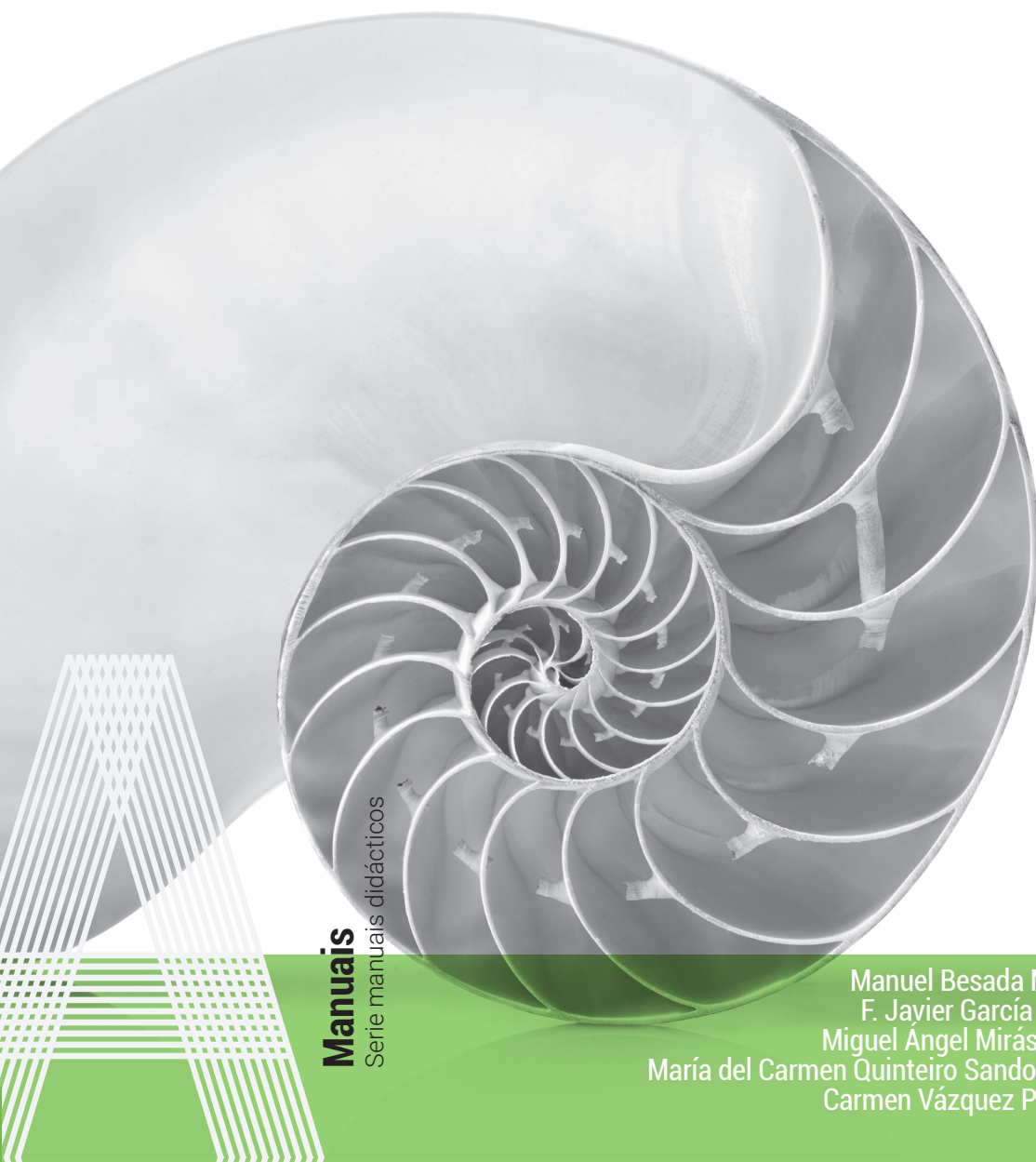


MAReMÁTICAS

*Contidos matemáticos para os
estudos universitarios de Ciencias*



Manuais

Serie manuais didácticos

Manuel Besada Moráis
F. Javier García Cutrín
Miguel Ángel Mirás Calvo
María del Carmen Quinteiro Sandomingo
Carmen Vázquez Pampín

Manuel Besada Moráis
F. Javier García Cutrín
Miguel Ángel Mirás Calvo
M. del Carmen Quinteiro Sandomingo
Carmen Vázquez Pampín



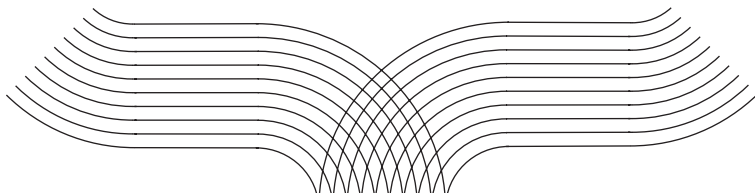
Os autores son todos doutores en Matemáticas e profesores titulares do departamento de Matemáticas da Universidade de Vigo. Teñen unha dilatada experiencia na docencia das Matemáticas nas facultades de Química, Bioloxía, Ciencias do Mar, Económicas e Empresariais e Comercio.

Durante os últimos 25 anos, en cada un dos seus proxectos docentes, afrontaron a necesidade de se adaptaren ás distintas situacións ocasionadas polos cambios no sistema educativo. Situacións estas que precisaron de importantes modificacións nos contidos das materias, no desenvolvemento das cla-

ses, nos recursos utilizados, na avaliación e, por suposto, na achega de material ao alumnado. Froito dese esforzo de transformación do método de transmisión do coñecemento, son varias as publicacións que teñen saído á luz, tanto de carácter docente como divulgativo. En todos os seus manuais (editados polas Editoriais Prentice-Hall e Garceta e polo Servicio de Publicacións da Universidade de Vigo) pretenden fornecer o material necesario para que o alumnado acade os obxectivos requiridos nas materias de Matemáticas da súa titulación, do xeito máis amigable posible e sempre dentro da rigorosidade necesaria.

Servizo de Publicacións

Universidade de Vigo



Manuais

Serie de manuais didácticos

n.º 085

Edición

Universidade de Vigo
Servizo de Publicacións
Rúa de Leonardo da Vinci, s/n
36310 Vigo

Deseño da portada

Tania Sueiro Graña
Área de Imaxe
Vicerreitoría de Comunicacións e Relacións Institucionais

Maquetación

Tórculo Comunicación Gráfica, S. A.

Fotografía da portada

Adobe Stock

Impresión

Tórculo Comunicación Gráfica, S. A.

ISBN (Libro impreso)

978-84-1188-007-7

Depósito legal

VG 142-2024

© Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo, 2024

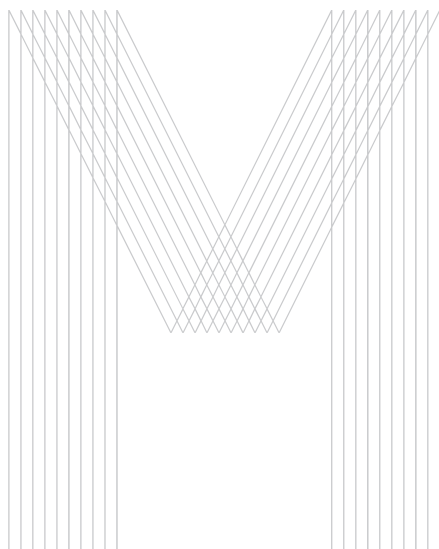
© Manuel Besada Moráis, F. Javier García Cutrín,
Miguel Ángel Mirás Calvo, María del Carmen Quinteiro
Sandomingo e Carmen Vázquez Pampín

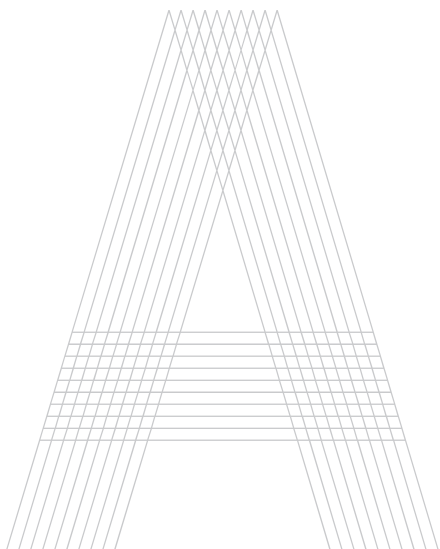
Sen o permiso escrito do Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo, queda prohibida a reprodución ou a transmisión total e parcial deste libro a través de ningún procedemento electrónico ou mecánico, incluídos a fotocopia, a gravación magnética ou calquera almacenamento de información e sistema de recuperación.

Ao ser esta editorial membro da **une**, garántense a difusión e a comercialización das súas publicacións no ámbito nacional e internacional.

Servizo de Publicacións

Universidade de Vigo





Este volume publícase
co financiamento da



**XUNTA
DE GALICIA**

MAReMÁTICAS

*Contidos matemáticos para os
estudos universitarios de Ciencias*

Autores

Manuel Besada Moráis
F. Jayier García Cutrín
Miguel Ángel Mirás Calvo
María del Carmen Quinteiro Sandomingo
Carmen Vázquez Pampín

Índice

Prólogo	I
Introdución	III
Preliminares	V
1. Espazos vectoriais e matrices	1
1.1. Espazos vectoriais	1
1.1.1. O espazo vectorial $\mathbb{R}^n$	3
1.1.2. Produto escalar de dous vectores	5
1.2. Matrices	7
1.2.1. Determinante dunha matriz	10
1.2.2. Matriz de cambio de base	12
1.3. Formas cuadráticas	15
1.3.1. Autovalores dunha matriz cadrada	15
1.3.2. Formas cuadráticas. Clasificación	17
1.4. Autoavaliación	21
1.5. Introdución a MATLAB. Vectores e matrices con MATLAB	22
1.5.1. Introdución a MATLAB. Comandos básicos	22
1.5.2. Vectores e matrices con MATLAB	23
1.6. Solucións dos exercicios propostos	25
2. Sistemas de ecuacións lineais	27
2.1. Sistemas de ecuacións lineais. Forma matricial	27
2.2. Sistemas de Cramer. Regra de Cramer	30
2.3. Método de Gauss	32
2.3.1. Método de Gauss para calcular a inversa dunha matriz	37
2.4. Autoavaliación	49
2.5. Sistemas de ecuacións lineais con MATLAB	50
2.6. Solucións dos exercicios propostos	52

3. Derivabilidade de funcións	53
3.1. Funcións dunha variable	53
3.1.1. Regra da cadea	55
3.2. Funcións de varias variables	58
3.3. Derivadas parciais de funcións escalares	60
3.4. Derivadas de funcións vectoriais	64
3.4.1. As funcións diferenciáveis. Regra da cadea	65
3.5. Gradiente dunha función real	70
3.6. Autoavaliación	72
3.7. Derivación con MATLAB	73
3.8. Solucións dos exercicios propostos	74
4. Derivadas de orde superior	81
4.1. Derivadas de orde superior para funcións dunha variable	81
4.2. Derivadas parciais de orde superior para funcións de varias variables	82
4.3. Derivación implícita	86
4.3.1. Funcións definidas implicitamente	86
4.3.2. Derivación de funcións definidas implicitamente	88
4.4. Autoavaliación	93
4.5. Derivación con MATLAB	94
4.6. Solucións dos exercicios propostos	94
5. Optimización en varias variables	97
5.1. Extremos de funcións sen restricións	97
5.2. Extremos de funcións con restricións de igualdade	104
5.3. Autoavaliación	113
5.4. Optimización en varias variables con MATLAB	114
5.5. Solucións dos exercicios propostos	115
6. Integración de funcións dunha variable real	117
6.1. Funcións Riemann-integrables	117
6.1.1. A integral de Riemann	117
6.1.2. A función integral	119
6.2. Cálculo de primitivas	122
6.2.1. Método de cambio de variable (substitución)	124
6.2.2. Método de integración por partes	125
6.2.3. Integrais racionais	126
6.2.4. Integrais reducibles a racionais	130
6.3. Autoavaliación	140
6.4. Integración de funcións dunha variable real con MATLAB	141
6.5. Solucións dos exercicios propostos	142

7. Integrais de liña	143
7.1. Ecuacións de curvas	143
7.2. Curvas en $\mathbb{R}^n$	146
7.3. Integrais de liña de campos vectoriais	150
7.4. Traballo realizado por unha forza	155
7.5. Campos conservativos	158
7.6. Teorema fundamental das integrais de liña	160
7.7. Autoavaliación	165
7.8. Integrais de liña con MATLAB	166
7.9. Solución dos exercicios propostos.	167
8. Integración en $\mathbb{R}^2$	169
8.1. Integrais dobres sobre rectángulos	169
8.2. Integrais dobres sobre recintos non rectangulares	170
8.3. Cambio de variable	174
8.3.1. Coordenadas polares	175
8.3.2. Cambio lineal	177
8.4. Teorema de Green	180
8.5. Autoavaliación	184
8.6. Integración múltiple con MATLAB	186
8.7. Solución dos exercicios propostos.	186
9. Integrais de superficie	189
9.1. Superficies en $\mathbb{R}^3$	189
9.2. Vectores normais, superficies regulares e orientación dunha superficie	194
9.3. Integrais de fluxo	198
9.4. Teorema de Stokes	203
9.5. Integración en $\mathbb{R}^3$	210
9.5.1. Coordenadas cilíndricas	211
9.5.2. Coordenadas esféricas	212
9.5.3. Exemplos de outros cambios de variable	217
9.6. Teorema da diverxencia	220
9.7. Autoavaliación	225
9.8. Integrais triples e de superficie con MATLAB	227
9.9. Solución dos exercicios propostos.	228
10. Ecuacións diferenciais de primeira orde	231
10.1. Introducción	231
10.2. Solución dunha ecuación diferencial	233
10.3. Ecuacións en variables separadas	235
10.4. Ecuacións exactas	238
10.4.1. Factores integrantes	240
10.5. Ecuacións homoxéneas	242
10.5.1. Ecuacións redutibles a homoxéneas	244
10.6. Ecuacións diferenciais lineais de primeira orde	245

10.6.1. Caso de coeficientes constantes	245
10.6.2. Crecemento, desintegración, reaccións químicas e mesturas	246
10.6.3. Ecuación xeral lineal de primeira orde	249
10.7. A ecuación de Bernoulli	255
10.8. A ecuación de Ricatti	256
10.9. Autoavaliación	257
10.10 Ecuacións diferenciais con MATLAB	257
10.11 Solución dos exercicios propostos	258
11. Ecuacións diferenciais de orde n	261
11.1. Introducción	261
11.2. Ecuacións diferenciais lineais de orde n	263
11.3. Ecuacións lineais de segunda orde con coeficientes constantes	269
11.3.1. Oscilador masa-resorte	271
11.4. A ecuación completa	275
11.4.1. Método dos coeficientes indeterminados	275
11.5. Ecuacións lineais de orde n con coeficientes constantes	278
11.5.1. Solucións da ecuación homoxénea	278
11.6. Solución xeral da ecuación completa	280
11.6.1. Método dos coeficientes indeterminados	280
11.7. Método de variación de parámetros	282
11.8. Autoavaliación	286
11.9. Ecuacións diferenciais con MATLAB	287
11.10 Solución dos exercicios propostos.	287
Bibliografía	289

Prólogo

Recentemente escoitei nun faladoiro dunha emisora de radio preguntar para que valen as matemáticas. Decateime de que a pregunta amosaba o gran descoñecemento do que son as ciencias, as letras ou mesmo as artes. Unha das cuestións formuladas era para que serve a raíz cadrada. Probablemente quen interrogou nunca fixo un deseño básico para construír unha vivenda rectangular e non sabe que para debuxar un ángulo recto sobre o terreo non fai falla dispoñer dunha escuadra de grandes dimensións, senón que chega con cravar un chantón, medir 3 metros a partir deste punto sobre unha liña recta, medir outros catro metros a partir do mesmo punto sobre unha dirección aproximadamente perpendicular e logo facer cadrar cinco metros entre os 3 e 4 anteriormente marcados: $5 = \sqrt{3^2 + 4^2}$; Figura 1. Como dicimos os matemáticos, "trivial".

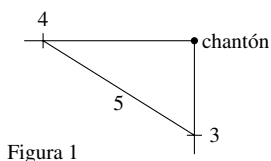


Figura 1

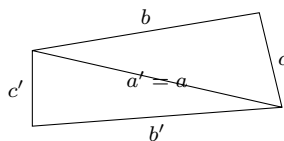


Figura 2

Para non aburrir, só un exemplo máis. Probablemente este participante no faladoiro para medir a superficie do terreo, máis ou menos rectangular, onde quere construír o seu chalé, chame a un topógrafo para facer dúas contas moi sinxelas: triangular o terreo e utilizar o teorema de Heron para cada triángulo, onde $\text{Área} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, sendo a, b e c os lados do triángulo e $p = \frac{a+b+c}{2}$; Figura 2. Poderíamos poñer moitos exemplos, pero o falador preferirá despreciar a raíz cadrada e apreciar o topógrafo; isto podería chamarse cultura xeral.

As matemáticas que se utilizan a nivel de calquera grao de ciencias ou enxeñaría xa están todas escritas e a gran maioría das veces con moita calidade. Se ademais temos en conta os bos tratamentos de textos que existen na actualidade, tamén podemos afirmar que mostran unha certa elegancia de presentación; por exemplo, adornados con gráficas que sempre axudan a entender mellor os conceptos que se definen ou que aparecen como conclusións a partir de certas hipóteses.

Os profesores autores deste libro levan moitos anos dedicados á docencia das matemáticas nas facultades de Química, Bioloxía e Ciencias do Mar e, dende o meu punto de vista, reúnen as condicións necesarias para darlle un toque especial de xeito que os alumnos, que non necesitan unha rigorosidade completa dos conceptos e resultados das matemáticas, poidan seguir este curso sen necesidade de sentir sufrimentos especiais.

O que escribe estas liñas, dedicou moitos anos a impartir este tipo de docencia; hoxe retirado da fermosa vida profesional, cre que está en condicións de afirmar que a nivel de certos graos de

Ciencias é máis importante comprender ben os conceptos e os resultados asociados que facer un gran esforzo para entender a demostración do teorema de que toda función diferenciable é continua, por poñer un exemplo. Un graduado en Matemáticas si que debe saber, ou alomenos entender, esa demostración.

Este libro contén toda a información matemática básica necesaria para que un alumno dos graos anteriormente citados poida seguir sen dificultade calquera materia que precise das matemáticas para o seu desenvolvemento. Ademais, está moi ben complementado con moitas figuras, compiladas co mesmo tratamento de textos que o resto do contido do libro, que fan que a súa lectura sexa agradable e máis fácil de entender.

En calquera curso dun grao atopamos bos alumnos, que entenden mellor ou menos ben as matemáticas, pero tamén somos conscientes de que podemos ter estudantes aos que lle resultan demasiado ariscas. Pero o traballo e o esforzo son capaces de superar estes atrancos. Tódolos alumnos que comezan un grado teñen a capacidade suficiente para “cepillar” o contido de calquera materia recollida no plano de estudos; en particular a materia contida neste libro. A experiencia así o avala. Un alumno de vocación tardía nos estudos universitarios pode preguntar: *Profesor, fai dez anos que non estudo matemáticas e non sei o que é unha derivada ou unha integral ...* A resposta sempre ha ser a mesma: *Esa non ten que ser unha preocupación; por suposto que necesitas máis traballo que un alumno que as ten fresquiñas, ganas de traballar, maior cantidade de titorías, e pola metade do semestre comezarás a ver resultados positivos.* A experiencia di que os alumnos que seguen estas recomendacións superan a materia; pero máis, podo afirmar que algúns alcanzan un notable e outros ata chegan ó sobresaínte. Así que para tódolos alumnos que queiran seguir este libro, ánimo, traballo e ganas de saír airoso. Con toda seguridade que ata teredes tempo de tomar unha birras, ou ir de fin de semana á Ribeira Sacra ou polas Rías Galegas, altas ou baixas que, por certo, teñen unhas vistas marabillosas, pero non levedes este libro na mochila.

A impartición do contido deste libro, MAREMÁTICAS, debería abarcar dous semestres dun ano académico ou repartidos en dous anos académicos. Eu inclínome porque a mellor opción é a de dous semestres do primeiro ano de grao. O primeiro semestre pode abranguer os seis primeiros capítulos, onde os alumnos deben traer o nivel suficiente para poder abordalos sen ningunha dificultade. O resto do libro entra perfectamente nun segundo semestre, no que aumenta a dificultade do contido; pero o alumno xa debeu alcanzar a madurez universitaria e científica suficiente como para entender, con algún esforzo, a teoría de integración múltiple, integración de liña e de superficie, e unha pequena introdución ás ecuacións diferenciais.

Manuel Besada Moráis.
Vigo, marzo 2023.

Introdución

Este libro de texto inclúe o contido das dúas materias de Matemáticas do primeiro curso do grao de Ciencias do Mar. Pretendemos dotar o estudante de capacidade para comprender e utilizar a linguaxe matemática, para asimilar novos conceptos, adquirir habilidades de cálculo e propoñer modelos matemáticos sinxelos, e tamén desexamos que se adestre no uso de aplicacións informáticas para experimentar en matemáticas e resolver problemas relacionados.

O libro estrutúrase nunha dúcia de capítulos. Comezamos con un capítulo de preliminares onde se recolle material usado como guía nun curso de nivelación, adicamos dous capítulos aos contidos alxébricos necesarios para o desenvolvemento axeitado da materia. Seguen tres capítulos de derivación e optimización en varias variables e catro capítulos de integración en unha e varias variables. Rematamos con dous capítulos adicados a ecuacións diferenciais.

Neste manual recolleemos os resultados teóricos necesarios e, sobre todo, unha ampla recompilación de exercicios como material de traballo para o alumnado, algúns resoltos con todo detalle, outros cunha resolución menos pormenorizada e tamén moitos propostos, a maior parte coa solución final. Este manual revisa, expande e actualiza o contido de manuais anteriores da nosa autoría, concretamente Matemáticas á Boloñesa (2014) e Un Mar de Matemáticas (2016).

Obviamente este material pode ser usado para outras titulacións aínda que non teñan un programa tan extenso, cubre tamén entón as materias de matemáticas das titulacións de Química, Bioloxía, Economía e Ade.

Os autores.
Vigo, marzo 2023.

Preliminares

Neste breve capítulo repasamos algúns dos coñecementos matemáticos que, como mínimo, deberemos dominar para abordar os contidos deste libro. Débense perfeccionar as destrezas de cálculo e corrixir posibles deficiencias de contido ou concepto, coñecementos e habilidades que se supoñen adquiridas no Bacharelato. Este capítulo é un simple guión de axuda, polo que non facemos un desenvolvemento completo dos conceptos recollidos.

Conxuntos de números

Poderíamos dicir que os números naturais son aqueles que usamos para contar:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

O conxunto dos números enteiros está formado polos naturais, o cero e os números negativos opostos dos naturais para a suma:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}.$$

Unha fracción ou número racional, $\frac{a}{b}$, é o cociente entre dous números enteiros $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$. Dúas fraccións son equivalentes, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se $ad = bc$:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

Dado un número racional, $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, se calculamos a división de a entre b obtemos unha representación decimal del. É importante saber que esta representación pode ter unha cantidade finita de decimais ou unha cantidade infinita, pero periódica.

Observemos que entre dous números racionais calquera, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, existe sempre outro número racional, por exemplo o punto medio entre eles, $\frac{1}{2}(\frac{a}{b} + \frac{c}{d})$. En realidade, entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ hai infinitos números racionais.

Se, ademais dos números enteiros, representamos os racionais nunha recta, pode dar entón a impresión de que esta se enche. Pero non é así. É fácil ver que, por exemplo, $\sqrt{2}$ non é racional e si ten unha representación na recta. O mesmo sucede con $\sqrt{5}$, $-\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, π ou e , por exemplo. Todos eles son números con representación decimal cunha cantidade infinita de cifras decimais non periódica.

Tódolos números que acabamos de citar poder ser representados nunha recta e os números que conforman toda a recta chámanse números reais, a recta denomínase recta real e o conxunto formado

por todos eles representábase por $\mathbb{R}$. Faltaríanos falar doutro conxunto de números que comprende tamén os reais, os números complexos, pero faremolos máis adiante.

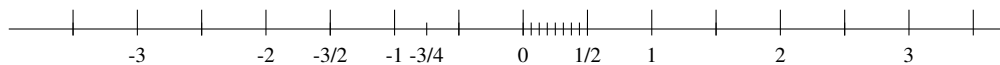


Figura 1: Representación dos números reais na recta real.

Exercicio 1 Son 2π e $1 + \sqrt{2}$ números racionais?

Valor absoluto dun número real

Lembramos que o valor absoluto dun número real $r \in \mathbb{R}$ defínese como ese mesmo número, cando é positivo, e o seu oposto cando non o é. Así,

$$|r| = \begin{cases} r & \text{se } r > 0 \\ -r & \text{se } r \leq 0 \end{cases}.$$

Unha propiedade que usaremos a miúdo: para $a, b \in \mathbb{R}$, $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$.

Radicais, potencias e logaritmos

De forma básica todos coñecemos o que é unha potencia, por exemplo $2^3 = 8$. Neste caso, o número 2 denomínase base e o 3 expoñente da potencia e o resultado da operación, a potencia, é 8. De xeito que cando nos preguntan o resultado de 2^3 non dubidamos en contestar 8, e tampouco dubidamos cando nos preguntan por $\sqrt[3]{8}$ en responder 2. E se nos preguntan por $\log_2 8$? Temos que entender que estamos falando do mesmo concepto desde distintas perspectivas, cando nos preguntan por $\sqrt[3]{8}$ están a preguntarnos polo número x que verifica $x^3 = 8$. Cando nos preguntan por $\log_2 8$ están a preguntarnos polo número x que verifica $2^x = 8$.

En xeral,

$$\text{se } a, b > 0, a \neq 1, \log_a(b) = c \text{ significa que } a^c = b$$

De aí que, se coñecemos as propiedades das potencias, tamén deberíamos coñecer as dos radicais e as dos logaritmos. Lembremos que:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}; \quad a^b / a^c = a^{b-c}; \quad a^c \cdot b^c = (ab)^c; \quad (a^b)^c = a^{bc}.$$

Por comodidade, podemos escribir os radicais como potencias. Así, por exemplo, $\sqrt[3]{8}$ pódese poñer como $8^{1/3}$. Esta notación é coherente coas propiedades das potencias, de xeito que é posible facer cálculos do tipo

$$\sqrt[3]{8}\sqrt{8} = 8^{1/3}8^{1/2} = 8^{1/3+1/2} = 8^{5/6} = \sqrt[6]{8^5}.$$

Cómpre recordar que $a^0 = 1$ e que $a^{-b} = 1/a^b$.

Exercicio 2 Escribe como unha soa potencia:

a) $2^5 2^{-4} 2$ b) $b^{-3} b b^4$ c) $b^6 (b^{-4})^3$ d) $5^6 (5^{-3})^7$

e) $\frac{b^{-3} (b^4)^{-2}}{b^5 b}$ f) $\frac{b^5}{b^6}$ g) $b^3 \left(\frac{1}{b^{-1}} \right)^{-2}$

Exercicio 3 Indica se as seguintes igualdades son ou non correctas:

a) $\sqrt[3]{27} = 3$ b) $16^{1/2} = 4$ c) $(1/2)^0 = 0$

d) $\sqrt{-25}$ non existe en $\mathbb{R}$. e) $(-8)^{1/3} = 2$ f) $3^{-2} = -9$

g) $\sqrt[3]{-8}$ non existe en $\mathbb{R}$. h) $-9^{1/2}$ non existe en $\mathbb{R}$. i) $\sqrt{4+25} = 2+5 = 7$

k) $\sqrt{3}\sqrt{12} = 6$ l) $-3^2 = 9$ m) $(2+3)^2 = 4+9 = 13$

n) $\sqrt{9} = \pm 3$ ñ) $(-3)^2 = 9$ o) $((-1)^3)^2 = -1$

Moito coidado co uso das parénteses!

Exercicio 4 Realiza as seguintes operacións:

a) $\frac{21}{3} + 4$ b) $\frac{21}{(3+4)}$ c) $\frac{4}{15} + 6 \cdot \frac{2}{3}$

d) $\left(\frac{4}{15} + 6 \right) \frac{2}{3}$ e) $5 \cdot 3 - 2^2 + 4 \cdot 2$ f) $5 \cdot (3 - 2)^2 + 4 \cdot 2$

Exercicio 5 Coloca as parénteses necesarias para que as seguintes operacións sexan correctas:

a) $6 + 2/2 = 4$ b) $6 + 2/2 = 7$ c) $5 - 3 + 8 = -6$ d) $8 + 3 \cdot 4 - 2 = 22$

e) $16/2 \cdot 4 = 32$ f) $16/2 \cdot 4 = 2$ g) $-3 \cdot 4 + 2 = -14$ h) $8 + 3 \cdot 4 - 2 = 14$

Lembremos que podemos ver os logaritmos como unha operación que nos devolve os expoñentes. Como xa dixemos, se $a, b > 0$, $a \neq 1$,

$$\log_a(b) = c \iff a^c = b.$$

Ademais, como consecuencia das propiedades das potencias:

$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ lévanos a que $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

$a^b / a^c = a^{b-c}$ lévanos a que $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

$(a^b)^c = a^{bc}$ lévanos a que $\log_a(b^c) = c \log_a b$

Exercicio 6 Calcula:

a) $\log_2(32)$ b) $\log_5(1/5)$ c) $\log_3(9)$ d) $\log_4(2)$ e) $\log_9(9)$ f) $\log_7(1)$ g) $\log_2(\sqrt[3]{2})$

O número e

Antes dixemos que $e \notin \mathbb{Q}$. Que máis temos que saber do número e ?

Temos que saber que se define como o límite da sucesión de números reais

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \{2, 9/4, 64/27 \dots\}$$

Que é un número irracional entre 2 e 3, máis concretamente $e \simeq 2,7182818 \dots$

E que é a base do logaritmo neperiano, de xeito que $\ln(a)$ significa $\log_e(a)$.

Exercicio 7 Calcula:

- a) $\ln e$ b) $\ln 0$ c) $\ln 1$ d) $\ln e^3$ e) $\ln^3 e$ f) $\ln \frac{1}{e}$ g) $\ln e^x$ h) $e^{\ln 3}$

Polinomios e fraccións alxébricas

Os polinomios son expresións alxébricas formadas por sumas de produtos de números reais por produtos de variables. Son exemplos de polinomios dunha variable:

$$P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 7x - 3, Q(x) = \frac{1}{5}x^3 - 2x + 5, R(x) = -x^{20} + x^3$$

NON son polinomios: $W(x) = \frac{2}{x^2}$, $V(x) = x^3 - \sqrt{x}$, $T(x) = \sin(x^2 - 3x)$.

Debemos lembrar os conceptos de grao, coeficiente, variable e termo independente.

Unha fracción alxébrica é un cociente de dous polinomios, por exemplo $K(x) = \frac{3x^4 - 5x^2 + 7}{5x^3 - 2x}$.

Debemos saber sumar, multiplicar e dividir polinomios.

Exercicio 8 Realiza as seguintes divisións de polinomios:

a) $\frac{3x^4 + 5x^3 - 2x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ b) $\frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 - 2}$

O Método de Ruffini é un método rápido e cómodo para realizar divisións de polinomios cando o divisor é da forma $x + a$.

Exercicio 9 Realiza as seguintes divisións de polinomios utilizando o Método de Ruffini.

a) $\frac{3x^4 + 5x^3 - 2x + 2}{x + 1}$ b) $\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 2}$

Igualdades notables. Lembramos as igualdades notables de uso máis frecuente:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Resolución de ecuacións e inecuacións

Repasaremos os métodos de resolución dalgúns tipos de ecuacións dunha variable. Lembramos que unha ecuación dunha variable é unha igualdade entre dúas expresións nas que intervén unha soa variable. Resolvela significa atopar todos os valores da variable que verifican a igualdade.

O exemplo máis sinxelo é o dunha ecuación de primeiro grao, basicamente un polinomio de grao un igualado a cero, $ax + b = 0$, con $a \neq 0$. Obviamente o único número que a verifica é $x = -\frac{b}{a}$.

Se avanzamos un pouquiño máis e pensamos nas ecuacións de segundo grao xa nos atopamos cun “problemiña”. Por exemplo, a ecuación $x^2 + 1 = 0$ non ten ningunha solución real, pois non existe ningún número real que elevado ó cadrado dea -1 .

Os números complexos

Imaxinemos que $\sqrt{-1}$ fose verdadeiramente un número, imos chamarlle i . Este número $i = \sqrt{-1}$ verificaría entón que $i^2 = -1$ e tamén que $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$. Así, as solucións da ecuación $x^2 + 1 = 0$ serían i e $-i$.

Ademais se “xogamos” coas operacións de suma e produto deste número cos números reais, e consideramos expresións do tipo $2 - 3i$, $5 + 7i$, $2i$, ... resulta que todas as propiedades das operacións con números reais, e mesmo identidades como as igualdades notables que mencionamos antes, verificanse para estas expresións. Estas expresións chámanse números complexos e o conxunto que forman denótase por $\mathbb{C}$. Deste xeito, todas as ecuacións polinómicas de grao n teñen n solucións en $\mathbb{C}$.

Continuamos coa resolución de ecuacións. As dúas solucións dunha ecuación de grao dous, $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Algunhas propiedades xunto coa nosa destreza poden axudarnos a resolver moitas das outras ecuacións.

Exercicio 10 Resolve as seguintes ecuacións:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x^2 - x - 6 = 0 & \text{b)} x^2 + 6x + 5 = 0 & \text{c)} 2x^2 + x - 1 = 0 \\ \text{d)} x^2 - 6x + 13 = 0 & \text{e)} x^2 + 10x + 26 = 0 & \text{f)} 2x^2 - 6x + 5 = 0 \\ \text{g)} } \frac{3x}{x^2 + 2x} - \frac{1}{x} + \frac{4}{2 + x} = 0 & \text{h)} } \frac{x}{x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1} \end{array}$$

Exercicio 11 Resolve as seguintes ecuacións:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x^4 - 4 = 0 & \text{b)} x^4 - 11x^2 + 18 = 0 & \text{c)} 2x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \\ \text{d)} x^6 - 7x^3 - 8 = 0 & \text{e)} 2x^4 - x^3 - 3x^2 = 0 & \text{f)} x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \\ \text{g)} x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x = 0 & \text{h)} x^4 - 8x^3 + 19x^2 = 0 & \text{i)} 4x^2 + 4x + 5 = 0 \end{array}$$

Exercicio 12 Resolve as seguintes ecuacións:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 3^{1-x^2} = \frac{1}{27} & \text{b)} \log_2(4x) = 3 & \text{c)} \log_x(25) = -2 \\ \text{d)} \ln(16) - 2 \ln(x) = \ln(100) & \text{e)} e^{x+2} = \sqrt{e} & \\ \text{f)} \log_3(x) + \log_3(2x + 1) = 1 & \text{g)} 5 \ln(x) - \ln(32) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) & \end{array}$$

Exemplo 13 Diofanto de Alexandría foi un matemático grego, nado arredor do ano 200. Aínda que nada se sabe con seguridade sobre a súa vida, poderíase adiviñar a idade á que morreu de ser certo o epitafio:

Transeúnte, esta é a tumba de Diofanto. Os seguintes versos, trazados por unha sabia man, farante coñecer a idade á que morreu. A súa nenez ocupou a sexta parte da súa vida e unha doceava parte a súa adolescencia. Pasou unha sétima parte da súa vida antes de tomar esposa e, cinco anos despois, tivo un precioso neno que, unha vez acadada a metade da idade de seu pai, pereceu dunha morte desgraciada. Durante catro anos máis, mitigando a súa dor co estudo da ciencia dos números, viviu o pai antes de chegar ao fin da súa existencia.

Canto anos viviu Diofanto?

Solución. $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$, $x = 84$ anos.

Exemplo 14 O matemático e astrónomo indio Bhaskara amosou que os problemas máis complicados poden ser presentados de forma viva e mesmo graciosa. Resolve o seguinte, que está extraído do seu libro *Lilavati*: A quinta parte dun enxame de abellas pousou nunha flor de *kadamba* (Loto); a terceira sobre unha flor de *silinda* (cambur). Tres veces a diferenza entre estes dous números voou sobre unha flor de *krutaja*, e unha abella quedou soa no aire, atraída polo perfume dun xazmín e un pandamus. Dime, bela nena, cal é o número de abellas que formaban o enxame?

Solución. $\frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 3\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) + 1 = x$, $x = 15$ abellas.

Inecuacións

Para resolver inecuacións temos que proceder con máis cautela, pois non todas as operacións que facemos coas ecuacións son válidas agora. Por exemplo, temos que ter coidado ó multiplicar unha desigualdade por un número: se o número é positivo a desigualdade mantense pero se é negativo esta cambia de sentido.

Pódense sumar (non restar) elemento a elemento os termos de dúas desigualdades. Por exemplo, se $a \geq b$, $c \geq d$ entón $a + c \geq b + d$.

Se temos unha desigualdade de termos positivos, ao calcular os inversos a desigualdade cambia de sentido. Así, se $a \geq b$, con $a, b > 0$ entón $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

As solucións das inecuacións poden incluír intervalos de números reais do tipo (a, b) , $(a, b]$, $(-\infty, b)$, ...

Exercicio 15 Resolve as seguintes inecuacións:

a) $3 - 2x \geq 8 - 7x$ b) $x^2 + 6x - 1 \leq 3x^2 + 3x - 6$ c) $\frac{6-2x}{5} > \frac{1-x}{10}$

d) $\frac{x+2}{x-2} \geq 0$ e) $\frac{5-2x}{x+4} < 0$

Exercicio 16 Determina o signo das seguintes expresións tendo en conta que a é un número real negativo, b é un número real positivo e $|a| > |b|$:

a) $-a$ b) $-b$ c) $a - b$ d) $-a + b$ e) $a + b$
 f) $|a| - |b|$ g) $|b| - |a|$ h) $|a| - a$ i) $|b| - b$ k) $\frac{1}{|b|} - \frac{1}{|a|}$

Trigonometría

Intuitivamente, un ángulo é unha rexión do plano limitada por dúas semirrectas que parten dun mesmo punto. Tradicionalmente os ángulos mídense en graos. Un grao corresponde co ángulo obtido ó dividir a circunferencia en 360 partes iguais.

Un enfoque distinto resulta de considerar a circunferencia de raio $r = 1$ con centro no vértice do noso ángulo, de xeito que os lados del determinen dous raios da circunferencia. O noso ángulo abrangue un arco da circunferencia dunha determinada lonxitude. Definimos a medida do ángulo en radiáns como a lonxitude dese arco. Entón, cantos radiáns mide un ángulo recto?

En Matemáticas sempre mediremos os ángulos en radiáns. En xeral, podemos interpretar calquera número real como un ángulo tendo en conta que:

1. Os ángulos son positivos se se miden no senso contrario ó xiro das agullas do reloxo, e son negativos se se miden no mesmo senso do xiro das agullas do reloxo.

2. Se $r > 2\pi$ entón existirá un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $r = s + n2\pi$ con $s \in [0, 2\pi)$, de maneira que interpretaremos que r é o ángulo que consiste en dar n voltas completas á circunferencia máis un xiro incompleto de s radiáns. Analogamente se $r < 0$.

Para definir as razóns trigonométricas dun ángulo α , con $0 \leq \alpha < 2\pi$, consideramos primeiro o ángulo dentro da circunferencia unidade, situado no plano cartesiano co vértice na orixe e o raio sobre o cal comezamos a medir o ángulo sobre o eixe x . Deste xeito, o outro raio que define o ángulo daranos un punto sobre a circunferencia, que á súa vez está no plano coordenado e está caracterizado entón por dúas coordenadas $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (ver Figura 2).

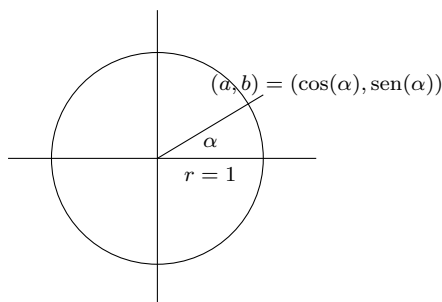


Figura 2: Seno e coseno dun ángulo utilizando a circunferencia de raio 1.

Definimos o coseno do ángulo α como $\cos(\alpha) = a$ e o seno como $\sin(\alpha) = b$.

Temos que saber que, como consecuencia das definicións, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ tense:

$$\text{a) } -1 \leq \sin(\alpha) \leq 1; \quad \text{b) } -1 \leq \cos(\alpha) \leq 1; \quad \text{c) } \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Definimos a tanxente do ángulo α como $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{a}$, cando $\cos(\alpha) \neq 0$.

Así, é sinxelo ver cales son as razóns trigonométricas de, por exemplo, $\alpha = \pi/2$. Como o punto de corte do ángulo coa circunferencia é $(0, 1)$, entón $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$ e $\tan(\pi/2)$ non

existe. Do mesmo xeito, por ser $(-1, 0)$ o punto de corte do ángulo π coa circunferencia, entón $\text{sen}(\pi) = 0$, $\cos(\pi) = -1$ e $\tan(\pi) = 0$.

Temos que saber as razóns trigonométricas dos ángulos notables do primeiro cuadrante e, a partir delas, saber deducir as dos seus correspondentes nos outros cuadrantes.

$\text{sen } 0 = 0$	$\cos 0 = 1$	$\tan 0 = 0$
$\text{sen } \pi/6 = 1/2$	$\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$	$\tan \pi/6 = 1/\sqrt{3}$
$\text{sen } \pi/4 = \sqrt{2}/2$	$\cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$	$\tan \pi/4 = 1$
$\text{sen } \pi/3 = \sqrt{3}/2$	$\cos \pi/3 = 1/2$	$\tan \pi/3 = \sqrt{3}$
$\text{sen } \pi/2 = 1$	$\cos \pi/2 = 0$	$\tan \pi/2$ non existe
$\text{sen } \pi = 0$	$\cos \pi = -1$	$\tan \pi = 0$
$\text{sen } 3\pi/2 = -1$	$\cos 3\pi/2 = 0$	$\tan 3\pi/2$ non existe
$\text{sen } 2\pi = 0$	$\cos 2\pi = 1$	$\tan 2\pi = 0$

$$\text{sen } 2\pi/3 = \sqrt{3}/2 \quad \cos 2\pi/3 = -1/2 \quad \tan 2\pi/3 = -\sqrt{3}$$

...

$$\text{sen}(-\pi/6) = -1/2 \quad \cos(-\pi/6) = \sqrt{3}/2 \quad \tan(-\pi/6) = -1/\sqrt{3}$$

...

Consideremos agora o ángulo α colocado de xeito similar ao descrito anteriormente pero nunha circunferencia de raio $r > 0$ calquera. Cales son as coordenadas do punto de corte do raio que define o ángulo coa circunferencia?

Funcións elementais

A partir deste momento utilizaremos un xeito aínda máis formal de escribir os contidos teóricos. Aparecen epígrafes como “definición”, “proposición” ou “teorema”. Debemos entender o seu significado.

Dominio e limitación

Definición 17 Unha función real de variable real é calquera aplicación do tipo $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

O conxunto D denomínase dominio da función f . Cando este non se especifica enténdese que é o maior posible.

O conxunto $\{f(x) : x \in D\}$ chámase rango ou imaxe da función f .

Exemplos 18 1. O dominio da función $f(x) = x + 3$, é todo o conxunto $\mathbb{R}$. Porén, dada $f: [2, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$, o seu dominio é o conxunto $[2, 10]$.

2. O dominio da función $h(x) = \sqrt{x + 2}$, é o conxunto $D = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \geq 0\} = [-2, +\infty)$.

3. As funcións polinómicas son aquelas que veñen dadas por unha expresión polinómica. Están definidas en todo o conxunto $\mathbb{R}$. Exemplos de funcións polinómicas son $f(x) = 3x^5 - 7x^4 + 2x - 2$ ou $g(x) = x^{20} - \frac{5}{8}x^8 + 2x$.

4. As funcións racionais son aquelas dadas por un cociente de dúas expresións polinómicas, como $f(x) = \frac{7x^5 - x^2 - 2}{x^2 - 9}$. Están definidas no conxunto formado polos números reais que non anulan o denominador. No noso exemplo, o dominio de f é $\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.
5. Non todas as funcións veñen determinadas pola mesma expresión para todos os valores reais. Tamén son exemplos de funcións reais de variable real as seguintes:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{se } x \leq 1 \\ -4x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 4 - x & \text{se } 0 < x \leq 4 \\ \ln(x - 3) & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Exercicio 19 Determina o dominio das seguintes funcións:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{(x+3)^2} & \text{b) } g(x) = |x - 3| & \text{c) } h(x) = \sqrt{5 + 2x} & \text{d) } k(x) = \sqrt[3]{5 + 2x} \\ \text{e) } l(x) = \ln(5 - x^2) & \text{f) } m(x) = \ln(5 + x^2) & \text{g) } n(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{h) } p(x) = \frac{1}{2+|x|} \end{array}$$

Definición 20 Diremos que $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función limitada se o seu rango é un conxunto limitado, é dicir, se existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$, para todo $x \in D$.

Equivalentemente, f é unha función limitada se existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m < f(x) < M$, para todo $x \in D$.

Exemplos 21

1. A función $f(x) = \cos(x)$ é limitada pois $|\cos(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Tamén son limitadas $f(x) = \cos(x^3 + 8x)$ e $g(x) = \sin\left(\frac{3x^9 - 5}{x+7}\right)$.
2. A función $f(x) = \arctan(x)$ é limitada xa que $|\arctan(x)| < \frac{\pi}{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. A función $f(x) = x^2$ non é limitada porque, para todo $M > 0$, sempre é posible atopar $x_o \in \mathbb{R}$ de xeito que $x_o^2 > M$. De feito, o seu rango é $[0, +\infty)$.

Gráficas das funcións elementais

Definición 22 Chamamos gráfica dunha función $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a representación do conxunto $\{(x, f(x)) : x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$.

Exemplo 23 Se f é unha función polinómica de grao un, $f(x) = ax + b$, a súa gráfica é unha recta. A pendente da recta, isto é, a tanxente do ángulo que forma co eixe x , é o valor a .

As funcións polinómicas de grao cero, é dicir, as funcións constantes, correspóndense con gráficas de rectas paralelas ó eixe de abscisas. As rectas paralelas ó eixe de ordenadas non se corresponden con gráficas de funcións, pero representan a ecuación $x = cte$.

A Figura 3 amosa algúns exemplos de gráficas de funcións polinómicas de grao 1.

A ecuación da recta que pasa polo punto (x_o, y_o) e ten pendente m é $y - y_o = m(x - x_o)$.

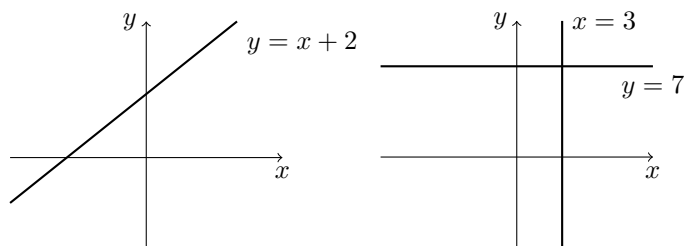


Figura 3: Exemplos de representación de rectas

Exemplo 24 Se f é unha función polinómica de grao dous, $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, a súa gráfica é unha parábola con eixe paralelo ó de ordenadas.

As ramas da parábola están orientadas cara a arriba se $a > 0$ e cara a abaixo se $a < 0$. O vértice da parábola localízase en $v_x = \frac{-b}{2a}$. Cales son os puntos de corte da parábola co eixe x ?

As parábolas con eixe paralelo ó de ordenadas non se corresponden con gráficas de funcións, pero responden á ecuación $x = ay^2 + by + c$, con $a \neq 0$.

Na Figura 4 vemos un par de exemplos de representación de parábolas.

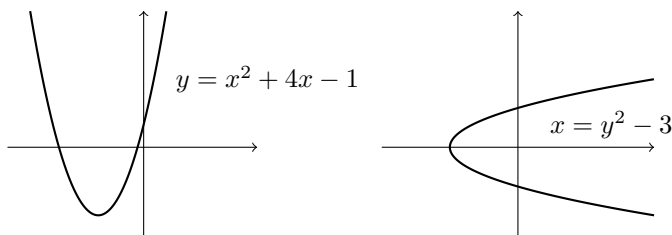
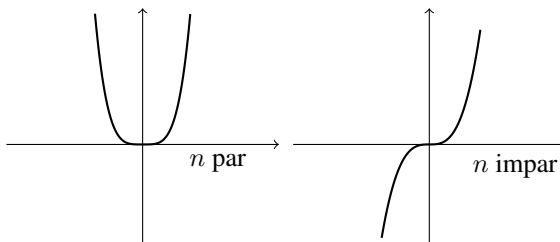


Figura 4: Exemplos de representación de parábolas.

Exemplo 25 As funcións da forma $f(x) = x^a$, con $a \in \mathbb{R}$, chamanse funcións potenciais e teñen un comportamento moi diferente dependendo do valor de a . Comentamos as máis relevantes. No caso de expoñente natural, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, segundo n sexa par ou impar temos dous tipos de gráficas:

Figura 5: $f(x) = x^n$

No caso de expoñente negativo $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, f non está definida se $x = 0$ e temos tamén dous tipos de gráficas segundo n sexa par ou impar:

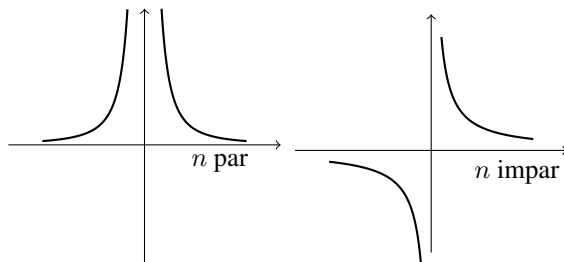


Figura 6: $f(x) = 1/x^n$

Cando temos expoñentes racionais, estes poden transformarse en raíces. En concreto interésanos as funcións do tipo $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ e tamén debemos distinguir entre que n sexa par ou impar. Ademais cando n é par o dominio de $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é $[0, +\infty)$, mentres que se n é impar f está definida en todo $\mathbb{R}$.

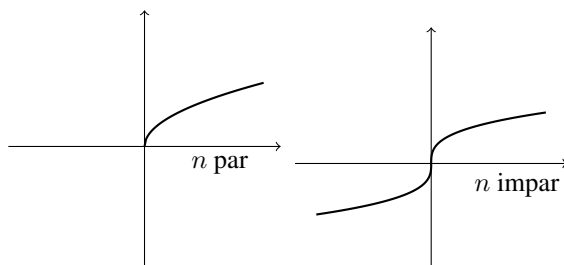


Figura 7: $f(x) = \sqrt[n]{x}$

Exemplos 26 Recordaremos como son as gráficas do resto das funcións elementais.

1. A función valor absoluto: representamos na Figura 8 a gráfica de $y = |x|$.

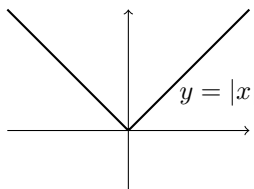


Figura 8: Gráfica de $y = |x|$.

2. A función exponencial. A Figura 9 amosa as gráficas de $y = e^x$ e $y = e^{-x}$. Para $a \in \mathbb{R}$, se $a > 1$ a gráfica de $y = a^x$ é similar á de $y = e^x$, e se $a < 1$ a gráfica de $y = a^x$ é similar á de $y = e^{-x}$.

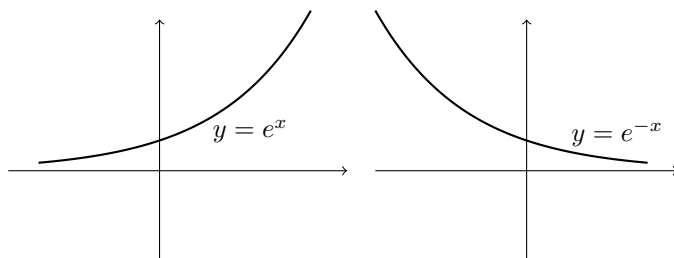


Figura 9: A función exponencial.

3. A función logarítmica: é a función inversa á exponencial. Representamos na Figura 10 a gráfica de $y = \ln(x)$. Nótese que o seu dominio é o conxunto $(0, +\infty)$.

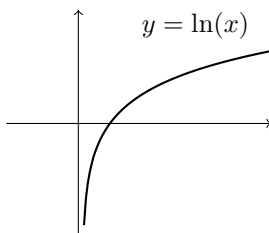


Figura 10: A función logarítmica.

4. As funcións trigonométricas: as funcións $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$ están definidas en todo $\mathbb{R}$ e son limitadas. A función $y = \tan(x)$ non está limitada e está definida para todos os valores de x que non anulan o coseno, é dicir, o seu dominio é $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. As gráficas destas funcións recóllense na Figura 11.
5. Finalmente, aínda que non se trata propiamente da gráfica dunha función, lembremos que os puntos que verifican a ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ son os da circunferencia de centro (a, b) e raio r . Ver Figura 12.

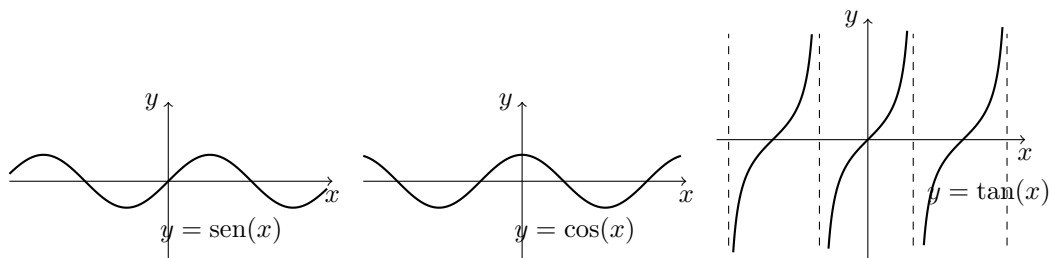


Figura 11: As funcións trigonométricas.

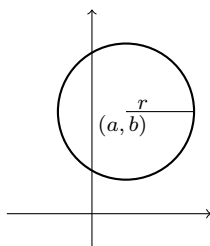


Figura 12: Circunferencia de centro (a, b) e raio r .

Translación e simetrías de gráficas

Determinadas operacións alxébricas nas funcións resultan en translacións das súas gráficas. Así, por exemplo, dada unha función f , a gráfica de $g(x) = f(x) + 2$ obténse da de f “subíndoa en bloque” dúas unidades. Analogamente, a gráfica da función $h(x) = f(x - 1)$ obténse da de f “arrastrándoa cara a dereita” unha unidade. Ver Figura 13.

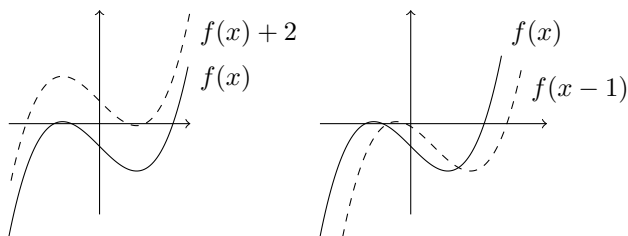


Figura 13: Translacións de gráficas.

