. Paul. *Matemáticas para administración y economía*. Pearson - Prentice Hall.

[8] G. Jarne, E. Minguillón, I. Pérez-Grasa. *Matemáticas para la economía: programación matemática y sistemas dinámicos*. McGraw-Hill Interamericana.

[9] G. Jarne, E. Minguillón, I. Pérez-Grasa. *Matemáticas para la economía: Álgebra lineal y cálculo diferencial*. McGraw-Hill.

[10] G. Jarne, E. Minguillón, I. Pérez-Grasa. *Matemáticas para la economía: Álgebra lineal y cálculo diferencial. Libro de ejercicios*. McGraw-Hill.

[11] K. Sydsaeter, P. J. Hammond, A. Carvajal. *Matemáticas para el análisis económico*. Pearson Educación.



Manuais

Serie de manuais didácticos

Últimas publicacions na colección

Fundamentos de Meteoroloxía en 180 preguntas (2024)
Luis Gimeno, Raquel Nieto, Marta Vázquez, Rogert Sorí e Luis Gimeno-Sotelo.

Manual de cultivo e asentamento do ourizo de mar. Paracentrotus Lividus.(2024)
Estefanía Paredes Rosendo e Alba Lago Dopico

Problemas de Ocenografía Física: Ejercicios resueltos con y sin solución numérica (2024)
Gabriel Rosón Porto

Pensamento, sociedade e cultura. A relevancia da filosofía na educación (2024)
Abraham Rubín Álvarez e Brais González Arribas

Problemas de estruturas de barras. 50 Exercicios resoltos paso a paso (2024)
Manuel Cabaleiro Núñez, Borja Conde Carnero, José Carlos Caamaño Martínez e Belén Riveiro Rodríguez

9 788411 880336

Economates

As Matemáticas na Economía

Este manual inclúe os contidos das materias de Matemáticas no grao de Economía que actualmente se imparte na Universidade de Vigo, polo que se adapta tamén perfectamente a tódolos graos das ramas da Economía e das CC Empresariais. O material que aquí se recolle correspondese co usado como apoio ás clases teóricas e prácticas, é obvio que este material debe complementarse co desenrolo que do mesmo se realice nas propias clases. Nelas deben facerse apreciacións, comentarios, variacións nos exercicios, ... que poden depender das circunstancias e das valoracións que o profesorado teña do seguimento polo alumnado. Non se trata pois de un manual completo para seguir a materia de xeito autosuficiente.

Ofrécese un enfoque da materia adaptado ao contexto económico. Óptase por usar a mesma notación que usan as materias cuantitativas que o alumnado cursará e inclúense tamén exercicios máis enfocados ás aplicacións á economía, sen intención de intromisión nos contidos doutras materias. Obviamente as limitacións de coñecementos esixibles fai que este tipo de exercicios sexan moi sinxelos e non recollen o rigor co que se tratarán noutras materias.

Intégranse tamén no propio material, segundo vai sendo necesario, contidos que poderían corresponder a un curso de nivelación. Deste xeito tentamos que o alumno poida reforzar certas destrezas que se lle supoñen dominadas pero que non sempre o son. Coa mesma intención, intercálanse exercicios máis sinxelos dende o punto de vista das operacións con outros máis complexos.

Servizo de Publicacións
Universida de Vigo