A gráfica de $p(x) = -f(x)$ é a imaxe especular sobre o eixe x da de f e a gráfica de $q(x) = f(-x)$ é a imaxe especular sobre o eixe y da de f . Ver Figura 14.

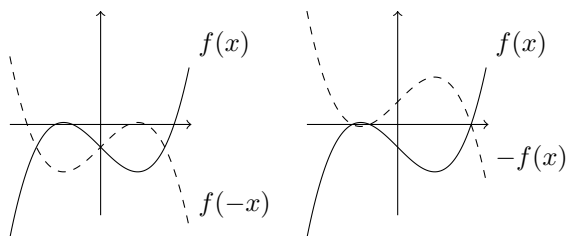


Figura 14: Simetrías de gráficas.

Se f é inxectiva, a gráfica da súa inversa é a imaxe especular sobre a bisectriz $y = x$ da de f .

A función $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ é inxectiva. Recordamos (Figura 15) as gráficas dela e da súa inversa, $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

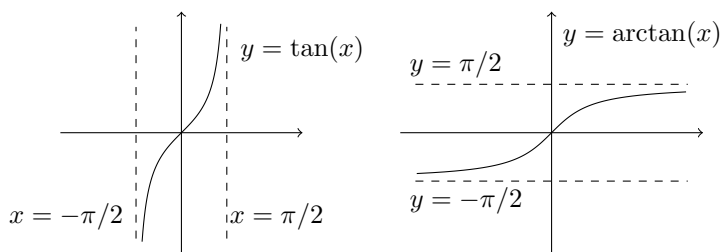


Figura 15: A funcións tanxente e arcotanxente.

Analogamente podemos considerar as funcións inversas das funcións seno e coseno respectivamente, $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

Exercicio 27 1. Cal é a ecuación da recta que pasa por $(0, 0)$ e $(3, 1)$? E a da que une $(1, -1)$ con $(0, 2)$? Calcula a ecuación da recta que pasa por $(-2, 1)$ e é paralela a $y = 4x - 1$.

2. Representa graficamente as funcións do exemplo 3.4.5

3. Representa graficamente as seguintes funcións:

- | | | | |
|----------------------|----------------------|-------------------|-------------------------|
| a) $y = 3 + \sin(x)$ | b) $y = \cos(x + 5)$ | c) $y = e^{ x }$ | d) $y = x^2 - 6x + 9 $ |
| e) $y = 4 - x $ | f) $y = 7 - x^2$ | g) $y = \ln(x)$ | h) $y = \sqrt{3 - x^2}$ |

Soluc  es dos exercicios propostos

4.
 a) $21/3 + 4 = 7 + 4 = 11$ b) $21/(3 + 4) = 21/7 = 3$
 c) $\frac{4}{15} + 6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15} + 4 = \frac{64}{15}$ d) $\left(\frac{4}{15} + 6\right) \frac{2}{3} = \frac{94}{15} \frac{2}{3} = \frac{188}{45}$
 e) $5 \cdot 3 - 2^2 + 4 \cdot 2 = 15 - 4 + 8 = 19$ f) $5 \cdot (3 - 2)^2 + 4 \cdot 2 = 5 + 8 = 13$
5.
 a) $(6 + 2)/2 = 4$ b) $6 + 2/2 = 7$ c) $5 - (3 + 8) = -6$ d) $(8 + 3) \cdot (4 - 2) = 22$
 e) $16/2 \cdot 4 = 32$ f) $16/(2 \cdot 4) = 2$ g) $-(3 \cdot 4 + 2) = -14$ h) $8 + 3(4 - 2) = 14$
6.
 a) $\log_2(32) = 5$ b) $\log_5(1/5) = -1$ c) $\log_3(9) = 2$ d) $\log_4(2) = 1/2$
 e) $\log_9(9) = 1$ f) $\log_7(1) = 0$ g) $\log_2(\sqrt[3]{2}) = 1/3$
7.
 a) $\ln e = 1$ b) $\ln 0$ non existe. c) $\ln 1 = 0$ d) $\ln e^3 = 3$
 e) $\ln^3 e = 1$ f) $\ln \frac{1}{e} = -1$ g) $\ln e^x = x$ h) $e^{\ln 3} = 3$
10.
 a) $x^2 - x - 6 = 0$. Sol. $x = 3, -2$
 b) $x^2 + 6x + 5 = 0$. Sol. $x = -5, -1$
 c) $2x^2 + x - 1 = 0$. Sol. $x = 1/2, 1$
 d) $x^2 - 6x + 13 = 0$. Sol. $x = 3 \pm 2i$
 e) $x^2 + 10x + 26 = 0$. Sol. $x = -5 \pm i$
 f) $2x^2 - 6x + 5 = 0$. Sol. $x = (3 \pm i)/2$
 g) $\frac{3x}{x^2 + 2x} - \frac{1}{x} + \frac{4}{2 + x} = 0$. Sol. $x = \frac{1}{3}$
 h) $\frac{x}{x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1}$. Sol. $x = 0$. Observación: $x = 1$ non é solución.
11.
 a) $x^4 - 4 = 0$. Sol. $x = \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}i$
 b) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$. Sol. $x = \pm 3, \pm\sqrt{2}$
 c) $2x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ non ten solucións reais.
 d) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$. Sol. $x = -1, 2, 1 \pm i, 1/2 \pm \sqrt{3}/2$
 e) $2x^4 - x^3 - 3x^2 = 0$. Sol. $x = 3/2, -1, 0$ (dobre)
 f) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$. Sol. $x = -1, 2, -2$
 g) $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 10x = 0$. Sol. $x = 0, 2, 1 \pm 2i$
 h) $x^4 - 8x^3 + 19x^2 = 0$. Sol. $x = 4 \pm 2\sqrt{3}i, 0$ (dobre)
 i) $4x^2 + 4x + 5 = 0$ Sol. $x = -1/2 \pm i$
12.
 a) $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$. Sol. $x = \pm 2$
 b) $\log_2(4x) = 3$. Sol. $x = 2$
 c) $\log_x(25) = -2$. Sol. $x = 1/5$
 d) $\ln(16) - 2\ln(x) = \ln(100)$. Sol. $x = 2/5$. Observación: $x = -2/5$ non é solución.
 e) $e^{x+2} = \sqrt{e}$. Sol. $x = -3/2$
 f) $\log_3(x) + \log_3(2x + 1) = 1$. Sol. $x = 1$. Observación: $x = -3/2$ non é solución
 g) $5\ln(x) - \ln(32) = \ln(\frac{x}{2})$. Sol. $x = 2$. Observación: $x = 0, -2$ non son solución

Capítulo 1

Espazos vectoriais e matrices

1.1. Espazos vectoriais

Cando falamos de vectores no plano pensamos en segmentos orientados que veñen dados por dúas coordenadas, por exemplo $(2, 2)$ ou $(3, 1)$. Vectores que podemos sumar ou multiplicar por un escalar, operacións que teñen unha interpretación gráfica.

Estas operacións teñen unhas propiedades características tamén ó conxunto de vectores no espacio e a outros conxuntos que chamamos espazos vectoriais. Denotaremos por $\mathbb{R}$ o conxunto dos números reais.

Definición 1.1 Un espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$ é un conxunto, $\mathcal{V}$, xunto con dúas operacións $+: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ e $\cdot: \mathbb{R} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ verificando, para todo $u, v, w \in \mathcal{V}$ e para calquera $r, s \in \mathbb{R}$:

1. $u + v = v + u$ (Propiedade conmutativa)
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (Propiedade asociativa)
3. Existe $\theta_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ tal que $u + \theta_{\mathcal{V}} = u$ (Existencia de elemento neutro)

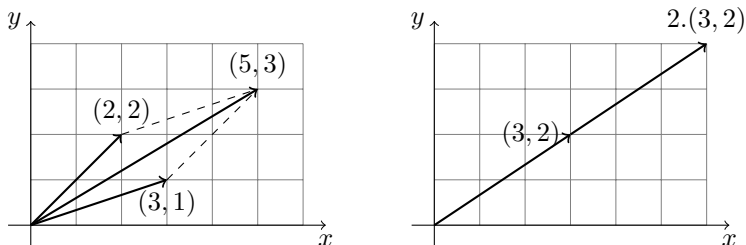


Figura 1.1: Exemplo de suma de dous vectores e produto dun vector por un escalar en $\mathbb{R}^2$

$$4. \quad r \cdot (s \cdot u) = (rs) \cdot u$$

$$5. \quad (r + s) \cdot u = r \cdot u + s \cdot u$$

$$6. \quad r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$$

$$7. \quad 1 \cdot u = u$$

Ademáis para cada $u \in \mathcal{V}$, existe $v \in \mathcal{V}$ de xeito que $u + v = \theta_{\mathcal{V}}$ (Existencia de elemento oposto)
 Os elementos do conxunto $\mathcal{V}$ chamáremoslles vectores.

Exemplo 1.2 Os conxuntos $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ coas operacións de suma e produto por un escalar habituais son espazos vectoriais sobre $\mathbb{R}$.

En xeral, o conxunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ coas operacións

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$r \cdot (x_1, \dots, x_n) = (rx_1, \dots, rx_n), \quad r \in \mathbb{R}$$

é un espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Definición 1.3 Chamamos combinación lineal dos vectores $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathcal{V}$ a todo vector da forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$, con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

O vector $\theta_{\mathcal{V}}$ é combinación lineal dos elementos de calquera subconxunto de vectores de $\mathcal{V}$.

Exemplo 1.4 O vector $(0, 1, 4) \in \mathbb{R}^3$ é combinación lineal dos vectores $(2, 5, 0)$ e $(3, 7, -2)$, pois $(0, 1, 4) = 3(2, 5, 0) - 2(3, 7, -2)$.

Definición 1.5 Os vectores $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{V}$ son linealmente independentes se dados $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = \theta_{\mathcal{V}}$, se ten que $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

En caso contrario, diremos que os vectores $v_1, \dots, v_k$ son linealmente dependentes.

Exemplo 1.6 Imos ver algúns exemplos en $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$:

1. Os vectores $(1, 1)$ e $(-1, 0)$ son linealmente independentes porque se $r, s \in \mathbb{R}$ fosen tales que $r(1, 1) + s(-1, 0) = (0, 0)$, entón $r = s = 0$. Efectivamente, como $r(1, 1) + s(-1, 0) = (r - s, r)$, obtemos que $r - s = r = 0$, de onde $r = s = 0$.
2. Como $0(1, 1, -5) + 0(-1, 4, 3) + 4(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, os vectores $(1, 1, -5)$, $(-1, 4, 3)$ e $(0, 0, 0)$ son linealmente dependentes.

Proposición 1.7 Os vectores $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{V}$ son linealmente dependentes se, e só se, polo menos un deles se pode poñer como combinación lineal dos restantes.

1.1.1. O espazo vectorial $\mathbb{R}^n$

Centraremos o noso estudo no espazo vectorial $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.8 *Unha base de $\mathbb{R}^n$ é un conxunto de n vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independentes.*

Exemplo 1.9 O conxunto de vectores $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ denomínase base canónica de $\mathbb{R}^n$, onde $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

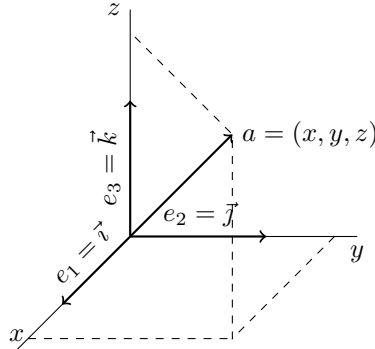


Figura 1.2: A base canónica en $\mathbb{R}^3$

Definición 1.10 *Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ é unha base de $\mathbb{R}^n$, entón dado $x \in \mathbb{R}^n$ sempre existen n números reais únicos, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, que verifican $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$.*

Estes escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ denomínanse coordenadas do vector x respecto da base $\mathcal{B}$ e escríbese $x_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Exemplo 1.11 Vexamos algúns exemplos:

1. Os vectores $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ constitúen unha base de $\mathbb{R}^3$.
2. As coordenadas do vector $(2, 1)$ respecto da base canónica de $\mathbb{R}^2$ son, obviamente, 2 e 1, mentres que respecto da base $\{(1, 1), (0, 1)\}$ son 2 e -1 , pois $(2, 1) = 2(1, 1) - (0, 1)$.
3. Un vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pode escribirse de forma única como

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, 0, x_n) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \end{aligned}$$

Polo que $x_1, x_2, \dots, x_n$ son as coordenadas de x respecto da base canónica.

Observación 1.12 *Outra notación frecuentemente utilizada para os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$ é: $e_1 = \vec{i}, e_2 = \vec{j}, e_3 = \vec{k}$. Así pois, temos que $(x, y, z) = x e_1 + y e_2 + z e_3 = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$.*

Finalizamos con algunhas consideracións e interpretacións xeométricas sobre o espazo $\mathbb{R}^n$:

1. Dous vectores $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ son iguais se, e só se, $x_i = y_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.
2. Cada n-upla $x = (x_1, \dots, x_n)$ pode interpretarse como o segmento orientado (vector) que une a orixe $(0, 0, \dots, 0)$ co punto de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$. A n-upla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ será o punto x ou o vector x , segundo conveña.
3. A suma de dous vectores responde á regra do paralelogramo. (ver Figura 1.1)
4. Os vectores da base canónica sitúanse nas direccións dos eixes coordenados.
5. É útil considerar segmentos orientados con orixe arbitraria. Así, o segmento con orixe nun punto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e extremo en $Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, corresponderá ó vector $PQ = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$.
6. Reciprocamente, cada vector $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ pode representarse por un segmento coa orixe en calquera punto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, e extremo $Q = (x_1 + z_1, x_2 + z_2, \dots, x_n + z_n)$. Obviamente $z = PQ$. A suma de vectores ten agora unha clara interpretación xeométrica: $PQ + QR = PR$.

Exercicios

1. Comproba se os seguintes conxuntos de vectores son linealmente independentes. Se non o son, dá a relación de dependencia.
 - a) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$
 - b) $\{(1, 1), (\frac{3}{2}, 0), (-1, 2)\}$
 - c) $\{(1, 1, 2), (0, 2, 1), (1, -1, 1)\}$
 - d) $\{(0, 0, 1, 3), (2, 1, 0, 1), (3, 0, 1, 1)\}$
 - e) $\{(1, 1, -1, 1), (0, 2, 3, 1), (5, 4, 1, -2), (3, 0, 0, 0)\}$
2. Determina as coordenadas, respecto da base de $\mathbb{R}^3 \{(3, 0, -1), (0, 3, -1), (3, -1, 0)\}$, do vector que, referido á base $\{(1, 0, 2), (0, 2, 1), (1, 2, 0)\}$, ten coordenadas 2, -1 e 1.
3. Expresa, se é posible, o vector $(-5, 8, 11)$ como combinación lineal dos vectores $a = (1, 3, 4)$, $b = (1, 2, 5)$ e $c = (-1, 2, -9)$. Co resultado obtido, contesta ás seguintes preguntas: Pode ser $\{a, b, c\}$ unha base de $\mathbb{R}^3$? É $\{a, b, c\}$ linealmente independente?
4. Sexan $a = (3, 2, 3)$, $b = (0, 0, 1)$ e $c = (1, -2, -4)$. Demostra que todo vector de $\mathbb{R}^3$ se pode expresar como combinación lineal de a , b e c . É única esta expresión?
5. Considéranse $a = (3, 2, 3)$, $b = (0, 0, 1)$ e $c = (6, 4, 1)$. Pode expresarse $x = (-3, -2, 0)$ como combinación lineal de a , b e c ? É única esta expresión?

1.1.2. Produto escalar de dous vectores

Definición 1.13 O produto escalar de dous vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ defínese como o número real $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$.

Proposición 1.14 (Propiedades do produto escalar.) Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, verifícase:

1. $x \cdot x = 0$ se, e só se, $x = 0$
2. $x \cdot y = y \cdot x$
3. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
4. $(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y) = x \cdot (\lambda y)$
5. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Definición 1.15 Chamamos *módulo*, *norma euclidiana* ou *lonxitude* dun vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ ó número real $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

Se $x \in \mathbb{R}$, entón $\|x\| = |x|$, é dicir, a norma en $\mathbb{R}$ é o valor absoluto. Por outro lado, como $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, a norma euclidiana en $\mathbb{R}^2$ dáanos a lonxitude do vector (x, y) .

Proposición 1.16 (Propiedades da norma euclidiana) Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, verifícase:

1. $\|x\| = 0$ se, e só se, $x = 0$.
2. $\|tx\| = |t| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
4. $\| -x \| = \|x\|$
5. $\|x\| \geq 0$

Definición 1.17 Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ é unitario se $\|x\| = 1$.

Proposición 1.18 Sexan x e y vectores de $\mathbb{R}^n$.

1. $x \cdot x = \|x\|^2$
2. x e y teñen a mesma dirección se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $y = \lambda x$ (x e y son linealmente dependentes).
3. Se $x \neq 0$, entón o vector $\frac{x}{\|x\|}$ é unitario e ten a mesma dirección que x .

Definición 1.19 A distancia euclidiana entre dous puntos $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ ó número real $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.

Observemos que, se $x, y \in \mathbb{R}$, entón $d(x, y) = |x - y|$.

Proposición 1.20 (Propiedades da distancia euclidiana) Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, verifícase:

1. $d(x, y) = 0$ se, e só se, $x = y$.
2. $d(x, y) \geq 0$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$
4. $d(x, y) = d(y, x)$.

Exemplo 1.21 Vexamos algúns exemplos relacionados coas definicións anteriores:

1. $(1, 2, -1) \cdot (0, 2, 3) = 1$
2. $\| (1, 2, -3) \| = \sqrt{14}$
3. $d((1, 5), (-3, 9)) = \| (4, -4) \| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Teorema 1.22 O ángulo θ que forman dous vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ vén dado por $\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}$.

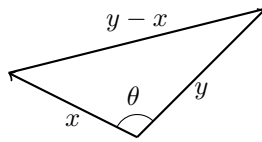


Figura 1.3: Ángulo que forman dous vectores

Demostración. Utilizando o teorema do coseno, $\|y - x\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \|y\| \cos(\theta)$ e, polas propiedades do produto escalar, $\|y - x\|^2 = (y - x) \cdot (y - x) = \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2x \cdot y$. Igualando, agora, os dous segundos membros das expresións anteriores obtemos que

$$\|y\|^2 + \|x\|^2 - 2x \cdot y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \|y\| \cos(\theta).$$

É dicir, $2x \cdot y = 2\|x\| \|y\| \cos(\theta)$ e, polo tanto, $\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}$. ■

Evidentemente, se $x, y \in \mathbb{R}^n$, verifícase que $x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos(\theta)$.

Corolario 1.23 Dous vectores non nulos $x, y \in \mathbb{R}^n$ son ortogonais (ou perpendiculares) se, e só se, $x \cdot y = 0$.

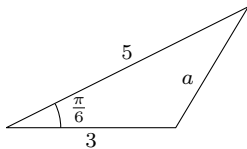
Exemplo 1.24 Vexamos algúns exemplos:

1. Os vectores $(1, 2, 2)$ e $(-4, 3, -1)$ son ortogonais.

2. Os vectores $(2, 2\sqrt{3})$ e $(2\sqrt{3}, 2)$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radiáns.
3. Os vectores $(-\sqrt{3}, 1)$ e $(\sqrt{3}, 1)$ forman un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ radiáns.
4. Os vectores $(1, 1)$ e $(1, 0)$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radiáns.
5. Os vectores da base canónica en $\mathbb{R}^3$ son unitarios e ortogonais dous a dous.

Exercicios

6. Calcula a lonxitude dos seguintes vectores e obtén os vectores unitarios correspondentes:
 - a) $a = (4, 1)$ b) $b = (2, -2)$ c) $c = (3, 4)$ d) $d = (8, -6)$
 - e) $e = (4, 1, 0)$ f) $f = (-3, 12, -3)$ g) $g = (2, 4, -1)$ h) $h = (-1, 1, -2)$
7. Son perpendiculares os vectores a e b do exercicio anterior? E os vectores e e f ? Que ángulo forman os vectores g e h ? Dá un vector perpendicular a h e un paralelo a d .
8. Calcula o ángulo que forman os vectores
 - a) $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$ b) $(-2, 0)$ e $(2, 0)$ c) $(2, 0, 2)$ e $(-1, -1, 0)$
9. É conmutativo o produto escalar? Razona a resposta.
10. Dúas persoas exercen forzas sobre un obxecto situado derriba dunha mesa. Esas forzas son de magnitudes 6 N e 8 N, respectivamente, e o ángulo entre as súas liñas de acción é de $\frac{\pi}{2}$ radiáns. Cal será a forza resultante exercida sobre o obxecto?
11. Calcula o lado a do triángulo da figura adxunta:



1.2. Matrices

Definición 1.25 Chamamos matriz sobre $\mathbb{R}$ de orde $m \times n$ a todo conxunto formado por $m \times n$ elementos de $\mathbb{R}$, ordenados en m filas e n columnas. O elemento situado na fila i -ésima e na columna k -ésima denótase por a_{ik} .

$\mathcal{M}_{m \times n}$ denotará o conxunto das matrices sobre $\mathbb{R}$ de orde $m \times n$.

Así, un elemento $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ será do xeito $A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, onde $a_{ik} \in \mathbb{R}$ está situada na fila i -ésima e na columna k -ésima de A , para todo i, k .

Exemplo 1.26 Un elemento $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}$ será, por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Se $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, entón $B \in \mathcal{M}_{2 \times 3}$ e $C \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$.

Se consideramos en $\mathcal{M}_{m \times n}$ as operacións

$$A + B = (a_{ik}) + (b_{ik}) \text{ e } rA = (ra_{ik}), \text{ onde } r \in \mathbb{R},$$

verifícase que $\mathcal{M}_{m \times n}$ ten estrutura de espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$, sendo unha base para este espazo o conxunto $\{E_{rs} : r = 1, \dots, m; s = 1, \dots, n\}$, onde E_{rs} representa a matriz que ten tódolos elementos iguais a cero agás o correspondente á r -ésima fila e s -ésima columna que vale 1. Polo tanto, a dimensión de $\mathcal{M}_{m \times n}$ é $m \times n$.

Exemplo 1.27 Se $m = n = 2$, o elemento neutro é $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e a identidade $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A base canónica de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ é $\mathcal{B} = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Recordamos, a continuación, algúns tipos especiais de matrices.

Definición 1.28 Unha matriz $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ dise diagonal se $a_{ik} = 0$, para todo $i \neq k$.

Un exemplo de matriz diagonal é a matriz identidade que é aquela matriz diagonal na que $a_{ii} = 1$, para todo $i = 1, \dots, n$.

A matriz trasposta de $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ é a matriz que se obtén cambiando en A filas por columnas. Denótase por A^t . Obviamente, $A^t \in \mathcal{M}_{n \times m}$ e $(A^t)^t = A$.

Matriz simétrica é aquela matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ que coincide coa súa trasposta, é dicir, $A^t = A$.

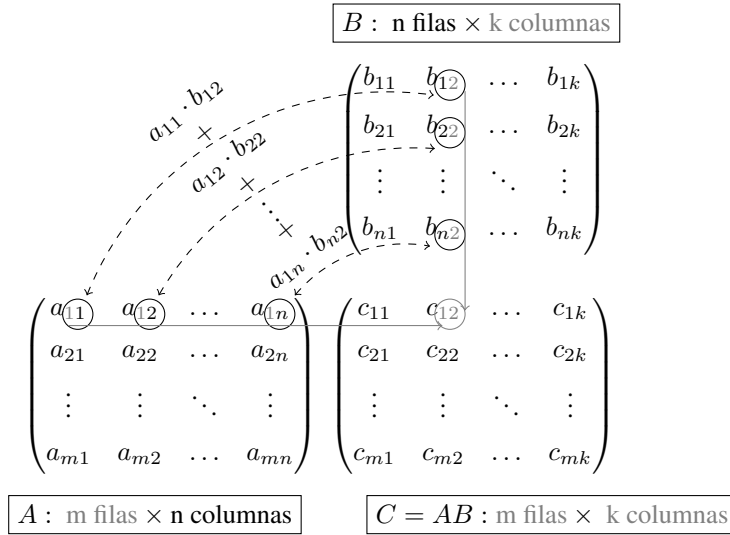
Definición 1.29 O rango dunha matriz é o máximo número de vectores columna linealmente independentes que posúe. Este número coincide co máximo número de vectores fila linealmente independentes que a matriz posúe.

Definición 1.30 (Produto de matrices) Sexan $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ e $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n \times k}$. A matriz produto de A por B é a matriz $A \cdot B \in \mathcal{M}_{m \times k}$ dada por:

$$A \cdot B = (c_{ik}) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right).$$

O elemento ik da matriz produto é o produto escalar da fila i -ésima da matriz A pola columna k -ésima da matriz B . Daquí a necesidade de que o número de columnas de A sexa igual ó número de filas de B .

Exemplo 1.31 Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, entón:

Figura 1.4: Produto de matrices $C = AB$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

O produto de matrices non é conmutativo, xa que incluso é posible que non se poidan multiplicar se cambiamos a orde dos factores. No caso de matrices cadradas da mesma orde, mesmo sendo posible permutar a orde dos factores, non é difícil atopar exemplos que amosen a non conmutatividade do produto.

Definición 1.32 A matriz inversa de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ é unha matriz $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ que verifica que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, onde I é a matriz identidade de orde $n \times n$.

A inversa de A , se existe, é única.

Exemplo 1.33 Sexan $D = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ e A, B, C as matrices do exemplo 1.26. Entón:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3A = 3 \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ e } -2C = -2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = DC$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 2}, \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}.$$

1.2.1. Determinante dunha matriz

Definición 1.34 Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, definiremos o determinante de A , $\det(A)$ ou $|A|$, por recorrencia:

1. Se $n = 1$, $A = (a)$ e $\det(A) = a$.

2. Se $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

3. En xeral, se $A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, definimos o determinante da matriz A como $\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$, onde $A_{ik} = (-1)^{i+k} \Delta_{ik}$, sendo Δ_{ik} o determinante da matriz de orde $n-1$ que se obtén de A ó suprimir a fila i -ésima e a columna k -ésima.

Seguindo coa notación da anterior definición, A_{ik} denomínase adxunto do elemento a_{ik} , mentres que Δ_{ik} recibe o nome de menor complementario de a_{ik} .

Definición 1.35 Sexa $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. A matriz $Adx(A) = (A_{ik})$ formada polos adxuntos de cada un dos elementos a_{ik} de A , chámase matriz adxunta de A .

Exemplo 1.36 Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, o determinante de A é o número real:

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Esta fórmula chámase Regra de Sarrus.

Proposición 1.37 Enumeramos, a continuación, algunhas das propiedades dos determinantes:

1. Un determinante pode desenvolverse por calquera fila (ou columna).
2. Ó intercambiar dúas filas (ou columnas), o determinante cambia de signo.
3. Un determinante con dúas filas (ou columnas) iguais é nulo.
4. Un determinante é nulo se, e só se, as súas filas (ou columnas) son vectores linealmente dependentes.

5. O determinante non varía se a unha fila (ou columna) se lle suma unha combinación lineal das restantes.
6. O determinante dunha matriz coincide co da súa trasposta.
7. O determinante do produto de dúas matrices cadradas é o produto dos determinantes.
8. Se B é unha matriz que se obtén de multiplicar por un número λ só unha fila ou columna dunha matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, entón $\det(B) = \lambda \det(A)$.
9. Desta propiedade temos que $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, onde $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$.

Proposición 1.38 Para que $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ sexa invertible é necesario e suficiente que $\det(A) \neq 0$.

Se A ten inversa, entón $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A_{ik}^t)$, onde A_{ik}^t son os adxuntos da matriz A^t .

Exemplo 1.39 Vexamos algúns exemplos de cálculo do determinante e da inversa dunha matriz:

1. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$ e, polo tanto, non existe A^{-1} .

2. Como o determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ vale 1, podemos calcular a súa inversa:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{Adx}(A^t) = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Podemos utilizar as propiedades dos determinantes para simplificar os cálculos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & -2 & -15 \\ 0 & 7 & 6 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -5 \\ -6 & -2 & -15 \\ 7 & 6 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -5 \\ -10 & 0 & -20 \\ 19 & 0 & 29 \end{vmatrix} \\ = (-2) \begin{vmatrix} -10 & -20 \\ 19 & 29 \end{vmatrix} = -180.$$

Proposición 1.40 O rango dunha matriz coincide coa orde do determinante de maior orde distinto de cero contido na matriz.

Na práctica é de grande utilidade usar este resultado para calcular o rango dunha matriz. Podemos usalo ademáis para averiguar se un conxunto de vectores é linealmente independente. Por exemplo

os vectores $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ son linealmente independentes porque $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ e así

$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$, é dicir, as tres columnas da matriz son un conxunto de vectores linealmente independente. En xeral construiremos unha matriz colocando os vectores en columna (ou en fila) e estudaremos o seu rango. Os vectores involucrados no menor que nos da o rango son linealmente independentes e os demais son dependentes deles.

1.2.2. Matriz de cambio de base

Daremos a definición de matriz de cambio de base en $\mathbb{R}^3$, que é facilmente xeneralizable a $\mathbb{R}^n$. Observemos, en primeiro, lugar que:

1. Dúas bases $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ en $\mathbb{R}^3$ poden ser consideradas como dúas matrices $B_1 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$ e $B_2 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$, onde a columna i -ésima de cada matriz contén as coordenadas do vector i -ésimo da base correspondente.
2. Un vector calquera $x \in \mathbb{R}^3$ que ten como coordenadas $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3)$ nas bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, respectivamente, pode escribirse,

$$\begin{aligned} x &= x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} X^t = B_1 X^t \\ x &= y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} Y^t = B_2 Y^t \end{aligned}$$

3. Como $\det(B_1) \neq 0 \neq \det(B_2)$, e tendo en conta que $B_1 X^t = B_2 Y^t$, por exemplo, se coñecemos as coordenadas do vector x na base $\mathcal{B}_1$, $X = (x_1, x_2, x_3)$, podemos obter as coordenadas deste vector na nova base $\mathcal{B}_2$, mediante a operación $Y^t = B_2^{-1} B_1 X^t$.
4. Se $B_1 = \mathcal{C}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$, entón $\mathcal{C}$ é a matriz identidade e a expresión anterior simplifícase a $Y^t = B_2^{-1} X^t$. Se as coordenadas coñecidas fosen na base $\mathcal{B}_2$, entón $X^t = B_2 Y^t$.

Definición 1.41 A matriz $B_2^{-1} B_1$ denomínase matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ e denótase por $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2} = B_2^{-1} B_1$.

Exemplo 1.42 Consideremos as bases $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathcal{B}_1 = \{(1, -1, 1), (-1, 1, 0), (0, -1, 1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ en $\mathbb{R}^3$. Entón

1. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2} = B_2^{-1} B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
2. $\mathcal{M}_{\mathcal{C} \mathcal{B}_1} = B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2 \mathcal{C}} = B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Se $(1, -3, 2)$ son as coordenadas de x_C respecto da base canónica $\mathcal{C}$, na base $\mathcal{B}_1$ valen $x_{\mathcal{B}_1} =$

$$B_1^{-1}x_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ As coordenadas deste mesmo vector na base}$$

$$\mathcal{B}_2 \text{ son } x_{\mathcal{B}_2} = B_2^{-1}x_C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Se rotamos no plano os eixes coordenados $\frac{\pi}{4}$ radiáns no sentido contrario ás agullas do reloxo (Figura 1.5), entón o vector e_1 da base canónica pasa a ser o vector unitario $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e e_2 pasa a ser o vector $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Así, a matriz de cambio de base será

$$\mathcal{M}_{CB} = B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

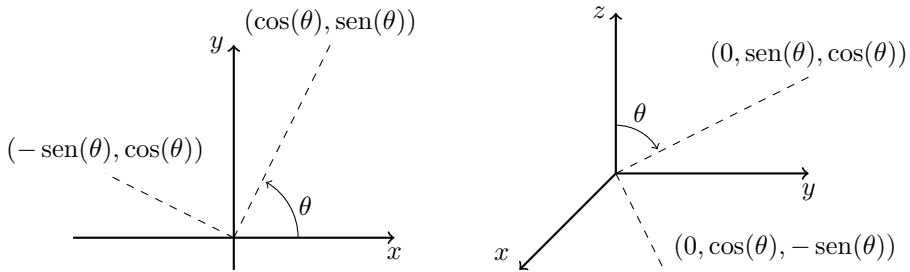


Figura 1.5: Rotacións de ángulo θ

5. En xeral, se rotamos θ radiáns no mesmo sentido, entón a matriz de cambio de base será,

$$\mathcal{M}_{CB} = B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

6. Se en $\mathbb{R}^3$ fixamos o eixe x (ou sexa e_1) e, sobre este eixe, facemos rotar os outros dous θ radiáns no sentido das agullas do reloxo (Figura 1.5), entón o vector e_2 pasará ó vector $(0, \cos(\theta), -\text{sen}(\theta))$ e e_3 pasará ó vector $(0, \text{sen}(\theta), \cos(\theta))$. Neste caso, a matriz de cambio

$$\text{de base é, } \mathcal{M}_{CB} = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Exercicios

12. Consideremos as matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E = (1 \ 0 \ 8)$. Calcula

a) $\det(A)$, $\det(B)$ e $\det(AB)$ b) DE c) ED d) $3A + 7B$ e) B^3
 f) $C^t A$ g) $(BC)^t$ h) CE i) AD j) $(A - B)C$

13. Calcula o valor dos determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} \quad E = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad F = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & \sin(x) \\ 0 & \sin(x) & -\cos(x) \end{vmatrix}$$

14. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & k \end{pmatrix}$, calcula o valor de k para que se cumpra que:

a) $A + B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ b) $AB = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ c) $2A - 4B = \begin{pmatrix} -26 & -12 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$

15. Indica para que valores dos parámetros a , b , c , se cumpre que $AB^t = C$, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

16. Sexa $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Proba que $A^3 = I$. Usa este resultado para calcular A^{-1} .

17. Para que valores de m teñen inversa as matrices:

a) $\begin{pmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} m & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} m & -1 & -5 \\ 10 & 4 & -1 \\ 4 & 2m & 9 \end{pmatrix}$

18. Calcula o rango das seguintes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & -7 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

19. Estuda o rango das seguintes matrices, segundo os valores de m .

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -m \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & m & m \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} m & 3 & 1 \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} m & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & m & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$

20. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (0, 1, 0), (0, -1, 1)\}$.

- a) Calcula as matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, sendo $\mathcal{C}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$.
- b) Se x ten coordenadas $(-2, 1, 3)$ respecto da base $\mathcal{B}$, determina as súas coordenadas respecto da base canónica.
- c) Obtén as coordenadas na base $\mathcal{B}$ do vector $v \in \mathbb{R}^3$ que ten por coordenadas (x, y, z) respecto da canónica.

1.3. Formas cuadráticas

1.3.1. Autovalores dunha matriz cadrada

Definición 1.43 Diremos que o número real λ é un autovalor (ou valor propio) da matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ se existe un vector $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \theta_{\mathbb{R}^n}$, de maneira que $Ax = \lambda x$.

Aínda que outros casos non serán do noso interese, realmente non é preciso que λ sexa un número real, podería ser un número complexo calquera.

Exemplo 1.44 Comezamos cun exemplo sinxelo. $\lambda = 3$ é un autovalor da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ porque, por exemplo, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ademais, -2 tamén é un autovalor de A pois $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Proposición 1.45 $\lambda \in \mathbb{R}$ é un autovalor da matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ se, e só se, $\det(A - \lambda I) = 0$, sendo I a matriz identidade de orde $n \times n$.

Demostración. $\lambda \in \mathbb{R}$ é un autovalor de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ se, e só se, existe un vector $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \theta_{\mathbb{R}^n}$, de maneira que $Ax = \lambda x$ (é dicir, se existe un vector non nulo, $x \in \mathbb{R}^n$, de maneira que $(A - \lambda I)x = \theta_{\mathbb{R}^n}$). Daquela, $\lambda \in \mathbb{R}$ é un autovalor de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ se, e só se, o sistema $(A - \lambda I)x = \theta_{\mathbb{R}^n}$ ten solución distinta da trivial (é compatible indeterminado) o cal, polo teorema de Rouché- Fröbenius, é equivalente a dicir que $\det(A - \lambda I) = 0$. ■

Corolario 1.46 $\lambda = 0$ é un autovalor de A se, e só se, A non é invertible.

Definición 1.47 Chámase polinomio característico de $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ ó polinomio seguinte:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0.$$

Os autovalores de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ son, pois, as raíces reais do polinomio característico de A . Daquela, unha matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ ten, ó sumo, n autovalores reais.

Exemplo 1.48 Vexamos un par de exemplos de cálculo dos autovalores dunha matriz.

1. O polinomio característico da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ é

$$P(\lambda) = \det \left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Os autovalores de A son aqueles valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, é dicir, $\lambda = 3$ e $\lambda = -2$.

2. O polinomio característico da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ é

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 15\lambda + 18. \end{aligned}$$

Os autovalores de A son aqueles números reais $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 15\lambda + 18 = 0$. Entón, $\lambda = 6$ é o único autovalor real desta matriz.

3. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, entón $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 + 16$.

Dado que $-\lambda^3 + 12\lambda^2 + 16 = 0$ se, e só se, $\lambda = -2$ (con multiplicidade 2) ou $\lambda = 4$, os autovalores de A son -2 e 4 .

Exercicios

21. Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, calcula os autovalores das matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ e

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

22. Calcula o polinomio característico e os autovalores das seguintes matrices:

$$\begin{array}{llll}
\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{b)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \text{d)} \begin{pmatrix} -7 & 5 & 5 \\ -5 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\
\text{e)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{f)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{g)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} & \text{h)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \text{j)} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} & \text{k)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \text{l)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\text{m)} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \text{n)} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} & &
\end{array}$$

1.3.2. Formas cuadráticas. Clasificación

Definición 1.49 *A forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ asociada a unha matriz simétrica $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ é a aplicación $Q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)A(x_1, \dots, x_n)^t = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_i x_k.$$

Exemplos 1.50

1. A matriz $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ determina a forma cadrática $Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
Q(x, y) &= (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x - 3y - 3x + 5y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x(2x - 3y) + y(-3x + 5y) = \\
&= 2x^2 - 3xy - 3xy + 5y^2 = 2x^2 + 5y^2 - 6xy
\end{aligned}$$

2. A matriz $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ determina a forma cadrática $Q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ seguinte:

$$Q(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dots = -3x^2 + 5y^2 + 4xy - 2yz + 2xz$$

Observación 1.51

Como vemos este proceso é totalmente mecánico e o resultado é xa previsible. No sucesivo non deberemos realizar todas estas operacións para chegar a expresión da forma cadrática asociada a

unha matriz simétrica, senón que o faremos directamente. Así por exemplo a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$, determina a forma cadrática, $Q(x, y) = 2x^2 - 6y^2 + 2xy$.

Ainda que estamos a considerar só matrices simétricas para obter formas cadráticas, cómpre observar que calquera matriz cadrada de orde n , non necesariamente simétrica, dá lugar a unha única forma cadrática en $\mathbb{R}^n$, mais distintas matrices poden determinar unha mesma forma cadrática. Debemos ter presente que, dada unha forma cadrática, existe unha única matriz simétrica que a determina.

Así as matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ determinan a forma cadrática $Q(x, y) = 2x^2 + 5y^2 - xy$, pero $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$ é a única matriz simétrica que da lugar a Q . Se $Q(x, y, z) = -3x^2 + 5y^2 + 9xy - 2yz + 6xz$, a única matriz simétrica asociada a Q é a matriz $\begin{pmatrix} -3 & \frac{9}{2} & 3 \\ \frac{9}{2} & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Definición 1.52 *Unha forma cadrática Q en $\mathbb{R}^n$ (ou a matriz simétrica asociada) dise que é*

1. *definida positiva se $Q(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \theta_{\mathbb{R}^n}$.*
2. *semidefinida positiva se $Q(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*
3. *definida negativa se $Q(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \theta_{\mathbb{R}^n}$.*
4. *semidefinida negativa se $Q(x) \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*
5. *non definida ou indefinida se existen $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $Q(x) < 0$ e $Q(y) > 0$.*

Exemplo 1.53

1. A forma cadrática $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 3z^2$ é definida positiva.
2. A forma cadrática $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x, y) = x^2 - y^2$ é indefinida porque, por exemplo, $Q(1, 0) > 0$ e $Q(0, 1) < 0$.
3. A forma cadrática $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ é semidefinida positiva porque $Q(x, y) = (x - y)^2 \geq 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Esta forma cadrática non é definida positiva pois, por exemplo, $Q(1, 1) = 0$.

Proposición 1.54 *Sexan $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ a matriz simétrica asociada a Q e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os autovalores de A . Verifícase:*

1. *Q é definida positiva se, e só se, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$.*
2. *Q é semidefinida positiva se, e só se, $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$.*
3. *Q é definida negativa se, e só se, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_n < 0$.*

4. Q é semidefinida negativa se, e só se, $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0, \dots, \lambda_n \leq 0$.
5. Q é indefinida se, e só se, existen $i, k \in \{1, \dots, n\}$ tales que $\lambda_i > 0$ e $\lambda_k < 0$.

Esta propiedade permítenos clasificar de xeito inmediato as matrices diagonais, xa que para estas matrices os elementos da diagonal principal son os autovalores. Así por exemplo, $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

é definida negativa, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é semidefinida positiva e $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ é indefinida.

Proposición 1.55 Sexa $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ a matriz simétrica asociada á forma cuadrática Q e

denotemos por $D_r = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$, para todo $r = 1, \dots, n$. Verifícase:

1. Q é definida positiva se, e só se, $D_r > 0$, para todo $r = 1, \dots, n$.
2. Q é definida negativa se, e só se, $(-1)^r D_r > 0$, para todo $r = 1, \dots, n$.
3. Se $D_r > 0$, para todo $r = 1, \dots, n-1$ e $D_n = 0$, entón Q é semidefinida positiva.
4. Se $(-1)^r D_r > 0$, para todo $r = 1, \dots, n-1$ e $D_n = 0$, entón Q é semidefinida negativa.
5. Se Q non é definida positiva nin definida negativa e $\det(A) \neq 0$, entón Q é indefinida.

Exemplo 1.56 Vexamos como se aplica na práctica este último resultado:

1. A forma cuadrática $Q(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - 4z^2 - 2xy - 2xz$ ten como matriz simétrica asociada a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Neste caso, os determinantes que precisamos son $D_1 = -1$, $D_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 1$ e $D_3 = \det(A) = -2$. Polo tanto, Q é definida negativa.
2. A única matriz simétrica que determina a forma cuadrática $Q(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4xy$ é a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e os determinantes que necesitamos son $D_1 = 1$; $D_2 = \det(A) = -1$. Q é, pois, indefinida.
3. A única matriz simétrica que determina a forma cuadrática $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy$ é a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e os determinantes necesarios son $D_1 = 2$; $D_2 = 0$; $D_3 = 0$. O criterio dos menores só asegura que Q non é definida positiva nin definida negativa, pero non clasifica a forma cuadrática. Se calculamos os autovalores de A obtemos que son $\lambda = -1, 0$ e 4 , Q é, pois, indefinida.

Exercicios

23. a) Comproba que, se $r \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, entón $Q(rx) = r^2Q(x)$.
 b) Sexa $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Q(1, 1) = 2$ e $Q(4, 4) = 4$. Pode ser Q unha forma cuadrática?
 c) Se $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é unha forma cuadrática verificando $Q(1, -2, 5) = 3$, calcula $Q(-2, 4, -10)$.
24. Clasifica, segundo o seu signo, as seguintes formas cadráticas:
- $Q(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy + 12xz + 6yz$
 - $Q(x, y) = -2x^2 - y^2 + xy$
 - $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + xz$
 - $Q(x, y, z) = -x^2 - 4y^2 - z^2 + 2xy$
 - $Q(x, y) = y^2 + 2xy$
 - $Q(x, y) = x^2 + 5y^2 + 4xy$
 - $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xy - 2yz - 2xz$
 - $Q(x, y, z) = 4x^2 - y^2 + 2xy + 2yz$
 - $Q(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - 4z^2 - 2xy - 2xz$
 - $Q(x, y, z, t) = x^2 - 2xt + y^2 + 2zt + z^2$
25. Estuda, segundo os valores de $a \in \mathbb{R}$, o signo de $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4axy$.

Exercicios resoltos

1. Sexa A o vector de coordenadas (A_1, A_2) que se obtén ao xirar o vector a de coordenadas (a_1, a_2) un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radiáns no senso contrario ás agullas do reloxo. Proba que $A_1 = -a_2$ e $A_2 = a_1$.

Solución. Resolvemos, en A_1, A_2 , o sistema de ecuacións

$$\begin{aligned} a_1 A_1 + a_2 A_2 &= 0 \\ A_1^2 + A_2^2 &= a_1^2 + a_2^2 \end{aligned}$$

e temos como solucións $(A_1, A_2) = (-a_2, a_1)$ que corresponde á rotación ortogonal no sentido contrario ás agullas do reloxo e $(A_1, A_2) = (a_2, -a_1)$ que corresponde á rotación ortogonal no sentido das agullas do reloxo.

2. Demostra que o vector v de coordenadas (a, b) é perpendicular á recta $ax + by + c = 0$.

Solución. A recta $ax + by + c = 0$ é paralela á recta $ax + by = 0$ que pasa pola orixe de coordenadas, polo que é suficiente probar que (a, b) é perpendicular á recta $ax + by = 0$. Pero isto é inmediato porque calquera vector contido nesta recta é da forma (x, y) e $(x, y) \cdot (a, b) = 0$.

3. Sexa a un vector de módulo 4 que forma co eixe X un ángulo de $\frac{\pi}{7}$ radiáns. Se $b = (2, 2)$, calcula $a \cdot b$.

Solución. $a \cdot b = 8\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{7})$.

4. Un barco desprázase 32,5 km en dirección leste e logo xira 0,72 radiáns en dirección NE. Despois de se desprazar 16,18 km nesa dirección, a que distancia do punto de partida se atopa?

Solución. $d = \sqrt{32,5^2 + 16,18^2 - 2 \cdot 32,5 \cdot 16,18 \cdot \cos(\pi - 0,72)} = 45,9208 \text{ km}$.

5. Para evitar unha tempestade, un avión voa en dirección $\frac{\pi}{3}$ radiáns NE desde unha cidade A . Despois de percorrer 190 km, xira $\frac{\pi}{18}$ radiáns en dirección NE desprazándose 280 km ata outra cidade B . A que distancia se atopan A e B ?

Solución. $d = \sqrt{190^2 + 280^2 - 2 \cdot 190 \cdot 280 \cdot \cos(\pi - \frac{\pi}{18})} = 468,2772 \text{ km}$.

6. Consideremos a matriz $R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

a) Calcula R^{-1} e R^2 . Obtén R^n , para $n \in \mathbb{N}$

b) Que representan as matrices calculadas no apartado anterior?

Solución. $R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $R^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$ e
 $R^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$.

R^{-1} é a matriz de cambio de base correspondente ó xiro dos eixes coordenados θ radiáns no sentido contrario ás agullas do reloxo e R é a matriz de cambio de base correspondente ó xiro dos eixes coordenados θ radián no sentido das agullas do reloxo.

R^n é a matriz de cambio de base correspondente ó xiro dos eixes coordenados $n\theta$ radiáns no sentido das agullas do reloxo.

1.4. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

- Para os vectores $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, 0)$ e $w = (0, 1, 1)$ unha das seguintes afirmacións é FALSA:
 - u , v e w son linealmente independentes.
 - $u = v + w$.
 - $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ é unha base de $\mathbb{R}^3$.
 - u e $(1, 0, -1)$ on ortogonais.
- O ángulo que forman os vectores $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$ vale
 - $\frac{\pi}{6}$ radiáns.
 - $\frac{\pi}{4}$ radiáns.
 - $\frac{\pi}{3}$ radiáns.
 - π radiáns.

3. Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Unha das seguintes afirmacións é FALSA.

a) $B^t A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

4. O rango da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ vale: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

5. A matriz de cambio da base $B_1 = \{(-3, 1), (3, 1)\}$ á base $B_2 = \{(2, 1), (1, 1)\}$ é:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

6. Unha das seguintes matrices é non definida.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

7. Os autovalores da matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ son:

a) -2 e 1 b) -2 e -6 c) 0 e 2 d) -3 e 2

8. A forma cadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy - 2yz$ é

a) non definida. b) definida negativa. c) semidefinida positiva. d) definida positiva.

1.5. Introducción a MATLAB. Vectores e matrices con MATLAB

Imos, en primeiro lugar, repasar algúns dos comandos que máis empregaremos cando usemos MATLAB para resolver os problemas propostos en cada un dos capítulos deste libro.

1.5.1. Introducción a MATLAB. Comandos básicos

Comezamos con algúns comandos básicos relacionados coa axuda do programa:

Comando MATLAB	Funcionamento do comando
<code>help comando</code>	resume o funcionamento do comando indicado
<code>lookfor clave</code>	listado de comandos que conteñen na súa axuda a palabra “clave”
<code>format</code>	formato de saída das variables (short, long, rat...)

No nivel mais elemental MATLAB asemella unha calculadora científica. Cada vez que efectuamos unha operación o programa almacena o resultado na variable chamada `ans` (de «answer», resposta). Naturalmente, podemos escoller o nome da variable na que se garda o resultado dunha operación concreta. O separador decimal é o punto e a prioridade dos parénteses é a habitual. Os símbolos e ordes que sirven para facer as operacións aritméticas elementais son

Operadores aritméticos				
Suma	Resta	Produto	División	Potencia
+	−	*	/	^

A sintaxe das funcións elementais é moi sinxela. Abonda con escribir o nome da correspondente orde seguido, entre parénteses, do argumento. Os comandos correspondentes as funcións elementais son:

Comando MATLAB	Funcionamento do comando
<code>sin</code>	función seno
<code>asin</code>	función arcoseno
<code>cos</code>	función coseno
<code>acos</code>	función arcocoseno
<code>tan</code>	función tanxente
<code>atan</code>	función arcotanxente
<code>exp</code>	función exponencial
<code>log</code>	función logaritmo neperiano
<code>sqrt</code>	raíz cadrada
<code>abs</code>	valor absoluto (módulo no caso de números complexos)

Cómpre sinalar que cando traballamos con MATLAB sempre debemos expresar os ángulos en radíans. Vexamos agora exemplos que nos axudarán a entender como se empregan estes comandos:

Exemplo 1.57 Por exemplo, para calcular unha aproximación de $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, debemos teclear:

```
>> tan(3*pi/2)
```

Para obter o valor aproximado de $\sqrt{\cos^3 7}$, e^{-5} e $\ln\left(\frac{3 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6}\right)$ procedemos do seguinte xeito

```
>> sqrt(cos(7)^3), exp(-5), log((3+sin(pi/2))/6)
```

1.5.2. Vectores e matrices con MATLAB

Os vectores en MATLAB escríbense como unha fila de números ordenados e encerrados entre corchetes. Por exemplo:

```
>> x=[1 2 -1], y=[4, 2, -3]
```

As operacións habituais de suma e produto por un escalar realízanse do seguinte xeito:

```
>> suma=x+y, produto=3*x
```

MATLAB indícanos que a suma $x + y$ é $(5, 4, -4)$ e o produto $3x$ vale $(3, 6, -3)$.

O comando `dot(x, y)` devolve o produto escalar dos vectores x e y . Se x e y son vectores fila, `dot(x, y)` é o mesmo ca $y' * x$, onde y' é o vector y^t .

Exemplo 1.58 O produto escalar dos vectores $x = (1, 2, -1)$ e $y = (4, 2, -3)$ calcúlase, pois, dun dos dous xeitos seguintes:

```
>> x=[1 2 -1], y=[4, 2, -3]
>> prod=dot(x,y)
>> prod=x*y'
```

O resultado que nos devolve o programa é `prod=11`.

Para calcular a norma dun vector x utilizaremos `norm(x)`. Para obter distancia entre dous vectores x e y ou o ángulo formado por eles podemos, pois, empregar as sentenzas

```
>> distxy=norm(x-y)
>> angulo=acos(x*y'/(norm(x)*norm(y)))
```

O segundo resultado virá, por suposto, expresado en radiáns.

As filas dunha matriz en MATLAB son vectores e as distintas filas van separadas por un punto e coma. As sentenzas

```
>> A=[1 4 2; 3 -1 -2; 0 -1 2], B=[1 3 -1; 2 -1 1; 6 4 0], X=[1;2;3]
```

introducen as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exemplo 1.59 As matrices $A + B$, $3A$, AB e AX calcúlanse coas sentenzas

```
>> SUMA=A+B, PROD=3*A, AB=A*B, AX=A*x
```

Na seguinte táboa recolleemos algunhas sentenzas básicas relacionadas co cálculo matricial:

MATLAB	Funcionamento do comando
<code>size(A)</code>	devolve a orde da matriz A
<code>rank(A)</code>	devolve o rango da matriz A
<code>det(A)</code>	devolve o determinante da matriz A
<code>inv(A)</code>	devolve a inversa da matriz A
<code>eig(A)</code>	devolve os autovalores da matriz A
<code>eye(n)</code>	xera a matriz identidade de orde n
<code>a:t:b</code>	xera elementos limitados por b, espaciados t unidades e comezando en a

A trasposta dunha matriz, M , dada obtense tecleando M' na fiestra de comandos.

Exemplo 1.60 Para a anterior matriz A , calculamos o determinante, a inversa, a trasposta e os autovalores:

```
>> DETERM=det(A), INVA=inv(A), TRASPA=A', AUTOVALORES=eig(A)
```

1.6. Soluciones dos exercicios propostos

1. a) Linealmente independentes

1. b) $(-1, 2) = 2(1, 1) + (-2)(\frac{3}{2}, 0)$

1. c) $(1, 1, 2) = (0, 2, 1) + (1, -1, 1)$

1. d) Linealmente independentes

1. e) Linealmente independentes

2. $-5, 2, 6$

6. b) $\|b\| = 2\sqrt{2}; \frac{b}{\|b\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

6. c) $\|c\| = 5; \frac{c}{\|c\|} = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$

6. e) $\|e\| = \sqrt{17}; \frac{e}{\|e\|} = (\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}, 0)$

6. h) $\|h\| = \sqrt{6}; \frac{h}{\|h\|} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$

8. a) $\pi/3$

8. b) π

8. c) $2\pi/3$

11. $a = \sqrt{34 - 15\sqrt{3}} = 2,83$

12. a) $\det(A) = 34, \det(B) = 5,$

$\det(AB) = 170$

12. b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12. c) 1

12. d) $\begin{pmatrix} 4 & 14 & 2 \\ 3 & -5 & 23 \\ 7 & 16 & 26 \end{pmatrix}$

12. e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 8 & 13 & 16 \\ 8 & 16 & 17 \end{pmatrix}$

12. f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -14 \end{pmatrix}$

12. g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -6 & -6 \end{pmatrix}$

12. h) $(1 \quad -16)$

12. i) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

12. j) $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 8 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

13. $D = abc, E = 0, F = -2$

14. a) $k = 2$

14. b) $k = -\frac{1}{2}$

14. c) $k = -1$

15. $a = 2, b = 1, c = -1$

16. $A^{-1} = A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

17. a) Para $m \neq 0, m \neq 2$ 17. b) Para todo $m \in \mathbb{R}$ 17. c) Para $m \neq 3, m \neq 29$

18. a) 2 b) 2 c) 2 d) 3

21. Para $A: \lambda = a, \lambda = b, \lambda = c$ 21. Para $B: \lambda = 0, \lambda = b, \lambda = 2a$ 21. Para $C: \lambda = a, \lambda = -a$ 22. a) $\lambda = 2$ (dobre), $\lambda = 3$ 22. b) $\lambda = 1$ (dobre), $\lambda = 2$ 22. c) $\lambda = 2$ (dobre), $\lambda = 0$ 22. d) $\lambda = -2$ (dobre), $\lambda = 3$ 22. e) $\lambda = 1$ (dobre), $\lambda = 2$ 22. f) $\lambda = 1$ (dobre), $\lambda = -1$ 22. g) $\lambda = 4$ (dobre), $\lambda = 2$ 22. h) $\lambda = 1$ (dobre), $\lambda = 2$ 22. i) $\lambda = 6, \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 22. j) $\lambda = 0, \lambda = \pm 5i$ 22. k) $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$ 22. l) $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = -1$ 22. m) $\lambda = 3, \lambda = -2$ 22. n) $\lambda = 1, \lambda = -1$ 23. c) $Q(-2, 4, -10) = 12$

24. a) Semidefinida positiva

24. b) Definida negativa

24. c) Definida positiva

24. d) Definida negativa

24. e) Indefinida

24. f) Definida positiva

24. g) Indefinida

24. h) Indefinida

24. i) Indefinida

24. j) Indefinida

Solución autoevaluación. 1b, 2c, 3c, 4c, 5b, 6b, 7d, 8c

Capítulo 2

Sistemas de ecuacións lineais

2.1. Sistemas de ecuacións lineais. Forma matricial

Definición 2.1 *Un sistema de m ecuacións lineais con n incógnitas é unha expresión formal do tipo*

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots + & a_{mn}x_n = & b_m \end{array} \right\}$$

Este sistema pode escribirse mediante a ecuación matricial $AX = b$, onde $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathcal{M}_{n \times 1}$ e $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t \in \mathcal{M}_{m \times 1}$. Isto é,

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b$$

A matriz A denomínase matriz de coeficientes do sistema, X matriz de incógnitas e b matriz de termos independentes. Denotaremos por $(A|b) \in \mathcal{M}_{m \times (n+1)}$ a matriz que ten como n primeiras columnas as columnas de A e a columna $n+1$ é o vector b . Esta matriz denomínase matriz ampliada do sistema e defíneo perfectamente.

O sistema $AX = b$ dise que é homoxéneo se $b = (0, 0, \dots, 0)^t = \theta$.

Exemplo 2.2 Os sistemas de ecuacións lineais

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ -x - y + z = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y - 3z = 0 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ 4x + y - 9z = -3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y - 3z = 0 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ 4x + y - 9z = 5 \end{array} \right\}$$

poden poñerse en forma matricial do xeito seguinte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Definición 2.3 Un vector $X_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ é unha solución do sistema $AX = b$ se verifica $AX_0^t = b$.

Un sistema de ecuacións lineais presenta dous problemas para estudar: existencia de solución e a obtención do conxunto de solucións.

Proposición 2.4 Sexa X_0 unha solución do sistema completo $AX = b$. Z é unha solución do sistema homoxéneo asociado $AX = \theta$ se, e só se, $Z + X_0$ é solución do sistema completo $AX = b$.

Este resultado afirma que as solucións do sistema completo son suma dunha solución particular deste sistema con cada unha das solucións do sistema homoxéneo asociado. Polo tanto, se o sistema completo ten solución, ten a mesma cantidade de solucións que o sistema homoxéneo asociado.

O conxunto S de solucións do sistema completo $AX = b$ é $S = X_0 + N$, onde X_0 é unha solución calquera do sistema completo e N é o conxunto de solucións do sistema homoxéneo asociado $AX = \theta$.

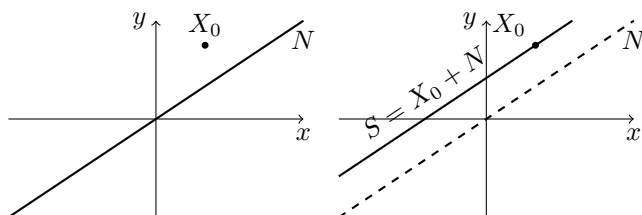


Figura 2.1: Conxuntos de solucións do sistema completo e do sistema homoxéneo asociado

Todo sistema homoxéneo ten solución, pois o vector nulo é sempre unha solución del. Ademais, se Z_0 é unha solución dun sistema homoxéneo $AX = \theta$, entón λZ_0 tamén é solución do mesmo sistema, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo un sistema homoxéneo ou ben ten unha única solución (a trivial) ou ben ten infinitas.

Definición 2.5 O sistema $AX = b$ denomínase compatible se ten solución. En caso contrario recibe o nome de sistema incompatible.

Se o sistema $AX = b$ é compatible e, ademais, ten unha única solución, diremos que é un sistema compatible determinado. Diremos que é compatible indeterminado se ten infinitas solucións.

Teorema 2.6 (de Rouché-Fröbenius) *O sistema de m ecuacións lineais con n incógnitas, $AX = b$, ten solución se, e só se, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b)$.*

Ademais, se $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = n$ o sistema é compatible determinado e se $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) < n$ é compatible indeterminado.

Exemplo 2.7 O sistema
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ -x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$
 ten como matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$. Como $\det(A) = -6$ e $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A|b)$, o sistema resulta ser compatible determinado.

Exemplo 2.8 O sistema
$$\left. \begin{array}{l} x + y - 3z = 0 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ 4x + y - 9z = -3 \end{array} \right\}$$
 ten como matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 4 & 1 & -9 & -3 \end{array} \right)$.

Para este sistema de ecuacións lineais, $\det(A) = 0$, pero $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, polo que o rango de A vale 2. O determinante da matriz que resulta de substituír a terceira columna de A pola columna de termos independentes tamén é nulo, polo que o rango da matriz ampliada tampouco vale tres, e vale 2. Entón, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 2 < 3$ e o sistema é compatible indeterminado. O feito de que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, indícanos que a terceira ecuación é combinación lineal das dúas primeiras e podemos, pois, prescindir dela. Se, ademais, pasamos a variable z ó segundo membro e resolvemos, temos infinitas solucións da forma $x = 2z - 1$, $y = z + 1$, para calquera $z \in \mathbb{R}$. O conxunto de solucións é $S = \{(-1 + 2z, 1 + z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{(-1, 1, 0) + z(2, 1, 1) : z \in \mathbb{R}\}$. Observemos que, por exemplo, $X_0 = (-1, 1, 0)$ é unha solución particular do sistema completo e o conxunto de solucións do sistema homoxéneo é a recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa pola orixe e polo punto $(2, 1, 1)$.

Exemplo 2.9 O sistema
$$\left. \begin{array}{l} x + y - 3z = 0 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ 4x + y - 9z = 5 \end{array} \right\}$$
 ten como matriz asociada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 4 & 1 & -9 & 5 \end{array} \right)$.

Neste sistema de ecuacións lineais, o rango da matriz A vale 2 pero o rango da matriz ampliada vale 3. Logo o sistema non ten solución, é incompatible.

O seguinte resumo esquematiza os resultados obtidos na sección:

■ **Sistemas non homoxéneos:**

1. Se $\text{rango } A \neq \text{rango}(A|b)$, o sistema é incompatible.
2. Se $\text{rango } A = \text{rango}(A|b) = r$, o sistema é compatible.
 - 2.1. Se $r = n$, a solución é única (sistema compatible determinado).
 - 2.2. Se $r < n$, existen infinitas solucións (sistema compatible indeterminado).

■ **Sistemas homoxéneos: $\text{rango } A = \text{rango}(A|b)$**

1. Se $\text{rango } A = n$, o sistema ten unha única solución que é o vector nulo.
2. Se $\text{rango } A < n$, o sistema ten infinitas solucións (sistema compatible indeterminado).

2.2. Sistemas de Cramer. Regra de Cramer

Definición 2.10 Un sistema $AX = b$ é de Cramer se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ e $\text{rango } A = n$.

A partir da definición dun sistema de Cramer, podemos deducir facilmente que:

1. $AX = b$ é un sistema de Cramer se, e só se, existe A^{-1} .
2. Un sistema $AX = b$ de Cramer é compatible determinado. A única solución é $X_0 = A^{-1}b$.

Exemplo 2.11 O primeiro sistema de ecuacións lineais do exemplo 2.7 é un sistema de Cramer e a

súa única solución é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, é dicir, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

A Regra de Cramer danos unha fórmula para obter a solución dun sistema de Cramer.

Proposición 2.12 (Regra de Cramer) A única solución dun sistema de Cramer, $AX = b$, é $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ donde

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

de xeito que o vector b está colocado na columna i -ésima. Isto é, o numerador é o determinante da matriz que resulta de substituír en A a i -ésima columna polo vector b .

Esta fórmula obténse porque $X = A^{-1}b$, polo que

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} (A_{ij}^t) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

En particular,

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} (b_1 A_{i1}^t + b_2 A_{i2}^t + \dots + b_n A_{in}^t) = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Observaremos que o interese práctico da regra de Cramer é pequeno pois, se $n \leq 3$, existen outros métodos de resolución de sistemas máis sinxelos de aplicar, por exemplo, o método de redución ou eliminación de ecuacións. Para o caso $n > 3$, o cálculo do determinante de matrices desta orde pode complicar tamén os cálculos, polo que estudaremos un xeito alternativo para obter as solucións destes sistemas.

Vexamos a continuación como utilizar a regra de Cramer para resolver un sistema compatible en xeral. Consideremos un sistema $AX = b$, con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, que sexa compatible; é dicir, $\text{rango } A = \text{rango}(A|b) = r \leq \min\{n, m\}$. Entón:

1. Se $r = n = m$, o sistema é de Cramer e podemos aplicar a regra directamente.
2. Se $r < m$, existen $m - r$ filas de $(A|b)$ (é dicir, $m - r$ ecuacións do sistema) que son combinación lineal das demais e, polo tanto, poden ser eliminadas a efectos de atopar a solución. Supoñamos que as r filas restantes son as primeiras

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + \cdots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \cdots & & & \cdots \\ a_{r1}x_1 & + \cdots & + a_{rn}x_n & = & b_r \end{array}$$

3. Se $r < n$, un razoamento similar lévanos a concluír que existen $n - r$ columnas da matriz A que son linealmente dependentes das restantes e que podemos supoñer, sen restar xeneralidade, que son as $n - r$ últimas. Deste xeito, podemos poñer o sistema da forma,

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + \cdots & + a_{1r}x_r & = & b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} & - \cdots & - a_{1n}x_n \\ & \cdots & & & \cdots & & \cdots \\ a_{r1}x_1 & + \cdots & + a_{rr}x_r & = & b_r - a_{rr+1}x_{r+1} & - \cdots & - a_{rn}x_n \end{array}$$

Este sistema é de Cramer, polo que a solución é única para cada valor de $x_{r+1}, \dots, x_n$.

Exemplo 2.13 Utilizaremos o teorema de Rouché e a regra de Cramer para estudar e resolver, segundo os valores de $m \in \mathbb{R}$, o sistema $\left. \begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{array} \right\}$. Este sistema, pode escribirse en forma

matricial como $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, é dicir, $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{array} \right)$.

O determinante da matriz de coeficientes vale $\det(A) = m^3 - 3m + 2$ que se anula para $m = -2$ ou $m = 1$. Daquela, se $m \neq -2$ e $m \neq 1$ o sistema é compatible e determinado, pois $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3$. Usando a regra de Cramer, obtemos a solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{m^2 - 2m + 1}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{1}{m+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{m^2 - 2m + 1}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{1}{m+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{m^2 - 2m + 1}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{1}{m+2}$$

Se $m = 1$, entón $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$ e $\text{rango } A = \text{rango}(A|b) = 1$. Daquela, o sistema é

compatible indeterminado. Como as tres ecuacións son iguais, $x+y+z = 1$, temos que, $x = 1-y-z$, $y, z \in \mathbb{R}$. O conxunto de solucións pode poñerse baixo a forma $S = \{(1-y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

Se $m = -2$, $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$. Entón $\text{rango } A = 2$ e $\text{rango}(A|b) = 3$. O sistema

é incompatible.

2.3. Método de Gauss

Polas consideracións realizadas anteriormente, a resolución dun sistema de ecuacións lineais, se ten solución, pódese reducir á resolución dun sistema de n ecuacións con n incógnitas.

Realizaremos algunhas observacións previas:

1. Dous sistemas de ecuacións lineais son equivalentes se teñen as mesmas solucións.
2. Se unha ecuación dun sistema lineal se multiplica por unha constante non nula, o sistema resultante é equivalente.
3. Se a unha ecuación dun sistema lineal se lle suma unha combinación lineal das restantes ecuacións, entón o sistema resultante é equivalente.

O método de Gauss consiste en utilizar estas propiedades para construír un sistema equivalente ó que queremos resolver que teña como matriz asociada unha matriz triangular superior, é dicir, que os coeficientes a_{ik} sexan nulos se $i > k$. Este novo sistema será moito máis fácil de resolver.

Consideremos un sistema de ecuacións lineais

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\}$$

Se $a_{11} \neq 0$, este sistema é equivalente ó que resulta de dividir a primeira ecuación entre a_{11} , resultando a matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

No caso en que $a_{11} = 0$, intercambiamos a primeira ecuación pola que teña o coeficiente de x_1 non nulo, de forma que o sistema resultante é equivalente.

Este novo sistema é equivalente ó que resulta de substituír a fila i , para $i \geq 2$, pola diferenza desa fila con a_{i1} veces a primeira, resultando como matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right)$$

Se repetimos esta operación comezando pola segunda fila, e así sucesivamente, obtemos un sistema equivalente que ten como matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & p_{12} & \dots & p_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & p_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_n \end{array} \right)$$

e este sistema ten como solución

$$\begin{aligned} x_n &= c_n \\ x_{n-1} &= c_{n-1} - p_{n-1,n}c_n \\ x_{n-2} &= c_{n-2} - p_{n-2,n-1}(c_{n-1} - p_{n-1,n}c_n) - p_{n-2,n}c_n \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$

Este método de resolución de sistemas de ecuacións, denominado método de Gauss, tamén dá información sobre a compatibilidade do sistema. En efecto, se o sistema é incompatible, é dicir, se $\text{rango } A < \text{rango}(A|b)$, aparecerán na matriz filas do tipo

$$0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c_i \quad \text{con } c_i \neq 0.$$

Se o sistema é compatible indeterminado (infinitas solucións) a última fila non nula desta matriz será da forma

$$0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ p_{m,m+1} \ \dots \ p_{mn} \mid c_m$$

Observaremos que neste caso a última ecuación é da forma

$$x_m + p_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + p_{mn}x_n = c_m$$

E se a última fila resulta da forma $0 \ \dots \ 0 \ 1 \mid c_n$, entón o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).

Exemplo 2.14 Resolveremos o sistema
$$\left. \begin{array}{l} x + y - 3z = 0 \\ 2x - y - 3z = 3 \\ 4x + y - 9z = 3 \end{array} \right\}$$
 utilizando o método de Gauss. Para iso, na matriz ampliada asociada a este sistema substituímos a segunda fila polo resultado de restarlle a primeira multiplicada por dous e substituímos a terceira polo resultado de restarlle a primeira multiplicada por catro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -9 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - 4F_1 \rightarrow F_3]{F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[-\frac{1}{3}F_2 \rightarrow F_2]{F_3 - F_2 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

No último paso, substituímos a segunda fila polo resultado de multiplicala por $-\frac{1}{3}$ e a terceira polo resultado de restarlle a segunda.

No sistema equivalente obtido, a última fila non achega ningunha información, pois resulta a ecuación $0x + 0y + 0z = 0$. Se consideramos a z como parámetro, obtemos o sistema $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3z \\ 0 & 1 & z - 1 \end{array} \right)$, que é compatible indeterminado e ten como solucións $y = z - 1$, $x = 2z + 1$, para cada $z \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.15 Empregaremos o método de Gauss para discutir e resolver simultaneamente, se-

gundo os valores de $m \in \mathbb{R}$, o sistema
$$\left. \begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{array} \right\}$$
. En forma matricial, o sistema é

$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, é dicir, $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{array} \right)$. Intercambiamos a primeira e a última ecuación e resolvemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[F_1 - F_2 \rightarrow F_2]{F_1 - F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1 - m & m - 1 & 0 \\ 0 & m - 1 & m^2 - 1 & m - 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1 - m & m - 1 & 0 \\ 0 & 0 & m^2 + m - 2 & m - 1 \end{array} \right)$$

Como $m^2 + m - 2$ se anula para $m = -2$ ou $m = 1$, se m é distinto de -2 ou de 1 , o sistema é compatible determinado e $z = \frac{m-1}{m^2+m-2} = \frac{m-1}{(m-1)(m+2)} = \frac{1}{m+2}$, entón $y = -z = -\frac{1}{m+2}$ e $x = 1 - mz - y = \frac{2-m}{m+2}$. Vexamos que ocorre cando $m = -2$ ou $m = 1$:

Se $m = 1$, $(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. As tres ecuacións son iguais, $x + y + z = 1$, e o conxunto de solucións é $\{(1 - y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$, polo que o sistema é compatible indeterminado.

Se $m = -2$, entón $(A|b) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, ou equivalentemente $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, polo que o sistema é incompatible.

Exemplo 2.16 Sexan $a, b \in \mathbb{R}$. A continuación, discutiremos e resolveremos, nos casos en que sexa

posible, o sistema $\left. \begin{array}{l} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{array} \right\}$. As matrices de coeficientes e ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix} \quad (A|b) = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A) = b(a^3 - 3a + 2)$, os únicos valores de a e b que fan que ese determinante sexa cero son $a = 1$, $a = -2$ e $b = 0$. Daquela, prevemos os seguintes casos:

1. Se $a \neq 1$, $a \neq -2$ e $b \neq 0$, entón $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3$. O sistema é, pois, compatible determinado. Se o resolvemos usando a regra de Cramer, temos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}} = \frac{a^2b - ab^2 + b^2 - ab}{a^3b - 3ab + 2b}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}} = \frac{a^2b - 2a + 2 - b}{a^3b - 3ab + 2b},$$

$$\text{e } z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}} = \frac{a^2b - ab^2 + b^2 - ab}{a^3b - 3ab + 2b}.$$

2. Se $b = 0$, a matriz de coeficientes é $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ que, claramente, ten rango 1 se $a = 1$ e rango 2 se $a \neq 1$. Vexamos qué ocorre co rango da ampliada:

a) Se $a = 1$, como $b = 0$, a matriz ampliada é $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

Entón $\text{rango}(A|b) = 2 \neq \text{rango}(A) = 1$, polo que o sistema é incompatible.

b) Se $a \neq 1$, como $b = 0$, a matriz ampliada é $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right)$ que ten rango tres, pois

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2a - 2 \neq 0. \text{ O sistema é, entón, incompatible.}$$

3. Se $b \neq 0$ e $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ e $(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entón, independentemente do valor de b , $\text{rango}(A) = 1$, pero o rango da matriz ampliada depende do valor de b :

a) Se $b = 1$, $\text{rango}(A|b) = 1$ e, daquela, o sistema é compatible indeterminado. O conxunto de solucións é $\{(x, y, 1 - x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

b) Se $b \neq 1$, $\text{rango}(A|b) = 2$. O sistema resulta, pois, incompatible.

4. Se $b \neq 0$ e $a = -2$, $A = \begin{pmatrix} -2 & b & 1 \\ 1 & -2b & 1 \\ 1 & b & -2 \end{pmatrix}$ e $(A|b) = \begin{pmatrix} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2b & 1 & b \\ 1 & b & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Temos,

logo, que $\det(A) = 0$ e $\det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, entón $\text{rango}(A) = 2$. Por outro lado, como

$\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -3(b+2)$, para determinar o rango da matriz ampliada distinguiremos os seguintes casos:

a) Se $b \neq -2$, $\text{rango}(A|b) = 3$ e o sistema resulta ser incompatible.

b) Se $b = -2$, $\text{rango}(A|b) = 2$ e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado. Resolvemos este sistema empregando o método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O sistema de partida é equivalente a $\left. \begin{array}{l} -2x - 2y + z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{array} \right\}$, que ten por conxunto de solucións $\{(x, -\frac{1+x}{2}, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

2.3.1. Método de Gauss para calcular a inversa dunha matriz

Sexa $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ unha matriz non singular e denotemos por $A^{-1} = (x_1|x_2|\dots|x_n)$, onde

$$x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \text{ é a columna } j\text{-ésima de } A^{-1} \text{ e } e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ é o vector } j\text{-ésimo da base canónica de}$$

$\mathbb{R}^n$. Calcular A^{-1} equivale a resolver o sistema $A \cdot (x_1|x_2|\dots|x_n) = (Ax_1|Ax_2|\dots|Ax_n) = I$, é dicir, o sistema $AA^{-1} = I$. Equivalentemente, temos que resolver os n sistemas de ecuacións lineais $Ax_j = e_j$, que teñen solución única por seren sistemas de Cramer.

Utilizaremos o método de Gauss e resolver os n sistemas conxuntamente, transformando a matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

na matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array} \right)$$

onde cada unha das n columnas últimas sería a única solución do sistema $Ax_j = e_j$, é dicir, as n

columnas da matriz A^{-1} . Así, a matriz inversa de A é $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$.

Exemplo 2.17 Para calcular a inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ realizamos as seguintes operacións:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2 \rightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_2 \rightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

e, así, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercicios

1. Calcula, se é posible, a inversa das seguintes matrices empregando o método de Gauss:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Discute e resolve, nos casos en que sexa posible, os seguintes sistemas para todos os posibles valores dos parámetros.

a) $\left. \begin{array}{l} ax + y = 1 \\ -x + ay + z = 1 \\ -x + y + az = 1 \end{array} \right\}$ b) $\left. \begin{array}{l} ax + z = 1 \\ x + ay = 0 \\ y + az = 2 \end{array} \right\}$

c) $\left. \begin{array}{l} x + ay + z = -1 \\ 2x + y + az = 0 \\ x + 2y + z = -1 \end{array} \right\}$ d) $\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - ay + 2z = 0 \\ x + y - az = 1 \end{array} \right\}$

e) $\left. \begin{array}{l} 2x + y - 4z = m \\ 3x - y = 11 \\ y + z = 6 \\ 2y - z = m \end{array} \right\}$ f) $\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z + t = a \\ 4x + 2y + 5z = b \\ 6x + 3y + 8z + at = 1 \end{array} \right\}$

g) $\left. \begin{array}{l} 2x - my + 2z = m \\ 2x + 2y = 0 \\ x + y + z = m \end{array} \right\}$

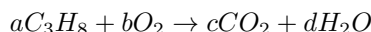
3. Resolve os sistemas:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercicios resoltos

1. O propano, C_3H_8 , interacciona co osíxeno, O_2 , para formar dióxido de carbono, CO_2 , e auga, H_2O . Axusta a ecuación de reacción combustión do propano:



Solución.

$$3a - c = 0$$

$$8a - 2d = 0$$

$$2b - 2c - d = 0$$

Logo $a = \frac{1}{4}d$, $b = \frac{5}{4}d$, $c = \frac{3}{4}d$, entón $d = 4$, $a = 1$, $b = 5$ e $c = 3$.

2. A seguinte proposta é un dos problemas que había que resolver no concurso de entradas na escola mandarina superior *Tâi-hsueh de Xiân*, (época Han, ano 123 a. C.). As persoas candidatas debían calcular o custo dunha cesta de cáñamo, dunha de trigo, dunha de feixóns, dunha de fabas e dunha de millo sabendo que 9 cestas de cáñamo, 7 de trigo, 3 de feixóns, 2 de fabas e 5 de millo custan 140 moedas; 7 cestas de cáñamo, 6 de trigo, 4 de feixóns, 5 de fabas e 3 de millo custan 128 moedas; 3 cestas de cáñamo, 5 de trigo, 7 de feixóns, 6 de fabas e 4 de millo custan 116 moedas; 2 cestas de cáñamo, 5 de trigo, 3 de feixóns, 9 de fabas e 4 de millo custan 112 moedas; 1 cesta de cáñamo, 3 de trigo, 2 de feixóns, 8 de fabas e 5 de millo custan 95 moedas.

Solución.

$$9Ca + 7Tr + 3Xu + 2Fa + 5Mi = 140$$

$$7Ca + 6Tr + 4Xu + 5Fa + 3Mi = 128$$

$$3Ca + 5Tr + 7Xu + 6Fa + 4Mi = 116$$

$$2Ca + 5Tr + 3Xu + 9Fa + 4Mi = 112$$

$$1Ca + 3Tr + 2Xu + 8Fa + 5Mi = 95$$

Así, $Ca = 7$, $Tr = 4$, $Xu = 3$, $Fa = 5$, $Mi = 6$

3. Estuda se os seguintes sistemas son ou non compatibles. En caso de selo, dá o conxunto de solucións.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x - 4y + z = 2 \\ 2x - 5y = 0 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x - 4y + z = 3 \\ 2x - 5y = 1 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} x + y - z - 2t = 1 \\ 2x + 7y + 3z - 19t + 5u = -8 \\ x + 3y + z - 8t + 2u = -3 \\ x - 2y - 4z + 7t - 3u = 7 \end{array} \right\} \quad \text{d) } \left. \begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ 2x - 2y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{e) } \left. \begin{array}{l} x + 3y + z - t = 6 \\ 2x + 7y + 3z - 4t = 15 \\ x + y + 2z + t = 1 \end{array} \right\} \quad \text{f) } \left. \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ -x + y + z = -2 \\ y + z = 3 \\ 2x + 4z = 2 \end{array} \right\}$$

$$\text{g) } \left. \begin{array}{l} 3x + 4,5y - 7,5z = 10,5 \\ 4,8x - 3,6y - 2,4z = 1,2 \\ 4x - 0,5y + 2z = 1,5 \end{array} \right\} \quad \text{h) } \left. \begin{array}{l} 0,42x - 0,56y = 1,26 \\ 0,98x - 1,4y = -0,28 \end{array} \right\}$$

Solución. a) Aplicando o método de Gauss,

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 & -4 \\ 0 & -7 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de onde deducimos que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 2$ e, polo tanto, o sistema é compatible indeterminado. O conxunto de solucións é $\{(\frac{10-5z}{7}, \frac{4-2z}{7}, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

b) Aplicando de novo o método de Gauss,

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2 \\ 3F_1 - F_3 \rightarrow F_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_3 + F_2 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

polo que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3$ e, daquela, o sistema é compatible determinado. A solución é $(-\frac{9}{2}, -2, \frac{5}{2})$.

c) Aplicando unha vez máis o método de Gauss,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & -19 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & -8 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -4 & 7 & -3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-2F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3-F_1 \rightarrow F_3 \\ F_4-F_1 \rightarrow F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -15 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & 2 & -6 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & 9 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2/5 \rightarrow F_2 \\ F_3/2 \rightarrow F_3 \\ F_4/3 \rightarrow F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-F_3 \rightarrow F_3 \\ F_2+F_4 \rightarrow F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posto que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 2$, o sistema é compatible indeterminado. O conxunto de solucións é $\{(3+2z-t+u, -2-z+3t-u, z, t, u) : z, t, u \in \mathbb{R}\}$.

d) Seguindo o método de Gauss, temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-2F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3-F_1 \rightarrow F_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Polo tanto, $\text{rango}(A) = 2$ e $\text{rango}(A|b) = 3$. O sistema é incompatible.

e) Aplicando o método de Gauss,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & -4 & 15 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & -4 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-F_2 \rightarrow F_2 \\ F_3-2F_1 \rightarrow F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -1 & -6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2+F_3 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3/3 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Vemos que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3$, polo que o sistema resulta compatible indeterminado. O conxunto de solucións é $\{(-\frac{7}{3} - \frac{9}{3}t, \frac{8}{3} + \frac{4}{3}t, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

f) De novo, segundo o método de Gauss,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1+F_3 \rightarrow F_3 \\ 2F_1-F_4 \rightarrow F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3-F_2 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3$, o sistema é compatible determinado. As tres coordenadas da solución son $x = 5$, $y = 5$ e $z = -2$.

g) Multiplicamos a primeira ecuación por $\frac{10}{15}$, a segunda por $\frac{10}{12}$ e a terceira por $\frac{10}{5}$ e queda o sistema
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y - 5z = 7 \\ 4x - 3y - 2z = 1 \\ 8x - y + 4z = 3 \end{array} \right\}$$
. Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3$, o sistema é compatible

determinado. As tres coordenadas da solución son $x = \frac{3}{4}$, $y = 1$ e $z = -\frac{1}{2}$.

h) Multiplicamos as dúas ecuacións por $\frac{100}{14}$ e queda o sistema
$$\left. \begin{array}{l} 3x - 4y = 9 \\ 7x - 10y = -2 \end{array} \right\}$$
 que é compatible determinado, porque $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 2$, e ten solución $(49, \frac{69}{2})$.

4. Calcula, se é posible, a inversa das seguintes matrices empregando o método de Gauss:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución. a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1 \rightarrow F_3]{F_2 - F_1 \rightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F_1 - 3F_2 - 3F_3 \rightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1 + F_2 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 - 2F_3 \rightarrow F_2]{F_3 \rightarrow F_3}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - 2F_2 + F_3 \rightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1 - F_2 \rightarrow F_3}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{F_3}{5} \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 - 2F_3 \rightarrow F_1]{F_2 - F_3 \rightarrow F_2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_4 \leftrightarrow F_3}$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 3F_3 - 3F_4 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{F_1 - 2F_2 - F_3 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

5. Discute e resolve, nos casos en que sexa posible, os seguintes sistemas para todos os posibles valores de a e b .

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \left. \begin{array}{l} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = b \\ 2x - 5y + az = -2 \end{array} \right\} \quad \text{b)} \quad \left. \begin{array}{l} ax + y = 1 \\ x + az = 0 \\ ay + z = b \end{array} \right\} \\
 \text{c)} \quad & \left. \begin{array}{l} ax + y = b \\ 2y + z = a \\ ax - z = 2b \end{array} \right\} \quad \text{d)} \quad \left. \begin{array}{l} x + ay + az = 3 \\ x + z = 2 \\ ax - (a+1)y - z = b \end{array} \right\} \\
 \text{e)} \quad & \left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 1 \\ 2ay - 2z + 6t = 2 \\ z - 3t = -1 \\ 3z - at = a + 1 \end{array} \right\} \quad \text{f)} \quad \left. \begin{array}{l} x - y = a \\ 2ax + z = b \\ ax + ay + z = 3 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Solución. a) $\det(A) = 13a - 13$. Se $a \neq 1$, verifícase que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3 =$ número de incógnitas, polo que o sistema ten solución única. As tres coordenadas da solución son: $x = \frac{4a - 13 + ba - 10b}{13a - 13}$, $y = \frac{3ba - a - 4b}{13a - 13}$ e $z = \frac{-39 + 13b}{13a - 13}$.

Se $a = 1$, $\text{rango}(A) = 2$ porque $\det(A) = 0$ e $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Ademais orlando este menor dentro da matriz ampliada temos $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -39 + 13b$. Así, se $b \neq 3$, $\text{rango}(A|b) = 3$, polo que o sistema é incompatible. Se $b = 3$ entón $\text{rango}(A|b) = 2$, polo que o sistema é compatible indeterminado. Neste caso o sistema a resolver é: $\left. \begin{array}{l} x + z = 3 - 4y \\ 2x + z = -2 + 5y \end{array} \right\}$, de onde se ten que $x = -5 + 9y$, $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y$, $y \in \mathbb{R}$.

b) $\det(A) = -a^3 - 1$. Se $a \neq -1$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3 =$ número de incógnitas, polo que o sistema ten solución única. As coordenadas da solución son $x = \frac{a^2 - ab}{a^3 + 1}$, $y = \frac{a^2b + 1}{a^3 + 1}$ e $z = \frac{b - a}{a^3 + 1}$.

Se $a = -1$, $\text{rango}(A) = 2$ porque $\det(A) = 0$ e $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Ademais orlando este menor

dentro da matriz ampliada temos $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \end{vmatrix} = -b - 1$. Así, se $b \neq -1$, e o sistema é incompatible. Se $b = -1$, $\text{rango}(A|b) = 2$, polo que o sistema é compatible indeterminado e a solución é $\{(z, 1+z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

c) $\det(A) = -a$. Se $a \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3 = \text{número de incógnitas}$, polo que o sistema ten solución única: $(-1, \frac{a^2+ab}{a}, \frac{-2ab-a^2}{a}) \in \mathbb{R}^3$.

Se $a = 0$, $\text{rango}(A) = 2$ porque $\det(A) = 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Ademais orlando este menor

dentro da matriz ampliada temos $\begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2b \end{vmatrix} = 0$, polo que o sistema é compatible indeterminado para todo $b \in \mathbb{R}$ e a solución é $\{(x, b, -2b) : x \in \mathbb{R}\}$.

d) $\det(A) = a + 1$. Se $a \neq -1$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3 = \text{número de incógnitas}$, polo que o sistema ten solución única, con coordenadas:

$$x = \frac{3+3a-2a^2+ab}{1+a}, \quad y = \frac{1-b+ba+3a-2a^2}{1+a} \quad \text{e} \quad z = \frac{-1-a-ba+2a^2}{1+a}.$$

Se $a = -1$, $\text{rango}(A) = 2$ porque $\det(A) = 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Ademais orlando este menor

dentro da matriz ampliada temos $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = b + 2$. Así, se $b \neq -2$, e o sistema é incompatible. Se $b = -2$, $\text{rango}(A|b) = 2$, polo que o sistema é compatible indeterminado e a solución é $\{(2, -1, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

e) Temos que $\det(A) = 2a(-a+9)$. Se $a \neq 0, a \neq 9$, entón $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 4 = \text{número de incógnitas}$, polo que o sistema ten solución única, con coordenadas $x = \frac{-13a}{-a+9}$,

$$y = 0, \quad z = \frac{4a+3}{-a+9} \quad \text{e} \quad t = \frac{a+4}{-a+9}.$$

Se $a = 0$, $\text{rango}(A) = 3$ e $\text{rango}(A|b) = 3$, polo que o sistema é compatible indeterminado.

Se $a = 9$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 3$, polo que o sistema é compatible indeterminado.

f) $\text{rango}(A) = 2$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Ademais, $\begin{vmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix} = b - a^2 - 3$. Así, se $b = a^2 + 3$, $\text{rango}(A|b) = 2$, polo que o sistema é compatible indeterminado e o conxunto de solucións é $\{(\frac{a^2+3-z}{2a}, \frac{-a^2+3-z}{2a}, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Se $b \neq a^2 + 3$, $\text{rango}(A|b) = 3$ e o sistema é incompatible.

6. Unha mestura empregada en transformadores eléctricos contén níquel (Ni), ferro (Fe) e molibdeno (Mo). A porcentaxe de Ni é do 1 % menos ca cinco veces a de Fe . A porcentaxe de Fe é do 1 % máis ca tres veces a de Mo . Calcula a porcentaxe de cada un deles na mestura.

Solución.

$$\begin{aligned} Ni + Fe + Mo &= 100 \\ Ni - 4,95Fe &= 0 \\ Fe - 3,03Mo &= 0 \end{aligned}$$

Logo 5,26 % de Mo ; 12,92 % de Fe e 78,82 % de Ni .

7. Para obter 125 ml dunha solución ao 15 % de ácido nítrico, mestúranse tres solucións ao 8 %, 11 % e 18 %, respectivamente. Se o volume de ácido da solución ao 8 % é igual á metade do volume de ácido das outras dúas xuntas, que cantidade precisamos de cada unha delas?

Solución.

$$\begin{aligned} V_8 + V_{11} + V_{18} &= 125 \\ 2V_8 - V_{11} - V_{18} &= 0 \\ 0,08V_8 + 0,11V_{11} + 0,18V_{18} &= 15 \end{aligned}$$

Entón 41,7 ml da solución ao 8 %; 47,6 ml da solución ao 11 % e 35,7 ml da solución ao 18 %.

8. En volume, unha mestura ten 60 % de cobre, 30 % de zinc e 10 % de níquel. Outra segunda mestura ten porcentaxes do 50, 30 e 20, respectivamente. Unha terceira ten 30 % de cobre e 70 % de níquel. Que cantidade precisamos de cada unha delas para obter 100 cm^3 dunha mestura con porcentaxe 40, 15 e 45 de cobre, zinc e níquel, respectivamente?

Solución.

mestura	Cu	Zn	Ni	
1	60	30	10	x
2	50	30	20	y
3	30	0	70	z
necesito	40	15	45	

$$Cu : 6x + 5y + 3z = 40$$

$$Zn : 2x + 2y = 15$$

$$Ni : 2x + 4y + 14z = 45$$

Así $x = 0$; $y = \frac{1}{2}$ e $z = \frac{1}{2}$, é dicir, 50 cm^3 de cada unha das dúas últimas mesturas.

9. As redes formadas por nós conectados por fíos utilízanse en distintos modelos da ciencia e da enxeñaría. Nestes modelos suponse que o fluxo total que entra nun nó é igual ó fluxo total que sae del. Por exemplo, no nó illado da Figura 2.2 entran 15 unidades de fluxo, polo que deben saír tamén 15 unidades e, polo tanto, ten que verificarse a ecuación $x_1 + x_2 = 15$. Calcula os distintos fluxos da rede da dereita da Figura 2.2.

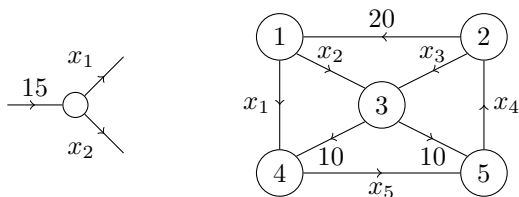


Figura 2.2: Rede cun único nó e rede con varios nós

Solución.

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 &= 20 \\
 -x_3 + x_4 &= 20 \\
 x_2 + x_3 &= 20 \\
 x_1 - x_5 &= -10 \\
 -x_4 + x_5 &= -10
 \end{aligned}$$

Tense que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = 4$, polo que o sistema é compatible indeterminado. Pode comprobarse que a terceira ou cuarta ecuación son combinación lineal das restantes. Se eliminamos a ecuación cuarta e pasamos x_5 da última ecuación ó segundo membro e resolvemos temos: $x_1 = -30 - x_5$, $x_2 = 50 + x_5$, $x_3 = -30 - x_5$, $x_4 = -10 - x_5$.

10. Calcula as intensidades de corrente I_1 , I_2 e I_3 na rede eléctrica da Figura 2.3 utilizando, en cada nó, os fluxos de corrente e a segunda lei de Kirchoff ($\sum R_k I_k = V$) en cada circuíto.

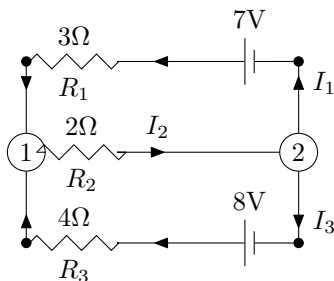


Figura 2.3: Rede eléctrica de dous circuíto

Solución. A primeira lei de Kirchoff nos dous nós verifican a mesma ecuación.

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\
 3I_1 + 2I_2 &= 7 \\
 2I_2 + 4I_3 &= 8
 \end{aligned}$$

Así $I_1 = 1$, $I_2 = 2$ e $I_3 = 1$.

11. Calcula as intensidades de corrente I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 e I_6 na rede eléctrica da Figura 2.4.

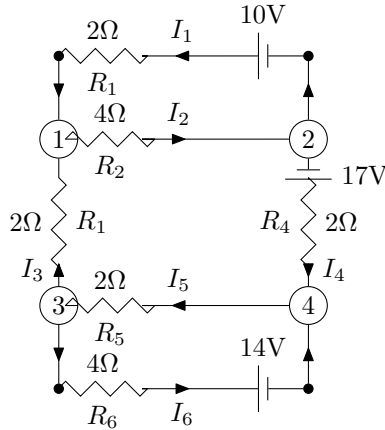


Figura 2.4: Rede eléctrica de tres circuitos

Solución.

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\
 -I_1 + I_2 - I_4 &= 0 \\
 I_3 - I_5 + I_6 &= 0 \\
 I_4 - I_5 + I_6 &= 0 \\
 2I_1 + 4I_2 &= 10 \\
 4I_2 + I_3 + 2I_4 + 2I_5 &= 17 \\
 2I_5 + 4I_6 &= 14
 \end{aligned}$$

Tense que $\text{rango}(A) = \text{rango}((A|b)) = 6$, polo que o sistema é compatible determinado e, ademais, unha ecuación é combinación lineal das restantes. Como $F_4 = F_3 - F_2 - F_1$, podemos eliminar, por exemplo a cuarta ecuación. Así, a única solución do sistema é, $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = (1, 2, 1, 1, 3, 29)$.

12. Dados $n + 1$ puntos no plano, $\{(x_k, y_k) : k = 1, \dots, n + 1\}$, onde tódolos x_k son distintos, existe un único polinomio de grao n , $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, que pasa por eses puntos (é dicir, $P(x_k) = y_k$). Para calcular os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ temos que resolver o sistema de $n + 1$ ecuacións con $n + 1$ incógnitas,

$$P(x_k) = a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_nx_k^n = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

- a) Obtén o polinomio de grao dous que pasa polos puntos $(1, 4)$, $(2, 0)$ e $(3, 12)$.

b) Obtén o polinomio de grao catro que pasa por $(-2, 3)$, $(-1, 5)$, $(0, 1)$, $(1, 4)$ e $(2, 1)$.

Solución.

a) Se o polinomio buscado é $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, entón temos o sistema de ecuacións:

$$\begin{aligned}a_0 + a_1 + a_2 &= 4 \\a_0 + 2a_1 + 4a_2 &= 0 \\a_0 + 3a_2 + 9a_2 &= 12\end{aligned}$$

Entón $a_0 = 24$; $a_1 = -28$ e $a_2 = 8$. O polinomio é $P(x) = 24 - 28x + 8x^2$.

b) Se o polinomio buscado é $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, o sistema é:

$$\begin{aligned}a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + 16a_4 &= 3 \\a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 &= 5 \\a_0 &= 1 \\a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 4 \\a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 &= 1\end{aligned}$$

Logo $a_0 = 1$; $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{55}{12}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{13}{12}$. O polinomio é $P(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{55}{12}x^2 - \frac{13}{12}x^4$.

13. A seguinte táboa contén as distancias medias ó sol, en unidades astronómicas, dalgúns planetas do sistema solar e o período respectivo medido en anos.

Planeta	Mercurio	Venus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno
Distancia media	0,378	0,723	1,0	1,523	5,203	9,541
Período	0,241	0,615	1,0	1,881	11,861	29,457

- a) Obtén o polinomio que relaciona estas variables para os tres primeiros planetas.
b) Utilizando o polinomio do apartado anterior, dá unha estimación do período de Marte a partir da distancia media e avalía a precisión do resultado.

Solución. Se o polinomio buscado é $P(x) = A + Bx + Cx^2$, temos

$$\begin{aligned}A + 0,378B + 0,378^2C &= 0,241 \\A + 0,723B + 0,723^2C &= 0,615 \\A + B + C &= 1\end{aligned}$$

Así $A = -0,0344$, $B = 0,5427$, $C = 0,4917$. O polinomio é $P(x) = -0,0344 + 0,5427x + 0,4917x^2$.

$P(\text{Marte}) = 1,9326$, ERRORabs=0.0516; ERROR rel=0.0267; 2 %. En días, $0,0516 \cdot 365 = 18,8340$ días.

2.4. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Sexa $Ax = b$ un sistema de ecuacións lineais. Se o sistema homoxéneo $Ax = \theta$ é compatible determinado e existe $x_o \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax_o = b$, entón
 - a) x_o é a única solución de $Ax = \theta$
 - b) $Ax = b$ é compatible indeterminado.
 - c) $Ax = b$ é incompatible.
 - d) $Ax = b$ é compatible determinado.
2. Consideremos un sistema de ecuacións lineais $AX = b$, con $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, θ o vector nulo e sexa $(A|b)$ a matriz ampliada. Se sabemos que $\det(A) \neq 0$, entón verifícase que

- a) $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = n - 1$.
- b) o sistema $AX = b$ é compatible indeterminado.
- c) o sistema $AX = b$ é compatible determinado.
- d) $x = \theta$ non é solución do sistema $Ax = \theta$.

3. O sistema
$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 3 \\ 2x - y - z & = & 0 \\ 4x + y + z & = & 2 \end{array} \right\} \text{ é}$$

- a) un sistema de Cramer.
- b) compatible indeterminado.
- c) compatible determinado.
- d) incompatible.

4. Sexan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Unha das seguintes afirmacións é FALSA.

- a) O sistema $AX = b$ é compatible indeterminado.
- b) O sistema $AX = \theta$ é compatible.
- c) $\text{rango}(A|b) = 2$
- d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\bar{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$, unha das seguintes afirmacións é FALSA.

- a) O sistema $AX = \bar{2}$ é compatible indeterminado.
- b) O sistema $AX = \theta$ é compatible determinado.
- c) O sistema $AX = B$ é compatible determinado.
- d) $x = 0, y = 0, z = a$ é solución de $AX = B$.

6. O sistema
$$\left. \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 13 \\ -x + y & = & 1 \end{array} \right\}$$

- a) ten dúas solucións, $x = 2$ e $y = 3$.
- b) ten infinitas solucións, entre elas $x = 2, y = 3$.
- c) ten solución única.
- d) é incompatible.

7. Sobre as ecuacións $\left. \begin{array}{l} 3x = 3 \\ y + z = 0 \end{array} \right\}$, pódese afirmar que

- a) non forman un sistema.
- b) forman un sistema compatible indeterminado.
- c) forman un sistema compatible determinado.
- d) forman un sistema incompatible.

2.5. Sistemas de ecuacións lineais con MATLAB

Empregando algunhas das sentenzas introducidas no capítulo anterior podemos facer un estudo dos sistemas de ecuacións lineais e, nalgúns casos, obter explicitamente a solución.

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ é a matriz de coeficientes dun sistema lineal e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ é o vector de termos independentes, entón as seguintes sentenzas introducen esas matrices e a ampliada $(A|b)$:

```
>>A=[1 4 2; 3 -1 -2; 0 -1 2], b=[1;3;2], AMPL=[A,b]
```

Para estudar o sistema, calculamos o rango de A e o de $(A|b)$:

```
>>RA=rank(A), RAb=rank(AMPL)
```

Como os rangos coinciden e valen 3, aplicando o teorema de Rouché-Frobenius sabemos que o sistema é compatible determinado e obtemos a solución cunha calquera das seguintes sentenzas:

```
>>S=inv(A)*b
```

Se queremos estudar, en función dos parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, o sistema $\left. \begin{array}{l} ax + y = 1 \\ x + az = 0 \\ ay + z = b \end{array} \right\}$, intro-

ducimos a matriz de coeficientes A e a dos termos independentes e, a continuación, calculamos o determinante de A :

```
>>syms a b
>>A=[ a, 1, 0; 1, 0, a; 0, a, 1]; B=[1;0;b];
>>DETA=det(A)
```

O determinante de A vale $-a^3 - 1$. Calculamos as raíces da ecuación $-a^3 - 1 = 0$ coa sentença

```
>>raices=solve (DETA)
```

Neste caso, $a = -1$ é a única real. Polo tanto, se $a \neq -1$, o sistema é compatible e determinado e a solución é:

```
>>S=inv(A) * B
```

Para o caso $a = -1$, substituímos en A este valor e calculamos o rango de A que resulta ser 2:

```
>>Aa=subs(A,a,-1), rango=rank(Aa)
```

Escollemos, por exemplo, as filas 1 e 2 e as columnas 2 e 3. Comprobamos que son independentes e calculamos o determinante da matriz formada por esas dúas columnas de A e a columna dos termos independentes.

```
>> A2=Aa(1:2,2:3), det(A2)
```

```
>> det([Aa(:,2:3) B])
```

Polo que si $b \neq -1$, o rango da matriz ampliada é 3, e o sistema será incompatible. Si $b = -1$, o rango da matriz ampliada é 2 e o sistema é compatible indeterminado. Eliminamos a terceira ecuación e pasamos a variable x ó termo independente e xa temos un sistema de Cramer.

```
>> syms x, B2=B(1:2,1)-[-x;x],
```

```
>> S2=inv(A2)*B2
```

Así, as solucións para o caso $a = -1$ e $b = -1$ son, $(x, x+1, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Para utilizar a sentenza solve para resolver o sistema de Cramer

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 4 \\ x + y - 2z = 1 \\ x + 4y + z = 1 \end{array} \right\}, \text{ facemos}$$

o seguinte:

```
>> syms x y z
```

```
>> S=solve(2*x+3*y+z-4, x+y-2*z-1, x+4*y+z-1,x,y,z)
```

Vemos que MATLAB nos devolve a expresión

```
S =
    struct with fields:
    x: [1x1 sym]
    y: [1x1 sym]
    z: [1x1 sym]
```

o que significa que hay un valor de x , un de y e un valor de z que resolve as tres ecuacións simultaneamente. Para ver eses valores introducimos na fiestra de comandos

```
>> [S.x , S.y, S.z]
```

Logo $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é a única solución deste sistema.

Para o sistema:
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 4 \\ 3x + 2z = 10 \end{array} \right\},$$
 comprobamos que os rangos da matriz de coeficientes e

da ampliada son iguais a 2, polo que sabemos que o sistema é compatible indeterminado. Escollemos, por exemplo, as filas 1 e 2 e as columnas 2 e 3. E comprobamos que son independentes.

```
>> A=[1 1 1;2 -1 1;3 0 2], b=[6;4;10], Am=[A,b], rank(A), rank(Am)
>> B=A(1:2,2:3), det(B)
```

Para utilizar a sentenza solve, temos que dicirlle as variables nas que nos resolva o sistema. Se queremos resolvelo nas variables y e z , eliminando a última ecuación (polo que vimos antes), escribimos as sentenzas

```
>> S=solve(x+y+z-6, 2*x-y+z-4, y,z), [S.y S.z]
```

e devolve a solución: $y = \frac{x}{2} + 1, z = 5 - \frac{3x}{2}$

2.6. Solucións dos exercicios propostos

$$1. a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1. b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1. c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. x_n = \frac{1}{4}, x_{n-1} = \frac{1}{8}, \dots, x_1 = \frac{1}{4^n} \quad \alpha_i = (-1)^{i+n}, i = 1, \dots, n$$

Solucións autoavaliación. 1d, 2c, 3d, 4d, 5a, 6c, 7b

Capítulo 3

Derivabilidade de funcións

3.1. Funcións dunha variable

En adiante consideraremos unha función $f: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Recordamos a definición de continuidade, aínda que entendemos estudados os conceptos de límite e continuidade, como parte da formación que o alumnado debe ter recibido en cursos previos.

Definición 3.1 Diremos que f é continua no punto x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, é dicir, se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$, se verifica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Sabemos que para cada $x \neq x_0$, o cociente $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ é a pendente da recta que pasa polos puntos $(x, f(x))$ e $(x_0, f(x_0))$. Na gráfica podemos observar como varía esa pendente cando x se aproxima a x_0 .

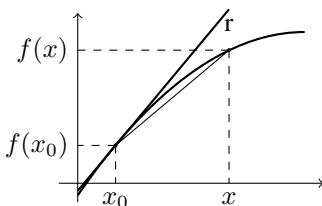


Figura 3.1: A derivada dunha función nun punto

Se existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, a recta r que pasa por $(x_0, f(x_0))$ e ten por pendente este límite, recibe o nome de recta tanxente á gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$.

Definición 3.2 Diremos que a función f é derivable en x_0 se existe o límite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

En caso de existir, este límite chámase derivada de f en x_0 e denótase por $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Diremos que f é derivable en (a, b) se f é derivable en cada punto do intervalo (a, b) .

Observación 3.3 Se f é derivable en x_0 , $f'(x_0)$ é, pois, a pendente da recta tanxente á gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$. A ecuación desta recta é logo $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Exemplo 3.4 1. A función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é derivable en $\mathbb{R}$. Vexamos que $f'(x_0) = 2x_0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0$$

2. A ecuación da recta tanxente á gráfica da función $f(x) = x^2$ no punto $(3, 9)$ é $y = f'(3)(x - 3) + f(3) = 6(x - 3) + 9$, isto é $y = 6x - 9$.

3. A función $f(x) = |x|$ non é derivable en $x_0 = 0$ pois $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ non existe.

Proposición 3.5 Se f é derivable en x_0 , entón f é continua en x_0 .

Observación 3.6 Unha función pode ser continua nun punto e non ser derivable nel, por exemplo $f(x) = |x|$ é continua en $\mathbb{R}$ e non é derivable en 0.

Facendo cálculos similares ós do exemplo 3.4.1 podemos obter as derivadas das funcións elementais seguintes:

Proposición 3.7 Suposto que $a \in \mathbb{R}$ é un valor determinado.

Se $f(x) = a$, entón $f'(x) = 0$

Se $f(x) = ax$, entón $f'(x) = a$

Se $f(x) = x^a$, entón $f'(x) = ax^{a-1}$

Se $f(x) = e^x$, entón $f'(x) = e^x$

Se $f(x) = a^x$, ($a > 0$), entón $f'(x) = a^x \ln a$

Se $f(x) = \sin x$, entón $f'(x) = \cos x$

Se $f(x) = \arcsen x$, entón $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Se $f(x) = \tan x$, entón $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Se $f(x) = x$, entón $f'(x) = 1$

Se $f(x) = \frac{1}{x}$, entón $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Se $f(x) = \sqrt{x}$, entón $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Se $f(x) = \ln x$, entón $f'(x) = \frac{1}{x}$

Se $f(x) = \cos x$, entón $f'(x) = -\sin x$

Se $f(x) = \arccos x$, entón $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Se $f(x) = \arctan x$, entón $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Proposición 3.8 Se $f, g: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son derivables en $x_0 \in (a, b)$, tamén son derivables as funcións $f + g$, λf (con $\lambda \in \mathbb{R}$), $f g$ e $\frac{f}{g}$ (se $g(x_0) \neq 0$). Ademais:

a) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

b) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

c) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Exemplo 3.9 1. Se $f(x) = 6x^4 - 3x + 2$, entón $f'(x) = 24x^3 - 3$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Se $f(x) = \frac{6x^4 - 3x + 2}{x^3 - 4}$, entón $f'(x) = \frac{(24x^3 - 3)(x^3 - 4) - (6x^4 - 3x + 2)3x^2}{(x^3 - 4)^2} = \frac{6x^6 - 90x^3 - 6x^2 + 12}{(x^3 - 4)^2}$

3. Se $f(x) = x^2 \sin x$, entón $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

4. Se $f(x) = 4x^3 e^x + \frac{2}{x}$, entón $f'(x) = 12x^2 e^x + 4x^3 e^x - \frac{2}{x^2} = (12x^2 + 4x^3)e^x - \frac{2}{x^2}$

Exercicios

1. Calcula a ecuación da recta que pasa por $(0, 0)$ e $(6, 2)$. E a da que pasa por $(1, 1)$ e $(4, 8)$.
2. Calcula a ecuación da recta que pasa por $(1, -2)$ e ten pendente $m = 5$.
3. Calcula a pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x) = \ln(x)$ en $x = 4$.
4. En que punto a recta tanxente a $f(x) = \ln(x)$ é paralela á recta $y = 3x - 8$?
5. En que punto a recta tanxente a $f(x) = x^3 - 2x$ é paralela á recta $y = 2x + 4$?
6. Calcula as ecuacións das rectas tanxentes ás gráficas das seguintes funcións no punto indicado:
 - a) $f(x) = \sin(x)$ no punto $(-\frac{\pi}{2}, -1)$
 - b) $f(x) = \ln(x)$ no punto $(1, 0)$
 - c) $f(x) = 6x^4 - 3x + 2$ no punto $(0, 2)$
 - d) $f(x) = \frac{6x^4 - 3x + 2}{x^3 - 4}$ no punto $(1, \frac{-5}{3})$

3.1.1. Regra da cadea

Proposición 3.10 (Regra da cadea) Sexan $f: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: (c, d) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$ de maneira que $f(a, b) \subset (c, d)$.

Se f é derivable en x_0 e g é derivable en $f(x_0)$, entón $g \circ f$ é derivable en x_0 e, ademais,

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Exemplo 3.11 1. Sexa $f(x) = (x^2 - 3x)^4$. Se tomamos $h(x) = x^4$ e $g(x) = x^2 - 3x$, observamos que $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 - 3x) = (x^2 - 3x)^4 = f(x)$. Daquela, como $h'(x) = 4x^3$ e $g'(x) = 2x - 3$, entón

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = 4(g(x))^3(2x - 3) = 4(x^2 - 3x)^3(2x - 3)$$

2. Se $h(x) = (\frac{3x-1}{x^3+2})^5$, aplicando a regra da cadea obtemos

$$h'(x) = 5(\frac{3x-1}{x^3+2})^4 \frac{3(x^3+2) - (3x-1)3x^2}{(x^3+2)^2} = \frac{5(3x-1)^4(-6x^3+3x^2+6)}{(x^3+2)^6}$$

3. Dada $g(x) = \cos x^2$, entón $g'(x) = -2x \sin x^2$
4. Para $f(x) = \cos^2 x$, $f'(x) = 2 \cos x (-\sin x) = -2 \cos x \sin x$.
5. Se $g(x) = \sqrt[3]{(3x-1)^2}$, entón $g'(x) = \frac{2}{3}(3x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3x-1}}$.
6. Se $h(x) = x^3 \sqrt{1-x^2}$, $h'(x) = 3x^2 \sqrt{1-x^2} + x^3 \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 3x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3x^2 - 4x^4}{\sqrt{1-x^2}}$.

Quédanos por revisar como se derivan funcións nas que aparece unha potencia de xeito que nin a base nin o expoñente son constantes, senón que son expresións alxébricas. Nestes casos utilizaremos propiedades dos logaritmos que nos simplificarán os cálculos.

Exemplo 3.12 Para derivar a función $f(x) = (3x^5 + 4x)^{\sin(x)}$, aplicamos primeiro logaritmos neperianos. Así temos que $\ln(f(x)) = \ln(3x^5 + 4x)^{\sin(x)} = \sin(x) \ln(3x^5 + 4x)$. É agora cando derivamos, de xeito que obtemos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos(x) \ln(3x^5 + 4x) + \frac{15x^4 + 4}{3x^5 + 4x} \sin(x).$$

Logo, $f'(x) = f(x) \left(\cos(x) \ln(3x^5 + 4x) + \frac{15x^4 + 4}{3x^5 + 4x} \sin(x) \right) e$

$$f'(x) = (3x^5 + 4x)^{\sin(x)} \left(\cos(x) \ln(3x^5 + 4x) + \frac{15x^4 + 4}{3x^5 + 4x} \sin(x) \right).$$

Exercicios

7. Calcula a derivada das seguintes funcións:

1) $f(x) = x - \frac{3}{x^2}$

2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

3) $f(x) = \sqrt{(2x^2 + 1)^3}$

4) $f(x) = \cos(x^3) \sin^2(x)$

5) $f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)$

6) $f(x) = \ln(\tan(x))$

7) $f(x) = \cos(\tan^2(x))$

8) $f(x) = \tan^3(x) \sin^3(e^x)$

9) $f(x) = \frac{\ln x}{x e^x}$

10) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + e^{\tan(x)}$

11) $f(x) = (3x^{-2} + 5x^4)^{-1}$

12) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

13) $f(x) = \frac{6x^4 - 3x + 2}{x^3 - 4}$

14) $f(x) = x^2 \sin x$

15) $f(x) = 4x^3 e^x + \frac{2}{x}$

16) $f(x) = (x^2 - 3x)^4$

17) $h(x) = \left(\frac{3x-1}{x^3+2}\right)^5$

18) $g(x) = \cos(x^2)$

19) $f(x) = \cos^2(x)$

20) $g(x) = \sqrt[3]{(3x-1)^2}$

21) $h(x) = x^3 \sqrt{1 - x^2}$

22) $f(x) = (\arctan(\sin x))^4$

23) $f(x) = \frac{4}{(5x^4 - 6x^3)^3}$

24) $f(x) = 3^{\cos(x)}$

25) $f(x) = x^2 \sin(x) + \cos(x)$

26) $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x^2}}$

27) $f(x) = \left(\frac{x^3-x}{x^3-4}\right)^3$

$$\begin{array}{lll}
28) f(x) = (x^2 + 1)^{\ln(2x)} & 29) f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & 30) f(x) = x^{\frac{1}{x}} \\
31) f(x) = (2 + 2x + x^2)e^{-x} & 32) f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) & 33) f(x) = x^{\frac{3}{5}} \\
34) f(x) = (x + 5)^{\sqrt[3]{x^2}} & 35) g(t) = t^{\frac{4}{7}} & 36) \alpha(r) = 5r^{\frac{2}{3}} \\
37) \beta(s) = \frac{-3}{\sqrt[5]{s^6}} & 38) q(a) = 8a^{\frac{1}{3}} & 39) g(x) = \frac{2}{7}x^{-\frac{3}{4}}
\end{array}$$

8. Calcula a derivada das seguintes funcións:

$$\begin{array}{llll}
A(x) = \sqrt[5]{x^2} & F(t) = \frac{\cos(3t)}{\cos(5t)} & p(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 8} & C(t) = \left(\frac{2t}{t-1}\right)^3 \\
g(x) = e^{-2x} - 2x^3 & B(t) = t^2 \ln \frac{1}{t} & \alpha(a) = \arctan(\sqrt{3a}) & u = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \\
k(x) = (5x^2 - x)^{\cos(x)} & W(t) = \sin(e^{-2t}) & \gamma(x) = \sin^3(x) \cos(x^2) & T = \frac{1}{r} \cos\left(\frac{r}{r^2-1}\right) \\
f(t) = \sqrt[3]{(3-6t)^2} & D(x) = e^{-x} \ln(x) & y = x^2 \arctan(1+x^2) & R(x) = \frac{x^6}{(3x-2)^5} \\
B(x) = (2 + \cos x)^{3x} & h(x) = e^{\sin(x^3)} & G(r) = \tan(\ln(\cos r)) & w = \arctan^4(\sqrt{2t})
\end{array}$$

9. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función derivable, calcula a derivada das funcións:

$$\text{a) } h(x) = f(x+5) \quad \text{b) } h(x) = f(x^2) \quad \text{c) } h(x) = f(\sqrt{1-x^2}) \quad \text{d) } h(x) = \frac{\sin(f(x))}{\ln(x)}$$

10. Se $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función derivable, calcula a derivada das funcións:

$$\begin{array}{lll}
\text{a) } f(x) = g(x+g(2)) & \text{b) } f(x) = g(5xg(3)) + g(0)(x-\pi) & \text{c) } f(x) = g(x+g(x)) \\
\text{d) } f(x) = g(x)(x-4) & \text{e) } f(x) = g(x^2) - x & \text{f) } f(x) = g(x^2-x)
\end{array}$$

11. Comproba que son certas as seguintes afirmacións:

$$\begin{array}{l}
\text{a) } f(x) = \sin(x+x^2) \Rightarrow f'(x) = (1+2x)\cos(x+x^2) \\
\text{b) } f(x) = \sin(x) + \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) + 2x\cos(x) \\
\text{c) } f(x) = \sin(\cos(x)) \Rightarrow f'(x) = -\cos(\cos(x))\sin(x) \\
\text{d) } f(x) = \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = -\frac{x\sin(x)+\cos(x)}{x^2}\cos\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)
\end{array}$$

12. Calcula as derivadas das seguintes funcións:

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } f(x) = \sin(x) \ln(\cos(x)) & \text{b) } f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \\
\text{c) } f(x) = \arctan(x \ln(x)) & \text{d) } f(x) = \cos(x^3) \sin(2x) \\
\text{e) } f(x) = \frac{\sin(\cos(x))}{x} & \text{f) } f(x) = \sin(\cos(\sqrt{x}))
\end{array}$$

13. Sexa $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Proba que $f(f(x)) = \frac{1+x}{2+x}$, $f'(f(x)) = -\frac{(1+x)^2}{(2+x)^2}$ e $(f \circ f)'(x) = \frac{1}{(2+x)^2}$.

14. Sexa $f(x) = \sin(x)$. Calcula $f(f(x))$, $f'(f(x))$ e $(f \circ f)'(x)$.

15. Sexa $f(x) = \frac{1}{x}$. Proba que $f(f'(x)) = -x^2$.
16. Se $f(x) = x^2$, calcula $f(f'(x))$ e $(f \circ f)'(x)$.
17. Sexan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función derivable e $a \in \mathbb{R}$. Calcula a derivada de f para os casos:
- a) $f(x) = g(x + g(a))$ b) $f(x) = g(xg(a))$ c) $f(x) = g(x + g(x))$
d) $f(x) = g(x)(x - a)$ e) $f(x) = g(a)(x - a)$ f) $f(x + 3) = g(x^2)$
18. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función dúas veces derivable, calcula a derivada das funcións:
- a) $h(x) = f(\sin(x))f(\cos(x))$ b) $h(x) = f\left(\frac{\sin(f(x))}{\ln(x)}\right)$
c) $h(x) = a^{xf(x)}$ d) $h(x) = \sqrt{1 - f(x)^2}$
e) $h(x) = f(\sqrt{(x-a)(x-b)})$ f) $h(x) = x^{f(2x)}$
g) $h(x) = (f(x \cos(x + k)))^2$ h) $h(x) = \sin(f(xf(x)))$

3.2. Funcións de varias variables

Definición 3.13 Denomínase *función de varias variables reais* a toda aplicación $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se $m = 1$, f denomínase *función* ou *campo escalar*, e se $m > 1$ dise que f é *unha función* ou *campo vectorial*.

Será de interese o estudo das funcións escalares pois, como se observará, o estudo das funcións vectoriais reducirase ó estudo das primeiras.

Pódense definir distintas operacións, de xeito natural, con dúas funcións $f, g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. *Suma*: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in A$.
2. *Produto por un escalar*: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para todo $x \in A$.
3. *Produto escalar*: $f, g \rightarrow (x) = \langle f(x), g(x) \rangle$, para todo $x \in A$.
4. *Produto* (se $m = 1$): $(fg)(x) = f(x)g(x)$, para todo $x \in A$.
5. *Cociente* (se $m = 1$): $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, para todo $x \in A$ tal que $g(x) \neq 0$.
6. *Composición*: se $\varphi: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ e, ademais, $f(A) \subset B$, defínese a composición das funcións f e φ por $(\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x))$, para todo $x \in A$.
7. *Inversa* de f , (se f é inxectiva): $f^{-1}: \text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $f^{-1}(y) = x$ se, e só se, $f(x) = y$. Obviamente, f e f^{-1} verifican $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ e $(f \circ f^{-1})(y) = y$.

Obsérvase que, se $m = 1$, o produto escalar coincide co produto de funcións. Recordamos que unha función $f: A \rightarrow B$ é inxectiva cando $f(x) = f(y)$ se, e só se $x = y$, f é sobrexectiva cando $\text{Im}(f) = B$ e f é bixectiva cando é inxectiva e sobrexectiva.

Definición 3.14 Unha función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ determina m funcións diferentes, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que se denominan *compoñentes* ou *coordenadas* da función f e denótase por $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ ou $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$.

Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a función $p_i(x) = x_i$ denomínase *función proxección i -ésima*.

Para cada $i = 1, 2, \dots, m$, verifícase que $f_i(x) = (p_i \circ f)(x)$.

Exemplo 3.15 Consideremos a función vectorial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x + y, e^{2x} - y, x^2 + \cos xy)$. No noso caso, f define tres funcións escalares, $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que son as súas funcións coordenadas, do xeito seguinte: $f_1(x, y) = x + y$, $f_2(x, y) = e^{2x} - y$, $f_3(x, y) = x^2 + \cos xy$.

Definición 3.16 Denomínase *conxunto de nivel $k \in \mathbb{R}$ de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$* , ó conxunto $C_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = k\}$.

Definición 3.17 O *gráfico dunha función*, $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, defínese como o conxunto $G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Se $n = m = 1$, a representación gráfica do conxunto G_f é unha curva e se $n = 2$ e $m = 1$, G_f é unha superficie en $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 3.18 1. Se $f(x, y) = x^2 + y^2$, $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ e a súa representación gráfica é o paraboloide da figura 3.2. O conxunto de nivel $k = 4$ de f é $C_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ que é unha circunferencia de centro $(0, 0)$ e raio 2.

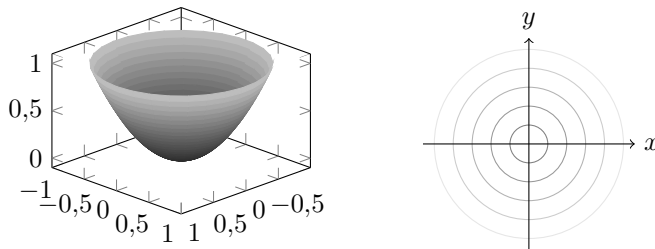


Figura 3.2: Exemplo dun paraboloide e as súas curvas de nivel

En xeral, para esta función, o conxunto de nivel k será da forma $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\}$ que representa a circunferencia de centro a orixe e raio $\sqrt{k}$.

2. Para $f(x, y) = x + y + 1$, temos a representación gráfica da figura 3.3, que representa un plano e as curvas de nivel, $x + y + 1 = k$ son as rectas que están debuxadas no plano $z = 0$.

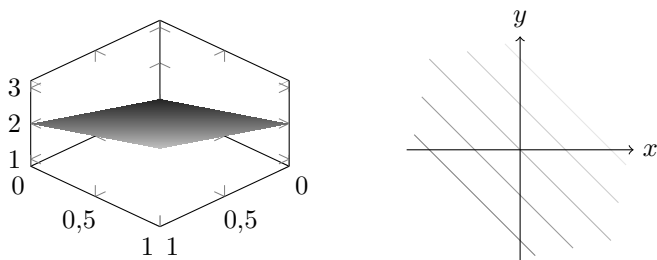


Figura 3.3: Exemplo dun plano e as súas curvas de nivel

Exercicios

19. Consideremos a función $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.
 - a) Determina o conxunto de nivel 4 de f .
 - b) Para todo $a \in \mathbb{R}$, están os puntos $(0, 2a)$ e (a, a) no mesmo conxunto de nivel de f ?
20.
 - a) Determina os conxuntos de nivel 0, 1 e -1 de $f(x, y) = ye^x$.
 - b) Determina os conxuntos de nivel 0, 1 e -3 de $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 1$.
21. Proba que o grafo dunha función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é o conxunto de nivel 0 de $F(x, y, z) = f(x, y) - z$.
22. Sexan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e C_k o conxunto de nivel $k \in \mathbb{R}$ de f . Razona a veracidade ou falsedade das seguintes afirmacións:
 - a) Se $k \neq k'$, poden existir $x \in C_k, z \in C_{k'}$, tales que $f(x) = f(z)$.
 - b) Poden existir puntos $x, z \in C_k$, tales que $f(x) \neq f(z)$.
 - c) Poden existir $k, k' \in \mathbb{R}, k \neq k'$, tales que $C_k \cap C_{k'} \neq \emptyset$.
 - d) Se $x, z \in C_k$, entón $f(x) = f(z)$.
23. Representa as curvas de nivel da función $f(x, y) = x - y$.
24. Representa as curvas de nivel da función $g(x, y) = ye^x$.
25. Representa a gráfica da función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3.3. Derivadas parciais de funcións escalares

Definición 3.19 Sexan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ unha función escalar, $x_0, u \in \mathbb{R}^n$.

Denomínase derivada direccional da función f en x_0 na dirección do vector u , se existe, ó número real

$$D_u f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t}.$$

Se este límite existe, dise que f é derivable en x_0 na dirección do vector u .

Exemplo 3.20 Sexa $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2+1}$. Para obter a derivada direccional de f en $(0, 0)$ na dirección de $u = (3, 4)$, $D_{(3,4)}f(0, 0)$, calculamos o seguinte límite:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(3, 4)) - f(0, 0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3t, 4t) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{3t}{9t^2+16t^2+1}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2}{25t^3 + 1} = 3. \end{aligned}$$

Polo tanto, $D_{(3,4)}f(0, 0) = 3$.

En $\mathbb{R}^n$ existen n direccións particularmente especiais que corresponden ós vectores unitarios da base canónica, $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, e que coinciden coas direccións dos eixes coordenados. Estas direccións levan á seguinte definición, que será moi utilizada no sucesivo.

Definición 3.21 Denomínase derivada parcial i -ésima da función f no punto x_0 , á derivada direccional de f en x_0 na dirección de e_i . Isto é,

$$D_{e_i}f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}.$$

Este concepto tamén se adoita denominar *derivada parcial de f con respecto á coordenada i -ésima* e denótase $D_i f(x_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.

Cálculo das derivadas parciais

O límite que aparece na definición anterior pode poñerse máis desenvolvido do xeito que segue:

$$\begin{aligned} D_i f(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_{01}, \dots, x_{0i} + t, \dots, x_{0n}) - f(x_{01}, \dots, x_{0i}, \dots, x_{0n})}{t}. \end{aligned}$$

Do segundo membro desta igualdade resulta que a derivada parcial, $D_i f(x_0)$, é a derivada ordinaria no punto x_{0i} da función dunha variable real

$$g: x_i \in \mathbb{R} \rightarrow g(x_i) = f(x_{01}, \dots, x_i, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R},$$

é dicir, $D_i f(x_0) = g'(x_{0i})$. Polo que, para o cálculo práctico de $D_i f(x_0)$, pódense, e débense, utilizar todas as regras da derivación ordinaria, sen máis ca supoñer que todas as demais variables permanecen constantes.

Na figura 3.4 expónse a gráfica dunha función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, na que a súa intersección co plano $x = x_0$, resulta a función dunha variable $g(y) = f(x_0, y)$, da que a súa derivada en y_0 , $g'(y_0) = D_2 f(x_0, y_0)$, é a pendente da recta r , que é a recta tanxente á gráfica de g en y_0 , ou a

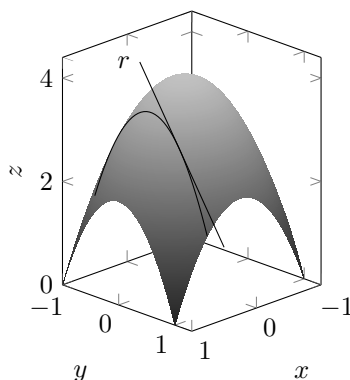


Figura 3.4: Interpretación da derivada parcial.

recta tanxente á gráfica de f en (x_0, y_0) na dirección do vector $(0, 1)$ do eixe de ordenadas. Pódese realizar a mesma observación para $h(x) = f(x, y_0)$. Así, a derivada parcial i -ésima dunha función f indica a taxa de variación da función f na dirección do eixe coordenado correspondente. Conclusión análoga obtense para calquera derivada direccional $D_u f(x_0)$.

Exemplo 3.22 1. Se $f(x, y) = x^2y^2 + 2x + y + 1$, por cálculo directo, derivando f con respecto a x e supoñendo que a variable y permanece constante, resulta $D_1 f(x, y) = 2xy^2 + 2$. Por outra parte, se se aplicase a definición de derivada parcial, obteríamos que

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+t)^2 y^2 + 2(x+t) + y + 1 - (x^2 y^2 + 2x + y + 1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2txy^2 + t^2 + 2t}{t} = 2xy^2 + 2. \end{aligned}$$

2. Calculemos as derivadas parciais da función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Para cada punto $(x, y) \neq (0, 0)$, podemos encontrar unha veciñanza onde a función f coincide coa función $\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Polo tanto, as súas derivadas parciais coinciden e podemos utilizar as regras de derivación das funcións dunha variable. Así, para calcular as derivadas parciais, para $(x, y) \neq (0, 0)$, de f , derivamos esta expresión, primeiro respecto da variable x , supoñendo que a variable y é constante,

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{2xy(x^4 + y^2) - x^2 y 4x^3}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{2xy^3 - 2x^5 y}{(x^4 + y^2)^2} \\ &= \frac{2xy(y^2 - x^4)}{(x^4 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$D_2 f(x, y) = \frac{x^2(x^4 + y^2) - 2x^2 y^2}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{x^6 - x^2 y^2}{(x^4 + y^2)^2}.$$

Na orixe debemos usar a definición para calcular as derivadas parciais. Así

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0 \\ D_2 f(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 3.23 Obviamente, se f é derivable en x_0 na dirección de calquera vector $u \in \mathbb{R}^n$, existen todas as derivadas parciais de f en x_0 ; porén, o recíproco non é certo, pois poden existir todas as derivadas parciais dunha función f nun punto x_0 e non existir algunha outra derivada direccional.

Para a función, $f(x, y) = x + y$ se $x = 0$ ou $y = 0$ e $f(x, y) = 1$ se $x \neq 0$, $y \neq 0$, existen todas as derivadas parciais de f en $(0, 0)$ e valen 1, pero en calquera outra dirección u , non existe $D_u f(0, 0)$.

Relación coa continuidade

Sabemos que para funcións dunha variable real, toda función derivable nun punto é continua nese punto. Aínda que a definición de continuidade para funcións de varias variables é similar á de funcións dunha variable, para funcións $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a existencia de todas as derivadas direccionais nun punto non é condición necesaria, nin suficiente, para a continuidade de f . Isto é, por unha parte, nun punto dado poden existir todas as derivadas direccionais de f e non ser f continua e, por outra, pode ser continua a función nun punto e non existir algunha derivada direccional nese punto. O concepto equivalente á derivabilidade de funcións duna variable para o caso de funcións de varias variables é o de diferenciabilidade.

Unha función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciabile en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ cando as derivadas parciais nos permiten construír unha aproximación boa da función. A definición precisa deste concepto, aínda que resulta semellante ao de derivabilidade para funcións dunha variable, está fóra dos obxectivos deste curso, e abonda con saber que as funcións suficientemente regulares, en particular as funcións elementais, son diferenciabes. De feito é suficiente con que as derivadas parciais sexan continuas.

Exemplo 3.24 1. Dada $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0, y) = 0$, calquera que sexa o vector $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, se $a \neq 0$

$$D_u f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2 b^2}{ta}}{t} = \frac{b^2}{a}$$

e se $a = 0$, $u = (0, b)$ e

$$D_u f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, tb) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

Polo que existe $D_u f(0, 0)$ calquera que sexa $u \in \mathbb{R}^2$. Aínda así, f non é continua en $(0, 0)$.

2. A función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ é trivialmente continua en todo $\mathbb{R}^2$, pero calquera que sexa $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, non existe $D_u f(0, 0)$, pois

$$D_u f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2(a^2 + b^2)}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} \sqrt{a^2 + b^2}$$

e este límite non existe, xa que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} = 1$ e $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t|}{t} = -1$.

3.4. Derivadas de funcións vectoriais

Estendemos a continuación a definición de derivada direccional a funcións vectoriais e estudamos a relación existente coa derivada direccional de funcións escalares.

Definición 3.25 Dise que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é derivable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ na dirección do vector $u \in \mathbb{R}^n$, se existe o límite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} = D_u f(x_0) \in \mathbb{R}^m$$

Polas propiedades dos límites de funcións vectoriais, este límite existe e vale $D_u f(x_0) \in \mathbb{R}^m$ se, e só se, existen os límites de cada unha das coordenadas do cociente, e este límite, para cada $i = 1, \dots, m$ é

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + tu) - f_i(x_0)}{t} = D_u f_i(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Consecuentemente temos a seguinte propiedade

Proposición 3.26 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é derivable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ na dirección do vector $u \in \mathbb{R}^n$ se, e só se, cada unha das coordenadas de f é derivable en x_0 na dirección do vector u . Ademais verifícase,

$$D_u f(x_0) = (D_u f_1(x_0), D_u f_2(x_0), \dots, D_u f_m(x_0))^t$$

Deste resultado dedúcese que o estudo da existencia de derivadas direccionais ou de derivadas parciais de funcións vectoriais, redúcese ó estudo de derivadas direccionais ou parciais de funcións escalares.

Definición 3.27 Sexan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $f_1, f_2, \dots, f_m$ as súas funcións compoñentes, a matriz de orde $m \times n$

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(x_0) & D_2 f_1(x_0) & \dots & D_n f_1(x_0) \\ D_1 f_2(x_0) & D_2 f_2(x_0) & \dots & D_n f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(x_0) & D_2 f_m(x_0) & \dots & D_n f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

denomínase matriz xacobiana de f no punto x_0 e será denotada por $Df(x_0)$.

Exemplo 3.28 A matriz xacobiana da función $f(x, y, z) = (x + xy^2 + 2zy, x \sin(z - y))$ é

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 + y^2 & 2xy + 2z & 2y \\ \sin(z - y) & -x \cos(z - y) & x \cos(z - y) \end{pmatrix}$$

3.4.1. As funcións diferenciáveis. Regra da cadeia

Proposición 3.29 *Propiedades das funcións diferenciáveis.*

1. Se f é diferenciável en x , entón existe $D_i f(x)$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$,
2. Se f é diferenciável en x , entón tamén é continua en x .
3. Se $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ son diferenciáveis en x e $\lambda \in \mathbb{R}$, entón tamén son diferenciáveis en x as funcións, $f + g$, λf , $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ se $g(x) \neq 0$. Ademais verifícase

$$D(f + g)(x) = Df(x) + Dg(x)$$

$$D(\lambda f)(x) = \lambda Df(x)$$

$$D(f \cdot g)(x) = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x), \text{ se } m = 1$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{[g(x)]^2}, \text{ se } m = 1$$

4. *Regra da cadeia:* Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável en $x \in \mathbb{R}^n$ e $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável en $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$, entón a función composición $g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tamén é diferenciável en x e ademais verifícase,

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x).$$

Debemos observar que $D(g \circ f)(x) \in \mathcal{M}_{p \times n}$, $Dg(f(x)) \in \mathcal{M}_{p \times m}$ e $Df(x) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ e que, polo tanto, podemos multiplicar as matrices $Dg(f(x)) \cdot Df(x)$.

No caso particular de que a función g sexa escalar, $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, a partir da regra da cadeia obtemos

$$D_i(g \circ f)(x) = \sum_{j=1}^m D_j g(f(x)) D_i f_j(x).$$

Utilizando a notación clásica das derivadas parciais, $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.

Ademais, se denotamos por $y_j = f_j(x)$ e $z = g(y)$, a igualdade anterior tamén se pode poñer como

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial z}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \quad (3.1)$$

Exemplo 3.30 Sexan $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $F(x, y) = f(y^2, xy)$. Calcula $DF(x, y)$ e obtén $DF(2, 1)$ sabendo que $Df(1, -2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Se consideramos $g(x, y) = (y^2, xy)$, temos que $F = f \circ g$. Entón para calcular $DF(x, y)$ usaremos a Regra da cadea:

$$DF(x, y) = Df(g(x, y))Dg(x, y) = (D_1f(y^2, xy) \ D_2f(y^2, xy)) \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Doutro xeito, utilizando a notación clásica e denotando $u = y^2, v = xy$, teríamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = D_1f(u, v) \cdot 0 + D_2f(u, v) \cdot y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2yD_1f(u, v) + D_2f(u, v) \cdot x \end{aligned}$$

De calquera xeito,

$$D_1F(x, y) = yD_2f(y^2, xy)$$

$$D_2F(x, y) = 2yD_1f(y^2, xy) + xD_2f(y^2, xy)$$

Se $x = 2$ e $y = -1$, temos que $u = 1$ e $v = -2$, polo que $DF(1, -1) = (0, -2)$.

Exemplo 3.31 Sexan $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funcións diferenciables en $\mathbb{R}^2$, e definamos $F(x, y) = xf(y^2, g(y, x))$.

a) Estuda a diferenciabilidade de F .

b) Calcula $DF(x, y)$.

c) Se $g(-1, 1) = 2, f(1, 2) = 0$ e $Df(1, 2) = (1, 0)$, calcula $DF(1, -1)$.

a) A función F é produto da función polinómica $h(x, y) = x$, que é diferenciable en $\mathbb{R}^2$, pola función $G(x, y) = f(y^2, g(y, x))$. $g(y, x)$ é diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por hipótese e a función y^2 é diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por ser polinómica. Entón, a función vectorial $(y^2, g(y, x))$ é diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Como por hipótese f é diferenciable en $\mathbb{R}^2$, $G(x, y) = f(y^2, g(y, x))$ é diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por ser composición de funcións diferenciables. Finalmente, F é diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por ser produto de dúas funcións diferenciables en $\mathbb{R}^2$.

b) Para calcular $DF(x, y)$, derivamos o produto $F(x, y) = xG(x, y)$:

$$DF(x, y) = (G(x, y) + xD_1G(x, y) \ xD_2G(x, y)).$$

Necesitamos, entón, calcular $DG(x, y)$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow & p(x, y) = (y^2, g(y, x)) & \rightarrow & f(u, v) = G(x, y) \end{array}$$

$$\begin{aligned} DG(x, y) &= Df(u, v) \circ Dp(x, y) \\ &= (D_1f(u, v) \ D_2f(u, v)) \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ D_2g(y, x) & D_1g(y, x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Doutra maneira, utilizando a relación 3.1, teriamos

$$\begin{aligned} D_1 G(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= D_2 f(u, v) D_2 g(y, x) \\ D_2 G(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= 2y D_1 f(u, v) + D_2 f(u, v) D_1 g(y, x). \end{aligned}$$

De calquera xeito,

$$\begin{aligned} D_1 F(x, y) &= f(y^2, g(y, x)) + x D_2 f(y^2, g(y, x)) D_2 g(y, x) \\ D_2 F(x, y) &= 2xy D_1 f(y^2, g(y, x)) + x D_2 f(y^2, g(y, x)) D_1 g(y, x). \end{aligned}$$

c) Para $x = 1$ e $y = -1$, $u = 1$ e $v = g(-1, 1) = 2$, polo que $DF(1, -1) = (0 \quad -2)$.

Exercicios

26. Calcula, se existen, as derivadas parciais da función $f(x, y) = \frac{7x^2}{x^2+y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$ en $(0, 0)$ e $(-1, -1)$.

27. a) Para a función $h(x, y, z) = xe^{zx} - xz^2 - x^2y$, obtén, usando a definición, a derivada direccional na dirección de $(1, 1, 1)$ e no punto $(0, 0, 1)$.

b) Calcula $f(x, y)$ sabendo que $D_1 f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x}$ e que $f(e, y) = y^2$.

28. Sexa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ unha función simétrica ($f(x, y) = f(y, x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$). Demostra que, se existe $D_1 f(x_0, y_0)$, tamén existe $D_2 f(y_0, x_0)$. Cal é o valor de $D_2 f(y_0, x_0)$?

29. Calcula as derivadas parciais de primeira orde das seguintes funcións:

a) $z = x^2 - 2xy + 3y$

c) $g(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

e) $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

g) $f(x, y) = 7^{x-y^2}$

i) $f(x, y, z) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$

l) $h(x, y, z) = y \cos(x - 3z)$

b) $z = x^4 - 3x^2y^2 + y^4$

d) $f(u, v) = \ln(u - v)$

f) $f(x, y) = \sin(x - 2y)$

h) $w = \frac{xy}{x+y+z}$

k) $g(x, y, z) = ze^{3x-y}$

m) $f(a, b) = 7a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$

30. Calcula as derivadas parciais de primeira orde das seguintes funcións:

$$f(x, y) = y \cos x + e^{-xy}$$

$$F(x, y) = e^{x+y} + e^{xy}$$

$$g(x, y, z) = \frac{x^2 y}{z}$$

$$h(x, y, z) = x^5 z + x^3 \tan\left(\frac{x+1}{y}\right)$$

$$q(x, y) = \pi^2 + ye^{2x-y}$$

$$G(x, y) = x^3 y + ye^x$$

$$R(x, y) = x^3 + 3^y$$

$$H(r, s) = \sqrt[4]{s^2 - r}$$

$$Y(r, s) = \sqrt{s^2 - r}$$

$$z = \sqrt[6]{x^5} - \frac{3y^5}{x^2}$$

$$\beta(t, u) = \frac{\cos(3t)}{\cos(5u)}$$

$$u(x, y) = \frac{2x^2 - 8y}{2x^3}$$

$$g(x, y) = e^{3y-2x} - 2x^3 + y^2$$

$$L(x, y) = -\frac{y^2 + \ln 5}{y^2 + \ln 5}$$

$$\alpha(a, b) = \arctan(\sqrt{3a + b^2})$$

$$W(r, t) = r \sin(e^{-2t})$$

$$T(r, s) = \frac{1}{r} \cos\left(\frac{rs}{r^2-1}\right)$$

$$U(x, y) = \frac{5y - \cos x}{\sin x}$$

$$C(t, u) = \left(\frac{2t - 3u}{t - 1}\right)^3$$

$$Q(t, s) = t^2 s^3 \ln\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$m(x, y) = 5^{3y} \sqrt{x^2 + 3}$$

$$V(x, y) = \frac{\tan^2(e^{xy})}{y \ln x}$$

$$A(x, y) = \sqrt[5]{x^2} \sqrt[7]{y^3}$$

$$B(x, y) = \sqrt[5]{x^2} - \sqrt[7]{y^3}$$

$$k(x, y) = (5x^2 - x) \cos(y^3 - 2y)$$

$$K(x, y) = 5x^2 - x \cos(y^3 - 2y)$$

$$h(x, y) = y^5 \ln(\tan x)$$

$$H(x, y) = y^5 + \ln(\tan x)$$

$$\gamma(\alpha, \beta) = \sin^4(\alpha) \cos(\beta^5)$$

$$\theta(\alpha, \beta) = \sin^4(\alpha) + \cos(\beta^5)$$

$$p(x, y) = y^3 \sin(x + y)$$

$$P(x, y) = e^3 \sin(x - y)$$

31. A lei dos gases ideais establece que $PV = nRT$, sendo P a presión, V o volume, n o número de moles do gas, R a constante dos gases e T a temperatura absoluta. Proba que $\frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} = -1$.

32. Calcula, nos seus dominios, a matriz xacobiana das seguintes funcións:

a) $f(x, y) = (x^4 - y^3, 2x^2 y, 3y + 5x - 1)$

b) $(u, w) = (xy^2 + z, xz + 2y + z^2)$

c) $(u, v, w) = (\arctan(\frac{y+z}{x}), e^{xy}, \sin^2(xy + 3z))$

d) $(y, z) = (x^2 \sin(x), x^{\frac{-2}{3}})$

e) $f(x, y) = (\ln(x - y), x \cos(x - 2y))$

f) $f(r, \theta, s) = (\frac{r}{r^2+s^2}, 3r - \cos(2\theta))$

g) $f(x, y, z) = (-\ln(1 + \frac{1}{y^2}), z \sin(x), x^2 y z^3)$

h) $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

i) $f(x, y) = (x \cos(y), x \sin(y), x \cos(y) \sin(y))$

j) $f(x, y) = (x^{\frac{1}{7}}, e^x - e^{-y})$

33. Sexan $f(x, y) = (x^4 + xy^3, x^2 y^2 - 3x^2)$ e $g(x, y) = (x \cos(y), x \sin(y), x \cos(y) \sin(y))$. Obtén as matrices xacobianas de f e g nos puntos $(1, -1)$ e $(\pi, \frac{\pi}{2})$, respectivamente.

34. A temperatura en calquera punto (x, y) dunha placa vén dada por $T(x, y) = 500 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{2}y^2$, onde x e y están dados en metros. Calcula, no punto $(2, 3)$, o ritmo de cambio da temperatura con respecto á distancia percorrida na placa nas direccións x e y .

35. Sexan $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis. Obtén a matriz xacobiana de $F(x, y) = f(y + g(y), x^3 y^2)$.

36. Consideremos as funcións $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por $f(x, y) = (x^2, xy, x^3)$ e $g(x, y, z) = (x - z^2, 2x^2 - y, xyz)$. Obtén a matriz xacobiana de $g \circ f$ no punto $(-1, 1)$.
37. Se $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g(t) = (t^2, \cos(t), \sin(t))$ e $F(x, y, z) = g(\sin \frac{x^2 y}{e^{xyz}})$, calcula $DF(3, 0, -1)$.
38. Dada unha función diferenciable $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, calcula a matriz xacobiana de $F(x, y) = f(f(x, y), f(x, y))$. Comproba o resultado para $f(x, y) = x^3 y^2$.
39. Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ son funcións diferenciables, calcula as derivadas parciais de
- $F(x, y, z) = f(xy, z)$
 - $F(x, y, z) = xz^3 f(x, y)$
 - $F(x, y) = f(y^2, x + y)$
 - $F(x, y) = f(xy, \ln(y^2 + 1))$
 - $F(x, y) = x e^{f(y, y)}$
 - $F(x, y) = \frac{f(y, x)}{y}$
 - $F(x, y, z) = \sin(z f(y, x))$
 - $F(x, y, z) = \frac{x^3}{z} f(x^2, y + xz)$
 - $F(x, y) = g(\frac{y}{x}, x + y, e^{xy})$
 - $F(x, y) = x^2 g(y, 2x - y, x^3)$
40. Dada a función $F(x, y) = f(g(x, y), xy)$, supoñendo que $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables, $g(1, 0) = 1$ e $\nabla f(1, 0) = (0, 1)$, calcula $DF(x, y)$ e $DF(1, 0)$.
41. Calcula as derivadas parciais de f para os casos:
- $f(x, y) = g(x)h(y)$
 - $f(x, y) = F(g(y), h(x), k(x, y))$
 - $f(x, y) = k(y, x)$
- onde $g, h \in C^1(\mathbb{R})$, $k \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$.
42. Sexa $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Calcula as derivadas parciais das seguintes funcións:
- $F(x, y) = f(f(x, y), 1 + x)$
 - $F(x, y) = f(x^2, (x + 1)/y) f(x, y)$
 - $F(x, y) = f(xy, e^{2x-y})$
 - $F(x, y) = \ln(f(y + x, -x))$
 - $F(x, y) = \frac{2x}{(1 + f(y, x))^2}$
 - $F(x) = f(x^2, \sqrt{2e^x})$
 - $G(x, y) = \ln(f(x^2 + y))$
43. Obtén a expresión das derivadas parciais das funcións:
- $F(x, y) = f(g(x)k(y), g(x) + h(y))$, onde $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $g, h, k \in C^1(\mathbb{R})$.
 - $F(x, y, z) = f(x^y, y^z, z^x)$, para $f \in C^1(\{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\})$
44. Sexa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}$. Proba que:
- Se $F(x, y) = f(xy)$, entón $x D_1 F(x, y) = y D_2 F(x, y)$.
 - Se $F(x, y) = f(ax + by)$, entón $b D_1 F(x, y) = a D_2 F(x, y)$.
 - Se $F(x, y) = f(x^2 + y^2)$, entón $y D_1 F(x, y) = x D_2 F(x, y)$.
 - Se $F(x, y) = f(x^2 - y^2)$, entón $y D_1 F(x, y) + x D_2 F(x, y) = 0$.
45. Sexan $f, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable. Calcula $DF(x, y)$, sabendo que $F(x, y) = f\left(g(x)h(x, y), \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)$.
46. Sexa $F(x, y) = f(x^2, y + f(x, y))f(x, y)$, con $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Sabendo que $f(0, 0) = 1$, $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ e que $D_2 f(0, 1) = 2$, calcula $\nabla F(0, 0)$.

47. Sexan $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funcións diferenciáveis e $h, p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en $\mathbb{R}$.

a) Obtén o dominio e estuda a diferenciabilidade de $F(x, y, z) = f\left(\frac{g(x, y)}{y}, \frac{h(x)}{p(z)}\right)$. Calcula $DF(x, y, z)$.

b) Se $g(0, 1) = 2$, $Dg(0, 1) = (1, 0)$, $Df(2, -2) = (-3, 4)$, $h(0) = -2$, $h'(0) = 1$, $p(-1) = 1$ e $p'(-1) = 0$, calcula $DF(0, 1, -1)$.

3.5. Gradiente dunha función real

Definición 3.32 Sexa $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que existen as derivadas parciais de f en x_0 . O vector $(D_1 f(x_0), \dots, D_n f(x_0))$ denomínase gradiente da función f no punto x_0 e denótase por $\nabla f(x_0)$.

Proposición 3.33 Se f é diferenciable no punto x_0 , entón f é derivable nese punto na dirección de calquera vector $u \in \mathbb{R}^n$ e verifícase $D_u f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot u$

Exemplo 3.34 Para $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$, temos que $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$. Se usamos a propiedade anterior para obter a derivada direccional de f en $(0, 0)$ na dirección de $u = (3, 4)$, temos que

$$D_{(3,4)} f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot (3, 4) = (1, 0) \cdot (3, 4) = 3.$$

O seguinte resultado resume as propiedades máis importantes do vector gradiente para funcións diferenciáveis.

Proposición 3.35 Sexan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en x_0 tal que $\nabla f(x_0) \neq 0$ e $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|u\| = 1$. Entón

1. $D_u f(x_0)$ é a proxección ortogonal do gradiente de f en x_0 sobre a dirección do vector u .
2. $-\|\nabla f(x_0)\| \leq D_u f(x_0) \leq \|\nabla f(x_0)\|$, é dicir, $|D_u f(x_0)| \leq \|\nabla f(x_0)\|$.
3. $D_u f(x_0) = \|\nabla f(x_0)\|$ se, e só se, u está na dirección de $\nabla f(x_0)$, é dicir $u = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$.
4. $D_u f(x_0) = -\|\nabla f(x_0)\|$ se, e só se, u está na dirección de $-\nabla f(x_0)$, é dicir se $u = -\frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$.
5. A dirección de maior crecemento de f en x_0 é a de $\nabla f(x_0)$.
6. A dirección de maior decrecemento de f en x_0 é a de $-\nabla f(x_0)$.

Observación 3.36 1. O valor máximo da derivada direccional de f en x_0 alcánzase na dirección do vector gradiente de f en x_0 .

2. O valor mínimo da derivada direccional de f en x_0 alcánzase na dirección oposta á do vector gradiente de f en x_0 .

3. En calquera dirección ortogonal á do gradiente de f , o crecemento da función f é nulo. Por outra parte, é obvio que o crecemento de f é nulo, se x se move sobre unha curva de nivel, de aí que o gradiente de f no punto x_0 sexa ortogonal á curva de nivel que pasa por x_0 .

Exemplo 3.37 Para obter o plano tanxente á superficie $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 10$ no punto $(1, 2, 1)$, consideramos a función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$. Así, a referida superficie é o conxunto de nivel 10 de f , entón o vector $\nabla f(1, 2, 1)$ é ortogonal ó plano tanxente á superficie $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 10$ no punto $(1, 2, 1)$. Como $D_1f(x, y, z) = 2x + 2y$, $D_2f(x, y, z) = 2y + 2x$ e $D_3f(x, y, z) = 2z$, entón $\nabla f(1, 2, 1) = (6, 6, 2)$ polo que a ecuación do plano tanxente é $6(x - 1) + 6(y - 2) + 2(z - 1) = 0$, é dicir, $3x + 3y + z = 10$.

Exemplo 3.38 Para obter a ecuación do plano tanxente á gráfica da función $f(x, y) = x^2 + y^2$ no punto $(1, 2, f(1, 2))$, consideramos a función $F(x, y, z) = f(x, y) - z = x^2 + y^2 - z$. Así, a gráfica de f é o conxunto de nivel 0 de F , entón o vector $\nabla F(1, 2, 5)$ é ortogonal ó plano tanxente á superficie $z = x^2 + y^2$ en $(1, 2, 5)$.

Calcúlanse as derivadas parciais de f , $D_1f(x, y) = 2x$, $D_2f(x, y) = 2y$, logo $\nabla F(1, 2, 5) = (2, 4, -1)$, que é ortogonal ó plano tanxente, resultando a ecuación do mesmo $2(x - 1) + 4(y - 2) - (z - 5) = 0$, isto é $2x + 4y - z = 5$.

Exercicios

48. Para as funcións que siguen, calcula o valor máximo da derivada direccional para vectores unitarios no punto que se especifica.

- a) $f(x, y) = x \tan(y)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$
- b) $f(x, y) = y \cos(x - y)$ en $(0, \frac{\pi}{2})$
- c) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ en $(1, 2)$
- d) $f(x, y, z) = xe^{yz}$ en $(2, 0, -4)$
- e) $f(x, y, z) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ en $(0, 0, 0)$
- f) $f(x, y, z) = xy^2z^2$ en $(2, 1, 1)$

49. Calcula un vector normal ás superficies que seguen no punto indicado.

- a) $x + y + z = 4$ en $(2, 0, 2)$
- b) $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ en $(3, 1, 1)$
- c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $(3, 4, 5)$
- d) $z = xy^4$ en $(1, 2, 16)$
- e) $z - x \sin(y) = 4$ en $(6, \frac{\pi}{6}, 7)$
- f) $\ln(\frac{x}{y-z}) = 0$ en $(1, 4, 3)$

50. Calcula a ecuación do plano tanxente ás seguintes superficies no punto indicado:

- a) $z^2 = x^2 + y^2$ no punto $(3, 4, 5)$.
- b) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ no punto $(-1, -1, 1)$.
- c) $x^2y + y^2z + z^2x = 5$ no punto $(1, -1, 2)$.

51. Calcula a ecuación do plano tanxente á gráfica das seguintes funcións no punto indicado:
- $f(x, y) = -x^3 + 2xy^2 + 2y^2 + x$ no punto $(-1, -1)$.
 - $f(x, y) = e^x \ln y$ no punto $(0, 1)$.
 - $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ no punto $(1, 3)$.
52. a) Se $z = 2x + y - 3$ é o plano tanxente á superficie definida pola gráfica da función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ no punto $(1, 2)$, calcula $f(1, 2)$ e $\nabla f(1, 2)$.
b) O mesmo para o plano $x + y + z = 1$ no punto $(1, 0)$.
53. Para as funcións $z = 3 - x^2 - y^2 + 6y$, $z = 3x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 5$, determina o punto da gráfica onde o plano tanxente é horizontal.
54. Demostra que todos os planos tanxentes á superficie $z^2 = ax^2 + by^2$ pasan pola orixe.
55. Dada $f(x, y) = 3 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$, calcula un vector unitario u ortogonal a $\nabla f(1, 2)$ e $D_u f(1, 2)$. Analiza o significado xeométrico do resultado.
56. Discute se os enunciados que seguen son verdadeiros ou falsos para unha función diferenciable f . Explica os enunciados verdadeiros e pon un contraexemplo para os falsos.
- Se $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, entón $D_u f(0, 0) = 0$ para calquera vector unitario u .
 - Se $f(x, y) = x + y$, entón $-1 \leq D_u f(x, y) \leq 1$.
 - Se $D_u f(x, y)$ existe, entón $D_{-u} f(x, y) = -D_u f(x, y)$.
 - Se $D_u f(x_0, y_0) = c$, para calquera vector unitario u , entón $c = 0$.
57. a) Calcula a derivada da función $f(x, y, z) = (x + z)e^{x-y}$ en $(1, 1, -1)$ na dirección do vector $(1, 2, -3)$.
b) Indica cal é a dirección de máis crecemento de $u(x, y) = 8\sqrt{x} + 5\sqrt{y}$ no punto $(4, 1)$.
58. A temperatura no punto (x, y) dunha placa metálica vén dada por $T(x, y) = 400e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, para $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Calcula as direccións na placa no punto $(2, 3)$ nas que non cambia a temperatura. Calcula a dirección de máximo crecemento da temperatura no punto $(3, 5)$.

3.6. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

- Se $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivable e $f(x) = \arctan(x^2) + g(x)^2$, entón $f'(x)$ vale
 a) $\frac{2x}{1+x^4} + 2g(x)g'(x)$ b) $\frac{1}{1+x^4} + 2g(x)g'(x)$ c) $\frac{2x}{1+x^4} + 2g'(x)$ d) $\frac{1}{1+x^4} + 2g'(x)$
- Se $h(t) = \frac{1}{\sqrt[5]{t^2}} + \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ entón $h'(t)$ é
 a) $\cos\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{2}{5\sqrt[5]{t^7}}$ b) $-\frac{1}{t^2} \cos\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{2}{5\sqrt[5]{t^7}}$ c) $-\frac{1}{t^2} \cos\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{t}{\sqrt[5]{t^2}}$ d) $\cos\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{t}{\sqrt[5]{t^2}}$

3. Se $f(x, y) = (\sin(xy), \ln(\frac{y}{x}), e^{-xy})$, entón a matriz xacobiana de f é

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{pmatrix} y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ -\frac{y}{x} & \frac{x}{y} \\ -e^{-xy} & -e^{-xy} \end{pmatrix} & \text{b) } \begin{pmatrix} y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ -\frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ -ye^{-xy} & -xe^{-xy} \end{pmatrix} \\ \text{c) } \begin{pmatrix} y \cos(xy) & -\frac{y}{x} & -e^{-xy} \\ x \cos(xy) & \frac{x}{y} & -e^{-xy} \end{pmatrix} & \text{d) } \begin{pmatrix} y \cos(xy) & -\frac{1}{x} & -ye^{-xy} \\ x \cos(xy) & \frac{1}{y} & -xe^{-xy} \end{pmatrix} \end{array}$$

4. Se $f(x, y, z) = (\frac{xy}{z}, \sin(xyz), xe^{yz})$, entón a matriz xacobiana de f é

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{pmatrix} \frac{y}{z} & \frac{x}{z} & -\frac{xy}{z^2} \\ yz \cos(xyz) & xz \cos(xyz) & xy \cos(xyz) \\ e^{yz} & xze^{yz} & xye^{yz} \end{pmatrix} & \text{b) } \begin{pmatrix} \frac{y}{z} & yz \cos(xyz) & e^{yz} \\ \frac{x}{z} & xz \cos(xyz) & xze^{yz} \\ -\frac{xy}{z^2} & xy \cos(xyz) & xye^{yz} \end{pmatrix} \\ \text{c) } \begin{pmatrix} \frac{y}{z} & \frac{x}{z} & -\frac{1}{z^2} \\ yz \cos(xyz) & xz \cos(xyz) & xy \cos(xyz) \\ e^{yz} & xe^{yz} & ye^{yz} \end{pmatrix} & \text{d) } \begin{pmatrix} \frac{y}{z} & yz \cos(xyz) & e^{yz} \\ \frac{x}{z} & xz \cos(xyz) & xe^{yz} \\ -\frac{1}{z^2} & xy \cos(xyz) & ye^{yz} \end{pmatrix} \end{array}$$

5. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivable e $F(x) = f(x \sin(x^2))$, entón $F'(x)$ vale

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f'(x \sin(x^2))(\sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2)) & \text{b) } f'(x \sin(x^2)) \\ \text{c) } f'(x)(\sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2)) & \text{d) } 2x^2 f'(x \sin(x^2)) \cos(x^2) \end{array}$$

6. Se $f(x, y, z) = xy + x^3 + yz^2$ e $u = (-1, 0, 1)$, entón $D_u f(-1, 1, 0)$ vale

$$\text{a) } -4 \quad \text{b) } 4 \quad \text{c) } 6 \quad \text{d) } -6$$

7. A dirección de maior crecemento de $f(x, y, z) = \frac{x-y^2}{xz}$ no punto $(1, 1, 1)$ é a do vector

$$\text{a) } (1, -2, 0) \quad \text{b) } (-1, 2, 0) \quad \text{c) } (0, 2, -1) \quad \text{d) } (0, -2, 1)$$

8. A ecuación do plano tanxente á gráfica da función $z = e^{xy} + \ln(xy + 1)$ no punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$ é

$$\text{a) } -2x - z = -1 \quad \text{b) } 2x - z = -1 \quad \text{c) } x + z = 1 \quad \text{d) } x - z = 1$$

9. Sexan $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciabile, $F(x, y, z) = f(\sin x, \cos y, \tan z)$, $u = \sin x$, $v = \cos y$, $w = \tan z$ e $f(0, 1, 0) = 3$, unha das seguintes igualdades é FALSA.

$$\text{a) } \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cos x \quad \text{b) } \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial v} \sin y \quad \text{c) } \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{\cos^2 z} \frac{\partial f}{\partial w} \quad \text{d) } F(0, 0, 0) = 0$$

3.7. Derivación con MATLAB

1. A sentenza `diff` utilízase para calcular as derivadas dunha función. Por exemplo, as sentenzas

```
>>syms x
```

```
>>Df=diff(x^2*sin(x),x)
```

devolve a derivada da función $f(x) = x^2 \sin x$

2. Coas sentenzas

```
>>syms x y z
```

```
>>f(x,y,z)=x*y*exp(-x^2-y^2)+log(x/y)+x*y*z
```

```
>>D1f=diff(f,x), D2f=diff(f,y), D3f=diff(f,z)
```

devolve as derivadas parciais de f respecto de x, y e z , respectivamente.

3. Coa sentenza

```
>>Df=jacobian(f)
```

devolve a matriz xacobiana de f .

4. Coas sentenzas

```
>>D3fp=D3f(1,1,pi/2)
```

```
>>Dfp=Df(1,1,pi/2)
```

devolve $D_3f(1,1,\frac{\pi}{2})$ e $Df(1,1,\frac{\pi}{2})$.

3.8. Solucións dos exercicios propostos

1. $y = \frac{1}{3}x, 7x - 3y = 4$

2. $y = 5x - 7$

3. $1/4$

4. En $x = 1/3$

5. En $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ e en $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

6. a) $y = -1$

6. b) $y = x - 1$

6. c) $y = 2 - 3x$

6. d) $y = -\frac{26}{3}x + 7$

8. $A'(x) = \frac{2}{5}\sqrt[5]{x-3}$

$F'(t) = \frac{-3\sin 3t \cos 5t + 5\cos 3t \sin 5t}{\cos^2 5t}$

$p'(x) = \frac{2x^4 - 24x^2}{(2x^2 - 8)^2}$

$C'(t) = \frac{12t^5}{(t-1)^4}$

$g'(x) = -2e^{-2x} - 6x^2$

$B'(t) = 2t \ln \frac{1}{t} - t$

$\alpha'(a) = \frac{\frac{3}{2}}{(1+3a)2\sqrt{3a}}$

$u'(x) = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

$k'(x) = (5x^2 - x)^{\cos(x)} \left(\frac{(10x-1)\cos(x)}{5x^2-x} - \sin(x) \ln(5x^2 - x) \right)$

$W'(t) = -2e^{-2t} \cos(e^{-2t})$

$$\gamma'(x) = 3 \sin^2 x \cos x \cos x^2 - 2x \sin^3 x \sin x^2$$

$$T'(r) = -\frac{1}{r^2} \cos\left(\frac{r}{r^2-1}\right) + \frac{1+r^2}{r(r^2-1)^2} \sin\left(\frac{r}{r^2-1}\right)$$

$$9. \text{ a) } h'(x) = f'(x+5)$$

$$9. \text{ b) } h'(x) = 2x f'(x^2)$$

$$9. \text{ c) } h'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} f'(\sqrt{1-x^2})$$

$$9. \text{ d) } h'(x) = \frac{f'(x) \cos(f(x)) \ln(x) - \frac{1}{x} \sin(f(x))}{\ln^2(x)}$$

$$10. \text{ a) } f'(x) = g'(x+g(2))$$

$$10. \text{ b) } f'(x) = 5g(3)g'(5xg(3)) + g(0)$$

$$10. \text{ c) } f'(x) = g'(x+g(x))(1+g'(x))$$

$$10. \text{ d) } f'(x) = g'(x)(x-4) + g(x)$$

$$10. \text{ e) } f'(x) = 2xg'(x^2) - 1$$

$$10. \text{ f) } f'(x) = (2x-1)g'(x^2-x)$$

$$12. \text{ a) } f'(x) = \cos(x) \ln(\cos(x)) - \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$$

$$12. \text{ b) } f'(x) = \frac{1 + \frac{1+1/2\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

$$12. \text{ c) } f'(x) = \frac{1+\ln(x)}{1+x^2 \ln^2(x)}$$

$$12. \text{ d) } f'(x) = -3x^2 \sin(x^3) \sin(2x) + 2 \cos(x^3) \cos(2x)$$

$$12. \text{ e) } f'(x) = -\frac{1}{x^2} (x \sin(x) \cos(\cos(x)) + \sin(\cos(x)))$$

$$12. \text{ f) } f'(x) = -\frac{\cos(\cos(\sqrt{x})) \sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

$$17. \text{ a) } f'(x) = g'(x+g(a))$$

$$17. \text{ b) } f'(x) = g(a)g'(xg(a))$$

$$17. \text{ c) } f'(x) = (1+g'(x))g'(x+g(x))$$

$$17. \text{ d) } f'(x) = g'(x)(x-a) + g(x)$$

$$17. \text{ e) } f'(x) = g(a)$$

$$17. \text{ f) } f'(x) = 2(x-3)g'((x-3)^2)$$

$$18. \text{ a) } h'(x) = \cos(x)f'(\sin(x))f(\cos(x)) - f(\sin(x))\sin(x)f'(\cos(x))$$

$$18. \text{ b) } h'(x) = \frac{f'(x) \cos(f(x)) \ln(x) - \frac{1}{x} \sin(f(x))}{\ln^2(x)} f' \left(\frac{\sin(f(x))}{\ln(x)} \right)$$

$$18. \text{ c) } h'(x) = \ln(a)a^{xf(x)}(f(x) + xf'(x))$$

$$18. \text{ d) } h'(x) = -\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$$

$$18. \text{ e) } h'(x) = \frac{2x-a-b}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}} f'(\sqrt{(x-a)(x-b)})$$

$$18. \text{ f) } h'(x) = x^{f(2x)} (2 \ln(x) f'(2x) + f(2x)/x)$$

$$18. \text{ g) } h'(x) = 2f(x \cos(x+k))f'(x \cos(x+k))(\cos(x+k) - x \sin(x+k))$$

$$18. \text{ h) } h'(x) = \sin(f(xf(x)))f'(xf(x))(f(x) + xf'(x))$$

$$19. \text{ a) } C_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2 - x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -2 - x\}$$

19. b) Si, están no conjunto de nivel $4a^2$.

22. a) Falso. b) Falso. c) Falso. d) Verdadero.

26. $D_1f(0,0)$ non existe, $D_2f(0,0) = 0$, $D_1f(-1,-1) = -\frac{7}{2}$, $D_2f(-1,-1) = \frac{7}{2}$.

27. a) $D_{(1,1,1)}h(0,0,1) = 0$

27. b) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 \ln(x) + \frac{1}{e^2}$

28. $D_2f(y_0, x_0) = D_1f(x_0, y_0)$

29. a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 3$

29. b) $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 6xy^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -6x^2y + 4y^3$

29. c) $D_1g(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, $D_2g(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$

29. d) $D_1f(u, v) = \frac{1}{u-v}$, $D_2f(u, v) = \frac{1}{v-u}$

29. e) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

29. f) $D_1f(x, y) = \cos(x - 2y)$, $D_2f(x, y) = -2\cos(x - 2y)$

29. g) $D_1f(x, y) = 7^{x-y^2} \ln(7)$, $D_2f(x, y) = -2y7^{x-y^2} \ln(7)$

29. h) $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{y^2 + yz}{(x + y + z)^2}$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x^2 + xz}{(x + y + z)^2}$, $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-xy}{(x + y + z)^2}$

29. i) $D_1f(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, $D_2f(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$, $D_3f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$

29. k) $D_1g(x, y, z) = 3ze^{3x-y}$, $D_2g(x, y, z) = -ze^{3x-y}$, $D_3g(x, y, z) = e^{3x-y}$

29. l) $D_1h(x, y, z) = -y \sin(x - 3z)$, $D_2h(x, y, z) = \cos(x - 3z)$,

$D_3h(x, y, z) = 3y \sin(x - 3z)$

29. m) $D_1f(a, b) = \frac{7}{3}a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$, $D_2f(a, b) = \frac{14}{3}a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}$

32. a) $Df(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 & -3y^2 \\ 4xy & 2x^2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

32. b) $D(u, w) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & 1 \\ z & 2 & x + 2z \end{pmatrix}$

32. d) $D(y, z) = \begin{pmatrix} 2x \sin(x) + x^2 \cos(x) \\ -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} \end{pmatrix}$

32. e) $Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x-y} & \frac{1}{y-x} \\ \cos(x - 2y) - x \sin(x - 2y) & 2x \sin(x - 2y) \end{pmatrix}$

32. f) $Df(r, \theta, s) = \begin{pmatrix} \frac{s^2 - r^2}{(r^2 + s^2)^2} & 0 & \frac{-2rs}{(r^2 + s^2)^2} \\ 3 & 2 \sin(2\theta) & 0 \end{pmatrix}$

32. g) $Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{y(y^2 + 1)} & 0 \\ z \cos x & 0 & \sin x \\ 2xyz^3 & x^2z^3 & 3x^2yz^2 \end{pmatrix}$

$$32. \text{ h) } D(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -r \text{sen}(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$32. \text{ i) } Df(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(y) & -x \text{sen}(y) \\ \text{sen}(y) & x \cos(y) \\ \cos(y) \text{sen}(y) & -x \text{sen}^2(y) + x \cos^2(y) \end{pmatrix}$$

$$32. \text{ j) } Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} x^{-\frac{6}{7}} & 0 \\ e^x & e^y \end{pmatrix}$$

$$33. Df(1, -1) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, Dg(\pi, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 1 & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}$$

$$34. (-\frac{12}{5}, -9)$$

$$35. DF(x, y) = (3x^2y^2 D_2f(u, v) \quad (1 + g'(y))D_1f(u, v) + 2x^3y D_2f(u, v)),$$

$$\text{sendo } (u, v) = (y + g(y), x^3y^2).$$

$$36. D(g \circ f)(-1, 1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 9 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$37. DF(3, 0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$38. DF(x, y) = (D_1f(x, y)(D_1f(u, v) + D_2f(u, v)) \quad D_2f(x, y)(D_1f(u, v) + D_2f(u, v))),$$

$$\text{sendo } u = v = f(x, y).$$

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 15x^{14}y^{10} & 10x^{15}y^9 \end{pmatrix}$$

$$39. \text{ a) } D_1F(x, y, z) = yD_1f(xy, z), D_2F(x, y, z) = xD_1f(xy, z),$$

$$D_3F(x, y, z) = D_2f(xy, z)$$

$$39. \text{ b) } D_1F(x, y, z) = z^3f(x, y) + xz^3D_1f(x, y), D_2F(x, y, z) = xz^3D_2f(x, y)$$

$$D_3F(x, y, z) = 3xz^2f(x, y)$$

$$39. \text{ c) } D_1F(x, y) = D_2f(y^2, x + y), D_2F(x, y) = 2yD_1f(y^2, x + y) + D_2f(y^2, x + y)$$

$$39. \text{ d) } D_1F(x, y) = yD_1f(xy, \ln(y^2 + 1))$$

$$D_2F(x, y) = xD_1f(xy, \ln(y^2 + 1)) + \frac{2y}{y^2+1}D_2f(xy, \ln(y^2 + 1))$$

$$39. \text{ e) } D_1F(x, y) = e^{f(y, y)}, D_2F(x, y) = xe^{f(y, y)}(D_1f(y, y) + D_2f(y, y))$$

$$39. \text{ f) } D_1F(x, y) = \frac{D_2f(y, x)}{y}, D_2F(x, y) = \frac{yD_1f(y, x) - f(y, x)}{y^2}$$

$$39. \text{ g) } D_1F(x, y, z) = zD_2f(y, x) \cos(zf(y, x)), D_2F(x, y, z) = f(y, x) \cos(zf(y, x))$$

$$D_3F(x, y, z) = zD_1f(y, x) \cos(zf(y, x))$$

$$39. \text{ h) } D_1F(x, y, z) = \frac{3x^2}{z}f(x^2, y + xz) + \frac{x^3}{z}(2xD_1f(x^2, y + xz) + zD_2f(x^2, y + xz))$$

$$D_2F(x, y, z) = \frac{x^3}{z}D_2f(x^2, y + xz),$$

$$D_3F(x, y, z) = \frac{-x^3}{z^2}f(x^2, y + xz) + \frac{x^4}{z}D_2f(x^2, y + xz)$$

$$39. \text{ i) } D_1F(x, y) = \frac{-y}{x^2}D_1g(\frac{y}{x}, x + y, e^{xy}) + D_2g(\frac{y}{x}, x + y, e^{xy}) + ye^{xy}D_3g(\frac{y}{x}, x + y, e^{xy})$$

$$D_2F(x, y) = \frac{1}{x}D_1g(\frac{y}{x}, x + y, e^{xy}) + D_2g(\frac{y}{x}, x + y, e^{xy}) + xe^{xy}D_3g(\frac{y}{x}, x + y, e^{xy})$$

$$39. \text{ j) } D_1F(x, y) = 2xg(y, 2x - y, x^3) + 2x^2D_2g(y, 2x - y, x^3) + 3x^4D_3g(y, 2x - y, x^3)$$

$$D_2F(x, y) = x^2D_1g(y, 2x - y, x^3) - x^2D_2g(y, 2x - y, x^3)$$

40. $DF(x, y) = (D_1g(x, y)D_1f(u, v) + yD_2f(u, v) \quad D_2g(x, y)D_1f(u, v) + xD_2f(u, v)),$
 sendo $(u, v) = (g(x, y), xy).$
 $DF(1, 0) = (1 \quad 1)$

41. a) $D_1f(x, y) = g'(x)h(y), D_2f(x, y) = g(x)h'(y)$
 41. b) $D_1f(x, y) = h'(x)D_2F(g(y), h(x), k(x, y)) + D_1k(x, y)D_3F(g(y), h(x), k(x, y))$
 $D_2f(x, y) = g'(y)D_1F(g(y), h(x), k(x, y)) + D_2k(x, y)D_3F(g(y), h(x), k(x, y))$
 41. c) $D_1f(x, y) = D_2k(y, x), D_2f(x, y) = D_1k(y, x)$

42. a) $D_1F(x, y) = D_1f(x, y)D_1f(f(x, y), 1 + x) + D_2f(f(x, y), 1 + x)$
 $D_2F(x, y) = D_2f(x, y)D_1f(f(x, y), 1 + x)$
 42. b) $D_1F(x, y) = f(x, y)(2xD_1f(u, v) + 1/yD_2f(u, v)) + f(u, v)D_1f(x, y)$
 $D_2F(x, y) = -f(x, y)(x + 1)/y^2D_2f(u, v) + f(u, v)D_2f(x, y),$ sendo $u = x^2$
 $v = (x + 1)/y$

42. c) $D_1F(x, y) = yD_1f(xy, e^{2x-y}) + 2e^{2x-y}D_2f(xy, e^{2x-y})$
 $D_2F(x, y) = xD_1f(xy, e^{2x-y}) - e^{2x-y}D_2f(xy, e^{2x-y})$
 42. d) $D_1F(x, y) = \frac{1}{f(y+x, -x)}(D_1f(y+x, -x) - D_2f(y+x, -x))$
 $D_2F(x, y) = \frac{1}{f(y+x, -x)}D_1f(y+x, -x)$

42. e) $D_1F(x, y) = \frac{2(1+f(y, x)) - 4xD_2f(x, y)}{(1+f(y, x))^3}$
 $D_2F(x, y) = \frac{-4xD_1f(y, x)}{(1+f(y, x))^3}$

42. f) $F'(x) = 2xD_1f(x^2, \sqrt{2e^x}) + \frac{\sqrt{2e^x}}{2}D_2f(x^2, \sqrt{2e^x})$
 42. g) $D_1F(x, y) = \frac{2xf'(x^2 + y)}{f(x^2 + y)} \quad D_2F(x, y) = \frac{f'(x^2 + y)}{f(x^2 + y)}$

43. a) $D_1F(x, y) = g'(x)D_1f(g(x)k(y), g(x) + h(y)) + g'(x)D_2f(g(x)k(y), g(x) + h(y))$
 $D_2F(x, y) = k'(y)D_1f(g(x)k(y), g(x) + h(y)) + h'(y)D_2f(g(x)k(y), g(x) + h(y))$
 43. b) $D_1F(x, y, z) = yx^{y-1}D_1f(x^y, y^z, z^x) + z^x \ln z D_3f(x^y, y^z, z^x)$
 $D_2F(x, y, z) = x^y \ln x D_1f(x^y, y^z, z^x) + zy^{z-1}D_2f(x^y, y^z, z^x)$
 $D_3F(x, y, z) = y^z \ln y D_2f(x^y, y^z, z^x) + xz^{x-1}D_3f(x^y, y^z, z^x)$

45. $D_1F(x, y) = (g'(x)h(x, y) + g(x)D_1h(x, y))D_1f(u, v) + \frac{1}{y} \cos(\frac{x}{y})D_2f(u, v)$
 $D_2F(x, y) = g(x)D_2h(x, y)D_1f(u, v) - \frac{x}{y^2} \cos(\frac{x}{y})D_2f(u, v),$ sendo $u = g(x)h(x, y),$
 $v = \sin(\frac{x}{y})$

46. $\nabla F(0, 0) = (0, 2)$

47. a) $D_1F(x, y, z) = \frac{D_1g(x, y)}{y}D_1f(u, v) + \frac{h'(x)}{p(z)}D_2f(u, v)$
 $D_2F(x, y, z) = \frac{D_2g(x, y)y - g(x, y)}{y^2}D_1f(u, v)$
 $D_3F(x, y, z) = \frac{-h(x)p'(z)}{p(z)^2}D_2f(u, v),$ sendo $(u, v) = (\frac{g(x, y)}{y}, \frac{h(x)}{p(z)})$
 47. b) $DF(0, 1, -1) = (5 \quad -6 \quad 0)$

48. a) $\sqrt{17}$ b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ d) $\sqrt{65}$ e) 0 f) $\sqrt{33}$

49. a) $(1, 1, 1)$, b) $(6, 2, 2)$, c) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -1)$, d) $(16, 32, -1)$, e) $(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -1)$, f) $(1, -1, 1)$

50. a) $3x + 4y - 5z = 0$, b) $-x - 2y + 2z = 5$, c) $2x - 3y + 5z = 15$

51. a) $z = 0$, b) $z = y - 1$, c) $10x - 3y + z = 3$

52. a) $f(1, 2) = 1$, $\nabla f(1, 2) = (2, 1)$

53. En $(0, 3)$. En $(\frac{1}{2}, -1)$.

55. $u = (\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}})$ ou $u = (\frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}})$, $D_u f(1, 2) = 0$.

56. a) Verdadeiro.

56. b) Falso, por exemplo $D_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})} f(x, y) = \sqrt{2}$ e $D_{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})} f(x, y) = -\sqrt{2}$.

56. c) Verdadeiro.

56. d) Verdadeiro.

58. Nas direccións de vectores proporcionais a $u = (\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}})$. Na dirección de $(\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$.

Solucións autoavaliación. 1a, 2b, 3b, 4a, 5a, 6a, 7a, 8b, 9d

Capítulo 4

Derivadas de orde superior

4.1. Derivadas de orde superior para funcións dunha variable

Se unha función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivable en todo punto x dun conxunto $A \subset \mathbb{R}$, entón podemos considerar a función derivada primeira de f

$$\begin{array}{ccc} f' : A \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & f'(x) \end{array}$$

Así, podemos estudar a derivabilidade da función derivada primeira de f

- Definición 4.1** 1. Chamamos derivada segunda dunha función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a derivada da función $f'(x)$, e denótase mediante $f''(x)$, así $f''(x) = (f')'(x)$, nos puntos do conxunto A onde f' é derivable.
2. Analogamente, se existe $f''(x)$ para todo $x \in B \subset A$, entón a derivada desta función denomínase derivada terceira de f e denótase mediante $f'''(x)$.
3. En xeral, se existe a derivada de orde $n - 1$ dunha función f , $f^{(n-1)}(x)$, a derivada desta nova función denomínase derivada de orde n e denótase mediante $f^{(n)}(x)$.

Exemplo 4.2 .

$f(x)$	$x^2 \operatorname{sen}(2x)$	$e^{-x^2} \operatorname{sen}(x)$
$f'(x)$	$2x \operatorname{sen}(2x) + 2x^2 \cos(2x)$	$e^{-x^2} (\cos x - 2x \operatorname{sen} x)$
$f''(x)$	$(2 - 4x^2) \operatorname{sen}(2x) + 8x \cos(2x)$	$e^{-x^2} (4x^2 \operatorname{sen} x - 4x \cos x - 3 \operatorname{sen} x)$
$f'''(x)$	$-24x \operatorname{sen}(2x) + (12 - 8x^2) \cos(2x)$	$e^{-x^2} ((-8x^3 + 18x) \operatorname{sen} x + (12x^2 - 7) \cos x)$
$f^{(4)}(x)$	$(-48 + 16x^2) \operatorname{sen}(2x) - 64x \cos(2x)$	$e^{-x^2} ((25 - 72x^2 + 16x^4) \operatorname{sen} x + (56x - 32x^3) \cos x)$

$f(x)$	$\frac{x+1}{x^2+x+2}$	$x \ln(x^2+1)$
$f'(x)$	$-\frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+2)^2}$	$\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}$
$f''(x)$	$2\frac{x^3+3x^2-3x-3}{(x^2+x+2)^3}$	$\frac{2x^3+6x}{(x^2+1)^2}$
$f'''(x)$	$-6\frac{x^4+4x^3-6x^2-12x-1}{(x^2+x+2)^4}$	$-2\frac{x^4+6x^2-3}{(x^2+1)^3}$
$f^{(4)}(x)$	$24\frac{x^5+5x^4-10x^3-30x^2-5x+5}{(x^2+x+2)^5}$	$4x\frac{x^4+10x^2-15}{(x^2+1)^4}$

Exemplo 4.3 Tense que:

- a) Se $f(x) = \sin(x)$, entón $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$.
- b) Se $f(x) = \cos(x)$, entón $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$.
- c) Se $f(x) = e^x$, entón $f^{(n)}(x) = e^x$.
- d) Se $f(x) = \ln(x)$, entón $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.

Exercicio 4.4 Calcula as derivadas de orde n de $f(x) = e^{-x}$ e de $g(x) = \sin(2x)$

4.2. Derivadas parciais de orde superior para funcións de varias variables

Se unha función $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivadas parciais en todos os puntos do seu dominio, cada unha destas pode admitir, de novo, derivadas parciais.

Sexa $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable no conxunto aberto A . Se $x \in A$, $D_i f(x) \in \mathbb{R}$, para cada $i = 1, \dots, n$, polo que podemos considerar as n funcións $D_i f: x \in A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow D_i f(x) \in \mathbb{R}$, denominadas funcións derivadas parciais i -ésimas de f no conxunto A .

Definición 4.5 Dada a función $D_i f$, a derivada parcial j -ésima da función $D_i f$, isto é $D_j(D_i f)(x)$, se existe, denomínase derivada parcial de segunda orde con respecto a x_j e x_i da función f no punto x , e denótase por $D_{ji} f(x)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$.

Se $i = j$, $D_{ii} f(x)$ denomínase derivada parcial de segunda orde con respecto a x_i dúas veces, da función f no punto x , e tamén se denota $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$.

Do mesmo xeito, pódense definir as derivadas parciais de terceira orde dunha función f , mediante $D_{kij} f(x) = D_k(D_{ij} f)(x)$, e as derivadas parciais de orde $m \in \mathbb{N}$, sempre que estas existan.

Exemplo 4.6 A función $f(x, y, z) = x + xy^2 + 2zy$ está definida en $\mathbb{R}^3$. Existen $D_1 f$, $D_2 f$ e $D_3 f$, en todo $\mathbb{R}^3$ e, por exemplo, $D_1 f(x, y, z) = 1 + y^2$.

Calquera destas tres funcións é derivable con respecto a calquera das tres variables; por exemplo, $D_2 f(x, y, z) = 2xy + 2z$, é derivable con respecto a x, y , e a z , polo que $D_1(D_2 f)(x, y, z) =$

$2y$, $D_2(D_2f)(x, y, z) = 2x$, $D_3(D_2f)(x, y, z) = 2$. Estas tres derivadas serán denotadas por $D_{12}f(x, y, z)$, $D_{22}f(x, y, z)$ e $D_{32}f(x, y, z)$, respectivamente.

Definición 4.7 *Se existen todas as derivadas parciais de segunda orde dunha función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nun punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $D_{ij}f(x_0)$, a matriz cadrada de orde n formada por elas, $(D_{ij}f(x_0))_{1 \leq i, j \leq n}$ denomínase matriz hessiana de f en x_0 , e denótase por $H_f(x_0)$.*

Exemplo 4.8 1. Para a función $f(x, y) = x^3e^{2-y}$, derivando obtemos $D_1f(x, y) = 3x^2e^{2-y}$, $D_2f(x, y) = -x^3e^{2-y}$. Derivando de novo, $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6xe^{2-y} & -3x^2e^{2-y} \\ -3x^2e^{2-y} & x^3e^{2-y} \end{pmatrix}$. Logo a hessiana de f no punto $(1, 2)$ é $H_f(1, 2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2. A matriz hessiana de $f(x, y, z) = x + xy^2 + 2zy$ nun punto calquera $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 0 \\ 2y & 2x & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 4.9 *Unha función, $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é de clase dúas no conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$, e denótase $f \in C^2(B)$, se existen e son continuas en B as derivadas parciais de segunda orde de f .*

Unha función $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é de clase $m \in \mathbb{N}$ no conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$, e denótase por $f \in C^m(B)$, se existen e son continuas en B as derivadas parciais de orde m de f .

Unha función $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é de clase infinito no conxunto $B \subset \mathbb{R}^n$, e denótase por $f \in C^\infty(B)$, se existen e son continuas en B todas as derivadas parciais de calquera orde de f .

Unha cuestión formulada con frecuencia é a posible coincidencia das derivadas parciais de segunda orde dunha función nun punto ó inverter a orde de derivación; isto é, de $D_{ij}f(x)$ e $D_{ji}f(x)$. Estas derivadas coñécense como *derivadas parciais cruzadas de segunda orde*. Tamén se pode falar das derivadas parciais cruzadas de calquera orde, se cambiamos a orde de derivación de dúas ou máis variables. Por exemplo, $D_{ijk}f(x)$, $D_{ikj}f(x)$ ou $D_{kji}f(x)$.

Exemplo 4.10 Para a función $f(x, y) = xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$, temos que $D_1f(0, 0) = D_2f(0, 0) = 0$, e se $(x, y) \neq (0, 0)$, $D_1f(x, y) = y \frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ e $D_2f(x, y) = x \frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Para calcular as derivadas parciais de segunda orde na orixe

$$D_{12}f(0, 0) = D_1(D_2f)(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_2f(t, 0) - D_2f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5}{t^5} = 1,$$

$$D_{21}f(0, 0) = D_2(D_1f)(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_1f(t, t) - D_1f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^5}{t^5} = -1,$$

de onde deducimos que, en xeral, as derivadas parciais cruzadas non coinciden.

Teorema 4.11 (de Schwarz) Sexan $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, A aberto, e $i, j \in \{1, \dots, n\}$, tales que $i \neq j$.

Se existen $D_i f(x)$, $D_j f(x)$ e $D_{ij} f(x)$, para todo $x \in B(x_0, r)$ e se $D_{ij} f$ é continua en x_0 , entón existe $D_{ji} f(x_0)$ e ademais $D_{ji} f(x_0) = D_{ij} f(x_0)$.

Corolario 4.12 Se $f \in C^2(A)$, entón $D_{ij} f(x) = D_{ji} f(x)$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e para todo $x \in A$.

Utilizando este corolario, se por exemplo f é de clase tres, as derivadas cruzadas de terceira orde coinciden. Así, $D_{kij} f(x) = D_{kji} f(x)$, para todo $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$. Para a obtención desta igualdade en particular, como f é de clase dúas, $D_{ij} f(x) = D_{ji} f(x)$, entón, $D_k(D_{ij} f)(x) = D_k(D_{ji} f)(x)$, o que equivale a $D_{kij} f(x) = D_{kji} f(x)$. Conclusión análoga pódese obter, en xeral, se f é de clase m , polo que para a obtención das derivadas parciais de orde m non teremos que calcular, explicitamente, as n^m derivadas.

Proposición 4.13 1. Se $f, g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, son funcións de clase m en A e $\lambda \in \mathbb{R}$, tamén son de clase m en A as funcións: $f + g$, λf , $f g$ e $\frac{f}{g}$ (se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$).

2. Sexa $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f \in C^m(A)$ se, e só se, $f_i \in C^m(A)$ para todo $i = 1, \dots, p$.

3. Sexan $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $g: B \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, tales que $f(A) \subset B$. Se $f \in C^m(A)$ e $g \in C^m(f(A))$, entón $g \circ f \in C^m(A)$.

Exercicios

1. Se $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + e^z, z^3 x)$, obtén $Df(0, 1, 0)$ e $D_{ij} f_k(0, 1, 0)$.

2. Para as seguintes funcións, calcula as derivadas parciais de segunda orde e comproba que as derivadas cruzadas correspondentes son iguais:

a) $z = x^2 - 2xy + 3y$

b) $f(x, y) = x^4 - 3x^2 y^2 + y^4$

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = \ln(x - y)$

e) $z = \arctan(\frac{y}{x})$

f) $f(x, y) = \sin(x - 2y)$

g) $w = \ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$

h) $w = \frac{xy}{x+y+z}$

i) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$

j) $f(x, y) = 7\sqrt[3]{xy^2}$

k) $H(z, t) = e^z - e^{-t}$

l) $W(p, q) = (p^3 - 2q^2)^5$

m) $Q(a, b, c) = ae^{bc}$

n) $\alpha(r, s) = \cos(2r - 3s)^2$

3. Calcula as derivadas parciais de terceira orde das funcións que seguen:

a) $w = xyz$

b) $f(x, y, z) = e^{-x} \sin yz$

c) $w = \frac{x}{y+z}$

4. Proba que as seguintes funcións verifican a ecuación de Laplace, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

a) $z = 5xy$, b) $z = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x$, c) $z = e^x \sin y$, d) $z = \arctan(\frac{y}{x})$

5. Proba que as seguintes funcións verifican a *ecuación de ondas*, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
- a) $z = \sin(x - ct)$, b) $z = \sin(\omega ct) \sin(\omega x)$.
6. Proba que as seguintes funcións verifican a *ecuación da calor*, $\frac{\partial z}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
- a) $z = e^{-t} \cos \frac{x}{c}$, b) $z = e^{-t} \sin \frac{x}{c}$.
7. Comproba que a función $z = \sin(x^2 + y^2)$ verifica a ecuación $y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
8. Sexan $\phi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase dúas. Demostra que a función $z = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$ é solución da ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
9. Sexan f unha función real, con derivadas de primeira e segunda orde, e F a función definida por $F(x, y) = f(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})$ para $x \neq 0, y \neq 0$. Comproba que: a) $x^2 D_1 F(x, y) + y^2 D_2 F(x, y) = 0$. b) $x^3 D_{11} F(x, y) + y^3 D_{22} F(x, y) + xy(x + y) D_{12} F(x, y) = 0$.
10. Sexa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con continuidade ata a orde dúas e $F(x, y) = x^2 f(\frac{y}{x})$, para $x \neq 0$. Comproba que $x^2 D_{11} F(x, y) + 2xy D_{12} F(x, y) + y^2 D_{22} F(x, y) = 2F(x, y)$.
11. Sexa $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase dúas que verifica $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Demostra que a función $g(u, v) = f(e^u, e^v)$ verifica $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$.
12. Calcula a matriz hessiana de $f(x, y) = y \cos(x - y)$ en $(0, \frac{\pi}{2})$ e de $g(x, y, z) = xe^{yz}$ en $(2, 0, -4)$.
13. Calcula as matrices hessianas das funcións que seguen:
- a) $f(x, y, z) = xyz$ b) $f(x, y, z) = e^{-x} \sin(yz)$ c) $f(x, y, z) = \frac{x}{y+z}$
d) $f(x, y) = e^{x-y}$ e) $f(x, y, z) = \ln(\frac{x}{y-z})$ f) $f(x, y, z) = 4z - x \sin(y)$
14. Sexan $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funcións de clase infinito. Calcula as derivadas parciais de
- a) $F(x, y, z) = z^3 f(x, y)$ b) $G(x, y) = f(xy, y^3)$
c) $F(x, y) = e^{f(\frac{x}{y})}$ d) $F(x, y) = f(xy, \ln(y^2 + 1))$
e) $F(x, y) = xe^{f(y, y)}$ f) $F(x, y) = \frac{f(y, x)}{y}$
g) $F(x, y, z) = \sin(zf(y, x))$ h) $F(x, y, z) = \frac{x^3}{z} f(x^2, y + xz)$
i) $F(x, y) = g(\frac{y}{x}, x + y, e^{xy})$ j) $F(x, y) = x^2 g(y, 2x - y, x^3)$
k) $G(x, y) = xf(-y, y^2)$ l) $h(x, y, z) = x^3 + \ln(f(y, z))$
l) $F(x, y) = f(y^2, x + y)$
15. Sexa $z = F(x, y)$ unha función que admite derivadas parciais continuas ata a orde dúas. Sabemos que $x = h(t)$ (sendo $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dúas veces derivable) e que $y = \sin(t) + e^{-t} + 4$. Calcula $z'(t)$ e $z''(t)$.
16. Sexan $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase dúas e $F(x, y, z) = xze^{f(y^2, z^4)}$. Dá $D_2 F(x, y, z)$, $D_{12} F(x, y, z)$ e $D_{12} F(4, 0, -5)$.

17. Sexan $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funcións de clase dúas e $F(x, y, z) = f(x, y)f(g(y, z), zh(z))$. Calcula $D_{13}F(x, y, z)$.
18. Sexan $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase dúas e $F(x, y, z) = h(x)f(\sqrt{xy}, \sin(yz))$. Calcula $D_{13}F(x, y, z)$.
19. Sexan $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase dúas e $F(x, y) = (f(x, f(y, y)))^2$. Calcula $D_{21}F(x, y)$.

4.3. Derivación implícita

4.3.1. Funcións definidas implicitamente

Podemos dicir que unha variable y é función implícita doutra variable x , $y = \varphi(x)$, cando esta función está dada indirectamente por medio dunha ecuación funcional $F(x, y) = 0$, isto é, se ó substituír y pola función $\varphi(x)$ na ecuación $F(x, y) = 0$ esta é válida, ou sexa, $F(x, \varphi(x)) = 0$ para os distintos valores de x . Nalgúns casos pódese despxear a variable y na ecuación $F(x, y) = 0$, resultando que a función implícita φ está, de feito, definida en forma explícita; pero, en xeral, esta transformación non será posible e haberá que estudar as propiedades da función φ , no caso de que exista, na súa forma implícita.

Exemplo 4.14 A ecuación funcional $y - x^2 = 0$, define implicitamente a función $y = \varphi(x) = x^2$. A ecuación $\sin(xy) + x^3y^2 - x + y^3 = 0$ tal vez defina implicitamente algunha variable en función da outra, pero en calquera caso non somos capaces de obter unha expresión explícita desa función, ou sexa, non somos quen de despxear ningunha das variables en función das outras.

Consideremos unha función $F: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e unha curva de nivel para F , por exemplo a curva de nivel cero

$$C_0 = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\}.$$

Agora, queremos despxear da ecuación funcional $F(x, y) = 0$ unha das variables en función da outra. Por que? Porque, se o conseguimos, o conxunto de nivel C_0 coincidiría coa gráfica da función obtida, e nós dispoñemos de moitas ferramentas para abordar o estudo das propiedades da gráfica dunha función. Máis formalmente: a curva de nivel cero de F coincide coa gráfica dunha única función derivable φ , de xeito que, por exemplo, se $y = \varphi(x)$, se verifique que $F(x, \varphi(x)) = 0$ para todo x do dominio de φ ? Nótese que a función φ tamén pode ser da forma $x = \varphi(y)$, exixíndolle neste caso que verifique $F(\varphi(y), y) = 0$. Se a resposta da anterior cuestión fose negativa, poderíamos formular unha pregunta máis sinxela: Se o conxunto de nivel C_0 non coincide na súa totalidade coa gráfica dunha única función, talvez de xeito parcial ou local, “anacos” do conxunto C_0 poidan representarse mediante gráficas de funcións.

Formalmente, dado un punto $(x_0, y_0) \in C_0$, existen unha veciñanza de x_0 , $I(x_0, \alpha) = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ e unha veciñanza de y_0 , $I(y_0, \beta) = (y_0 - \beta_1, y_0 + \beta_2)$, tales que a curva de nivel cero de F restrinxida ó rectángulo $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \beta_1, y_0 + \beta_2)$ coincide coa gráfica dunha única función derivable φ nas mesmas condicións de antes? (Figura 4.1).

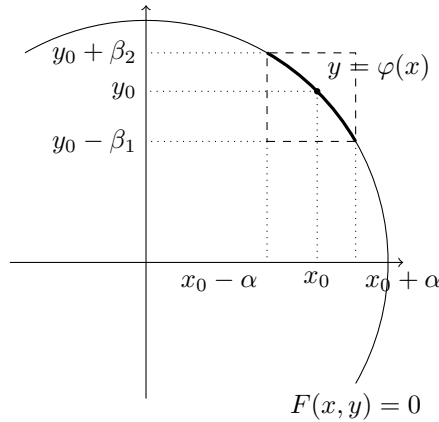


Figura 4.1: Existencia de función implícitas locais

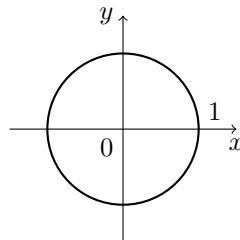
Se a resposta á segunda pregunta formulada é afirmativa, diremos que a ecuación funcional $F(x, y) = 0$ define implicitamente, nunha veciñanza do punto $(x_0, y_0) \in C_0$, unha función

$$\varphi: I(x_0, \alpha) \subset \mathbb{R} \rightarrow I(y_0, \beta) \subset \mathbb{R},$$

tal que $y_0 = \varphi(x_0)$ e $F(x, \varphi(x)) = 0$, para todo $x \in I(x_0, \alpha)$, ou que φ é unha función implícita definida pola ecuación funcional $F(x, y) = 0$ nunha veciñanza do punto (x_0, y_0) . Por suposto, a existencia de funcións implícitas locais non implica a existencia dunha función implícita global.

Exemplo 4.15 A ecuación funcional $y - x^2 = 0$, define implicitamente a función $y = \varphi(x) = x^2$. O conxunto $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 = 0\}$ coincide exactamente coa gráfica da función $y = \varphi(x)$, $G(\varphi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \varphi(x)\}$.

Exemplo 4.16 Para a función $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, a curva de nivel cero, $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ representa a circunferencia de centro $(0, 0)$ e raio unidade. Esta ecuación non

Figura 4.2: A curva de nivel 0 da función $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

define a y como función implícita global de x xa que ó despexar y temos dúas posibles solucións $y = \varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Porén, se abordamos o problema localmente, existen infinidade de puntos en C_0 , para os cales existe función implícita.

En efecto, consideremos un punto $(x_0, y_0) \in C_0$ con $y_0 > 0$. A gráfica da curva de nivel cero de F , restrinxida ó rectángulo $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$, representa a gráfica da función $y = \varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ para todo $x \in I(x_0, \alpha)$. Ademais, a función é de clase un en $I(x_0, \alpha)$ e verifica $y_0 = \varphi_1(x_0)$ e $F(x, \varphi_1(x)) = F(x, \sqrt{1-x^2}) = x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 - 1 = 0$, para todo $x \in I(x_0, \alpha)$. A situación é análoga se $y_0 < 0$ coa función $y = \varphi_2(x)$ (Figura 4.3).

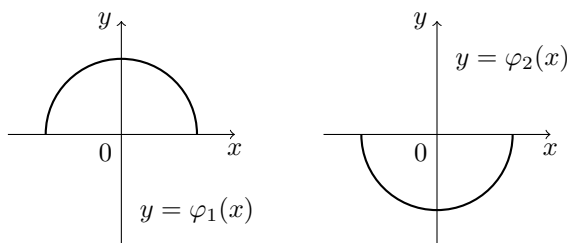


Figura 4.3: Funcións implícitas da forma $y = \varphi(x)$ definidas pola ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Para os puntos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, non existe unha función da forma $y = \varphi(x)$ tal que a gráfica de φ coincida con C_0 nunha veciñanza deses puntos. Nótese que $D_2F(-1, 0) = D_2F(1, 0) = 0$ xa que $D_2F(x, y) = 2y$. Como veremos máis adiante, o feito de que se anulen estas derivadas non é casual. Pero, as funcións $x = \varphi_3(y) = \sqrt{1-y^2}$ e $x = \varphi_4(y) = -\sqrt{1-y^2}$ son funcións definidas implicitamente nunha veciñanza dun punto $(x_0, y_0) \in C_0$ distinto de $(0, -1)$ e de $(0, 1)$, xa que para estes D_1F anúlase (Figura 4.4).

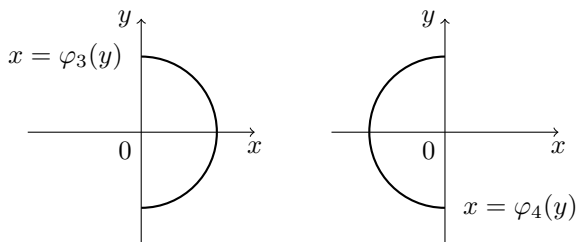


Figura 4.4: Funcións implícitas da forma $x = \varphi(y)$ definidas pola ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$

4.3.2. Derivación de funcións definidas implicitamente

Exemplo 4.17 Da ecuación de dúas variables $x^2 + y^2 = 25$, podemos despexar a variable y en función da variable x da forma $y = \varphi_1(x) = \sqrt{25-x^2}$, ou tamén $y = \varphi_2(x) = -\sqrt{25-x^2}$.

Podemos calcular as derivadas de primeira e segunda orde destas dúas funcións nalgúns puntos. Por exemplo,

$$y' = \varphi_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}, \quad \text{e} \quad y'' = \varphi_1''(x) = \frac{-\sqrt{25-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}}{25-x^2}. \quad (4.1)$$

Por outra parte, e sabendo que a variable y é función da variable x , podemos derivar directamente a ecuación respecto da variable x , $2x + 2yy' = 0$, e logo despxear a derivada de y , $y' = \frac{-x}{y}$, e se substituímos o valor de y temos a mesma expresión que (4.1). Isto funciona se, neste caso, $y \neq 0$.

Se temos un par de puntos (x_0, y_0) que verifican a ecuación, por exemplo $(3, 4)$, para calcular $y'(3) = \varphi'(3)$, non fai falla substituír a función na derivada, pois $y'(3) = y'(x_0) = -\frac{x_0}{y_0} = -\frac{3}{4}$.

Analogamente, $y'' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$ e, no punto $(3, 4)$, $y''(3) = -\frac{25}{64}$.

Exemplo 4.18 Consideremos de novo a función $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. No caso de existencia de función implícita derivable $y = \varphi(x)$, nunha veciñanza de $(x_0, y_0) \in C_0$, podemos facer o cálculo da derivada, $\varphi'(x)$. Para iso definimos a ecuación $G(x) = F(x, \varphi(x)) = x^2 + \varphi(x)^2 - 1 = 0$, que é válida para todo $x \in I(x_0, \alpha)$, e calculamos a derivada de G , resultando

$$G'(x) = 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) = 0,$$

polo que $\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)}$.

En xeral, se $G(x) = F(x, \varphi(x)) = 0$ en todo punto $x \in I(x_0, \alpha)$, entón

$$G'(x) = DF(x, \varphi(x)) = D_1F(x, \varphi(x)) + D_2F(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0,$$

de onde se deduce que

$$\varphi'(x) = -\frac{D_1F(x, \varphi(x))}{D_2F(x, \varphi(x))},$$

polo que debe verificarse que $D_2F(x, \varphi(x)) \neq 0$, nos puntos en que exista $\varphi'(x)$.

Exemplo 4.19 Sabendo que a ecuación $\ln(x+y) + x^3y^2 + y^3 = 1$ define unha función implícita do tipo $y = \varphi(x)$ nunha veciñanza do punto $(0, 1)$, calcula $\varphi'(0)$.

Derivaremos respecto a x directamente na ecuación $\ln(x+y) + x^3y^2 - x + y^3 = 1$, recordando que y é unha función de x , $y = \varphi(x)$. Temos entón

$$\frac{1+y'}{x+y} + 3x^2y^2 + 2x^3yy' + 3y^2y' = 0.$$

De onde, substituíndo (x, y) por $(0, 1)$, obtemos $1 + 4y' = 0$. Polo tanto, $\varphi'(0) = y' = -\frac{1}{4}$.

Formulemos agora o problema dunha ecuación funcional con tres variables, $F(x, y, z) = 0$, nunha veciñanza dun punto (x_0, y_0, z_0) que verifique $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Se F define implicitamente algunha das variables, por exemplo z , en función das restantes, $z = \varphi(x, y)$, nunha veciñanza $B((x_0, y_0), \alpha)$ verificando $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ e $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, para todo $(x, y) \in$

$B((x_0, y_0), \alpha)$, e se φ fose diferenciable en $B((x_0, y_0), \alpha)$, poderíase obter facilmente a diferencial da función implícita. Se facemos $G(x, y) = F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, para todo $(x, y) \in B((x_0, y_0), \alpha)$, tense que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = DG(x, y) = DF(x, y, \varphi(x, y)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ D_1\varphi(x, y) & D_2\varphi(x, y) \end{pmatrix}$$

Polo tanto,

$$0 = D_1F(x, y, \varphi(x, y)) + D_3F(x, y, \varphi(x, y))D_1\varphi(x, y)$$

$$0 = D_2F(x, y, \varphi(x, y)) + D_3F(x, y, \varphi(x, y))D_2\varphi(x, y)$$

de onde se deduce que, se $D_3F(x, y, \varphi(x, y)) \neq 0$,

$$D_1\varphi(x, y) = -\frac{D_1F(x, y, \varphi(x, y))}{D_3F(x, y, \varphi(x, y))}$$

$$D_2\varphi(x, y) = -\frac{D_2F(x, y, \varphi(x, y))}{D_3F(x, y, \varphi(x, y))}$$

Obsérvese que, como consecuencia de que F é unha función de clase un, se $D_3F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ entón $D_3F(x, y, \varphi(x, y)) \neq 0$ para todo $(x, y) \in B((x_0, y_0), \alpha)$ (para α suficientemente pequeno). Así pois, dado que as derivadas parciais de φ son cociente de funcións continuas, é suficiente con que $D_3F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ e $F \in C^1(A)$, para poder asegurar a diferenciabilidade da función implícita ou, sendo máis preciso, a propiedade $\varphi \in C^1(B((x_0, y_0), \alpha))$.

Exemplo 4.20 Supoñendo que a ecuación funcional $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$, define implicitamente a variable z en función das variables (x, y) nunha veciñanza de $(6, -3, -2)$, podemos obter as derivadas parciais da función implícita no punto $(6, -3)$. Se sabemos que existe unha función $z = \varphi(x, y)$ diferenciable para todo (x, y) preto de $(6, -3)$, tal que $\varphi(6, -3) = -2$ e $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, entón

$$x^2 + y^2 + \varphi(x, y)^2 - 49 = 0. \quad (4.2)$$

Derivando nesta igualdade respecto de x temos que

$$2x + 2\varphi(x, y)D_1\varphi(x, y) = 0,$$

é dicir, $D_1\varphi(x, y) = -\frac{x}{\varphi(x, y)}$. Se denotásemos, por comodidade, $z = \varphi(x, y)$, a ecuación (4.2) quedaría $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$, onde x e y son variables e z é función delas. Así, derivando nesta igualdade respecto de x obteríamos

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

é dicir, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$, onde, non convén esquecelo, $z = \varphi(x, y)$.

Analogamente, derivando (4.2) respecto de y , temos

$$2y + 2\varphi(x, y)D_2\varphi(x, y) = 0.$$

Logo, $D_2\varphi(x, y) = -\frac{y}{\varphi(x, y)}$. Se denotamos $z = \varphi(x, y)$, entón $2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, ou sexa, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$.

A partir de aquí podemos dar, por exemplo, as derivadas parciais da función implícita no punto $(6, -3)$,

$$D_1\varphi(6, -3) = 3 \quad D_2\varphi(6, -3) = -\frac{3}{2}.$$

Exemplo 4.21 Se temos unha ecuación con tres variables, podemos proceder da mesma forma sabendo cal é a variable dependente e cales é as independentes. Para a ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, podemos despxar, por exemplo, a variable z en función de x e y , $z = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$ e, neste caso, poderíamos calcular as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Pero se seguimos a mesma técnica que no caso anterior, podemos derivar directamente na ecuación. Por exemplo, se derivamos a ecuación respecto da variable x e logo respecto de y , temos

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

de onde podemos obter, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$. E para un punto que verifique a ecuación, por exemplo $(2, 1, 3)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(2, 1) = -\frac{2}{3}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(2, 1) = -\frac{1}{3}$.

Novamente, a partir das derivadas parciais de primeira orde podemos calcular as derivadas de segunda orde. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{z} \right) = -\frac{z - x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}; & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2, 1) &= \frac{113}{27} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{z} \right) = -\frac{z - y\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}; & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2, 1) &= \frac{10}{27} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{z} \right) = -\frac{-x\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = -\frac{xy}{z^3}; & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, 1) &= \frac{-2}{27} \end{aligned}$$

A matriz hessiana da función implícita $z = \varphi(x, y)$, definida pola ecuación funcional $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ no punto $(2, 1)$ e $z = 3$ é,

$$H_\varphi(2, 1) = \begin{pmatrix} \frac{113}{27} & \frac{-2}{27} \\ \frac{-2}{27} & \frac{10}{27} \end{pmatrix}.$$

Neste exemplo tamén hai que ter en conta que estas derivadas son válidas sempre que $z \neq 0$.

Este método de derivar coñécese como derivación de funcións definidas implicitamente por unha ecuación funcional $F(x, y) = 0$ ou, no caso de tres variables, $F(x, y, z) = 0$, ou simplemente, derivación implícita. Por suposto, o método estudado esténdese aos casos nos que hai máis de tres variables e, tamén, cando a variable dependente é x ou y e as restantes son independentes.

Exercicios

20. Deriva as seguintes ecuacións sabendo que y é función implícita da variable x .

- a) $x^2 - 3xy + y^2 - 2x + y - 5 = 0$ b) $\sin(x) + \frac{1}{\cos(xy)} - 3 = 0$
 c) $\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + xy = 4$ d) $\frac{x}{x^2 + y^2} - y^2 = 6$
 e) $3xy + \ln(xy^2) = 7$ f) $\frac{x}{y} + \ln(\frac{y}{x}) = 6$
 g) $x^2 + y^2 = e^{x+y}$ h) $xy^2 - x^2y + ye^{-x} = 0$

21. Deriva as seguintes ecuacións sabendo que z é función implícita das outras variables que aparecen na ecuación.

- a) $\tan(x + y) + \tan(y + z) = 1$ b) $z = e^x \sin(y + z)$
 c) $x \ln(y) + y^2z + z^2 = 8$ d) $\cos(xy) + \sin(yw) + zw = 20$
 e) $xyz + 3x^2y^3 - \ln z^3 = 0$ f) $e^{xz} = xyz$
 g) $xyz^3 + yz + \sin(xyz) = 1$ h) $\ln(x + y + z) + 2xyz = ze^{x-y}$
 i) $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 - 3z = 0$ j) $x - 2y - 3z + 7t + z^3 = -2$
 k) $xz^2 + \sin(xz) + \ln(xy) = 0$ l) $t \ln(z) - 3e^{2t} + (x + 1)^3 + x^2z = 6$

22. Sabendo que a ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$, define a z como función implícita de (x, y) nunha veciñanza de $(6, -3)$, non cal $z = -2$, calcula as derivadas parciais de primeira e segunda orde da citada función implícita no punto $(6, -3)$. Repite o exercicio para a ecuación $xye^z + z \cos(x^2 + y^2) = 0$ no punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$, con $z_0 = 0$.

23. Sabendo que a ecuación funcional $\frac{xy}{z} - \cos(\frac{y^2\pi}{z}) = 0$ define a z como función implícita das variables (x, y) , $z = \varphi(x, y)$, nunha veciñanza do punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2)$, calcula $D\varphi(0, 1)$ e $D\varphi(x, y)$, para todo (x, y) .

24. Consideremos a ecuación $e^{yz} + e^{xz} + ze^{xy} = 4$. Sabendo que z é función implícita de (x, y) , calcula as derivadas parciais da función implícita no punto $(x_0, y_0) = (2, 0)$, con $z_0 = 0$.

25. Sexa $y = \varphi(x, z)$ a función de clase 1 definida implicitamente pola ecuación $x^2yz + xy^3 = -8$ nunha veciñanza do punto $(x_0, z_0) = (1, 0)$. Calcula as derivadas da función implícita nese punto.

26. Se a ecuación $xe^z + z \ln(1 + x^2 + y^2) = 0$, define a z como función implícita de (x, y) nunha veciñanza de $(0, 1)$, non cal $z = 0$, calcula as derivadas parciais da función implícita no punto $(0, 1)$.

27. As dúas ecuacións $e^u \cos(v) = x$ e $e^u \sin(v) = y$ definen as variables u e v como funcións de x e y . Obtén estas funcións de forma explícita, $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$, válidas para $x > 0$ e demostra que os vectores $\nabla u(x, y)$ e $\nabla v(x, y)$ son perpendiculares en cada punto (x, y) , $x > 0$.

4.4. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Para a función $f(x, y) = x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$ unha das seguintes igualdades é FALSA.

a) $D_1 f(x, y) = 3x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^3}{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right)$
 b) $D_2 f(x, y) = -\frac{x^4}{y^2} \cos\left(\frac{x}{y}\right)$
 c) $D_{22} f(x, y) = \frac{2x^4}{y^3} \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^5}{y^4} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$
 d) $D_{12} f(x, y) = -\frac{3x^2}{y^2} \cos\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^3}{y^2} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$

2. Se $\varphi(r, \theta) = \frac{r^2}{\theta} \ln(\theta^2)$, unha das seguintes igualdades é FALSA.

a) $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2r}{\theta} \ln(\theta^2)$ b) $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{r^2}{\theta^2} (2 - \ln(\theta^2))$
 c) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{2r}{\theta^2} \ln(\theta^2)$ d) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{2r}{\theta^2} \ln(\theta^2) + \frac{4r}{\theta^2}$

3. Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciable, $H(x, y) = y^2 f(x^2, y^3)$, $u = x^2$ e $v = y^3$, unha das seguintes igualdades é FALSA.

a) $\frac{\partial H}{\partial x} = 2xy^2 \frac{\partial f}{\partial u}$ b) $\frac{\partial H}{\partial y} = 2yf(u, v) + 3y^4 \frac{\partial f}{\partial v}$
 c) $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 2y^2 \frac{\partial f}{\partial u}$ d) $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 4xy \frac{\partial f}{\partial u} + 6xy^4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$

4. Se $f(x, y) = ye^x + \ln(x - y)$, entón $H_f(0, -1)$ é

a) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & e \\ e & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} e & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

5. Se $f(x, y, z) = \arctan(x) + \operatorname{sen}(xz) + y^2 z$, entón $H_f(1, -1, 0)$ é

a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

6. Se $\omega = z \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, unha das seguintes igualdades é FALSA.

a) $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{zy}{x^2 + y^2}$ b) $\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{-zx}{x^2 + y^2}$ c) $\frac{\partial \omega}{\partial z} = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ d) $\frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial x} = \frac{y^2}{1 + x^2}$

7. Sabendo z vén definida implicitamente pola ecuación $\frac{z}{y+1} + xe^y + \ln(z) = 2$, nunha veciñanza de $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$, tense que

a) $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = -\frac{1}{2}$ b) $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = 2$ c) $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = 0$ d) $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = 1$

8. Sabendo y vén definida implicitamente pola ecuación $x^2 + ye^{3x} = 1$, preto de $(x_0, y_0) = (0, 1)$, tense que

a) $y'(x) = -3$ b) $y'(1) = -5$ c) $y'(0) = -3$ d) $\frac{\partial y}{\partial x}(0, 1) = -3$

4.5. Derivación con MATLAB

1. A sentenza `diff` utilízase tamén para calcular derivadas de orde superior dunha función dunha variable. Por exemplo, as sentenzas

```
>>syms x
>>D2f=diff(x^2*sin(x),x,2)
>>D3f=diff(x^2*sin(x),x,3)
```

devolven a derivada segunda e terceira, respectivamente, da función $f(x) = x^2 \sin(x)$.

2. Coas sentenzas

```
>>syms x y z
>>f(x,y,z)=x*y*exp(-x^2-y^2)+log(x/y)+x*y*z
>>D11f=diff(f,x,2), D12f=diff(diff(f,y),x),
D133f=diff(diff(f,z,2),x)
```

obtemos as derivadas parciais, $D_{11}f(x, y, z)$, $D_{12}f(x, y, z)$ e $D_{133}f(x, y, z)$.

3. A sentenza

```
>> Hf=hessian(f)
```

devolve a matriz hessiana de f , e as sentenzas

```
>> D11fp=D11f(1,1,pi/2)
>> D21fp=D21f(1,1,pi/2)
>> Hfp=Hf(1,1,pi/2)
```

devolven $D_{11}f(1, 1, \frac{\pi}{2})$, $D_{21}f(1, 1, \frac{\pi}{2})$ e $Hf(1, 1, \frac{\pi}{2})$.

4.6. Solucións dos exercicios propostos

$$1. Df(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{11}f_1(0, 1, 0) = 2, D_{22}f_1(0, 1, 0) = -2, D_{33}f_1(0, 1, 0) = 1$$

$$D_{12}f_1(0, 1, 0) = D_{13}f_1(0, 1, 0) = D_{23}f_1(0, 1, 0) = 0$$

$$D_{ij}f_2(0, 1, 0) = 0, \text{ para todo } i, j$$

$$2. a) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 3$$

$$2. b) D_{11}f(x, y) = 12x^2 - 6y^2, D_{12}f(x, y) = -12xy, D_{22}f(x, y) = 12y^2$$

$$2. c) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$2. d) D_{11}f(x, y) = \frac{1}{(x-y)^2}, D_{12}f(x, y) = -\frac{1}{(x-y)^2}, D_{22}f(x, y) = -\frac{1}{(x-y)^2}$$

$$2. e) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$2. f) D_{11}f(x, y) = -\sin(x-2y), D_{12}f(x, y) = 2\sin(x-2y),$$

$$D_{22}f(x, y) = -4 \operatorname{sen}(x - 2y)$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ g) } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{x^2 - y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \frac{-2yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ 2. \text{ h) } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{-2y(y+z)}{(x+y+z)^3}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{z^2 + (x+y)z + 2xy}{(x+y+z)^3}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{-y(y-x+z)}{(x+y+z)^3} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{-2x(x+z)}{(x+y+z)^3}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \frac{-x(x-y+z)}{(x+y+z)^3}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{2xy}{(x+y+z)^3} \end{aligned}$$

$$12. H_f(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, H_g(2, 0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 14. \text{ a) } D_{11}F(x, y, z) &= z^3 D_{11}f(x, y), \quad D_{12}F(x, y, z) = z^3 D_{12}f(x, y), \\ D_{13}F(x, y, z) &= 3z^2 D_1f(x, y), \quad D_{22}F(x, y, z) = z^3 D_{22}f(x, y) \\ D_{23}F(x, y, z) &= 3z^2 D_2f(x, y), \quad D_{33}F(x, y, z) = 6zf(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14. \text{ b) } D_{11}g(x, y) &= y^2 D_{11}f(xy, y^3) \\ D_{12}g(x, y) &= D_1f(xy, y^3) + xy D_{11}f(xy, y^3) + 3y^2 D_{12}f(xy, y^3) \\ D_{22}g(x, y) &= x^2 D_{11}f(xy, y^3) + 6xy^2 D_{12}f(xy, y^3) + 6y D_2f(xy, y^3) + 9y^4 D_{22}f(xy, y^3) \end{aligned}$$

$$14. \text{ c) } D_1F(x, y) = \frac{1}{y} f'(\frac{x}{y}) e^{f(\frac{x}{y})}, \quad D_2F(x, y) = -\frac{x}{y^2} f'(\frac{x}{y}) e^{f(\frac{x}{y})}$$

$$\begin{aligned} 15. z'(t) &= D_1F(x, y)h'(t) + D_2F(x, y)(\cos t - e^{-t}) \\ z''(t) &= D_{11}F(x, y)(h'(t))^2 + 2D_{12}F(x, y)h'(t)(\cos t - e^{-t}) + \\ &D_{22}F(x, y)(\cos t - e^{-t})^2 + D_1F(x, y)h''(t) + D_2F(x, y)(-\sin t + e^{-t}) \end{aligned}$$

$$17. D_{13}F(x, y, z) = D_1f(x, y)(D_2g(y, z)D_1f(u, v) + (h(z) + zh'(z))D_2f(u, v), \\ \text{sendo } (u, v) = (g(y, z), zh(z)))$$

$$18. D_{13}F(x, y, z) = y \cos(yz)(h'(x)D_2f(u, v) + 2h(x)\sqrt{\frac{y}{x}}D_{12}f(u, v)) \\ \text{sendo } (u, v) = (\sqrt{xy}, \operatorname{sen}(yz))$$

$$19. D_{21}F(x, y, z) = 2(D_1f(y, y) + D_2f(y, y))(D_1f(u, v)D_2f(u, v) + \\ f(u, v)D_{12}f(u, v)), \text{ sendo } (u, v) = (x, f(y, y))$$

$$20. \text{ a) } 2x - 3y - 3xy' + 2yy' - 2 + y' = 0$$

$$20. \text{ b) } \cos(x) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \operatorname{sen}(xy)(y + xy') = 0$$

$$20. \text{ c) } \frac{x+yy'}{x^2+y^2} + y + xy' = 0$$

$$20. \text{ d) } \frac{3x^2+y^2+2xyy'}{(x^2+y^2)^2} - 2yy' = 0$$

$$21. \text{ a) } 1 + \tan^2(x+y) + (1 + \tan^2(y+z))\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 1 + \tan^2(x+y) + (1 + \tan^2(y+z))(1 + \frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

$$21. \text{ b) } \frac{\partial z}{\partial x} = e^x \operatorname{sen}(y+z) + e^x \cos(y+z)\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos(y+z)(1 + \frac{\partial z}{\partial y})$$

$$21. \text{ c) } \ln(y) + y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{x}{y} + 2yz + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned}
21. \text{ d) } & -y \operatorname{sen}(xy) + w \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\
& -x \operatorname{sen}(xy) + w \cos(yw) + w \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\
& y \cos(yw) + z + w \frac{\partial z}{\partial w} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
22. \quad & \frac{\partial z}{\partial x}(6, -3) = 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(6, -3) = -3/2 \\
& \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(6, -3) = 5, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(6, -3) = -9/4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) = 13/8 \\
& \frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = 0 \\
& \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) = 0
\end{aligned}$$

$$23. D\varphi(x, y) = \left(\frac{yz}{xy+y^2\pi \operatorname{sen}(\frac{y^2\pi}{z})} \quad \frac{xz+2yz\pi \operatorname{sen}(\frac{y^2\pi}{z})}{xy+y^2\pi \operatorname{sen}(\frac{y^2\pi}{z})} \right) \quad D\varphi(0, 1) = \left(\frac{2}{\pi} \quad 4 \right)$$

$$27. u = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}), v = \arctan(\frac{y}{x})$$

Solucións autoavaliación. 1d, 2c, 3c, 4a, 5b, 6d, 7a, 8c

Capítulo 5

Optimización en varias variables

Neste capítulo abordaremos o estudo dunha das partes máis importantes do cálculo diferencial: os problemas de optimización. Veremos que numerosas situacións da vida real encaixan no tipo de problemas que consisten en buscar a mellor solución de entre un conxunto de alternativas. Nun primeiro paso, teremos que transcribir, modelar, o problema en termos matemáticos. Despois, aplicaremos as técnicas do cálculo diferencial para determinar se o problema ten solución e, en caso afirmativo, calculala.

5.1. Extremos de funcións sen restricións

Nos problemas de optimización sen restricións as variables de decisión poden, en principio, tomar calquera valor. Empezamos coas definicións de máximos e mínimos locais ou relativos.

Definición 5.1 *Dados unha función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dise que*

- 1. x_0 é un mínimo local ou relativo de f se existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in B(x_0, r)$.*
- 2. x_0 é un máximo local ou relativo de f se existe $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in B(x_0, r)$.*
- 3. x_0 é un mínimo relativo estrito de f se existe $r > 0$ tal que $f(x) > f(x_0)$, para todo $x \in B(x_0, r)$, $x \neq x_0$.*
- 4. x_0 é un máximo relativo estrito de f se existe $r > 0$ tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in B(x_0, r)$, $x \neq x_0$.*

Denotamos $B(x_0, r)$ o conxunto dos puntos de $\mathbb{R}^n$ que distan de x_0 menos que r , $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$. Así, por exemplo, pedir a existencia de $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in B(x_0, r)$, significa que $f(x) \geq f(x_0)$, para todo x preto de x_0 .

Do mesmo xeito defínense os máximos e mínimos globais.

Definición 5.2 Dados unha función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dise que

1. x_0 é un mínimo global de f se $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
2. x_0 é un máximo global de f se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
3. x_0 é un mínimo global estrito de f se $f(x) > f(x_0)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq x_0$.
4. x_0 é un máximo global estrito de f se $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq x_0$.

Un máximo ou un mínimo de f denomínase extremo da función. É inmediato que todo extremo global é un extremo local da función.

Definición 5.3 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é un punto crítico da función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se $D_i f(x_0) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Proposición 5.4 (Condición necesaria de primeira orde) Sexa $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ unha función diferenciable. Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é un extremo relativo de f , entón x_0 é un punto crítico de f .

Demostración. Supoñamos que x_0 é un mínimo relativo de f . É dicir, existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in B(x_0, r)$. No intervalo $I = (-r, r)$, dado $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos a función vectorial $g_i(t) = x_0 + te_i$, onde e_i é o vector i -ésimo da base canónica de $\mathbb{R}^n$. Consideramos a composición $F_i = f \circ g_i$, dada por $F_i(t) = f(x_0 + te_i)$, que é diferenciable en I . Ademais, $t = 0$ é un mínimo de F_i , xa que $x_0 + te_i \in B(x_0, r)$ e $F_i(t) = f(x_0 + te_i) \geq f(x_0) = F_i(0)$ para todo $t \in I$. A condición necesaria de primeira orde de existencia de extremos para funcións dunha variable asegura que $F'_i(0) = 0$. Pero, utilizando a regra da cadea,

$$F'_i(t) = Df(g_i(t))Dg_i(t) = Df(x_0 + te_i)(e_i) = D_i f(x_0 + te_i),$$

e, polo tanto, $0 = F'_i(0) = D_i f(x_0)$. ■

Esta condición de existencia de extremos é necesaria pero non suficiente como se comproba no seguinte exemplo.

Exemplo 5.5 O punto $(0, 0)$ é un punto crítico da función $f(x, y) = x^3 y^3$, porén non é un extremo relativo de f , xa que calquera que sexa $r > 0$, os puntos $(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}), (\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}) \in B((0, 0), r)$ e $f(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}) > f(0, 0) = 0 > f(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2})$.

Existen, en xeral, puntos nos que se anulan todas as derivadas parciais dunha función que non son extremos da mesma.

Definición 5.6 Un punto crítico dunha función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que non é máximo nin mínimo de f denomínase punto de sela de f .

Como consecuencia da definición anterior, se x_0 é un punto crítico de f , x_0 é un punto de sela de f se, e só se, calquera que sexa $r > 0$ existen $x, y \in B(x_0, r)$ tales que $f(x) > f(x_0) > f(y)$.

Proposición 5.7 (Condición necesaria de segunda orde) Sexa $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Verifícase que:

1. Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é un mínimo relativo de f , entón $H_f(x_0)$ é semidefinida positiva.
2. Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é un máximo relativo de f , entón $H_f(x_0)$ é semidefinida negativa.

Este resultado ten unha importancia relativa na clasificación dos puntos críticos dunha función f , no senso de eliminar a posibilidade de que un punto crítico sexa un máximo ou un mínimo. En efecto, se x_0 é punto crítico de f e a matriz $H_f(x_0)$ non é semidefinida positiva, entón x_0 non é un mínimo da función, polo que x_0 será un máximo de f ou un punto de sela de f . Así mesmo, se $H_f(x_0)$ non é semidefinida negativa, entón x_0 será un mínimo de f ou un punto de sela de f . Doutra forma, se realizamos este razoamento en positivo, temos que se $H_f(x_0)$ é semidefinida negativa, $H_f(x_0) \neq 0$, entón o punto x_0 é un máximo de f ou un punto de sela de f . Se $H_f(x_0)$ é semidefinida positiva, $H_f(x_0) \neq 0$, entón o punto x_0 é un mínimo de f ou un punto de sela de f .

Enunciamos a continuación unha condición suficiente que clasifica os puntos críticos.

Proposición 5.8 (Condición suficiente para a existencia de extremos) Sexan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto crítico de f . Verifícase que:

1. Se $H_f(x_0)$ é definida positiva entón o punto x_0 é un mínimo relativo estrito de f .
2. Se $H_f(x)$ é semidefinida positiva, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entón x_0 é un mínimo global de f .
3. Se $H_f(x_0)$ é definida negativa entón x_0 é un máximo relativo estrito de f .
4. Se $H_f(x)$ é semidefinida negativa, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entón x_0 é un máximo global de f .
5. Se $H_f(x_0)$ é non definida entón x_0 é un punto de sela de f .

Exemplo 5.9 Para obter os extremos da función $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 9x^2 + 9y^2 + 12x + 12y + 15$, calculamos os puntos que anulan as dúas derivadas parciais:

$$D_1 f(x, y) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2$$

$$D_2 f(x, y) = 6y^2 + 18y + 12 = 6(y^2 + 3y + 2) = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ ou } y = -2$$

Os puntos críticos de f son, pois, $(1, -1)$, $(1, -2)$, $(2, -1)$ e $(2, -2)$. Para clasificalos, en primeiro lugar, obtemos a matriz hessiana de f en todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x - 18 & 0 \\ 0 & 12y + 18 \end{pmatrix}.$$

A continuación, estudamos o signo da matriz hessiana en cada un dos catro puntos críticos:

1. $H_f(1, -1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ é non definida, polo que $(1, -1)$ é un punto de sela de f .
2. $H_f(1, -2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ é definida negativa e $(1, -2)$ é un máximo relativo estrito de f .
3. $H_f(2, -1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ é definida positiva, polo que $(2, -1)$ é un mínimo relativo estrito de f .

4. $H_f(2, -2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ é non definida, polo tanto $(2, -2)$ é un punto de sela de f .

Exemplo 5.10 Dada a función $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$, para obter os seus puntos críticos resolvemos as ecuacións:

$$D_1 f(x, y) = 4x^3 - 4(x - y) = 0$$

$$D_2 f(x, y) = 4y^3 + 4(x - y) = 0$$

Sumando ambas as ecuacións temos $x^3 + y^3 = 0$, é dicir, $x = -y$. Substituíndo, por exemplo, na primeira temos a ecuación $4x^3 - 8x = 0$, que ten como solucións, 0, $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$. Así, os puntos críticos de f son $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Para clasificar os puntos críticos, en primeiro lugar, obtemos a matriz hessiana de f en todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix},$$

e, posteriormente, estudamos o signo da matriz hessiana en cada punto crítico.

1. $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, de onde $D_1 = -4 < 0$ e $D_2 = 0$, polo que $H_f(0, 0)$ é semidefinida negativa e non nula. Pola condición necesaria de segunda orde, o punto $(0, 0)$ é un máximo ou un punto de sela de f . Temos que utilizar a definición de máximo, de xeito que $(0, 0)$ sería un máximo relativo de f se $f(x, y) \leq f(0, 0) = 0$, para todo (x, y) preto de $(0, 0)$. Pero como $f(r, r) = 2r^4 > 0 = f(0, 0)$, para r tan pequeno como queiramos, tense que $(0, 0)$ non é un máximo e, polo tanto, $(0, 0)$ é un punto de sela de f .

2. $H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$, $D_1 = 20 > 0$ e $D_2 = 384 > 0$. Entón a matriz hessiana en ambos os puntos é definida positiva e, pola condición suficiente, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ son mínimos relativos estritos de f .

Exemplo 5.11 Sexa $f(x, y) = \frac{2}{3}b^2x^3 + a^2xy^2 - \frac{1}{2}b^2x^2 - a^2y^2$. Para clasificar, segundo os valores de $a, b \in \mathbb{R}$, os puntos críticos de f , comezamos polo cálculo das derivadas parciais:

$$D_1 f(x, y) = 2b^2x^2 + a^2y^2 - b^2x$$

$$D_2 f(x, y) = 2a^2xy - 2a^2y = 2a^2y(x - 1)$$

Os puntos críticos de f son aqueles que anulan ambas as derivadas parciais. Así, para que se anule a segunda derivada parcial ten que suceder que $a = 0$, ou $y = 0$ ou ben $x = 1$.

a) Se $a = 0$, ó substituír na primeira derivada parcial e igualar a 0 obtemos $2b^2x^2 - b^2x = 0$, é dicir, $b^2x(2x - 1) = 0$, de onde $b = 0$ ou $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

Deste caso ($a = 0$) obtemos entón os puntos críticos: $(0, y_0)$, $(\frac{1}{2}, y_0)$, con $y_0 \in \mathbb{R}$ calquera. O caso en que $a = b = 0$ podémolo obviar, xa que f sería a función constante 0 e tódolos puntos serían máximos e mínimos globais ó mesmo tempo.

- b) Se $y = 0$, ó substituír na primeira derivada parcial e igualar a 0 obtemos $2b^2x^2 - b^2x = 0$, de onde de novo $b = 0$ ou $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$. Deste caso obtemos entón os puntos críticos: $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, e, se $b = 0$, $(x_0, 0)$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ calquera.
- c) Se $x = 1$, ó substituír na primeira derivada parcial e igualar a 0 obtemos $b^2 + a^2y^2 = 0$, de onde, para $a \neq 0$, se ten a ecuación $y^2 = -\frac{b^2}{a^2} < 0$, que non ten solución.

Para clasificar os puntos críticos necesitaremos a matriz hessiana da función f :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4b^2x - b^2 & 2a^2y \\ 2a^2y & 2a^2x - 2a^2 \end{pmatrix}.$$

Procedemos, pois, a clasificar os puntos críticos calculados, é dicir, a determinar, empregando as condición de segunda orde, se son extremos ou son puntos de sela da función.

1. $(0, y_0)$, con $y_0 \in \mathbb{R}$ (sendo $a = 0$). Tense que $H_f(0, y_0) = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que é semidefinida negativa, polo que só podemos afirmar que estes puntos non poden ser mínimos de f .

Por outra parte, $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4b^2x - b^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que é semidefinida negativa no conxunto aberto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < \frac{1}{4}\}$, polo que todos os puntos críticos de f que pertencen a este conxunto, en particular os que estamos analizando, son máximos de f se se restrinxe a este aberto, logo son máximos relativos de f .

Poderíamos ter clasificado estes puntos utilizando a definición de máximo: como $a = 0$,

$$f(x, y) = \frac{2b^2x^3}{3} - \frac{b^2x^2}{2} = b^2x^2\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right),$$

ademais $b^2x^2(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}) \leq 0 = f(0, y_0)$, para $x \leq \frac{3}{4}$. Polo tanto, se $(x, y) \in B((0, y_0), \frac{3}{8})$, tense que $f(x, y) \leq f(0, y_0)$, é dicir $(0, y_0)$ é máximo relativo de f .

2. $(\frac{1}{2}, y_0)$, con $y_0 \in \mathbb{R}$ (sendo $a = 0$). Tense que $H_f(\frac{1}{2}, y_0) = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que é semidefinida positiva, polo que estes puntos non poden ser máximos de f .

Seguindo un razoamento análogo ó do apartado anterior, a partir de $H_f(x, y)$ para o conxunto aberto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{1}{4}\}$, chegaríamos a comprobar que tódolos puntos críticos de f que pertencen a este conxunto, en particular os que estamos analizando, son mínimos relativos de f . Tamén poderíamos ter clasificado estes puntos utilizando a definición de mínimo.

3. $(x_0, 0)$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ (sendo $b = 0$). Tense que $H_f(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a^2(x_0 - 1) \end{pmatrix}$, que é semidefinida positiva se $x_0 \geq 1$ e é semidefinida negativa se $x_0 \leq 1$.

Así, se $x_0 > 1$, $(x_0, 0)$ non pode ser un máximo relativo de f . Por outra parte, neste caso ($b = 0$),

$$f(x, y) = a^2xy^2 - a^2y^2 = a^2y^2(x - 1) \geq 0 = f(x_0, 0),$$

para todo $(x, y) \in B((x_0, 0), \frac{x_0-1}{2})$. Polo tanto $(x_0, 0)$ é un mínimo relativo de f . Se $x_0 < 1$, $(x_0, 0)$ non pode ser un mínimo relativo de f . Por outra parte, neste caso ($b = 0$), $f(x, y) =$

$a^2 y^2(x-1) \leq 0 = f(x_0, 0)$, para todo $(x, y) \in B((x_0, 0), \frac{1-x_0}{2})$. Polo tanto $(x_0, 0)$ é un máximo relativo de f .

Por último, se $x_0 = 1$, a matriz hessiana é semidefinida positiva e semidefinida negativa a un tempo polo que non nos proporciona ningún tipo de información. Pero podemos observar que, para todo $r > 0$, os puntos $(1 - \frac{r}{2}, \frac{r}{2})$ e $(1 + \frac{r}{2}, \frac{r}{2})$ pertencen á bóla $B((1, 0), r)$, ademais

$$f(1 - \frac{r}{2}, \frac{r}{2}) = -a^2 \frac{r^3}{8} < 0 = f(1, 0)$$

$$f(1 + \frac{r}{2}, \frac{r}{2}) = a^2 \frac{r^3}{8} > 0 = f(1, 0);$$

polo que $(1, 0)$ non é máximo nin mínimo de f , é un punto de sela.

4. Para clasificar o $(0, 0)$, observamos que $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -2a^2 \end{pmatrix}$, é definida negativa, se $a, b \neq 0$, e, polo tanto, $(0, 0)$ é un máximo relativo estrito de f .

Para os casos $a = 0$ ou $b = 0$ xa vimos que $(0, 0)$ é tamén máximo relativo estrito de f .

5. Para clasificar o $(\frac{1}{2}, 0)$, observamos que $H_f(\frac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}$, que é non definida, se $a, b \neq 0$, e polo tanto, neste caso, $(0, 0)$ é un punto de sela de f .

Para os casos $a = 0, b \neq 0$ ou $b = 0, a \neq 0$ xa vimos que $(\frac{1}{2}, 0)$ é mínimo relativo estrito e máximo relativo estrito de f , respectivamente.

Exercicios

1. Obtén e clasifica os puntos críticos das funcións:

- | | |
|---|--|
| a) $f(x, y) = (x+1)(y-2)$ | b) $f(x, y) = x^2 y^3 - (y+1)^2$ |
| c) $f(x, y) = xy(x-1)$ | d) $f(x, y) = (y^2 - x)(6y^2 - x)$ |
| e) $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - y^2 + 4$ | f) $f(x, y) = e^{xy}(x^2 + y^2)$ |
| g) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ | h) $f(x, y) = x^2 + 3y^4 - 4y^3 - 12y^2$ |
| i) $f(x, y) = x + y - \ln(xy)$ | j) $f(x, y) = x^3 - 3x + (y-1)^2$ |
| k) $f(x, y) = xy - 4x - y + 7$ | l) $f(x, y) = x + y + \frac{4}{x} + \frac{9}{y}$ |
| m) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x + 2$ | n) $f(x, y) = (x + y^2)e^x$ |
| o) $f(x, y) = (x + y)(xy + 1)$ | p) $f(x, y) = x - x^2 - y^2 - 2y + 60$ |
| q) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2$ | r) $f(x, y) = x^2 + y^3 + 2y$ |
| s) $f(x, y) = y^3 + x^3 + 3xy$ | t) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8 \ln(x)$ |
| u) $f(x, y) = x(e^x - e^y)$ | v) $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$ |
| w) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 27y + 15$ | |

2. Obtén e clasifica os puntos críticos das funcións:

- a) $f(x, y, z) = x \ln(y) + z \ln(x) - y$
 b) $f(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2 + z^2 + 2)}$
 c) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$

- d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + yz$
 e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$
 f) $f(x, y, z) = z^3 - x^2 - y^2 + 2xz - 50$
 g) $f(x, y, z) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2y^3 + 9y^2 + 3z^2 - 6z$
3. Obtén e clasifica, segundo os valores do parámetro a , os puntos críticos das funcións:
- a) $f(x, y) = x^3 - y^3 + axy$
 b) $f(x, y) = x^2 - 2axy + y^2$
 c) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4axy$
 d) $f(x, y) = xy + \frac{a}{x} + \frac{a}{y}$
 e) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$
4. Proba que o punto $(1, -\sqrt{3})$ é un máximo relativo da función implícita $z = f(x, y)$ definida pola ecuación funcional $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 14$ nunha veciñanza do punto $(1, -\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$.
5. Proba que o punto $(1, 1)$ é un punto crítico da función implícita $z = f(x, y)$ definida pola ecuación funcional $xyz + \sin(z - 6) - 2(x + y + x^2y^2) = 0$ nunha veciñanza do punto $(1, 1, 6)$. Neste punto f alcanza un máximo?

Exercicios resoltos

1. Obtén e clasifica os puntos críticos da función $f(x, y) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + y^4 - 4y + 18$.
Solución. Calculamos os puntos que anulan as derivadas parciais de f :

$$D_1 f(x, y) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 0$$

$$D_2 f(x, y) = 4y^3 - 4 = 4(y^3 - 1) = 0$$

Da primeira das ecuacións dedúcese que $x = 1$, $x = 2$ ou $x = 3$. Da segunda, que $y = 1$. Polo tanto, os puntos críticos de f son: $(1, 1)$, $(2, 1)$ e $(3, 1)$. A matriz hessiana de f en cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 48x + 44 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Substituíndo en cada punto crítico:

- a) $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ é definida positiva e $(1, 1)$ é un mínimo relativo estrito de f .
 b) $H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ é non definida, polo que $(2, 1)$ é un punto de sela de f .
 c) $H_f(3, 1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ é definida positiva e $(3, 1)$ é un mínimo relativo estrito de f .

2. Obtén e clasifica os puntos críticos da función $f(x, y) = x^2 - 2axy + y^2$.

Solución. Calculamos os puntos que anulan as derivadas parciais:

$$D_1 f(x, y) = 2x - 2ay = 0 \implies x = ay$$

$$D_2 f(x, y) = 2y - 2ax = 0 \implies 2y - 2a^2 y = 2y(1 - a^2) = 0.$$

- Se $a \neq -1$ e $a \neq 1$, entón $y = 0$ e $x = 0$, polo que $(0, 0)$ é o único punto crítico de f .
- Se $a = 1$, entón (x, x) son puntos críticos de f , calquera que sexa $x \in \mathbb{R}$.
- Se $a = -1$, entón $(x, -x)$ son puntos críticos de f , calquera que sexa $x \in \mathbb{R}$.

A matriz hessiana de f , $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2a \\ -2a & a \end{pmatrix}$, non depende do punto, e $D_1 = 2 > 0$ e $D_2 = 4(1 - a^2)$. Entón,

- Se $|a| \leq 1$, $D_2 \geq 0$, polo que $H_f(x, y)$ é semidefinida positiva para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e os puntos críticos, $(0, 0)$ se $|a| < 1$, ou (x, x) se $a = 1$ ou $(x, -x)$ se $a = -1$, son mínimos globais de f .
- Se $|a| > 1$, $D_2 < 0$, polo que $H_f(0, 0)$ é non definida e o $(0, 0)$ é un punto de sela de f .

5.2. Extremos de funcións con restricións de igualdade

Nesta sección estudamos o problema dos extremos dunha función cando as variables de decisión están suxeitas a restricións de igualdade.

Sexan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g = (g_1, \dots, g_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, con $m < n$. De entre tódolos puntos $x \in \mathbb{R}^n$ que verifiquen as igualdades $g_1(x) = b_1, \dots, g_m(x) = b_m$ ou, abreviadamente, $g(x) = b$, pretendemos atopar aqueles que minimicen ou maximicen a función f .

A función f denomínase función obxectivo, as funcións g_j denomínanse restricións do problema e os escalares b_j , parámetros que definen as restricións. O conxunto de puntos que verifican as restricións, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) = b_j, j = 1, \dots, m\} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = b\}$, coñécese como conxunto de solucións factibles do problema. Con estas notacións, escribiremos o problema que pretendemos resolver como

$$\begin{array}{ll} \text{mín(máx)} : & f(x) \\ \text{suxeito a:} & g(x) = b \end{array}$$

Empezamos coas definicións das posibles solucións do problema formulado.

Definición 5.12 Sexan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = b\}$. Diremos que

1. $x_0 \in S$ é un mínimo relativo de f en S se existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in B(x_0, r) \cap S$.
2. $x_0 \in S$ é un máximo relativo de f en S se existe $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in B(x_0, r) \cap S$.

3. $x_0 \in S$ é un mínimo relativo estrito de f en S se existe $r > 0$ tal que $f(x) > f(x_0)$, para todo $x \in B(x_0, r) \cap S$, $x \neq x_0$.
4. $x_0 \in S$ é un máximo relativo estrito de f en S se existe $r > 0$ tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in B(x_0, r) \cap S$, $x \neq x_0$.

Do mesmo xeito defínense os máximos e mínimos globais.

Definición 5.13 *Coa mesma notación que na definición anterior, dise que*

1. $x_0 \in S$ é un mínimo global de f en S , se $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in S$.
2. $x_0 \in S$ é un máximo global de f en S se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in S$.
3. $x_0 \in S$ é un mínimo global estrito de f en S se $f(x) > f(x_0)$, para todo $x \in S$, $x \neq x_0$.
4. $x_0 \in S$ é un máximo global estrito de f en S se $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in S$, $x \neq x_0$.

Un punto $x_0 \in S$ é un extremo relativo de f en S , se é un mínimo o un máximo relativo de f en S . Nas definicións anteriores podemos utilizar indistintamente as expresións extremo de f en S , extremo de f suxeito a $g_j(x) = b_j$, para todo $j = 1, \dots, m$, ou extremo de f suxeito a $g(x) = b$.

O seguinte resultado, coñecido como teorema de Lagrange ou teorema dos multiplicadores de Lagrange, establece unha condición necesaria de existencia de solución do problema de optimización con restricións de igualdade formulado.

Utilizaremos a seguinte función auxiliar. Dados m números reais, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, denomínase *función lagrangiana* asociada ó problema á función $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$L(x) = f(x) - \sum_{k=1}^m \lambda_k (g_k(x) - b_k).$$

Teorema 5.14 (de Lagrange) *Sexan $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in S$ verificando que $\text{rango } Dg(x_0) = m < n$. Se x_0 é un extremo relativo de f en S , existen m números reais únicos, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, tales que x_0 é un punto crítico da función lagrangiana asociada. Isto é,*

$$D_i L(x_0) = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

A hipótese $\text{rango } Dg(x_0) = m$, que se coñece como condición do rango, é necesaria como se comproba no seguinte exemplo.

Exemplo 5.15 Consideramos o problema mín $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, suxeito a $g(x, y, z) = (z, z^2 - (y - 1)^3) = (0, 0)$. Posto que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, y = 1\}$, obviamente f ten un mínimo en $(0, 1, 0)$. Con todo, $\text{rango } Dg(0, 1, 0) = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 < 2$. Por outra banda, $Df(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$ e non existen escalares λ_1, λ_2 , tales que $(0, 2, 0) = \lambda_1(0, 0, 1) + \lambda_2(0, 0, 0)$.

Na práctica, para atopar os posibles extremos do problema, é preciso calcular os puntos críticos da función lagranxiana que verifican as restricións. Isto é, temos que resolver o sistema de $n + m$ ecuacións con $n + m$ incógnitas, $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, dado por

$$D_i L(x) = D_i f(x) - \sum_{k=1}^n \lambda_k D_i g_k(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$g_j(x) = b_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Unha vez calculadas as posibles solucións do problema mediante a condición necesaria, clasificamos os citados puntos utilizando as condicións suficientes que enunciámos a continuación.

Teorema 5.16 (Condición suficiente forte) *Sexa $x_0 \in S$. Verifícase:*

1. *Se x_0 é un mínimo relativo da función lagranxiana, x_0 é un mínimo relativo de f suxeito a $g(x) = b$.*
2. *Se x_0 é un máximo relativo da función lagranxiana, x_0 é un máximo relativo de f suxeito a $g(x) = b$.*

Demostración. Se x_0 é un mínimo relativo da función lagrangiana, existe $r > 0$ tal que $L(x_0) \leq L(x)$ para todo $x \in B(x_0, r)$. Posto que se $x \in S$, $L(x) = f(x)$, dado $x \in B(x_0, r) \cap S$, temos que $f(x_0) = L(x_0) \leq L(x) = f(x) - \lambda(g(x) - b) = f(x)$. Polo tanto, x_0 é un mínimo de f en S . ■

É preciso resaltar que neste resultado non son necesarias hipóteses adicionais. O resultado segue sendo válido aínda que x_0 non sexa punto crítico ou mesmo para funcións non diferenciábeis. O corolario seguinte será moi útil na práctica.

Corolario 5.17 *Sexan $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto que verifica o teorema de Lagrange.*

1. *Se $H_L(x_0)$ é definida positiva, x_0 é un mínimo relativo estrito de f en S .*
2. *Se $H_L(x_0)$ é definida negativa, x_0 é un máximo relativo estrito de f en S .*
3. *Se $H_L(x)$ é semidefinida positiva, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, x_0 é un mínimo global de f en S .*
4. *Se $H_L(x)$ é semidefinida negativa, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, x_0 é un máximo global de f en S .*

Exemplo 5.18 O problema mín(máx) : $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ suxeito a: $x + y + z = 1$ verifica a hipótese do rango, pois a matriz $Dg(x, y, z) = (1, 1, 1)$ ten rango un. A función lagranxiana é, $L(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y + z - 1)$, e das ecuacións

$$D_1 L(x, y, z) = 2x - \lambda = 0$$

$$D_2 L(x, y, z) = 2y - \lambda = 0$$

$$D_3 L(x, y, z) = 2z - \lambda = 0$$

$$x + y + z = 1$$

obtense o único punto crítico da función lagranxiana que está no conxunto de solucións factibles, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. A matriz hessiana da lagrangiana, $H_L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, é definida positiva, polo que o punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ é o único mínimo do problema.

O teorema 5.16 é unha condición moi forte, no senso de que existen bastantes situacións prácticas nos que este teorema non clasifica o punto que estamos estudando. Para resolver, en parte, este problema, existe unha condición suficiente máis débil que a anterior. Este resultado obtense estudando a matriz bordo da hessiana do problema no punto x_0 , que é a matriz cadrada de orde $m + n$ definida por

$$BH(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & Dg(x_0) \\ Dg(x_0)^t & H_L(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & D_1g_1(x_0) & \dots & D_ng_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & D_1g_m(x_0) & \dots & D_ng_m(x_0) \\ D_1g_1(x_0) & \dots & D_1g_m(x_0) & D_{11}L(x_0) & \dots & D_{1n}L(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_ng_1(x_0) & \dots & D_ng_m(x_0) & D_{n1}L(x_0) & \dots & D_{nn}L(x_0) \end{pmatrix}.$$

Para cada $r = 1, \dots, n + m$, denotaremos por $D_r(x_0)$ o menor principal de orde r da matriz $BH(x_0)$. Obviamente os m primeiros determinantes son nulos e só os $n - m$ últimos nos proporcionarán información para a clasificación dos puntos críticos da función lagrangiana.

Teorema 5.19 (Condición suficiente débil) Sexan $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $x_0 \in S$ un punto que verifica o teorema de Lagrange.

1. Se $(-1)^m D_r(x_0) > 0$, para todo $r = 2m + 1, \dots, m + n$, entón x_0 é un mínimo relativo estrito de f suxeito a $g(x) = b$.
2. Se $(-1)^{m+r} D_r(x_0) > 0$, para todo $r = 2m + 1, \dots, m + n$, entón x_0 é un máximo relativo estrito de f suxeito a $g(x) = b$.

Observación. Para a aplicación práctica deste resultado debemos ter en conta que é preciso avaliar os últimos $n - m$ menores principais (diferencia entre variables e restricións) e sempre hai que calcular o determinante da matriz bordo (cadrada de orde $m + n$). Fixémonos, ademais, que o criterio dos signos cambia en función de que m sexa par ou impar.

Por exemplo, para $n = 2$ e $m = 1$, debemos calcular só un menor principal, o da matriz bordo que é de orde 3, $D_3(x_0) = \det(BH(x_0))$. Neste caso,

- Se $D_3(x_0) < 0$, x_0 é un mínimo relativo de f en S .
- Se $D_3(x_0) > 0$, x_0 é un máximo relativo de f en S .

Para $n = 3$ e $m = 2$, calculamos un menor principal, o da matriz bordo que é de orde 5, $D_5(x_0) = \det(BH(x_0))$. Neste caso,

- Se $D_5(x_0) > 0$, x_0 é un mínimo relativo de f en S .
- Se $D_5(x_0) < 0$, x_0 é un máximo relativo de f en S .

Por último, para $n = 3$ e $m = 1$, debemos calcular dous menores principais, o de orde 3 e o da matriz bordo que é de orde 4. Neste caso,

- Se $D_3(x_0) < 0$ e $D_4(x_0) < 0$, x_0 é un mínimo relativo de f en S .
- Se $D_3(x_0) > 0$, e $D_4(x_0) < 0$, x_0 é un máximo relativo de f en S .

Exemplo 5.20 Para atopar os extremos da función $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$, suxeita á restricción $x^2 + 4y^2 = 16$, observamos, en primeiro lugar, que se verifica a condición do rango, pois $\text{rango}(2x \quad 8y) = 0$ se, e só se, $(x, y) = (0, 0)$; pero este punto non é unha solución factible do problema. Isto é, se $(x, y) \in S$, entón $\text{rango } Dg(x, y) = 1$.

Da función lagranxiana asociada ó problema, $L(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - \lambda(x^2 + 4y^2 - 16)$, obtemos as ecuacións correspondentes para calcular os puntos críticos de L que verifican as restricións,

$$\begin{aligned} D_1 L(x, y) &= 2(x - 1) - 2\lambda x = 0 \\ D_2 L(x, y) &= 2y - 8\lambda y = 2y(1 - 4\lambda) = 0 \\ x^2 + 4y^2 &= 16. \end{aligned}$$

Da segunda ecuación temos que $y = 0$, ou $\lambda = \frac{1}{4}$. Se $y = 0$, da restricción obtemos que $x = -4$ ou $x = 4$. Así, se $x = 4$, da primeira ecuación $\lambda = \frac{3}{4}$; e se $x = -4$, da primeira ecuación $\lambda = \frac{5}{4}$. Por outra parte, se $\lambda = \frac{1}{4}$, da primeira ecuación temos que $x = \frac{4}{3}$, e da restricción, $y = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ou $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. En resumo, temos catro puntos críticos da función lagranxiana que verifican a restricción: $p_1 = (4, 0)$, con $\lambda = \frac{3}{4}$; $p_2 = (-4, 0)$, con $\lambda = \frac{5}{4}$; $p_3 = (\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$, con $\lambda = \frac{1}{4}$; e $p_4 = (\frac{4}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3})$, con $\lambda = \frac{1}{4}$.

A matriz hessiana da lagranxiana, $H_L(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 - 8\lambda \end{pmatrix}$, vaimos permitir clasificar eses catro puntos.

Para $\lambda = \frac{1}{4}$, temos que $H_L(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é semidefinida positiva, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, de onde deducimos que $(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$ e $(\frac{4}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3})$ son mínimos globais de L . Polo corolario da condición suficiente forte, estes puntos son mínimos globais de f suxeitos a $x^2 + 4y^2 = 16$.

Se $\lambda = \frac{5}{4}$, entón $H_L(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = H_L(-4, 0)$ é definida negativa, polo que $(-4, 0)$ é un máximo relativo (tamén global) estrito de f suxeito a $x^2 + 4y^2 = 16$.

Para $\lambda = \frac{3}{4}$, temos que $H_L(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = H_L(4, 0)$ é non definida, e temos que utilizar a

condición suficiente débil. A matriz bordo da hessiana é $BH(4, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 8 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ e o determi-

nante $D_3 = \det(BH(4, 0)) = 256 > 0$, polo que o punto $(4, 0)$ é un máximo relativo estrito de f suxeito a $x^2 + 4y^2 = 16$.

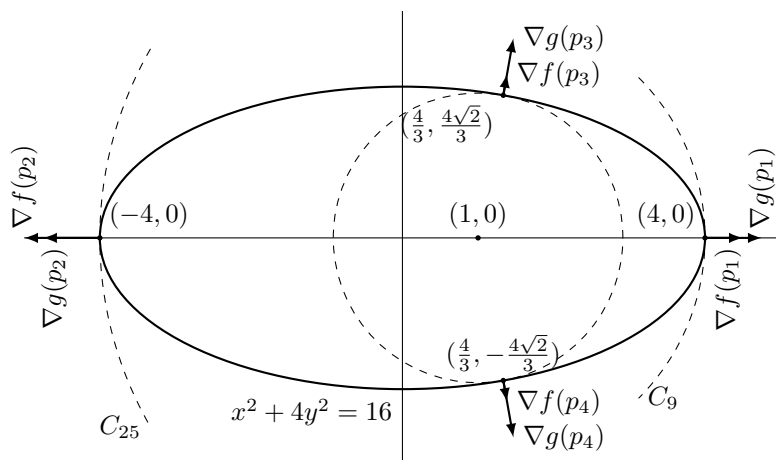


Figura 5.1: Interpretación xeométrica do problema de optimizar $(x - 1)^2 + y^2$ suxeito a $x^2 + 4y^2 = 16$

Exercicios

6. Que punto do plano $2x + 5y + 3z = 1$ dista menos da orixe?
7. Calcula tres números non negativos cuxa suma sexa 15 e o seu produto máximo.
8. Que punto da hipérbole $xy = 4$ dista menos da orixe?
9. Resolve o problema : mín(máx) $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$ suxeito a $y^2 - x = 0$. Interpreta o problema xeometricamente.
10. Resolve os seguintes problemas:
 - a) mín(máx) $4x^2 + y^2$ suxeito a $x + y = 5$
 - b) mín(máx) $x - y$, suxeito a $x^2 + y^2 = 2$
 - c) mín(máx) $6 - x - 2y$, suxeito a $x^2 + y^2 = 5$
 - d) mín(máx) $3xy$, suxeito a $x - y = 4$
 - e) mín(máx) $2xy$, suxeito a $x - y = 10$
 - f) mín(máx) $2x + 3y - 3xy - x^2 - y^2$, suxeito a $x + 3y = 3$
 - g) mín(máx) $(x - 3)y + (x - 1)(y - 6)$, suxeito a $x + y = 7$
 - h) mín(máx) $e^x + e^y$, suxeito a $x + y = 2$
 - i) mín(máx) $x - 2y + 2z$, suxeito a $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
 - j) mín(máx) $y + \ln(x)$, suxeito a $3x + y = 6$
 - k) mín(máx) $4xy - x^2 - 2y^2 - 12z - 5z^2$, suxeito a: $x^2 - z = 0$
 - l) mín(máx) $x^2 + y^2 + z^2$, suxeito a $x + y = 1, z - x = 1$

m) $\min(\max) \frac{1}{2}x^4 + x^2 + y^2 + y + 3z^2 + z$, suxeito a $x + y + z = 10$, $2x + y + z = 12$

n) $\min(\max) x^2 + y^2 - z$, suxeito a $x - y = 1$, $x + y + z = 6$

11. Calcula o valor mínimo de:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, suxeito a: $2x + 2y + z = -9$, $2x - y - 2z = -18$.

b) $f(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 + 3z^2$, suxeito a: $x + 2y + 3z = 9$, $4x - 2y + z = -19$.

c) $f(x, y, z, u) = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$, suxeito a: $2x + y - z - 2u - 5 = 0$.

12. Resolve o problema: $\min(\max) : f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 4xy + 12z + 5z^2$, suxeito a: $z - x = 3$, $x - y = 0$.

13. Atopa a mínima distancia entre o punto $(0, b)$ e a parábola $x^2 - 4y = 0$. Interpreta xeometricamente o problema.

14. Atopa os puntos da intersección do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e o plano $6x + 3y + 2z = 6$ máis próximos á orixe, así como os máis afastados.

15. Debuxa as curvas de nivel da función $f(x, y) = x + y$ e atopa graficamente a solución do problema $\min(\max) x + y$, suxeito a $x^2 + y^2 = 1$.

16. Debuxa as curvas de nivel da función $f(x, y) = \frac{y}{x}$ e atopa graficamente a solución do problema $\min(\max) \frac{y}{x}$, suxeito a $y = 1 + x^2$.

17. Resolve os seguintes problemas:

a) Que dimensións debe ter unha caixa construída con $k \text{ m}^2$ de cartón para que o seu volume sexa máximo?

b) Desexamos construír unha caixa cunha capacidade de k litros. Que dimensións debe ter para empregar a menor cantidade posible de material?

c) Resolve os problemas anteriores supoñendo que as caixas deben construírse sen tapas.

18. Atopa a mínima distancia entre o punto $(0, b)$ e a parábola $x^2 - 4y = 0$. Resolve o problema utilizando Lagrange e sen utilizar o teorema.

19. Para deseñar un cartel de propaganda dispomos de 1800 cm^2 de papel. A nosa impresora sempre deixa 2 cm de marxe na cabeceira e no pé e 1 cm nas marxes dereita e esquerda de calquera documento, delimitando así a parte do cartel na que podemos imprimir o texto da propaganda e que chamaremos zona de escritura.

a) Cales son as dimensións óptimas do cartel para que a zona de escritura sexa máxima?

b) Como moito, cantos cm^2 de texto poderemos imprimir?

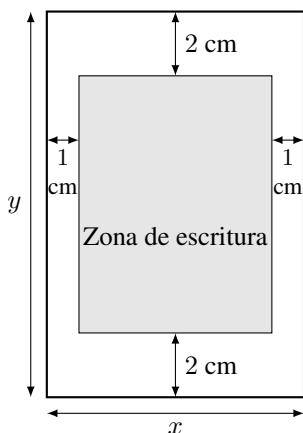


Figura 5.2: Esquema do problema do cartel de propaganda

20. Desexamos construír un almacén de dimensións x metros de ancho, y metros de longo e z metros de alto, cunha capacidade de 250000 metros cúbicos. Por razóns de funcionalidade, a altura do almacén debe coincidir coa súa lonxitude. Resolve o problema de atopar as dimensións óptimas do almacén que minimicen o custo de pintar as catro paredes e o teito do mesmo.
21. *Regresión lineal.* É ben coñecido que, dados dous puntos distintos no plano, existe unha única recta que pasa por eles. En xeral, se temos máis de dous puntos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ é imposible atopar unha recta que pase por todos eles. A teoría da regresión lineal trata de buscar a recta de ecuación $y = mx + n$ que “mellor se axuste” os datos no senso de minimizar a suma dos erros cadráticos $((mx_j + n) - y_j)^2$, é dicir, preténdese buscar os valores $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ que minimicen a función $S(m, n) = \sum_{j=1}^n ((mx_j + n) - y_j)^2$. Na seguinte táboa recóllense os datos correspondentes ás sancións, en miles de euros, impostas a certas industrias contaminantes en función da cantidade tóxica vertida, en miles de litros. Determina os parámetros m e n da recta de regresión que axusta os datos:

Verquido	0,5	1,0	1,2	1,6	2,0	2,5	2,8	3,0	4,1
Sanción	1,0	3,0	4,2	5,1	7,9	11,0	12,6	15,0	24,2

Resolve agora o problema xeral de regresión lineal $\min_{(m,n) \in \mathbb{R}^2} S(m, n)$.

Exercicios resoltos

1. Resolve o problema máx : $f(x, y, z) = xyz$ suxeito a: $x + y + z = 3$.

Solución. Está claro que se verifica a hipótese do rango pois $\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$, en todo $\mathbb{R}^3$, en particular na solución do problema.

A función lagranxiana é $L(x, y, z) = xyz - \lambda(x + y + z - 3)$.

Resolvemos o sistema

$$D_1 L(x, y, z) = yz - \lambda = 0$$

$$D_2 L(x, y, z) = xz - \lambda = 0$$

$$D_3 L(x, y, z) = xy - \lambda = 0$$

$$x + y + z = 3$$

Das tres primeiras ecuacións, $\lambda = yz = xz = xy$, e, como ningunha coordenada pode ser nula, obtemos que $x = y = z$ que substituídas na restrición da $x = 1$, polo que o único punto crítico do problema é $(1, 1, 1)$.

Para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a matriz hessiana da lagrangiana é $H_L(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$. En

particular, $H_L(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ é unha matriz non definida. Estamos nunha situación

na que a condición suficiente forte non decide e precisamos usar a débil. Neste caso, $m = 1$

e $r = 2, 3$ e a matriz bordo da hessiana é $BH(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Co cal, $D_3 =$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 > 0 \text{ e } D_4 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -3 < 0.$$

Entón $(1, 1, 1)$ é un máximo relativo estrito de f suxeito á restrición $x + y + z = 3$.

2. Resolve o problema mín(máx) : $f(x, y) = x^2 + y^2$, suxeito a $xy = 4$.

Solución. Condición do rango: $\text{rango } Dg(x, y) = \text{rango} \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. Como o punto $(0, 0)$ non verifica a restrición, o rango desta matriz en calquera solución do problema vale 1.

A función lagrangiana, $L(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(xy - 4)$, ten as seguintes derivadas parciais e puntos críticos:

$$\left. \begin{aligned} D_1 L(x, y) &= 2x - \lambda y = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2x}{y} \\ D_2 L(x, y) &= 2y - \lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2y}{x} \end{aligned} \right\} \text{ polo que } x^2 = y^2, \text{ ou } y = \pm x.$$

Substituíndo na restrición, se $y = x$ entón $x^2 = 4$ ou, equivalentemente, $x = \pm 2$, polo que $(2, 2)$ e $(-2, -2)$ con $\lambda = 2$ son puntos críticos da función lagrangiana. Por outra parte, se $y = -x$ entón $-x^2 = 4$, que non ten solución real.

A matriz hessiana da lagrangiana é $H_L(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix}$. Para $\lambda = 2$, $H_L(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, que é semidefinida positiva para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e, pola condición suficiente forte, $(2, 2)$ e $(-2, -2)$ son mínimos globais de f suxeitos a $xy = 4$.

3. Resolve o problema mín $f(x, y) = x^2 + y^2$, suxeito a $x - y = 2$.

Solución. Consideremos a función lagrangiana asociada ó problema, $L(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(x - y - 2)$. Dado que a condición do rango se cumpre en todo punto, calcularemos os puntos críticos de L que verifican as restricións, resolvendo o sistema

$$D_1 L(x, y) = 2x - \lambda = 0$$

$$D_2 L(x, y) = 2y + \lambda = 0$$

$$x - y = 2$$

De aquí obtense que $(1, -1)$, con $\lambda = 2$, é o único punto crítico da lagrangiana que verifica a restrición.

A matriz $H_L(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ é definida positiva, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, polo que $(1, -1)$ é un mínimo global del problema.

5.3. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

- Un dos seguintes é un punto crítico da función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 4$.
a) $(1, 1, 1)$ b) $(1, 2, 3)$ c) $(0, 0, 0)$ d) $(-1, -2, -3)$
- Para a función $f(x, y) = x^2 + y^2 + \cos(xy)$, o punto $(0, 0)$
a) é un mínimo. b) é un máximo. c) é un punto de sela. d) non é un punto crítico.
- Unha das seguintes funcións NON ten extremos.
a) $f(x, y) = x^4 + y^4$ b) $f(x, y) = x^2 + 2$
c) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ d) $f(x, y) = x^2 + y$
- Se $f(x, y) = x^2 + y^2$, unha das seguintes afirmacións é FALSA.
a) $(0, 0)$ é un punto crítico de f . b) $H_f(x, y)$ é definida positiva para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
c) $H_f(0, 0)$ é a matriz nula. d) $(0, 0)$ é un mínimo global de f .
- Sexan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ unha función de clase dúas e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x_0) = \theta$. Pódese afirmar que:
a) Se x_0 é un mínimo relativo de f , entón $H_f(x_0)$ é semidefinida positiva.
b) Se x_0 é un máximo relativo de f , entón $H_f(x_0)$ é definida negativa.
c) Se $H_f(x_0)$ é semidefinida negativa, entón x_0 é un máximo relativo de f .
d) Se $H_f(x_0)$ é semidefinida positiva, entón x_0 é un mínimo relativo de f .

6. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é un mínimo global dunha función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase dúas se
- $H_f(x_0)$ é definida positiva.
 - $H_f(x_0)$ é semidefinida positiva.
 - $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
 - $f(x) \geq f(x_0)$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$.
7. Para o problema, $\min(\max): f(x, y) = y^2 - 2x$, suxeito a $x + y = 0$, o punto $(1, -1)$
- é un máximo global.
 - é un mínimo global.
 - non é un extremo.
 - non é un punto crítico da función lagrangiana asociada.
8. Para o problema $\min(\max): f(x, y) = x + y$, suxeito a $g(x, y) = x^2 + y^2 = 8$, unha das seguintes afirmacións é FALSA.
- $(2, 2)$ é un máximo relativo de f suxeito a $x^2 + y^2 = 8$.
 - $(-2, -2)$ é un mínimo relativo de f suxeito a $x^2 + y^2 = 8$.
 - En calquera punto crítico (x_0, y_0) da lagrangiana asociada, $\text{rango}(Dg(x_0, y_0)) = 0$.
 - $(-2, -2)$ con $\lambda = -\frac{1}{4}$ é un punto crítico da función lagrangiana asociada.
9. Sexa $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un máximo de $f(x)$ suxeito a $g(x) = b$ que verifica o teorema de Lagrange e $L(x) = f(x) - \lambda(g(x) - b)$ a función lagrangiana asociada. Unha das seguintes afirmacións é FALSA.
- $D_i L(x_0) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.
 - $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$.
 - $D_i f(x_0) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.
 - $D_i f(x_0) = \lambda D_i g(x_0)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

5.4. Optimización en varias variables con MATLAB

No seguinte exemplo veremos como podemos utilizar MATLAB para resolver problemas de optimización sen restricións.

Exemplo 5.21 Para atopar os extremos de $f(x, y, z) = x^2z + y^2z + \frac{2}{3}z^3 - 4x - 4y - 10z + 1$, calculamos, en primeiro lugar, os seus puntos críticos:

```
>> syms x y z
>> f(x,y,z) = x^2*z + y^2*z + 2/3*z^3 - 4*x - 4*y - 10*z + 1
>> Df=jacobian(f)
>> PC=solve(Df); PC=[PC.x, PC.y, PC.z]
```

Os puntos críticos de f son $(2, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(-1, -1, -2)$ e $(-2, -2, -1)$. Obtemos a matriz hessiana de f , avaliamola en cada un destes puntos e, calculando os autovalores da mesma, estudamos o signo da correspondente forma cuadrática:

```
>> Hf=hessian(f)
>> H1=Hf(PC(1,1), PC(1,2), PC(1,3)), eig(H1)
>> H2=Hf(PC(2,1), PC(2,2), PC(2,3)), eig(H2)
>> H3=Hf(PC(3,1), PC(3,2), PC(3,3)), eig(H3)
>> H4=Hf(PC(4,1), PC(4,2), PC(4,3)), eig(H4)
```

Entón, $(2, 2, 1)$ e $(-2, -2, -1)$ son puntos de sela, posto que as matrices hessianas correspondentes son non definidas. $(1, 1, 2)$ é un mínimo relativo estrito de f , dado que a matriz hessiana nese punto é definida positiva. Por último, $(-1, -1, -2)$ é un máximo relativo estrito da función, xa que a matriz hessiana neste punto é definida negativa.

No seguinte exemplo resolveremos con MATLAB un problema de optimización con restricións de igualdade.

Exemplo 5.22 Para resolver con MATLAB o problema máx (mín) $f(x, y) = x - y$ suxeito a $x^2 + y^2 = 2$, introducimos a función obxectivo, a restrición, a función lagranxiana asociada e calculamos os puntos críticos da lagranxiana que verifican a restrición:

```
>> syms x y m
>> f(x,y)=x-y , g(x,y)=x^2+y^2-2, L(x,y)=f-m*g
>> DL=jacobian(L)
>> PC=solve([DL,g]); PC=[PC.x,PC.y,PC.m]
```

Observamos que os puntos críticos da lagranxiana que verifican a restrición son $(-1, 1)$ con $\lambda = -\frac{1}{2}$ e $(1, -1)$ con $\lambda = \frac{1}{2}$. Clasificarémolos empregando a matriz hessiana da lagranxiana:

```
>> HL=hessian(L)
>> HLp=subs(HL,[x,y,m],PC(1,:))
>> HLp=subs(HL,[x,y,m],PC(2,:))
```

Vemos que a matriz hessiana para $(-1, 1)$ é definida positiva, logo este punto é un mínimo relativo estrito da lagranxiana e, polo tanto, un mínimo relativo estrito do problema. Tamén vemos que a matriz hessiana para $(1, -1)$ é definida negativa, logo este punto é un máximo relativo estrito da lagranxiana e, polo tanto, un máximo relativo estrito do problema.

5.5. Solucións dos exercicios propostos

1. a) $(-1, 2)$ punto de sela
1. b) $(0, -1)$ máximo
1. c) $(0, 0)$ e $(1, 0)$ puntos de sela
1. d) $(0, 0)$ punto de sela
1. e) $(0, 0)$ punto de sela, $(-2, 0)$ máximo
1. f) $(0, 0)$ mínimo
1. g) $(2, 0)$ mínimo, $(-2, 1)$ máximo, $(1, 2)$ e $(-1, -2)$ puntos de sela
1. h) $(0, -1)$ e $(0, 2)$ mínimos, $(0, 0)$ punto de sela
1. i) $(1, 1)$ mínimo
1. j) $(-1, 1)$ punto de sela, $(1, 1)$ mínimo
1. k) $(1, 4)$ punto de sela
1. l) $(2, 3)$ mínimo, $(-2, -3)$ máximo, $(-2, 3)$ e $(2, -3)$ puntos de sela
1. m) $(1, 0)$ mínimo, $(-1, 0)$ máximo, $(0, 1)$ e $(0, -1)$ puntos de sela
1. n) $(-1, 0)$ mínimo

1. o) $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ puntos de sela
1. p) $(\frac{1}{2}, -1)$ máximo
1. q) $(1, -1)$ mínimo
1. r) non ten puntos críticos
1. s) $(0, 0)$ punto de sela, $(-1, -1)$ máximo
1. t) $(2, 0)$ mínimo. O punto $(-2, 0)$ non é extremo pois non está no dominio.
1. u) $(0, 0)$ punto de sela
1. v) $(0, 0)$ punto de sela, $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ máximo

2. a) $(1, 1, 0)$ punto de sela
2. b) $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ mínimo
2. c) $(x, -x, -x)$, $x \in \mathbb{R}$ mínimos globais
2. d) $(0, 0, 0)$ mínimo
2. e) $(0, 0, 0)$ mínimo
2. f) $(0, 0, 0)$ punto de sela, $(-\frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3})$ máximo
2. g) $(1, 0, 1)$ mínimo, $(-2, 0, 1)$, $(1, -3, 1)$ e $(-2, -3, 1)$ puntos de sela
7. $(5, 5, 5)$
8. $(2, 2)$ e $(-2, -2)$
9. $(0, 0)$ mínimo, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ máximos.

10. a) $(1, 4)$ mínimo global
10. b) $(1, -1)$ máximo, $(-1, 1)$ mínimo
10. c) $(-1, -2)$ máximo, $(1, 2)$ mínimo
10. d) $(2, -2)$ mínimo global
10. e) $(5, -5)$ mínimo
10. f) $(-6, 3)$ máximo
10. g) $(3, 4)$ máximo
10. h) $(1, 1)$ mínimo global
10. i) $(1, -2, 2)$ máximo, $(-1, 2, -2)$ mínimo
10. j) $(\frac{1}{3}, 5)$ máximo global
10. k) $(0, 0, 0)$ máximo
10. l) $(0, 1, 1)$ mínimo
10. m) $(2, 6, 2)$ mínimo global
10. n) $(0, -1, 7)$ mínimo global

11. a) $(-6, 0, 3)$ mínimo
11. b) $(-\frac{18}{7}, \frac{33}{7}, \frac{5}{7})$ mínimo global
11. c) $(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$ mínimo

12. $(\frac{-21}{4}, \frac{-21}{4}, \frac{-9}{4})$ mínimo

14. Máis próximos $(0, 2, 0)$ e $(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}, 0)$

Máis afastados $(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 3 - 3\sqrt{5})$ e $(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 3 + 3\sqrt{5})$

Solucións autoavaliación. 1b, 2a, 3d, 4c, 5a, 6c, 7b, 8c, 9c

Capítulo 6

Integración de funcións dunha variable real

A teoría da integración de funcións reais dunha variable real está intimamente relacionada co cálculo da área determinada pola gráfica dunha función. A integral de Riemann determina esta área aproximándoa, por exceso e por defecto, pola suma das áreas duns rectángulos que ou ben están comprendidos ou ben comprenden a área que se quere determinar. Cando estas aproximacións converxen, nun certo sentido moi intuitivo, diremos que a función é Riemann integrable. Unha primitiva dunha función f é unha función diferenciable g tal que a súa derivada coincide con f , é dicir, $g' = f$. Podemos dicir que, en certo modo, o cálculo de primitivas é a operación inversa da derivación. Como veremos neste capítulo, o cálculo de primitivas está relacionado coas funcións Riemann integrables.

6.1. Funcións Riemann-integrables

Nesta sección abordaremos o problema de calcular a área encerrada entre a gráfica dunha función f limitada nun intervalo $[a, b]$, o eixe horizontal e as rectas verticais $x = a$ e $x = b$.

6.1.1. A integral de Riemann

Definición 6.1 Un conxunto $P = \{x_0, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ é unha partición do intervalo $[a, b]$ se $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Denotaremos por $\mathcal{P}([a, b])$ o conxunto de tódalas particións do intervalo $[a, b]$.

Definición 6.2 Sexan $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función limitada e $P \in \mathcal{P}([a, b])$.

1. Chámase suma superior de Riemann de f relativa á partición P a

$$\overline{S}(P, f) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}), \text{ sendo } M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

2. Chámase *suma inferior de Riemann de f relativa á partición P* a

$$\underline{S}(P, f) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}), \text{ sendo } m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Proposición 6.3 Sexan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ unha función limitada, $P_1, P_2 \in \mathcal{P}([a, b])$, $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ e $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Verifícase que

1. $m(b-a) \leq \underline{S}(P, f) \leq \overline{S}(P, f) \leq M(b-a)$, para toda partición $P \in \mathcal{P}([a, b])$.
2. Se $P_1 \subset P_2$, entón $\underline{S}(P_1, f) \leq \underline{S}(P_2, f)$.
3. Se $P_1 \subset P_2$, entón $\overline{S}(P_1, f) \geq \overline{S}(P_2, f)$.

Definición 6.4 Sexa $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función limitada.

1. A *integral superior de Riemann de f en $[a, b]$* é $\int_a^b f = \inf\{\overline{S}(P, f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$.
2. A *integral inferior de Riemann de f en $[a, b]$* é $\int_a^b f = \sup\{\underline{S}(P, f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$.

Obviamente, verifícase que $\int_a^b f \leq \int_a^b f$.

Definición 6.5 Dise que unha función limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é *Riemann-integrable en $[a, b]$* se $\int_a^b f = \int_a^b f$. En tal caso, este valor común chámase *integral de Riemann de f en $[a, b]$* e denótase $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x) dx$.

O conxunto de tódalas funcións Riemann-integrables en $[a, b]$ denótase $\mathcal{R}([a, b])$.

Proposición 6.6 Sexa $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unha función limitada.

1. $f \in \mathcal{R}([a, b])$ se, e só se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}([a, b])$ tal que $\overline{S}(P, f) - \underline{S}(P, f) < \varepsilon$.
2. Se $c \in (a, b)$, verifícase que $f \in \mathcal{R}([a, b])$ se, e só se, $f \in \mathcal{R}([a, c])$ e $f \in \mathcal{R}([c, b])$. Neste caso, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Proposición 6.7 (Propiedades) Sexan $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcións Riemann-integrables en $[a, b]$.

1. $m(b-a) \leq \underline{S}(P, f) \leq \int_a^b f \leq \overline{S}(P, f) \leq M(b-a)$, para todo $P \in \mathcal{P}([a, b])$, sendo $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ e $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

2. $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}([a, b])$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ademais, $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.
3. Se, para todo $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ entón $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Proposición 6.8 Sexa $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Se f é monótona, entón é Riemann-integrable en $[a, b]$.
2. Se f é continua, entón é Riemann-integrable en $[a, b]$.

Teorema 6.9 (do valor medio do cálculo integral) Se $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función continua entón existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f = f(c)(b - a)$.

6.1.2. A función integral

Definición 6.10 Dada unha función Riemann-integrable, $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, chámase *función integral* de f á función $F: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Proposición 6.11 A función integral dunha función Riemann-integrable é continua.

Teorema 6.12 (fundamental do cálculo integral) Se $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función continua entón a súa función integral, F , é derivable e, ademais, $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Exemplo 6.13 1. A función $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x \ln(t^2 + 2t + 3) dt$, é a función integral da función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$. O teorema fundamental do cálculo integral asegura que $F'(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$.

A función $H(x) = \int_x^{\sin(x)} \ln(t^2 + 2t + 3) dt$ pode expresarse do seguinte xeito:

$$H(x) = \int_a^{\sin(x)} \ln(t^2 + 2t + 3) dt - \int_a^x \ln(t^2 + 2t + 3) dt = F(\sin(x)) - F(x).$$

Entón, aplicando o teorema fundamental do cálculo integral e a regra da cadea,

$$H'(x) = \cos(x)F'(\sin(x)) - F'(x) = \cos(x) \ln(\sin^2(x) + 2\sin(x) + 3) - \ln(x^2 + 2x + 3).$$

2. Por ser $F(x) = \int_a^x (t + \sin(t)) dt$ a función integral de $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin(x)$, o teorema fundamental do cálculo integral asegura que $F'(x) = x + \sin(x)$.

Se $G(x) = \int_{x^3}^{e^{x^2}} (t + \operatorname{sen} t) dt$, entón

$$G(x) = \int_a^{e^{x^2}} (t + \operatorname{sen} t) dt - \int_a^{x^3} (t + \operatorname{sen} t) dt = F(e^{x^2}) - F(x^3)$$

e, así,

$$G'(x) = 2xe^{x^2}F'(e^{x^2}) - 3x^2F'(x^3) = 2xe^{x^2}(e^{x^2} + \operatorname{sen}(e^{x^2})) - 3x^2(x^3 + \operatorname{sen}(x^3)).$$

Definición 6.14 Sexa $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Unha función $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dise que é unha primitiva da función f se g é derivable e $g'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Proposición 6.15 (Propiedades) Sexa $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Se $g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son dúas primitivas de f , entón $g_1 - g_2$ é constante.
2. Se $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é unha primitiva de f , entón $g + k$ é outra primitiva de f , para todo $k \in \mathbb{R}$.

Denótase por $\int f$ ou $\int f(x) dx$ o conxunto de tódalas funcións primitivas de f .

Teorema 6.16 (Regla de Barrow) Se $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é unha primitiva dunha función Riemann-integrable $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, entón $\int_a^b f = g(b) - g(a)$.

Exercicios

1. Sexan $f: [1, 7] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ e $P = \{1, 2, 4, 7\}$ unha partición do intervalo $[1, 7]$. Calcula $\overline{S}(f, P)$ e $\underline{S}(f, P)$.
2. Para a función $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 3$, calcula $\overline{S}(f, P)$ e $\underline{S}(f, P)$, sendo $P = \{-1, 0, \frac{3}{2}, 4\}$. Calcula tamén $\int_{-1}^4 f(x) dx$ e a función integral de f .
3. Para a función $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, calcula $\overline{S}(f, P)$ e $\underline{S}(f, P)$, sendo $P = \{1, \frac{1}{3}, 3\}$. Da dúas primitivas de f e calcula $\int_1^3 f(x) dx$ e a función integral de f .
4. Consideremos a función $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 6 & \text{se } x = 1 \\ 4x^2 & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$.

Calcula $\overline{S}(f, P)$ e $\underline{S}(f, P)$, sendo P a partición que divide $[0, 2]$ en tres partes iguais.

Representa graficamente $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)$.

5. Sexa $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, a función dada por $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \in [0, 1) \\ 6 - 2x & \text{se } x \in [1, 2) \\ 5 & \text{se } x = 2 \end{cases}$.

a) Se $P = \{0, 1, \frac{3}{2}, 2\}$, calcula e representa $\overline{S}(f, P)$ e $\underline{S}(f, P)$.

b) Calcula a función integral de f .

6. Proba que a función $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [2, 5], x \neq 3 \\ 4 & \text{se } x = 3 \end{cases}$ é Riemann-integrable en $[2, 5]$.

7. Calcula, graficamente, $\int_1^2 f(x) dx$, sendo $f(x) = 3$.

8. Calcula a función integral de $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{se } x \in [1, 3) \\ -x+5 & \text{se } x \in [3, 5] \end{cases}$.

9. Sexa $f: [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ a función dada por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

a) Calcula $\overline{S}(f, P)$ e $\underline{S}(f, P)$ para calquera partición P de $[-2, 5]$.

b) Obtén $\int_{-2}^5 f(x) dx$ e $\int_{-2}^5 f(x) dx$. É f Riemann integrable en $[-2, 5]$?

10. Proba que $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 2 & \text{se } x \in [1, 2) \\ 2x-1 & \text{se } x \in [2, 4] \end{cases}$ e $h(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \in (1, 2) \\ x-1 & \text{se } x \in [2, 4] \end{cases}$

son funcións Riemann integrables en $[0, 4]$. Obtén as funcións integrais de f e h e represétaas graficamente. Son continuas? Son derivables?

11. Calcula a derivada das seguintes funcións:

a) $H(x) = \int_x^{x^3} \sin^3(t) dt$ b) $H(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$

c) $H(x) = \int_{-\sin(x)}^{\cos(x)} e^t dt$ d) $H(x) = \int_{-x}^x t^4 dt$

e) $H(x) = \int_{\ln(2x)}^{x^2} \sin(4t) dt$ f) $H(x) = \int_0^{\sin(x^2)} \frac{t}{1-t^2} \arcsin(t) dt$

g) $H(x) = \int_{\cos x}^{x^3} \tan(t^2) dt$ h) $H(x) = \int_{\ln(x)}^{x^2} \tan(e^t) dt$

12. Calcula a derivada das seguintes funcións, sendo h e p derivables e f continua:

$$\text{a) } H(x) = \int_{h(x)}^{p(x)} f(t) dt \quad \text{b) } H(x) = \int_{h(x)}^{h(x^2)} f(t) dt \quad \text{c) } H(x) = \int_1^{h(2x)} t^2 dt$$

13. Calcula e interpreta xeometricamente os resultados:

$$\text{a) } \int_1^e \frac{1}{x} dx \quad \text{b) } \int_{-1}^1 t^2 dt \quad \text{c) } \int_{-1}^1 t^3 dt \quad \text{d) } \int_0^\pi \sin(x) dx$$

14. Calcula a área da rexión limitada polas curvas:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^2 + 2, y = -x, x = 0 \text{ e } x = 1 & \text{b) } y = 2 - x^2 \text{ e } x = y \\ \text{c) } y = 3 - y^2 \text{ e } x - y = 1 & \text{d) } y = x^2 - 6x \text{ e } y = 0 \\ \text{e) } y = \frac{4}{x}, x = 0, y = 4 \text{ e } y = 1 & \text{f) } x = y^2 \text{ e } x - y = 2 \end{array}$$

15. a) Debuxa a rexión limitada polas curvas $y = 6 - x^2$ e $x = y$ e calcula a súa área.

b) Debuxa o recinto do primeiro cadrante limitado por $y = \frac{4}{x^2}$ e $y = 5 - x^2$ e calcula a súa área.

6.2. Cálculo de primitivas

Como vimos nas seccións anteriores, as primitivas son unha ferramenta esencial para calcular integrais de funcións. Nesta sección presentamos algúns dos métodos máis sinxelos de cálculo de primitivas. En todo caso, convén sinalar que, en xeral, determinar a primitiva dunha función pode ser unha tarefa moi ardua ou incluso imposible. Así, por exemplo, sábese que non é posible determinar unha primitiva da función $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ expresada en termos de funcións elementais.

Damos, a continuación, unha listaxe coas primitivas inmediatas de funcións elementais:

$$\int k dx = kx + C$$

$$\int kx dx = \frac{kx^2}{2} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int f'(x)f(x)^n dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)^2} dx = -\frac{1}{f(x)} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, \text{ se } a > 0.$$

$$\int f'(x)a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C, \text{ se } a > 0.$$

$$\begin{aligned}
\int \cos(x) dx &= \operatorname{sen}(x) + C & \int f'(x) \cos(f(x)) dx &= \operatorname{sen}(f(x)) + C \\
\int \operatorname{sen}(x) dx &= -\cos(x) + C & \int f'(x) \operatorname{sen}(f(x)) dx &= -\cos(f(x)) + C \\
\int \tan(x) dx &= -\ln(|\cos(x)|) + C & \int f'(x) \tan(f(x)) dx &= -\ln(|\cos(f(x))|) + C \\
\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx &= \tan(x) + C & \int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx &= \tan(f(x)) + C \\
\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} dx &= -\cotan(x) + C & \int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))} dx &= -\cotan f(x) + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \operatorname{arc sen}(x) + C & \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx &= \operatorname{arc sen}(f(x)) + C \\
\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \operatorname{arccos}(x) + C & \int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx &= \operatorname{arccos}(f(x)) + C \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctan}(x) + C & \int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx &= \operatorname{arctan}(f(x)) + C
\end{aligned}$$

Veremos algúns exemplos de primitivas que resultan inmediatas cando se domina a derivación de funcións dunha variable.

Exemplo 6.17

1. $\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctan}(x^2) + C$
2. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x^3+5}} dx = \frac{1}{6} \int 6x^2(2x^3+5)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{6} \frac{3}{2} (2x^3+5)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{4} \sqrt[3]{(2x^3+5)^2} + C$
3. $\int \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}^3(2x)} dx = \frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) \operatorname{sen}^{-3}(2x) dx = -\frac{1}{4} \operatorname{sen}^{-2}(2x) + C = \frac{-1}{4 \operatorname{sen}^2(2x)} + C$
4. $\int \frac{x^2}{(x^3+4)^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2(x^3+4)^{-3} dx = -\frac{1}{6} (x^3+4)^{-2} + C = \frac{-1}{6(x^3+4)^2} + C$
5. $\int \frac{\cos(4x)}{\operatorname{sen}^2(4x)} dx = \frac{1}{4} \int 4 \cos(4x) \operatorname{sen}^{-2}(4x) dx = \frac{-1}{4} \operatorname{sen}^{-1}(4x) + C = \frac{-1}{4 \operatorname{sen}(4x)} + C$
6. $\int \left(\sqrt[3]{x+7} - \frac{1}{(x+5)^2} \right) dx = \int (x+7)^{\frac{1}{3}} dx + \frac{1}{x+5} = \frac{3}{4} (x+7)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{x+5} + C$
7. $\int \frac{\operatorname{arctan}(2x)}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \operatorname{arctan}(2x)}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{arctan}^2(2x) + C$

$$8. \int x \sqrt[3]{x^2 + 7} \, dx = \frac{1}{2} \int 2x(x^2 + 7)^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{3}{8}(x^2 + 7)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2 + 7)^4} + C$$

$$9. \int \frac{\sin(4x)}{\cos^3(4x)} \, dx = -\frac{1}{4} \int -4 \sin(4x) \cos^{-3}(4x) \, dx = \frac{1}{8} \cos^{-2}(4x) + C = \frac{1}{8 \cos^2(4x)} + C$$

Exercicios

16. Calcula as seguintes integrais:

$$a) \int \frac{7}{(x-5)^3} \, dx \quad b) \int 5x \sin(x^2) \, dx \quad c) \int \sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[6]{x}} \, dx$$

$$d) \int \frac{1}{x^5} - e^{8x} \, dx \quad e) \int \frac{x^2 + 2}{x^3 + 6x} \, dx \quad f) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$g) \int \frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)} \, dx \quad h) \int \frac{2x}{1 + x^4} \, dx \quad i) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 5}} \, dx$$

$$j) \int \frac{1}{x} \sin(\ln(x)) \, dx \quad k) \int \frac{4}{x} \ln(x^2) \, dx \quad l) \int \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln(x) \, dx$$

$$m) \int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \, dx \quad n) \int \frac{e^x}{\cos^2(e^x)} \, dx \quad o) \int \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x^2} + 5e^{-2x} \, dx$$

$$p) \int \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}} \, dx \quad q) \int \cos^3(2x) \, dx \quad r) \int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3 + 4}} \, dx$$

$$s) \int \frac{\sin(3x)}{1 + \cos(3x)} \, dx \quad t) \int \frac{\arctan(x)}{1 + x^2} \, dx$$

6.2.1. Método de cambio de variable (substitución)

Se $G(x) = F(g(x))$ para todo $x \in [a, b]$, entón $G'(x) = F'(g(x))g'(x)$. Así, se $F'(x) = f(x)$ entón $G'(x) = f(g(x))g'(x)$ e, polo tanto,

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(x)) \iff \int f(u) \, du = F(u), \text{ onde, } g(x) = u, \, du = g'(x)dx.$$

Exemplo 6.18 As seguintes primitivas están calculadas utilizando este método:

$$1. \text{ Para calcular } I = \int \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4 + 2}} \, dx \text{ facemos o cambio } x^4 + 2 = t, \text{ co cal } 4x^3 \, dx = dt.$$

$$\text{Polo tanto, } I = \int \frac{dt}{4\sqrt[5]{t}} = \frac{t^{-\frac{1}{5}+1}}{4(-\frac{1}{5}+1)} = \frac{5}{16}t^{\frac{4}{5}} + C. \text{ Desfacendo o cambio obtemos que}$$

$$I = \frac{5\sqrt[5]{(x^4 + 2)^4}}{16} + C.$$

$$2. \text{ Se } I = \int \frac{\arctan^3(x)}{1 + x^2} \, dx, \text{ co cambio de variable } \arctan(x) = t. \text{ Como } \frac{1}{1 + x^2} \, dx = dt,$$

temos que $I = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C$. Daquela $I = \frac{\arctan^4(x)}{4} + C$.

3. Para $I = \int \sin(3x) \cos^4(3x) dx$ tomamos $\cos(3x) = t$ e, polo tanto, $-3 \sin(3x) dx = dt$.

Entón, $I = \int \frac{-t^4}{3} dt = -\frac{t^5}{15} + C = -\frac{\cos^5(3x)}{15} + C$.

6.2.2. Método de integración por partes

Se $h(x) = f(x)g(x)$, a súa derivada é $h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$. Polo tanto,

$f(x)g(x) = h(x) = \int h'(x) dx = \int f(x)g'(x) dx + \int f'(x)g(x) dx$ e así

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx. \quad (6.1)$$

Esta última igualdade é coñecida como *método de integración por partes* e proporciona un método útil para o cálculo de primitivas. Habitualmente, utilízase unha notación universal na integración por partes, poñendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$, polo que $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$, resultando, da expresión (6.1), $\int u dv = uv - \int v du$.

Exemplo 6.19 As seguintes primitivas están calculadas empregando o método de integración por partes:

1. $I = \int x e^x dx$ calcúlase considerando $u = x$ e $dv = e^x dx$ (entón $du = dx$ e $v = e^x$).

Daquela, $I = x e^x - \int e^x dx = e^x(x - 1) + C$.

2. Do mesmo xeito, tomando $u = x^2 + 5$ e $dv = e^x dx$ (co cal $du = 2x dx$ e $v = e^x$), tense que $\int (x^2 + 5)e^x dx = (x^2 + 5)e^x - \int 2xe^x dx = (x^2 + 5)e^x - 2 \int xe^x dx = (x^2 + 5)e^x - 2e^x(x - 1) + C = e^x(x^2 - 2x + 7) + C$.

3. En $I = \int x \sin(x) dx$ tomamos $u = x$ e $dv = \sin(x) dx$ (así, $du = dx$ e $v = -\cos(x)$).

Entón, $I = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + C$.

4. Se $u = \ln(x)$ e $dv = dx$, tense que $du = \frac{dx}{x}$ e $v = x$. Obtemos, entón, que

$$\int \ln(x) dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln(x) - x + C = x(\ln(x) - 1) + C.$$

5. $I = \int x^2 \cos(x) dx$ pode resolverse elixindo $u = x^2$ e $dv = \cos(x) dx$. Neste caso, teríamos que $du = 2x dx$, $v = \sin(x)$ e

$$I = x^2 \operatorname{sen}(x) - 2 \int x \operatorname{sen}(x) dx = x^2 \operatorname{sen}(x) + 2x \cos(x) - 2 \operatorname{sen}(x) + C.$$

6. $I = \int \operatorname{sen}^2(x) dx$ resólvese tomando $u = \operatorname{sen}(x)$ e $dv = \operatorname{sen}(x) dx$. Agora temos, entón, que $du = \cos(x) dx$ e $v = -\cos(x)$ e, polo tanto,

$$\begin{aligned} I &= -\operatorname{sen}(x) \cos(x) + \int \cos^2(x) dx = -\operatorname{sen}(x) \cos(x) + \int (1 - \operatorname{sen}^2(x)) dx \\ &= -\operatorname{sen}(x) \cos(x) + \int 1 dx - \int \operatorname{sen}^2(x) dx = -\operatorname{sen}(x) \cos(x) + x - I. \end{aligned}$$

$$\text{Entón, } I = \frac{-\operatorname{sen}(x) \cos(x) + x}{2} + C.$$

7. Para resolver $I = \int t \operatorname{sen}(t) \cos(t) dt$ consideramos $u = t$ e $dv = \operatorname{sen}(t) \cos(t) dt$. Por ser $du = dt$ e $v = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2(t)$, obtemos:

$$I = \frac{1}{2} t \operatorname{sen}^2(t) - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}^2(t) dt = \frac{1}{2} t \operatorname{sen}^2(t) - \frac{t - \operatorname{sen}(t) \cos(t)}{4} + C$$

onde a última igualdade tense porque, como xa vimos, $\int \operatorname{sen}^2(t) dt = \frac{t - \operatorname{sen}(t) \cos(t)}{2}$.

8. $\int \cos^2(x) dx = \operatorname{sen}(x) \cos(x) + \int \operatorname{sen}^2(x) dx = \operatorname{sen}(x) \cos(x) + \int (1 - \cos^2(x)) dx$, onde $u = \cos(x)$ e $dv = \cos(x) dx$ (e, polo tanto, $du = -\operatorname{sen}(x) dx$, $v = \operatorname{sen}(x)$). Pasando $\int \cos^2(x) dx$ do segundo membro ó primeiro obtemos $\int \cos^2(x) dx = \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(x) + x}{2} + C$.

6.2.3. Integrais racionais

Imos ver agora como se resolven as integrais do tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, onde P e Q son polinomios. Podemos supoñer que o grao do polinomio P é menor có grao de Q , xa que en caso contrario dividimos $P(x)$ entre $Q(x)$, resultando $P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$, $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, e

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right) dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx,$$

onde o grao de R é menor có grao de Q .

Segundo sexan as raíces de Q , distinguiremos varios casos:

1. Raíces reais simples. É dicir, $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$, onde $a_i \in \mathbb{R}$ son distintos.

Neste caso podemos descompoñer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ da forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

de xeito que, unha vez determinadas as constantes A_i , a integral de partida é a suma de n integrais inmediatas:

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= \int \left(\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n} \right) dx \\ &= A_1 \ln(|x-a_1|) + A_2 \ln(|x-a_2|) + \cdots + A_n \ln(|x-a_n|).\end{aligned}$$

2. Raíces reais múltiples. Se $Q(x) = (x-a)^m(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$, a descomposición do cociente resulta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{B_1}{x-b_1} + \frac{B_2}{x-b_2} + \cdots + \frac{B_n}{x-b_n}$$

3. Raíces complexas simples. Se $Q(x) = (x-a)^m(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)(x^2+ax+b)$, de forma que x^2+ax+b non ten raíces reais, descompoñemos

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{B_1}{x-b_1} + \frac{B_2}{x-b_2} + \\ &\quad \cdots + \frac{B_n}{x-b_n} + \frac{Cx+D}{x^2+ax+b}\end{aligned}$$

Exemplo 6.20 Imos ver exemplos de cada un dos tres tipos de integrais racionais mencionadas:

1. Se queremos calcular $I = \int \frac{x^4 - 3x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$, como o grao do numerador é maior có do denominador, facemos a división e obtemos

$$I = \int \frac{x^4 - 3x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx = \int (x+3) dx + \int \frac{7x^2 - 9x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx.$$

A primeira das integrais é inmediata. Para resolver a segunda, o primeiro que facemos é descompor o denominador en factores: $x^3 - 3x^2 + 2x = (x-1)(x-2)x$. Polo tanto,

$$\frac{7x^2 - 9x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x} = \frac{A(x-2)x + B(x-1)x + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)x}$$

e $7x^2 - 9x + 1 = A(x-2)x + B(x-1)x + C(x-1)(x-2)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, se $x = 1$, $x = 2$ ou $x = 0$ temos que $-1 = -A$, $11 = 2B$ e $1 = 2C$. Entón

$$\int \frac{7x^2 - 9x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{\frac{11}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x} \right) dx = \int \frac{dx}{x-1} + \frac{11}{2} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x}$$

A integral pedida é $I = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln(|x-1|) + \frac{11}{2} \ln(|x-2|) + \frac{1}{2} \ln(|x|) + C$.

2. Para calcular $I = \int \frac{2x}{(x-3)^2(x-1)} dx$ consideramos a descomposición

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(x-1)(x-3)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} \\ &= \frac{A(x-3)^2 + B(x-3)(x-1) + C(x-1)}{(x-3)^2(x-1)} \end{aligned}$$

de onde, $2x = A(x-3)^2 + B(x-3)(x-1) + C(x-1) = (A+B)x^2 + (-6A-4B+C)x + (9A-C+3B)$. É dicir, $A+B=0$, $-6A-4B+C=2$ e $9A-C+3B=0$. Resolvendo o sistema temos que $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ e $C = 3$. Entón,

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-3} + 3 \int \frac{dx}{(x-3)^2} = \frac{1}{2} \ln(|x-1|) - \frac{1}{2} \ln(|x-3|) - \frac{3}{x-3} + C.$$

3. $I = \int \frac{2x+5}{x^2+2x+2} dx$ exprésase como $I = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{3}{x^2+2x+2} dx$ polo que, para o cálculo de I , resolveremos por separado cada unha desas dúas integrais. A primeira delas obténse inmediatamente:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = \ln(x^2+2x+2) + C$$

Para a segunda:

$$\int \frac{3}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{3}{(x+1)^2+1} dx = 3 \arctan(x+1) + C.$$

Entón, $I = \ln(x^2+2x+2) + 3 \arctan(x+1) + C$.

4. $I = \int \frac{x-1}{x^2+3} dx$ pode porse do xeito $I = \int \frac{x}{x^2+3} dx - \int \frac{1}{x^2+3} dx$. A primeira das integrais é inmediata:

$$\int \frac{x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+3) + C.$$

Como $\int \frac{1}{x^2+3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2+1}$, tomando $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$ tense que $\sqrt{3} dt = dx$ e

$$\int \frac{1}{x^2+3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\sqrt{3} dt}{t^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan(t) + C = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Polo tanto, $I = \frac{1}{2} \ln(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$.

5. Dado que $x^2 + x + 2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$, a integral $I = \int \frac{1}{x^2 + x + 2} dx$ obtense así:

$$I = \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = \int \frac{dx}{\frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{7}{4}} = 4 \int \frac{dx}{(2x+1)^2 + 7} = \frac{4}{7} \int \frac{dx}{(\frac{2x+1}{\sqrt{7}})^2 + 1}$$

e, mediante o cambio de variable $t = \frac{2x+1}{\sqrt{7}}$, resulta $I = \frac{2\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C$.

6. Para o cálculo de $I = \int \frac{2x+1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$, observamos que o denominador pode descomporse como $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$. Entón

$$\frac{2x+1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

e $2x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = (A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C)$. Polo tanto, $A+B=0$, $C-B=2$, $A-C=1$. Resolvendo o sistema temos $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ e a integral pedida resulta

$$I = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{3}{2} \int \frac{x dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{3}{2} \ln(|x-1|) - \frac{3}{4} \ln(x^2+1) + \frac{\arctan(x)}{2} + C.$$

7. Por ser $\int \frac{x+3}{x^2+4x+13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+4x+13} dx$, temos que

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2+4x+13} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+4x+13} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4+2}{x^2+4x+13} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+13} dx + \int \frac{1}{(x+2)^2+9} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+13) + \frac{1}{9} \int \frac{1}{(\frac{x+2}{3})^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+13) + \frac{3}{9} \int \frac{\frac{1}{3}}{(\frac{x+2}{3})^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+13) + \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) + C. \end{aligned}$$

8. Para o cálculo de $I = \int \frac{x+3}{x^2+2x+5} dx$ procedemos do seguinte xeito:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2+4}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) + 2 \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) + \int \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x+1}{2})^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) + \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

9. Para obter $\int \frac{x^3 + 9x^2 + 34x + 27}{x^2 + 8x + 25} dx$, facemos a división da función integrando e temos que

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 5x^2 + 8x + 15}{x^2 + 8x + 25} dx &= \int \left(x + 1 + \frac{x + 2}{x^2 + 8x + 25} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \int \frac{2x + 4 + 4 - 4}{x^2 + 8x + 25} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 8x + 25) - 2 \int \frac{1}{(x + 4)^2 + 9} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 8x + 25) - \frac{2}{3} \int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x+4}{3}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) - \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{x+4}{3}\right) + C. \end{aligned}$$

10. Para calcular $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 6x}{x^2 - 2x + 5} dx$, facemos a división da función integrando e temos que

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x^2 + 6x}{x^2 - 2x + 5} dx &= \int \left(x + \frac{x}{x^2 - 2x + 5} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2 + 2}{x^2 - 2x + 5} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) + \int \frac{1}{(x - 1)^2 + 4} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) + \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

6.2.4. Integrais reducibles a racionais

Nas integrais da forma $\int R(\sin(x), \cos(x)) dx$, onde $R(\sin(x), \cos(x))$ é unha función racional en $\sin x$ e $\cos x$, pode pasarse a unha integral $\int r(t) dt$ (onde $r(t)$ é unha función racional en t) sen máis que realizar o cambio de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Así, a integral $\int r(t) dt$ pode resolverse por un dos métodos anteriores.

Se $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$, como $\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = t$ temos que $\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = t^2$, logo $\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} = t^2$, de onde

se segue que $1 - \cos(x) = t^2 + t^2 \cos(x)$, $(1 + t^2) \cos(x) = 1 - t^2$ e, así, $\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$.

Ademais, $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2 = \frac{(1 + t^2)^2 - (1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^2} = \frac{4t^2}{(1 + t^2)^2}$.

Entón, $\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$.

Por outro lado, $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan(t) \Rightarrow \frac{1}{2} dx = \frac{1}{1+t^2} dt \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

$$\boxed{\text{Se } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \text{ entón } \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt}$$

Nalgúns casos a forma máis fácil de calcular a primitiva é realizando o cambio $\tan(x) = t$, pois $\tan(x) = t \Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = t \Rightarrow \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = t^2 \Leftrightarrow \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = t^2 \Leftrightarrow 1-\cos^2(x) = t^2 \cos^2(x) \Leftrightarrow (1+t^2)\cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$.

Por outro lado, $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$.

Finalmente, se $\tan(x) = t$, entón $x = \arctan(t)$ e $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$.

$$\boxed{\text{Se } t = \tan(x) \text{ entón } \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}, dx = \frac{1}{1+t^2} dt}$$

Como norma práctica, cando a integral $\int R(\sin(x), \cos(x)) dx$ é impar, tanto en $\sin(x)$ como en $\cos(x)$, aconséllase realizar o cambio $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$; se é par en $\sin(x)$ e $\cos(x)$, o cambio recomendado é $\tan(x) = t$; se é impar en $\sin(x)$ e par en $\cos(x)$, debe realizarse o cambio $\cos(x) = t$; mentres que se é impar en $\cos(x)$ e par en $\sin(x)$, o cambio máis adecuado é $\sin(x) = t$.

Exemplo 6.21 Resolvemos, a continuación, algunhas integrais reducibles a racionais empregando o cambio máis apropiado:

1. Para calcular $I = \int \frac{dx}{\sin(x)}$ utilizamos o cambio $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$:

$$I = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln(|t|) + C = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + C.$$

2. Para calcular $I = \int \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x) + \sin(x)} dx$, facemos o cambio $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$ e

$$I = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2t}{(1+t)(1+t^2)} dt$$

que, por ser unha integral racional, resolvemos do seguinte xeito:

$$\frac{2t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{A(t^2+1) + (Bt+C)(t+1)}{(1+t)(1+t^2)}$$

e $2t = A(t^2+1) + (Bt+C)(t+1)$, resultando $A = -1$, $B = 1$ e $C = 1$. Así pois,

$$I = - \int \frac{dt}{(1+t)} + \int \frac{t dt}{(1+t^2)} + \int \frac{dt}{(1+t^2)} = -\ln(|t+1|) + \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + \arctan(t) + C$$

e, desfacendo o cambio, $I = -\ln(|\tan(\frac{x}{2}) + 1|) + \frac{1}{2} \ln(\tan^2(\frac{x}{2}) + 1) + \frac{x}{2} + C$.

3. Para resolver a integral $I = \int \frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)} dx$ é máis práctico facer o cambio $\sin(x) = t$, xa que $\cos(x) dx = dt$ e

$$I = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) + C = \arctan(\sin(x)) + C.$$

4. $I = \int \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x) + \cos^2(x)} dx$ calcúlase empregando o cambio de variable $\cos(x) = t$, sendo, neste caso, $-\sin(x) dx = dt$ e resultando:

$$I = \int \frac{-dt}{2+t+t^2} = - \int \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} = -\frac{2\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right) + C$$

Desfacendo o cambio, $I = -\frac{2\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{2\cos(x)+1}{\sqrt{7}}\right) + C$.

5. Resolveremos $I = \int \frac{dx}{1 + \sin^2(x)}$ empregando o cambio $\tan(x) = t$:

$$I = \int \frac{1}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \int \frac{dt}{(\sqrt{2}t)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan(x)) + C$$

6. Calculamos $I = \int \frac{\cos^2(x)}{1 + \sin^2(x)} dx$ empregando, tamén, o cambio $\tan(x) = t$:

$$I = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{(2t^2+1)(1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{(\sqrt{2}t)^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}.$$

Desfacendo o cambio, temos que $I = \frac{2}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan(x)) - x + C$.

Exercicios

17. Calcula as seguintes integrais:

1) $\int \tan(2x) dx$

2) $\int \cos(3x) e^{2x} dx$

3) $\int \arcsen(x) dx$

5) $\int x \arctan(x) dx$

7) $\int x^2 e^x dx$

9) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

11) $\int \frac{dx}{\cos^2(7x)}$

13) $\int \frac{\ln(1+x)}{1+x} dx$

15) $\int \frac{dx}{x^2+2x+6}$

17) $\int \frac{x+5}{x^2-4x+3} dx$

19) $\int \frac{e^x + 3e^{-x}}{e^{2x} + 1} dx$

21) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4} dx$

23) $\int \frac{\sen^3(x)}{\cos^4(x)} dx$

25) $\int \frac{1}{1+\cos^2(x)} dx$

27) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$

29) $\int \frac{\sen^2(x)}{\cos^6(x)} dx$

31) $\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

33) $\int \frac{6}{(x-1)(x^2-2x+3)} dx$

35) $\int \frac{\sen(x)}{\cos^2(x) - 3\cos(x) + 2} dx$

37) $\int \frac{1+\sen(3x)}{\cos^2(3x)} dx$

4) $\int x^2 \ln(2x) dx$

6) $\int \ln(x^2+1) dx$

8) $\int \arctan(\sqrt{x}) dx$

10) $\int \frac{2x^3-5x^2+2x+3}{(x-2)^2(x^2-x+1)} dx$

12) $\int \frac{\cos(x)}{\sen^2(x)} dx$

14) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} + \sen(x) \right) dx$

16) $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$

18) $\int \frac{x^4-3x^3-1}{2x^2+3x+1} dx$

20) $\int \frac{x^3+1}{x^2+x+1} dx$

22) $\int \frac{4x^2+x+4}{x^3-1} dx$

24) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$

26) $\int \frac{x^2-9x+17}{(x-2)^2(x+1)} dx$

28) $\int \frac{\cos(x)}{\sen^3(x) + 2\cos^2(x)\sen(x)} dx$

30) $\int \frac{dx}{2\sen(x) - \cos(x) + 1}$

32) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}$

34) $\int \frac{x^2-9x+17}{(x-2)^2(x+1)} dx$

36) $\int \frac{x^2 e^{\sqrt{x^3}}}{\sqrt{x^3}} dx$

38) $\int e^x \sen(3e^x) dx$

$$39) \int \frac{x}{\cos^2(x)} dx$$

$$40) \int \frac{dx}{\sin(x) \cos(x)}$$

$$41) \int \frac{\sin x}{(3 + \sin^2 x) \cos x} dx$$

$$42) \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

$$43) \int 2\sqrt{x} \ln(x) dx$$

$$44) \int \frac{\arctan(x)}{1 + x^2} dx$$

Exercicios resoltos

As seguintes primitivas non están calculadas con todo o detalle, só indicamos como se resolverían.

$$1. \int \tan^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx - \int 1 dx = \tan(x) - x + C$$

$$2. \int \frac{\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{1}{10}} + x^{-\frac{1}{3}}) dx = \frac{10}{11} x^{\frac{11}{10}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} dx = \frac{1}{3} (\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}) + C$$

$$4. \int \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{e^{4x}} dx = \int (e^{-3x} + e^{-2x} + e^{-x}) dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} - \frac{1}{2} e^{-2x} - e^{-x} + C$$

$$5. \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$6. \int \frac{1}{1 + \sin(x)} dx = \int \frac{1 - \sin(x)}{1 - \sin^2(x)} dx = \int \frac{1 - \sin(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx - \int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx.$$

$$\text{Entón } \int \frac{dx}{1 + \sin(x)} = \tan(x) - \frac{1}{\cos x} + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = 2 \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = 2 \arcsin(\sqrt{x}) + C.$$

$$\text{Cambio utilizado: } \begin{cases} \sqrt{x} = t, & x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{cases}.$$

$$8. \int e^x \sin(e^x) dx = \int \sin(t) dt = -\cos(e^x) + C. \text{ Cambio utilizado: } \begin{cases} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{cases}.$$

$$9. \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int t dt = \frac{1}{2} \ln^2(x) + C. \text{ Cambio utilizado: } \begin{cases} \ln(x) = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{cases}.$$

$$10. \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx = \int \frac{1}{t^2 + 2t + 1} dt = \int \frac{1}{(t+1)^2} dt = \frac{-1}{e^x + 1} + C.$$

$$\text{Cambio utilizado: } \begin{cases} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{cases}.$$

$$11. \int e^{e^x} e^x dx = \int e^t dt = e^{e^x} + C. \text{ Cambio utilizado: } \begin{cases} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{cases}.$$

$$12. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{2-t}} dt \text{ (ver ejercicio 7).}$$

$$\text{Cambio utilizado: } \begin{cases} 1+x^2 = t, \quad 1-x^2 = 2-t \\ 2x dx = dt \end{cases}.$$

$$13. \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^t dt = 2e^{\sqrt{x}} + C. \text{ Cambio utilizado: } \begin{cases} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \end{cases}.$$

$$14. \int x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C. \text{ Cambio utilizado: } \begin{cases} 1-x^2 = t \\ -2x dx = dt \end{cases}.$$

$$15. \int \ln(\cos x) \tan(x) dx = - \int t dt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{1}{2} \ln^2(\cos(x)) + C$$

$$\text{Cambio utilizado: } \begin{cases} \ln(\cos(x)) = t \\ -\tan(x) dx = dt \end{cases}.$$

$$16. \int \frac{\ln(\ln(x))}{x \ln(x)} dx = \int \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln(\ln(x)))^2 + C. \text{ (ver ejercicio 9) Cambio utilizado: } \begin{cases} \ln(x) = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{cases}.$$

$$17. \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int \ln(t) dt. \text{ Cambio utilizado: } \begin{cases} \ln(x) = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{cases}.$$

$$18. \int x \ln^2(x) dx = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \int x \ln(x) dx. \text{ Por partes, con } \begin{cases} u = \ln^2(x) & du = \frac{2 \ln(x)}{x} dx \\ dv = x dx & v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$19. \int \sqrt{x} \ln(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln(x) - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx. \text{ Por partes, sendo } \begin{cases} u = \ln(x) & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^{\frac{1}{2}} dx & v = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \end{cases}.$$

$$20. \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$\text{Integrando dúas veces por partes, tomando } \begin{cases} u = \cos(\ln x) & du = -\frac{\sin(\ln x)}{x} dx \\ dv = dx & v = x \end{cases} \text{ a primeira}$$

$$\text{vez e } \begin{cases} u = \sin(\ln x) & du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \\ dv = dx & v = x \end{cases} \text{ a segunda.}$$

$$21. \int \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} dx = \int (2 - \frac{2}{t}) dt = 2t - 2 \ln(|t|) + C = 2 + 2\sqrt{x+1} - 2 \ln(1 + \sqrt{x+1}) + C$$

Nesta ocasión, $\begin{cases} 1 + \sqrt{x+1} = t, & \sqrt{x+1} = t - 1 & x = (t-1)^2 - 1 \\ dx = 2(t-1)dt \end{cases}$. Tamén se pode facer multiplicando e dividindo a función do integrando por $1 - \sqrt{x+1}$.

$$22. \int \frac{1}{1 + e^x} dx = \int \frac{1}{t(t-1)} dt = x - \ln(e^x + 1) + C. \text{ Onde } \begin{cases} 1 + e^x = t, & e^x = t - 1 \\ e^x dx = dt & dx = \frac{dt}{t-1} \end{cases}.$$

$$23. \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} dx = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = \int \frac{6t^3}{t+1} dt = \int 6t^2 - 6t + 6 dt - \int \frac{6}{t+1} dt = 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6 \ln(x^{\frac{1}{6}} + 1) + C, \text{ sendo } \begin{cases} x^{\frac{1}{6}} = t, & x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{cases}.$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{2}{t^2-1} dt, \text{ con } \begin{cases} \sqrt{1+e^x} = t, & e^x = t^2 - 1 \\ e^x dx = 2t dt & dx = \frac{2t}{t^2-1} \end{cases}.$$

$$25. \int \frac{1}{2 + \tan(x)} dx = \int \frac{1}{(1+t^2)(2+t)} dt, \text{ empregando } \begin{cases} \tan(x) = t, & \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{cases}.$$

$$26. \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} = \int 4(t^2-1) dt, \text{ tomando } \begin{cases} \sqrt{\sqrt{x}+1} = t, & x = (t^2-1)^2 \\ dx = 4t(t^2-1) dt \end{cases}.$$

$$27. \int \frac{4^x+1}{2^x+1} dx = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{t^2+1}{t(t+1)} dt, \text{ con } \begin{cases} 2^x = t, & 4^x = t^2 \\ \ln(t) = x \ln(2), & dx = \frac{1}{t \ln(2)} dt \end{cases}.$$

$$28. \int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx = -2 \int \frac{\sin^2 t \cos t}{1-\cos t} dt = -2 \int \frac{(1-\cos^2 t) \cos t}{1-\cos t} dt = -2 \int \cos t (1+\cos t) dt, \text{ utilizando } \begin{cases} \cos^2(t) = x, \\ dx = -2 \cos(t) \sin(t) dt \end{cases}.$$

$$29. \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{x^2} dx = 4 \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt, \text{ sendo } \begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t, & x = \frac{t^2+1}{1-t^2} \\ dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt \end{cases}.$$

$$30. \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{-2x^2}{(x^2+1)^2} dx = \arctan x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\arctan(x) + \frac{x}{x^2+1} \right) + C.$$

Por partes, con $\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} dx & v = \frac{1}{x^2+1} \end{cases}$.

$$31. \int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^3} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{2x^2}{(x^2+1)^3} dx.$$

A primeira destas integrais está resolta no exercicio 30. Para obter a segunda, utilizamos o método integración por partes, tomando $\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = \frac{2x}{(x^2+1)^3} dx & v = -\frac{1}{2(x^2+1)^2} \end{cases}$. Entón:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \frac{3}{8} \left(\arctan(x) + \frac{x}{x^2+1} \right) + \frac{1}{4} \frac{x}{(x^2+1)^2} + C.$$

32. $\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t} dt = \frac{1}{2} \ln(|1 - \sin^2(x)|) + C$. Empregouse o cambio $\begin{cases} \sin(x) = t \\ \cos(x) dx = dt \end{cases}$. Tamén se podería ter utilizado o cambio $\tan(\frac{x}{2}) = t$.

33. $\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{1 - \cos^2(x)} dx = \int \frac{-1/2}{1-t^2} dt = -\ln(|1 - \sin^2(x)|) + C$. Empregouse o cambio de variable $\begin{cases} \cos(x) = t \\ -\sin(x) dx = dt \end{cases}$. Tamén se podería ter utilizado o cambio $\tan(\frac{x}{2}) = t$.

34. $\int \sec^3(x) dx = \sec(x) \tan(x) - \int \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^3(x)} dx = \sec(x) \tan(x) - \int \sec^3(x) dx + \int \sec(x) dx$. Entón, utilizando o exercicio 32, a integral buscada é:

$$\int \sec^3(x) dx = \frac{1}{2} (\sec(x) \tan(x) + \ln(|1 - \sin^2(x)|)) + C.$$

Ao comezo do exercicio, na primeira igualdade, integramos por partes, sendo as partes tomadas $\begin{cases} u = \sec(x) & du = \sec(x) \tan(x) dx \\ dv = \sec^2(x) dx & v = \tan(x) \end{cases}$.

35. $\int \frac{x \arctan(x)}{(x^2+1)^3} dx = -\frac{\arctan(x)}{4(x^2+1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. Usamos o método de integración por partes, con $\begin{cases} u = \arctan(x) & du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = \frac{x}{(x^2+1)^3} dx & v = -\frac{1}{4(x^2+1)^2} \end{cases}$.

A integral que falta por resolver, $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$, está calculada no exercicio 31.

36. $\int \ln(\sqrt{1+x^2}) dx = x \ln(\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = x \ln(\sqrt{1+x^2}) - x + \arctan(x) + C$

Por partes, con $\begin{cases} u = \ln \sqrt{1+x^2} & du = \frac{x}{1+x^2} dx \\ dv = dx & v = x \end{cases}$.

37. $\int x \ln(\sqrt{1+x^2}) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + C$

Por partes, con $\begin{cases} u = \ln(\sqrt{1+x^2}) & du = \frac{x}{1+x^2} dx \\ dv = x dx & v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

$$38. \int \arcsen(\sqrt{x})dx = 2 \int t \sen(t) \cos(t)dt = (x - \frac{1}{2}) \arcsen \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x(1-x)} + C. \text{ Cambio}$$

$$\text{empregado: } \begin{cases} \sqrt{x} = \sen(t), & x = \sen^2(t) \\ dx = 2 \sen(t) \cos(t)dt \end{cases}.$$

$$39. \int \frac{x}{1 + \sen(x)} dx = x(\tan(x) - \sec(x)) - \int (\tan(x) - \sec(x))dx \stackrel{(32)}{=} x(\tan(x) - \sec(x)) + \ln(|\cos(x)|) + \ln(|1 - \sen^2(x)|) + C$$

$$\text{Por partes, con } \begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = \frac{1}{1 + \sen x} & (\text{ver exerc. 6}) \quad v = \tan(x) - \sec(x) \end{cases}.$$

$$40. \int \sqrt{\tan(x)} dx = \int \frac{2t^2}{1+t^4} dt. \text{ Utilizamos } \begin{cases} \tan(x) = t^2, & x = \arctan(t^2) \\ dx = \frac{2t}{1+t^4} \end{cases}.$$

$$41. \int \frac{2x^2}{x^4 + 1} dx = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx - \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$$

$$\text{Usamos } \begin{cases} \frac{2x^2}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} \\ A = -C = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad B = D = 0 \end{cases}.$$

$$42. \int \ln(a^2 + x^2) dx = x \ln(a^2 + x^2) - \int \frac{2x^2}{a^2 + x^2} dx = x \ln(a^2 + x^2) - 2x + 2a \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\text{Por partes, tomando } \begin{cases} u = \ln(a^2 + x^2) & du = \frac{2x}{a^2 + x^2} \\ dv = dx & v = x \end{cases}.$$

$$43. \int \frac{1 + \cos(x)}{\sen^2(x)} dx = \int \frac{1}{\sen^2(x)} dx + \int \frac{\cos x}{\sen^2 x} dx = -\cotan(x) - \frac{1}{\sen(x)} + C$$

$$44. \int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx = - \int \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = -\sqrt{4-x^2} + \arcsen \frac{x}{2} + C$$

$$45. \int x \arctan(x) dx = \frac{1}{2} (x^2 \arctan(x) - x + \arctan(x)) + C$$

$$\text{Por partes, tomando } \begin{cases} u = \arctan(x) & du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x dx & v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$46. \int \sen^3(x) dx = \frac{1}{3} \cos^3(x) - \cos(x) + C$$

$$\text{Aplicamos partes, con } \begin{cases} u = \sen^2(x) & du = 2 \sen(x) \cos(x) dx \\ dv = \sen(x) dx & v = -\cos(x) \end{cases}.$$

Tamén pode facerse por substitución, pois $\int \sen^3(x) dx = \int \sen(x)(1 - \cos^2(x)) dx$. Agora, o cambio de variable é $\cos(x) = t$.

$$47. \int \frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \frac{\sin(x)(1 - \cos^2(x))}{\cos^2 x} dx = \int \sec(x) \tan(x) dx + \cos(x) = \sec(x) + \cos(x) + C. \text{ También se puede hacer mediante el cambio de variable } \cos(x) = t.$$

$$48. \int x^2 \arctan x dx = \frac{x^3 \arctan x}{3} - \frac{1}{6} (x^2 - \ln(1 + x^2)) + C$$

Por partes, con $\begin{cases} u = \arctan x & du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x^2 dx & v = \frac{x^3}{3} \end{cases}.$

$$49. \int \sec^3(x) \tan(x) dx = \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3 \cos^3(x)} + C$$

$$50. \int x \tan^2 x dx = x \tan x - \frac{x^2}{2} + \ln(|\cos(x)|) + C$$

Por partes, con $\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx & v = \tan x - x \end{cases}.$

$$51. \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{a^3} \int \frac{dt}{(1 + t^2)^2}, \text{ con } \begin{cases} x = at \\ dx = a dt \end{cases}.$$

$$52. \int \sqrt{1 - \sin(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt = 2\sqrt{1 + \sin(x)} + C.$$

Con cambio $\begin{cases} \sin(x) = t \\ \cos(x) dx = dt, dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$

$$53. \int \arctan(\sqrt{x}) dx = \int 2t \arctan(t) dt, \text{ con } \begin{cases} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{cases}.$$

$$54. \int \sin(\sqrt{x+1}) dx = \int 2t \sin(t) dt, \text{ con } \begin{cases} x+1 = t^2 \\ dx = 2t dt \end{cases}.$$

$$55. \int \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx = x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = x \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \sqrt{x^2 - 1} + C$$

Por partes, con $\begin{cases} u = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) & du = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \\ dv = dx & v = x \end{cases}.$

$$56. \int \ln(x + \sqrt{x}) dx = \int 2 \ln(t^2 + t) dt = 2 \int \ln(t) dt + 2 \int \ln(t+1) dt$$

Cambio empleado: $\begin{cases} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{cases}.$

$$57. \int \frac{1}{x + x^{\frac{3}{5}}} dx = \int \frac{5t^4}{t^5 + t^3} dt = \frac{5}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 1} dt = \frac{5}{2} \ln(x^{\frac{2}{5}} + 1) + C$$

Cambio empleado: $\begin{cases} x = t^5, x^{\frac{3}{5}} = t^3 \\ dx = 5t^4 dt \end{cases}.$

6.3. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Unha primitiva de $f(x) = \frac{4}{x+5}$ é

a) $g(x) = -\frac{4}{(x+5)^2}$ b) $g(x) = \ln(x+5)$

c) $g(x) = 4 \ln(x+5)$ d) $g(x) = \frac{1}{4} \ln(x+5)$

2. Se $f(x) = \int \frac{x}{x^2+5} dx$, entón

a) $f(x) = \ln(x^2+5) + C$ b) $f(x) = 2 \ln(x^2+5) + C$

c) $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+5) + C$ d) $f(x) = \ln x^2 + 5$

3. Se $g(x) = \int_1^{2x} t^2 dt$, entón

a) $g'(x) = 4x^2$ b) $g'(x) = 4x$ c) $g'(x) = 4x^2 - 1$ d) $g'(x) = 8x^2 - 1$

4. Se $g(x) = \int_0^{x^2} \sin(t) dt$, entón

a) $g'(x) = 2x \sin(x^2)$ b) $g'(x) = \sin(2x)$ c) $g'(x) = 2x \cos(x^2)$ d) $g'(x) = \sin(x^2)$

5. Se $f(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} \sin(t) dt$, entón

a) $f'(x) = -2x \cos(x^2+1) + 2x \cos(x^2)$ b) $f'(x) = \sin(x^2+1) - \sin(x^2)$

c) $f'(x) = 2x \sin(x^2+1) - 2x \sin(x^2)$ d) $f'(x) = -\cos(x^2+1) - \cos(x^2)$

6. Sexa $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. A función integral de f vén dada por:

a) $F(x) = \int_1^x t dt = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$, para todo $x \in [1, 2]$.

b) $F(x) = \int_1^2 t dt = \frac{3}{2}$.

c) $F(x) = \int_1^x t dt = \frac{x^2}{2}$, para todo $x \in [1, 2]$.

d) $F(x) = \int_1^x t dt = x - 1$, para todo $x \in [1, 2]$.

7. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función derivable, cal das seguintes afirmacións é FALSA?

a) Se $\int f(x) dx = \ln x$, entón $f(x) = \frac{1}{x}$

b) Se $\int f(x) dx = e^x$, entón $f(x) = \ln x$

c) f é continua en $\mathbb{R}$.

d) Se f ten un máximo en x_o , entón $f'(x_o) = 0$

8. Se $F(x) = \int_1^x t \sin(2t) dt$, entón

a) $F'(x) = \sin(2t) + 2t \cos(2t)$ b) $F'(x) = x \sin(2x) - \sin(2)$

c) $F'(x) = \sin(2x) + 2x \cos(2x)$ d) $F'(x) = x \sin(2x)$

6.4. Integración de funcións dunha variable real con MATLAB

Empregaremos `int(f,v)` para calcular a integral indefinida da expresión simbólica f respecto da variable v .

Exemplo 6.22 Unha primitiva para $f(x) = \sin^2(x)$ obtense do seguinte xeito:

```
>> int(sin(x)^2,x)
```

MATLAB devólvenos o resultado

```
>> x/2 - sin(2*x)/4
```

E podemos concluír que $\int \sin^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$

Para o cálculo da integral definida da expresión simbólica f respecto da variable v en $[a, b]$ utilizaremos `int(f,v,a,b)`.

Exemplo 6.23 A integral $I = \int_{-1}^1 \sin(x+3) dx$ calcúlase da seguinte maneira:

```
>> int(sin(x+3),x,-1,1)
```

O seu valor é, pois, $\cos(2) - \cos(4)$.

6.5. Solucións dos exercicios propostos

$$1. \overline{S}(f, p) = 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 31$$

$$\underline{S}(f, p) = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 17$$

$$11. a) 3x^2 \operatorname{sen}^3(x^3) - \operatorname{sen}^3(x)$$

$$11. b) 2x e^{x^4}$$

$$11. c) -\operatorname{sen}(x) e^{\cos(x)} + \cos(x) e^{-\operatorname{sen}(x)}$$

$$11. d) 2x^4, \text{ h) } 2x \tan(e^{x^2}) - \frac{1}{x} \tan(x)$$

$$14. a) \frac{17}{6}$$

$$14. b) \frac{9}{2}$$

$$14. c) \frac{9}{2}$$

$$14. d) 36$$

$$14. e) \frac{15}{8}$$

$$14. f) \frac{9}{2}$$

$$15. a) \frac{125}{6}$$

$$15. b) \frac{4}{3}$$

$$17. 1) -\frac{1}{2} \ln |\cos(2x)| + C$$

$$17. 3) x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$17. 5) \frac{1+x^2}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + C$$

$$17. 7) (2-2x+x^2) e^x + C$$

$$17. 9) \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(x) + C$$

$$17. 11) \frac{1}{7} \tan(7x) + C$$

$$17. 13) \frac{1}{2} \ln^2 |1+x| + C$$

$$17. 15) \frac{\sqrt{5}}{5} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$17. 17) 4 \ln(|x-3|) - 3 \ln(|x-1|) + C$$

$$17. 19) -2 \arctan(e^x) - 3e^{-x} + C$$

$$17. 21) x - \frac{8}{3} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3} \arctan(x) + C$$

$$17. 23) \frac{1-3 \cos^2(x)}{3 \cos^3(x)} + C$$

$$17. 25) \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \tan(x)\right) + C$$

$$17. 27) (2-x)^{-1} - \arctan(x-2) + C$$

$$17. 29) \frac{\operatorname{sen}^3(x)(3+2 \cos^2(x))}{15 \cos^5(x)} + C$$

$$17. 31) 2 \arcsin(x/2) - \sqrt{4-x^2} + C$$

$$17. 33) 3 \ln(|x-1|) - \frac{3}{2} \ln(|x^2-2x+3|) + C$$

$$17. 35) \ln \left| \frac{\cos(x)-1}{\cos(x)-2} \right| + C$$

$$17. 37) \frac{\operatorname{sen}(3x)+1}{3 \cos(3x)} + C$$

$$17. 39) \ln |\cos(x)| + x \tan(x) + C$$

$$17. 41) -\frac{1}{4} \ln |\cos(x)| + \frac{1}{8} \ln |\cos(x)-2| + \frac{1}{8} \ln |\cos(x)+2| + C$$

$$17. 43) \frac{2}{3} x^{3/2} \ln |x| - \frac{4}{9} x^{3/2} + C$$

Solucións autoavaliación. 1c, 2c, 3a, 4a, 5c, 6a, 7b, 8d

Capítulo 7

Integrais de liña

7.1. Ecuacións de curvas

Antes de entrar a estudar as integrais de liña, imos recordar as ecuacións cartesianas dalgunhas curvas no plano e de superficies no espazo que serán utilizadas con moita frecuencia nos capítulos de integración.

A ecuación da curva máis sinxela no plano é a da recta. A forma máis fácil de interpretar os seus parámetros é poñela, sempre que sexa posible, baixo a forma $y = ax + b$, onde $a \in \mathbb{R}$ é a pendente da recta ou, o que é o mesmo, a tanxente do ángulo que forma a recta coa parte positiva do eixe de abscisas, e $b \in \mathbb{R}$ é a ordenada na orixe ou, equivalentemente, o valor da variable y cando x vale cero, $y(0) = b$ (Figura 7.1). Deste xeito, se $a > 0$ entón a gráfica da recta é ascendente e se $a < 0$ é descendente. Se $a = 0$, $y = b$ é a ecuación dunha recta horizontal a unha distancia b do eixe de abscisas, e $x = k$ é a ecuación dunha recta vertical a unha distancia k do eixe de ordenadas.

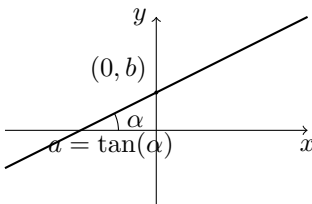


Figura 7.1: Elementos que definen unha recta no plano

As funcións cadráticas da forma $y = ax^2 + bx + c$ representan parábolas co eixe de simetría vertical. É ben sabido que as raíces do polinomio $y = ax^2 + bx + c$ son $\bar{x}_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $\bar{x}_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Cando $b^2 > 4ac$ estas raíces son reais e distintas e indican os puntos de corte da parábola co eixe de abscisas. Se $b^2 = 4ac$, temos unha única raíz de multiplicidade dous e a parábola é tanxente ó eixe de abscisas no punto $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. No caso en que $b^2 < 4ac$, as raíces son complexas,

e a parábola non corta ó eixe de abscisas. Ademais, se $a > 0$ indica que as ramas da parábola crecen indefinidamente cando x tende a $\pm\infty$. Analogamente, se $a < 0$ indica que as ramas da parábola decrecen indefinidamente cando x tende a $\pm\infty$ (véxase Figura 7.2).

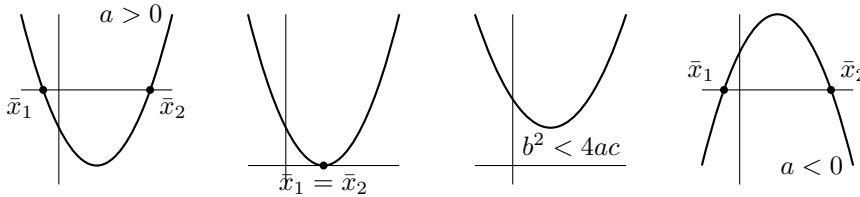


Figura 7.2: Parábolas segundo os parámetros

A ecuación da circunferencia de centro (x_o, y_o) e raio r é $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$. Se desenvolvemos os cadrados desta ecuación e reordenamos temos,

$$x^2 + y^2 - 2x_o x - 2y_o y + x_o^2 + y_o^2 - r^2 = 0. \quad (7.1)$$

Así, se temos a ecuación dunha circunferencia baixo esta forma, $x^2 + y^2 + lx + my + p = 0$, sempre podemos determinar o centro e raio, igualando os coeficientes das variables respectivas e despxando,

$$x_o = -\frac{l}{2}, \quad y_o = -\frac{m}{2}, \quad r = \sqrt{x_o^2 + y_o^2 - p}.$$

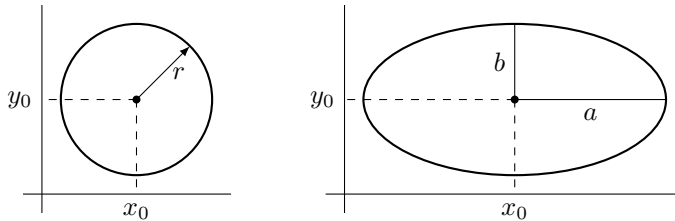


Figura 7.3: Elementos que definen unha circunferencia e unha elipse

Unha ecuación do tipo (7.1) pero con coeficientes dos sumandos de segundo grao distintos representa unha elipse,

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1,$$

onde (x_o, y_o) é o centro da elipse e a, b son os semieixes correspondentes ás variables x e y .

No caso de tres variables, a superficie máis simple é o plano que ten como ecuación $ax + by + cz = d$. Os puntos de corte do plano cos eixes son $(\frac{d}{a}, 0, 0)$, $(0, \frac{d}{b}, 0)$, $(0, 0, \frac{d}{c})$.

A esfera de centro (x_o, y_o, z_o) e raio r ten como ecuación,

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2.$$

Realizando observacións análogas ás da circunferencia, se temos a ecuación da esfera baixo a forma $x^2 + y^2 + z^2 + lx + my + nz + p = 0$, podemos determinar o centro e raio, igualando os coeficientes das variables respectivas e despexando,

$$x_o = -\frac{l}{2}, \quad y_o = -\frac{m}{2}, \quad z_o = -\frac{n}{2}, \quad r = \sqrt{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - p}.$$

Do mesmo xeito podemos facer para a ecuación do elipsoide de centro (x_o, y_o, z_o) e semieixes a, b, c ,

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} + \frac{(z - z_o)^2}{c^2} = 1.$$

A ecuación dun cilindro de raio r e con eixe a recta, $x = x_o, y = y_o$, que é paralela ó eixe z , é da forma

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2.$$

Consideracións análogas podemos facer se o eixe do cilindro é paralelo ó eixe y ou ó eixe x .

Ecuacións doutras superficies en $\mathbb{R}^3$ son,

$$z - z_o = a(x - x_o)^2 + b(y - y_o)^2, \quad \text{con } ab > 0,$$

que corresponde a un paraboloide con vértice no punto (x_o, y_o, z_o) . Por exemplo, $z = x^2 + y^2$ é un paraboloide no semiespazo $z \geq 0$ que presenta o mínimo na orixe de coordenadas. Tamén o cono dobre con vértice o punto (x_o, y_o, z_o) é da forma

$$(z - z_o)^2 = a(x - x_o)^2 + b(y - y_o)^2,$$

con $a > 0$ e $b > 0$. Dous conos simples moi utilizados son $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$; os dous teñen o vértice na orixe e están situados nos semiespazos $z \geq 0$ e $z \leq 0$, respectivamente.

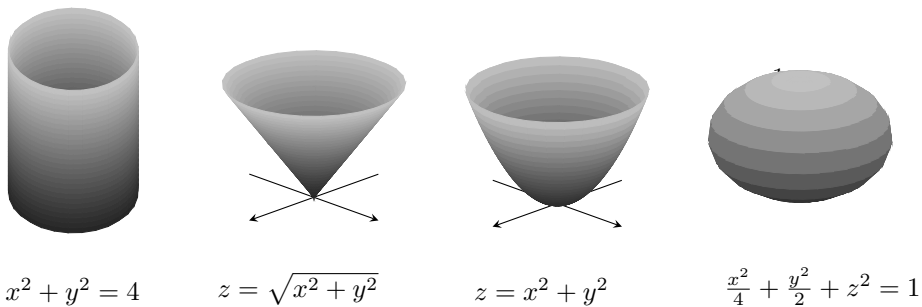


Figura 7.4: Superficies máis usuais

As superficies que aparecen na Figura 7.4 representan un cilindro de raio dous, un cono no semiespazo $z \geq 0$, un paraboloide e un elipsoide.

7.2. Curvas en $\mathbb{R}^n$

Para definir a integral dun campo escalar ou vectorial sobre unha curva, habitualmente denominada integral de liña, é necesario ter claro as distintas formas de representar unha curva tanto no plano coma no espazo.

Para facilitar a notación diremos que unha función f é de clase un, $f \in \mathcal{C}^1$, si é de clase un no seu dominio.

Definición 7.1 *Unha curva, ou un camiño, en $\mathbb{R}^n$ é unha función continua $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. A curva α é regular se $\alpha \in \mathcal{C}^1$ e as derivadas das coordenadas de α non se anulan simultaneamente en (a, b) . Un camiño regular a anacos en $[a, b]$ é un camiño que é regular salvo nun conxunto finito de puntos de $[a, b]$.*

A figura 7.5 corresponde á curva en $\mathbb{R}^3$ que forman dúas voltas completas dun resorte que ten como centro o eixe z , $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$.

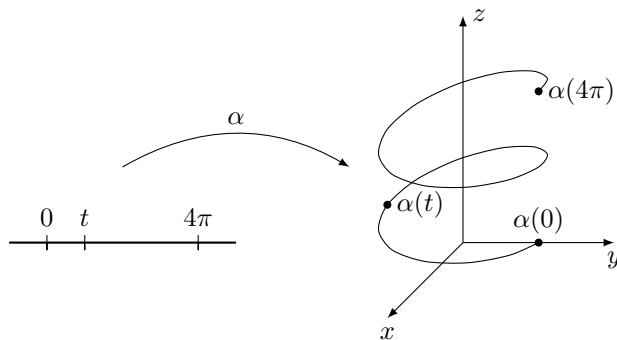


Figura 7.5: A curva $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$, $t \in [0, 4\pi]$ en $\mathbb{R}^3$

Usualmente, cando non haxa lugar a equivocacións e por abuso de linguaxe, confundiremos un camiño coa imaxe da aplicación α , $C = \alpha[a, b]$, que tamén denominaremos parametrización da curva ou camiño α .

Exemplo 7.2 1. Circunferencia de centro a orixe e raio un, (Figura 7.6).

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, \sqrt{1-t^2}) & \text{se } t \in [-1, 1] \\ (2-t, -\sqrt{1-(2-t)^2}) & \text{se } t \in (1, 3] \end{cases}$$

$$\beta(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

A medida que vaíamos avanzando no capítulo observaremos que, para a circunferencia, a parametrización β é máis útil que a α .

2. Camiños regulares a anacos que van dende $(0, 0, 0)$ ata $(1, 2, 1)$ e viceversa, (Figura 7.6).

$$\alpha(t) = \begin{cases} (0, 2t, 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (t-1, 2, 0) & \text{se } t \in (1, 2] \\ (1, 2, t-2) & \text{se } t \in (2, 3] \end{cases}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} (1, 2, 1-t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (2-t, 2, 0) & \text{se } t \in (1, 2] \\ (0, -2t+6, 0) & \text{se } t \in (2, 3] \end{cases}.$$

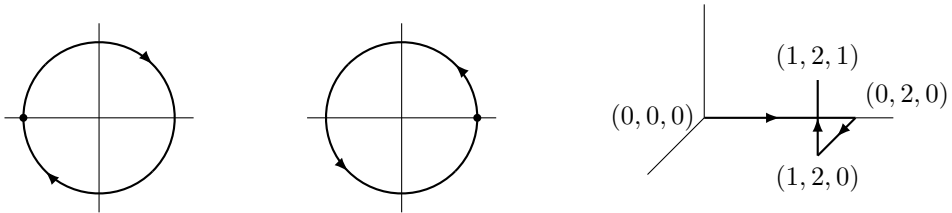


Figura 7.6: Dúas parametrizacións da circunferencia unidade e parametrización dunha poligonal en $\mathbb{R}^3$

Toda curva en $\mathbb{R}^n$ leva asociada unha orientación, que ten o inicio en $\alpha(a)$ e o final en $\alpha(b)$. Deste xeito, unha curva en $\mathbb{R}^n$ ten dúas posibles orientacións. No caso de curvas no plano, a orientación no sentido contrario ó movemento das agullas do reloxo denomínase orientación positiva e no caso contrario orientación negativa.

Exemplo 7.3 Vexamos distintas formas de parametrizar, por exemplo, a circunferencia de centro a orixe e raio 3, $x^2 + y^2 = 9$, variando o punto de inicio e a orientación da mesma.

1. Partindo do punto $(-3, 0)$ e con orientación negativa.

$$\alpha(t) = (-3 \cos t, 3 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

2. Partindo do punto $(0, -3)$ e orientación positiva.

$$\alpha(t) = (3 \sin t, -3 \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

3. Con orientación positiva pero comezando polo punto $(3, 0)$.

$$\alpha(t) = (3 \cos t, 3 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

4. En xeral, a parametrización en $\mathbb{R}^2$ dunha elipse de centro (x_o, y_o) e semieixes a e b é da forma

$$\alpha(t) = (x_o + a \cos t, y_o + b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

No caso en que $a = b$, temos unha circunferencia de centro (x_o, y_o) e raio $r = a$.

Estas construcións son totalmente intuitivas pero, en todo caso, debemos situar en primeiro lugar o punto de partida colocando a función seno ou coseno na coordenada que nos interese e logo manipulamos axeitadamente o signo de ambas as coordenadas.

Exemplo 7.4 A parametrización dunha curva en $\mathbb{R}^3$ segue criterios moi parecidos.

1. Circunferencia sobre o plano $x = 2$ de centro o punto $(2, 3, -2)$ e raio $r = 4$.

$$\alpha(t) = (2, 3 + 4 \cos t, -2 + 4 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

2. Elipse sobre o plano $z = 1$ de centro o punto $(-1, 1, 1)$ e semieixes $a = 2$ e $b = 3$.

$$\alpha(t) = (-1 + 2 \cos t, 1 + 3 \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi].$$

3. Segmento lineal que vai dende un punto $a \in \mathbb{R}^n$ ata outro punto $b \in \mathbb{R}^n$.

$$\alpha(t) = a + t(b - a), \quad t \in [0, 1].$$

4. Poligonal que ten a $a \in \mathbb{R}^n$ como punto de inicio, a $b \in \mathbb{R}^n$ como punto intermedio e a $c \in \mathbb{R}^n$ con punto final.

$$\alpha(t) = \begin{cases} a + t(b - a) & \text{se } t \in [0, 1] \\ b + (t - 1)(c - b) & \text{se } t \in (1, 2] \end{cases}$$

5. Dúas voltas dun resorte circular de raio $r = 2$, centrado no eixe z , cunha distancia entre voltas consecutivas de tres unidades e con $(0, 2, 0)$ como punto de inicio.

$$\alpha(t) = (2 \sin t, 2 \cos t, \frac{3t}{2\pi}), \quad t \in [0, 4\pi].$$

Exemplo 7.5 Parametriza a poligonal que une os puntos $(0, 1, 2)$, $(2, -2, 1)$, $(3, 1, 3)$ e $(1, 4, 4)$.

Se denotamos por $x = (0, 1, 2)$ e $y = (2, -2, 1)$, entón $y - x = (2, -3, -1)$ e o segmento que une x con y na orientación de x ata y ten como parametrización, $\alpha(t) = x + t(y - x)$, para $t \in [0, 1]$. Deste xeito,

$$\alpha_1(t) = (0, 1, 2) + t(2, -3, -1) = (2t, 1 - 3t, 2 - t), \quad t \in [0, 1].$$

De forma análoga, se $x = (2, -2, 1)$ e $y = (3, 1, 3)$, entón $y - x = (1, 3, 2)$ e para os valores de $t \in [1, 2]$ tomamos o parámetro $t - 1 \in [0, 1]$ para determinar o segmento que une x con y , polo que

$$\begin{aligned} \alpha_2(t) &= x + (t - 1)(y - x) = (2, -2, 1) + (t - 1)(1, 3, 2) \\ &= (1 + t, -5 + 3t, -1 + 2t), \quad t \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Para $x = (3, 1, 3)$ e $y = (1, 4, 4)$, entón $y - x = (-2, 3, 1)$ e para os valores de $t \in [2, 3]$ tomamos como parámetro $t - 2 \in [0, 1]$, e

$$\begin{aligned} \alpha_3(t) &= x + (t - 2)(y - x) = (3, 1, 3) + (t - 2)(-2, 3, 1) \\ &= (7 - 2t, -5 + 3t, 1 + t), \quad t \in [2, 3]. \end{aligned}$$

Daquela temos que

$$\alpha(t) = \begin{cases} (2t, 1 - 3t, 2 - t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (1 + t, -5 + 3t, -1 + 2t) & \text{se } t \in [1, 2] \\ (7 - 2t, -5 + 3t, 1 + t) & \text{se } t \in [2, 3] \end{cases}.$$

Exemplo 7.6 Parametriza a circunferencia en $\mathbb{R}^3$ de centro $(1, 2, 3)$ e raio $r = 2$, e sobre o plano $y = 2$ (Figura 7.7).

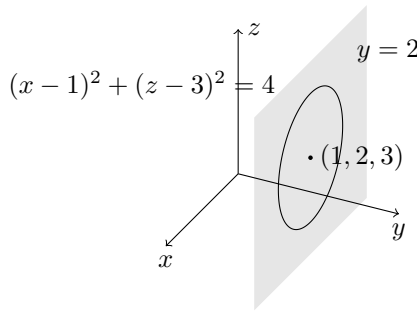


Figura 7.7: Circunferencia en $\mathbb{R}^3$ de centro $(1, 2, 3)$ e raio $r = 2$ contida no plano $y = 2$

A circunferencia é a intersección do cilindro $(x - 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$ co plano $y = 2$, polo que debe ser $x(t) = 1 + 2 \sin t$, $y(t) = 2$ e $z(t) = 3 + 2 \cos t$. Logo, unha parametrización da curva é da forma

$$\alpha(t) = (1 + 2 \sin t, 2, 3 + 2 \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Exemplo 7.7 Parametrización da elipse en $\mathbb{R}^3$ intersección do cilindro $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ co plano $x + y + z = 3$ (Figura 7.8)).

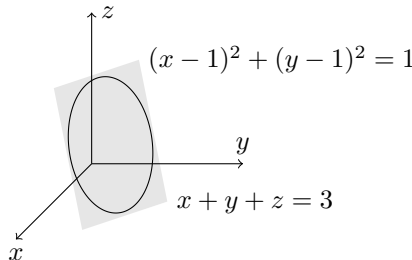


Figura 7.8: Intersección do cilindro $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ co plano $x + y + z = 3$

As variables x e y teñen que verificar a ecuación do cilindro polo que, por exemplo, $x(t) = 1 + \cos t$ e $y(t) = 1 + \sin t$, e a terceira coordenada da parametrización ten que verificar, $z(t) = 3 - x(t) - y(t) = 1 - \sin t - \cos t$. Daquela, unha parametrización da curva é da forma,

$$\alpha(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t, 1 - \sin t - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Nos exemplos de integración que se poñan no resto do capítulo, irán aparecendo outros exemplos de parametrizacións de curvas en $\mathbb{R}^n$.

Exercicios

1. Atopa unha parametrización regular a anacos das curvas que aparecen na Figura 7.9.

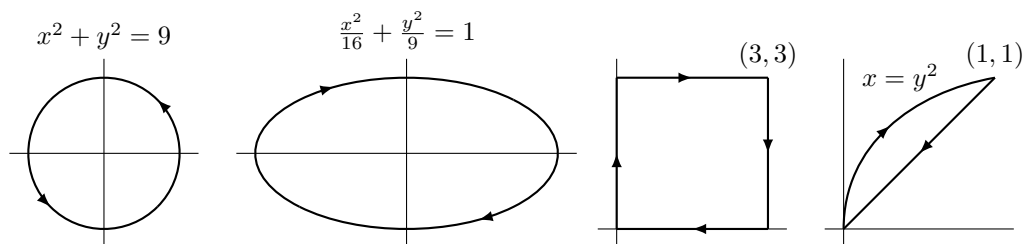


Figura 7.9: Varias curvas regulares a anacos en $\mathbb{R}^2$

7.3. Integraís de liña de campos vectoriais

O concepto máis importante deste capítulo é a noción de integral de liña dun campo vectorial ó longo dunha curva.

Consideremos entón un camiño regular a anacos, $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, \dots, F_n)$, un campo vectorial continuo.

Definición 7.8 A integral de liña dun campo vectorial F ó longo do camiño regular $C = \alpha[a, b]$ defínese como

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\alpha(t)) \alpha'_i(t) dt.$$

Outras notacións, por exemplo para $n = 3$, se denotamos por $x = \alpha_1(t)$, $y = \alpha_2(t)$ e $z = \alpha_3(t)$, entón $dx = \alpha'_1(t)dt$, $dy = \alpha'_2(t)dt$ e $dz = \alpha'_3(t)dt$, polo que

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_a^b (F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz).$$

Exemplo 7.9 Consideremos a curva da Figura 7.10, $y = 4x - x^2$, que vai do punto $(4, 0)$ ata $(1, 3)$ que queda determinada pola función $\alpha(t) = (4 - t, 4t - t^2)$, se $t \in [0, 3]$.

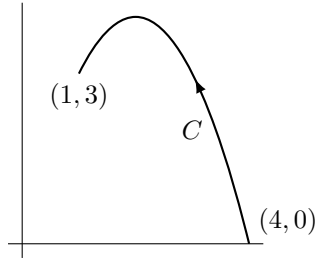


Figura 7.10: O camiño parabólico $y = 4x - x^2$ dende $(4, 0)$ a $(1, 3)$

Para calcular a integral do campo vectorial $F(x, y) = (y, x^2)$, tendo en conta a igualdade $4(4 - t) - (4 - t)^2 = 4t - t^2$, temos que

$$\alpha'(t) = (-1, 4 - 2t), \text{ se } t \in [0, 3]$$

$$F(\alpha(t)) = (4t - t^2, (4 - t)^2), \text{ se } t \in [0, 3]$$

$$F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = -2t^3 + 21t^2 - 68t + 64, \text{ se } t \in [0, 3],$$

de onde resulta,

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_0^3 (-2t^3 + 21t^2 - 68t + 64) dt = \left[-\frac{t^4}{2} + 7t^3 - 34t^2 + 64t \right]_0^3 = \frac{69}{2}.$$

Exemplo 7.10 Calcula a integral $\int_C y^2 dx + (x^3 + 3x^2) dy$, sobre a circunferencia de centro a orixe e raio $r = 3$ con orientación positiva. Utilizamos como parametrización da curva, $\alpha(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Facendo

$$\begin{aligned} x &= 3 \cos t, & y &= 3 \sin t, \\ dx &= -3 \sin t dt, & dy &= 3 \cos t dt, \end{aligned}$$

e tendo en conta que

$$\int (2 \cos t \sin t)^2 dt = \int \sin^2(2t) dt = \frac{2t - \sin(2t) \cos(2t)}{4},$$

verifícase,

$$\begin{aligned}
\int_C y^2 dx + (x^3 + 3x^2) dy &= \int_0^{2\pi} \left[(9 \sin^2 t)(-3 \sin t) + (27 \cos^3 t + 27 \cos^2 t)(3 \cos t) \right] dt \\
&= 27 \int_0^{2\pi} \left[-\sin^3 t + 3 \cos^4 t + 3 \cos^3 t \right] dt \\
&= 27 \int_0^{2\pi} \left[-\sin t(1 - \cos^2 t) + 3 \cos^2 t(1 - \sin^2 t) + 3 \cos t(1 - \sin^2 t) \right] dt \\
&= 27 \left[\cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{3}{2} (t + \sin t \cos t) + 3 \sin t - \sin^3 t \right]_0^{2\pi} - \frac{81}{4} \int_0^{2\pi} (2 \sin t \cos t)^2 dt \\
&= 81\pi - \frac{81}{16} \left[2t - \sin(2t) \cos(2t) \right]_0^{2\pi} = 81\pi - \frac{81}{4} \pi = \frac{243}{4} \pi.
\end{aligned}$$

Algunhas propiedades das integrais de liña están estreitamente relacionadas coas propiedades de linealidade das integrais de Riemann e son consecuencia inmediata destas.

Outras propiedades están relacionadas coas distintas parametrizacións da mesma curva, ben conservando a orientación ou ben inverténdoas. Isto conséguese, en particular, compoñendo a parametrización orixinal cunha función dunha variable real crecente, se queremos conservar a orientación, ou decrecente se queremos cambiar a orientación. En todo caso, a modificación dunha parametrización nestes termos consegue modificar a velocidade de percorrido da variable sobre a curva.

Sexan $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camiño regular, $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u, v \in \mathcal{C}^1$, $v'(t) < 0 < u'(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e $\text{Im}(v), \text{Im}(u) \subset [a, b]$. Dado que $u'(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, u é crecente e a curva $\beta_1 = \alpha \circ u$ definida no intervalo $[c, d]$, con $u(c) = a$ e $u(d) = b$, é unha parametrización distinta da curva $C = \alpha[a, b]$ que ten a mesma orientación, pois $\beta_1(c) = \alpha(u(c)) = \alpha(a)$, e $\beta_1(d) = \alpha(u(d)) = \alpha(b)$.

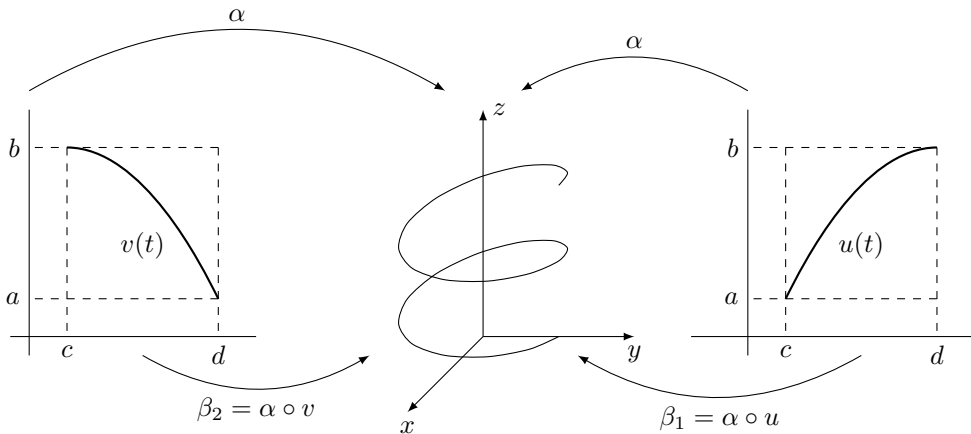


Figura 7.11: Reparametrizacións dunha curva α con orientacións opostas

Dado que $v'(t) < 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, a función v é decrecente, polo que a curva $\beta_2 = \alpha \circ v$, definida no intervalo $[c, d]$, con $v(c) = b$ e $v(d) = a$ é unha parametrización distinta da curva $C = \alpha[a, b]$ que ten a orientación contraria. Na Figura 7.11 representanse esquemáticamente as reparametrizacións β_1 e β_2 da curva α .

Utilizando as propiedades de linealidade da integral de Riemann, pode probarse algunhas propiedades moi útiles das integrais de liña.

Teorema 7.11 Sexan $F, G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, e $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C = \alpha[a, b]$, unha curva regular. Ademais, se $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^1$, $u'(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $[a, b] \subset \text{Im}(u)$, $\beta = \alpha \circ u$, sendo $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$, entón verifícase,

1. $\int_C (\mu F + \nu G) \cdot d\alpha = \mu \int_C F \cdot d\alpha + \nu \int_C G \cdot d\alpha$.
2. Se $c \in (a, b)$, $C_1 = \alpha[a, c]$ e $C_2 = \alpha[c, b]$, entón $\int_C F \cdot d\alpha = \int_{C_1} F \cdot d\alpha + \int_{C_2} F \cdot d\alpha$.
3. Se $u'(t) > 0$ para todo t , entón $\int_C F \cdot d\alpha = \int_C F \cdot d\beta$.
4. Se $u'(t) < 0$ para todo t , entón $\int_C F \cdot d\alpha = - \int_C F \cdot d\beta$.
5. Se α é regular a anacos e $C_1, \dots, C_k$ son os camiños regulares que definen α , entón $\int_C F \cdot d\alpha = \int_{C_1} F \cdot d\alpha + \dots + \int_{C_k} F \cdot d\alpha$.

Demostración. Probaremos soamente a propiedade 4. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\beta &= \int_c^d F(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt = \int_c^d F(\alpha(u(t))) \cdot \alpha'(u(t)) u'(t) dt \\ &= \int_b^a F(\alpha(s)) \alpha'(s) ds = - \int_C F \cdot d\alpha, \end{aligned}$$

xa que $u(t) = s$, $u'(t) dt = ds$, $u(c) = b$ e $u(d) = a$. ■

Exemplo 7.12 Este exemplo ilustra a propiedade 3 anterior, é dicir, a integral de liña dun campo vectorial non depende da parametrización da curva escollida sempre que non cambie a orientación. Sexan $F(x, y) = (y, 2x)$ e $\alpha_1(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$, e $\alpha_2(t) = ((t-1)^2, (t-1)^2)$, $t \in [1, 2]$, dúas parametrizacións de $C = \alpha_1([0, 1]) = \alpha_2([1, 2])$, o segmento que une os puntos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Entón,

$$\begin{aligned} F(\alpha_1(t)) \cdot \alpha_1'(t) &= (t, 2t) \cdot (1, 1) = 3t \\ F(\alpha_2(t)) \cdot \alpha_2'(t) &= ((t-1)^2, 2(t-1)^2) \cdot (2(t-1), 2(t-1)) = 6(t-1)^3 \end{aligned}$$

Polo tanto,

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot d\alpha_1 &= \int_0^1 3t dt = \frac{3}{2} [t^2]_0^1 = \frac{3}{2} \\ \int_C F \cdot d\alpha_2 &= \int_1^2 6(t-1)^3 dt = \frac{3}{2} [(t-1)^4]_1^2 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Así pois, en efecto, $\int_C F \cdot d\alpha_1 = \int_C F \cdot d\alpha_2$.

Debemos tamén observar a importancia da propiedade 4, xa que o cambio de orientación da curva cambia o signo da integral de liña. Por exemplo, $\alpha_3(t) = (1-t, 1-t)$, $t \in [0, 1]$ é unha parametrización da curva C que invirte a orientación e, polo tanto, $\int_C F \cdot d\alpha_3 = -\frac{3}{2}$.

Exemplo 7.13 Calcula a integral de liña do campo vectorial F ó longo do camiño que se indica en cada caso.

1. $F(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, e a curva definida pola ecuación $y = x^2$ dende o punto $(-1, 1)$ ata o punto $(1, 1)$. A curva en forma paramétrica está definida por $\alpha(t) = (t, t^2)$, con $t \in [-1, 1]$ (figura 7.12 a). Así, $\alpha'(t) = (1, 2t)$, $F(\alpha(t)) = F(t, t^2) = (t^2 - 2t^3, t^4 - 2t^3)$ e $F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 2t^5 - 4t^4 - 2t^3 + t^2$, polo que

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_{-1}^1 (2t^5 - 4t^4 - 2t^3 + t^2) dt = \left[\frac{t^6}{3} - \frac{4t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = -\frac{14}{15}$$

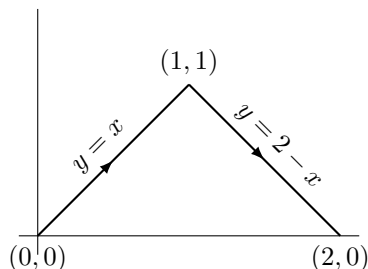
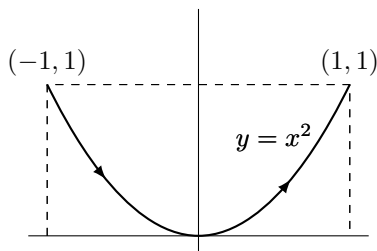


Figura 7.12: Camiños parabólico e poligonal

2. $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, e a curva definida pola ecuación $y = 1 - |1 - x|$ dende o punto $(0, 0)$ ata o punto $(2, 0)$. Esta curva está definida mediante as ecuacións $y = x$ se $x \leq 1$ e $y = 2 - x$ se $x \geq 1$ (figura 7.12 b)). Así, en forma paramétrica,

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ (t, 2-t) & \text{se } 1 < t \leq 2 \end{cases}, \quad \alpha'(t) = \begin{cases} (1, 1) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ (1, -1) & \text{se } 1 < t \leq 2 \end{cases},$$

$$F(\alpha(t)) = \begin{cases} (2t^2, 0) & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ (2t^2 - 4t + 4, 4t - 4) & \text{se } 1 \leq t \leq 2 \end{cases},$$

$$F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \begin{cases} 2t^2 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 2t^2 - 8t + 8 & \text{se } 1 < t \leq 2 \end{cases},$$

polo que

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_0^1 2t^2 dt + \int_1^2 (2t^2 - 8t + 8) dt = \frac{4}{3}.$$

Exercicios

2. Calcula $\int_C F \cdot d\alpha$, para os casos:

a) $F(x, y) = (xy, y)$ e $\alpha(t) = (4 \cos t, 4 \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

b) $F(x, y, z) = (x^2y, x - z, xyz)$ e $\alpha(t) = (t, t^2, 2)$, $0 \leq t \leq 1$.

3. Avalía a integral $\int_C (2x - y)dx + (x + 3y)dy$ ó longo do camiño:

a) poligonal que une $(0, 0)$, $(3, 0)$ e $(3, 3)$.

b) un cuarto do arco elíptico $(4 \sin t, 3 \cos t)$, dende $(0, 3)$ ata $(4, 0)$.

4. Calcula $\int_C ydx + zdy + xdz$ onde C é a intersección de $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ con orientación positiva observada dende a orixe.

5. Comproba que nos casos que seguen, o campo F é ortogonal ó vector tanxente á curva. Demostra que se un campo é ortogonal ó vector tanxente á curva, entón a integral de liña de F sobre a curva é nula.

a) $F(x, y) = \left(x^3 - 2x^2, x - \frac{y}{2}\right)$, $\alpha(t) = (t, t^2)$

b) $F(x, y) = (x, y)$, $\alpha(t) = (3 \sin t, 3 \cos t)$

7.4. Traballo realizado por unha forza

Consideremos unha partícula pequena que se move ó longo dunha traxectoria $C = \alpha[a, b]$ e que está sometida a un campo de forzas F no espazo. Por exemplo, unha carga unitaria nun campo eléctrico ou unha unidade de masa nun campo gravitatorio. Un concepto básico e suficientemente

coñecido é o traballo realizado polo campo F para desprazar a partícula sobre a traxectoria C . Se o desprazamento é rectilíneo e está dado por un vector d e F é unha forza constante, este traballo é o produto escalar $F \cdot d = \|F\| \|d\| \cos \theta$, onde θ é o ángulo que forma o campo F coa liña de desprazamento d . Doutra forma, o traballo é o produto da compoñente da forza na dirección do desprazamento pola distancia do desprazamento.

Consideremos unha partícula que se move ó longo dun camiño $C = \alpha[a, b]$ nun campo de forzas F (Figura 7.13). O traballo realizado pola forza F para desprazar a partícula entre dous puntos é o produto da compoñente da forza F na dirección do movemento pola distancia na que actúa. Así, se $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ é o vector unitario tanxente ó camiño, a forza é a proxección de F sobre T ,

$$\|F(x_i, y_i, z_i)\| \cos \theta = F(x_i, y_i, z_i) \cdot T(x_i, y_i, z_i)$$

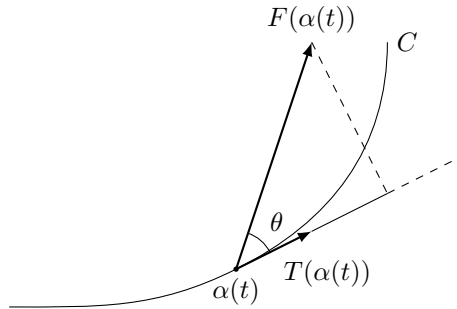


Figura 7.13: Compoñente tanxencial dunha forza nun punto dunha curva

e como $\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$ é a lonxitude do camiño que se vai percorrer,

$$\Delta W_i = (\text{Forza}) \cdot (\text{distancia}) = F(x_i, y_i, z_i) \cdot T(x_i, y_i, z_i) \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$$

e sumando en i cando a norma da partición tende a cero temos o traballo total realizado,

$$W = \int_C F \cdot T d\alpha = \int_C F \cdot d\alpha.$$

Exemplo 7.14 *Traballo realizado por unha forza constante.* Sexan $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camiño regular tal que $\alpha(a) = u$ e $\alpha(b) = v$ e sexa $F = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ un campo de forzas constante. O traballo realizado por F para mover unha partícula de u a v é,

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\alpha &= \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b \alpha'_i(t) dt = \sum_{i=1}^n c_i (\alpha_i(b) - \alpha_i(a)) \\ &= c \cdot (\alpha(b) - \alpha(a)) = c \cdot (v - u), \end{aligned}$$

o produto escalar da forza pola distancia.

Exemplo 7.15 Calcula o traballo realizado polo campo de forzas $F(x, y, z) = (x, -xy, z^2)$ sobre unha partícula que se move ó longo dunha hélice dada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, dende o punto $(1, 0, 0)$ ata o punto $(-1, 0, 3\pi)$ ou, equivalentemente, con $t \in [0, 3\pi]$.

Se consideramos as funcións

$$\begin{aligned} F(\alpha(t)) &= F(\cos t, \sin t, t) = (\cos t, -\sin t \cos t, t^2) \\ \alpha'(t) &= (-\sin t, \cos t, 1), \end{aligned}$$

e o produto escalar,

$$F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = -\sin t \cos t - \sin t \cos^2 t + t^2,$$

temos que

$$W = \int_0^{3\pi} (-\sin t \cos t - \sin t \cos^2 t + t^2) dt = 9\pi^3 - \frac{2}{3}.$$

Exercicios

6. Calcula o traballo realizado polo campo F sobre unha partícula que percorre o camiño especificado:
 - a) $F(x, y) = (2x, -y)$, poligonal de vértices $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$.
 - b) $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$, semicírculo dende $(0, 1, 0)$ ata $(0, -1, 0)$.
7. Calcula o traballo realizado polo campo de forzas $F(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$, ó longo da curva intersección da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = ax$, con $z \geq 0$ e $a > 0$. O camiño ten orientación positiva observando o plano xy dende o eixe z positivo (Figura 7.14).

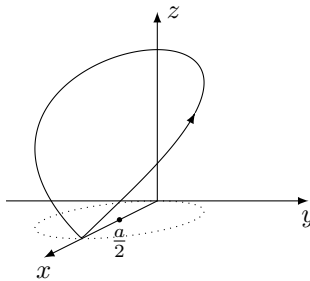


Figura 7.14: Curva intersección dun cilindro cunha esfera

7.5. Campos conservativos

Definición 7.16 Un campo vectorial $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é conservativo se existe un campo escalar diferenciable $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \nabla f(x)$ para todo x . A función f denomínase función potencial de F .

Exemplo 7.17 1. $F(x, y) = (2x, y)$ é un campo conservativo con función potencial $f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2}$.

2. Consideremos un vector de posición en $\mathbb{R}^3$, $r = (x, y, z)$, e sexa $u = \frac{r}{\|r\|}$ o vector unitario na dirección de r en cada punto. Un campo vectorial $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é un campo cuadrático inverso se $F(x, y, z) = \frac{k}{\|r\|^2} u$.

- a) Un campo gravitacional é un campo cuadrático inverso, pois a forza de atracción de dúas masas m, M , unha situada na orixe de coordenadas e outra nun punto $r = (x, y, z)$ é $F(x, y, z) = -\frac{GmM}{x^2 + y^2 + z^2} u = -\frac{GmM}{\|r\|^2} \frac{r}{\|r\|}$.
- b) Un campo de forzas eléctrico e cuadrático inverso, pois a forza de atracción de dúas cargas q_1, q_2 na orixe e no extremo dun vector de posición r é $F(x, y, z) = \frac{cq_1 q_2}{\|r\|^2} u$.

3. Un campo cuadrático inverso é conservativo, pois se $F(x, y, z) = \frac{k}{\|r\|^2} u$, entón a función potencial é $f(x, y, z) = -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{kx}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{ky}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \frac{kz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right) \\ &= \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{k}{\|r\|^2} \frac{r}{\|r\|} = \frac{k}{\|r\|^2} u. \end{aligned}$$

Isto é, os campos gravitatorios, os magnéticos e os de forzas eléctricos son conservativos (conservación da enerxía). A suma da enerxía cinética e potencial dunha partícula que se move nun campo conservativo é constante.

Hai algúns resultados que caracterizan os campos conservativos en $\mathbb{R}^2$ e en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 7.18 Sexan $B = B(x_o, r) = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x - x_o\| < r\}$ e $F: B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase un. Entón F é conservativo en B se, e só se, $D_k F_j(x) = D_j F_k(x)$, para todo $x \in B$ e para todo $j, k = \{1, \dots, n\}$.

Demostración. “ $\implies$ ” Como F é conservativo en B e de clase un, existe $f: B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase dous tal que $F_j(x) = D_j f(x)$, para todo $x \in B$ e para todo $j = 1, \dots, n$. Se derivamos esta igualdade e aplicamos o teorema de Schwartz (igualdade de derivadas cruzadas), temos que para todo $k = 1, \dots, n$ e todo $x \in B$,

$$D_k F_j(x) = D_{kj} f(x) = D_{jk} f(x) = D_j F_k(x).$$

“ $\impliedby$ ” A demostración desta implicación pode verse en Apostol, Vol.2. ■

Observaremos que este resultado segue sendo válido se substituímos a bóla aberta B por un conxunto convexo e, en particular, por $\mathbb{R}^n$.

No caso de $\mathbb{R}^2$ a condición necesaria e suficiente para que F sexa conservativo é que $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$. E, no caso de $\mathbb{R}^3$, a condición necesaria e suficiente para que F sexa conservativo é que se verifiquen as tres igualdades $\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$ e $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, para todo $w \in B(w_o, r)$.

Se o dominio de F non é unha bóla aberta, aínda que sexa un conxunto aberto, o resultado anterior é unha condición necesaria, pero non suficiente.

Vexamos que o cálculo da función potencial dun campo conservativo é un proceso de integración das coordenadas do campo correspondente.

Exemplo 7.19 $F(x, y) = (2xy, x^2 - y)$ é un campo conservativo pois $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x = \frac{\partial F_2}{\partial x}$. Se f é a función potencial, entón, $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2 - y)$, polo que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \implies f(x, y) = \int 2xy dx = x^2 y + g(y)$$

e derivando esta función respecto de y ,

$$F_2(x, y) = x^2 - y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y),$$

de onde, $f(x, y) = x^2 y - \frac{y^2}{2}$.

Exemplo 7.20 1. O campo vectorial $F(x, y, z) = (x^3 y^2 z, x^2 z, x^2 y)$ non é conservativo, pois en particular, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = x^3 y^2 \neq 2xy = \frac{\partial F_3}{\partial x}$.

2. O campo $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, 2zy)$ é conservativo, xa que

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = 2z = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Para calcular a función potencial,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2zy,$$

polo que

$$f(x, y, z) = \int 2xy dx = x^2 y + g(y, z),$$

de onde

$$F_2(x, y, z) = x^2 + z^2 = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y},$$

polo que

$$g(y, z) = z^2 y + h(z).$$

Finalmente, como

$$F_3(x, y, z) = 2zy = \frac{\partial f}{\partial z} = 2zy + h'(z)$$

temos que $f(x, y, z) = x^2 y + z^2 y$.

Exemplo 7.21 Se f e g son funcións potenciais dun campo vectorial continuo F nun conxunto conexo e aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, demostra que $f - g$ é constante en A .

Se f e g son funcións potenciais dun campo vectorial continuo F , entón verifícase que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} = F_i(x)$, para todo $i = 1, \dots, n$, e, como consecuencia, $\nabla f(x) = \nabla g(x)$, para todo $x \in A$. A función $h(x) = f(x) - g(x)$ verifica que $\nabla h(x) = 0$, polo que h é constante e, de aquí, deducimos que $f - g$ é constante.

Exercicios

8. Estuda se o campo de vectores é conservativo e calcula, no seu caso, a función potencial correspondente.

- a) $F(x, y) = \frac{1}{y^2}(y, -2x)$ b) $F(x, y) = \left(\frac{2y}{x}, -\frac{x^2}{y^2}\right)$
c) $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(2x, 2y)$ d) $F(x, y, z) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}, 2z - 1\right)$
e) $F(x, y, z) = e^z(y, x, xy)$ f) $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, 1\right)$

7.6. Teorema fundamental das integrais de liña

Exemplo 7.22 Calcula o traballo realizado polo campo de forzas $F(x, y) = (4xy, 2x^2)$ para mover unha partícula do punto $(0, 0)$ ata o punto $(1, 1)$ ó longo dos camiños,

1. $y = x$, 2. $x = y^2$, 3. $y = x^3$.

1. Sexa $\alpha(t) = (t, t)$, con $t \in [0, 1]$, $\int_C F \cdot d\alpha = \int_0^1 F(t, t) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 6t^2 dt = 2$.

2. Para $\alpha(t) = (t, \sqrt{t})$ con $t \in [0, 1]$, $\int_C F \cdot d\alpha = \int_0^1 5\sqrt{t^3} dt = 2$.

$$3. \text{ Para } \alpha(t) = (t, t^3), \text{ con } t \in [0, 1], \int_C F \cdot d\alpha = \int_0^1 10t^4 dt = 2.$$

Neste exemplo o campo vectorial $F(x, y)$ é conservativo, sendo a función potencial $f(x, y) = 2x^2y$. O resultado que segue proba que se un campo é conservativo, entón a integral de liña entre dous puntos é independente do camiño elixido.

Teorema 7.23 (Teorema fundamental das integrais de liña) *Sexa $C = \alpha[a, b]$ un camiño regular a anacos no interior dun conxunto aberto A . Se $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é un campo conservativo continuo en A e f é unha función potencial de F , entón*

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_C \nabla f \cdot d\alpha = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Demostración. Podemos supoñer sen perda de xeneralidade que o camiño é regular. Posto que $F(x) = \nabla f(x)$, tense que

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\alpha &= \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\alpha(t))}{\partial x_i} \alpha'_i(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)). \end{aligned}$$

■

Este resultado confirma que no exemplo 7.22 as tres integrais calculadas teñen que ser iguais.

Exemplo 7.24 Sexa $r = r(x, y, z) = (x, y, z)$ o vector de posición en $\mathbb{R}^3$ e consideremos o escalar norma de r , $\|r\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Para un enteiro $n \in \mathbb{Z}$ temos que $\nabla(\|r\|^n) = n\|r\|^{n-2}r$, polo que podemos afirmar que a función $f(x, y, z) = \|r\|^n$ é a función potencial do campo $F(x, y, z) = n\|r\|^{n-2}r$. As superficies equipotenciais de f son circunferencias concéntricas de centro a orixe.

Exemplo 7.25 Potencial de Newton ou gravitatorio. A lei de gravitación de Newton establece que a forza F que exerce unha partícula de masa M sobre outra de masa m é un vector de lonxitude $GmM \frac{1}{\|r\|^2}$, onde G é a constante universal de gravitación e $\|r\|$ é a distancia entre as partículas. Se situamos a partícula M na orixe de coordenadas e r é o vector de posición que une a orixe coa partícula de masa m , entón $-\frac{r}{\|r\|}$ é un vector unitario coa mesma dirección que o campo F , polo que a lei de Newton toma a forma

$$F(x, y, z) = -\frac{GmM}{\|r\|^3}r,$$

que xa foi estudado no exemplo 7.17. Se no exemplo anterior facemos $n = -1$, temos que a forza de gravitación F é o gradiente do campo escalar $V(x, y, z) = GmM\|r\|^{-1}$ e denomínase potencial

gravitatorio ou de Newton. Deste xeito, o traballo efectuado pola forza de gravitación para mover a partícula dende (x_1, y_1, z_1) ata (x_2, y_2, z_2) vale

$$V(x_2, y_2, z_2) - V(x_1, y_1, z_1) = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

onde $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$, $i = 1, 2$. Observaremos que se os dous puntos están na mesma superficie equipotencial, entón o traballo é nulo.

Por outra parte, para dominios abertos e conexos, en particular convexos, tamén é certo que a independencia do camiño de integración dunha integral en liña, tamén é unha condición suficiente dos campos conservativos.

Definición 7.26 *Un dominio $A \subset \mathbb{R}^n$ é conexo, se todo par de puntos en A pode ser unido por un camiño regular a anacos contido no dominio A .*

Teorema 7.27 *Sexa $F(x)$ un campo vectorial continuo nun dominio aberto e conexo A . Entón, F é conservativo en A se, e soamente se, $\int_C F \cdot d\alpha$ é independente do camiño de integración que conserve a orientación, para calquera curva regular a anacos $C = \alpha[a, b]$ en A .*

Exemplo 7.28 1. Calcula $\int_C F \cdot d\alpha$, onde C é unha curva calquera regular a anacos desde $(-1, 4)$ ata $(1, 2)$, e $F(x, y) = (2xy, x^2 - y)$. É inmediato que o campo F é conservativo, que a función potencial de F é $f(x, y) = x^2y - \frac{1}{2}y^2$ e, polo teorema fundamental das integrais de liña, $\int_C F \cdot d\alpha = f(1, 2) - f(-1, 4) = 4$.

2. Proba que para o campo de forzas $F(x, y, z) = (e^x \cos y, -e^x \sin y, 2)$ a integral de liña $\int_C F \cdot d\alpha$ é independente do camiño de integración e calcula o traballo realizado polo campo F sobre unha partícula que se move por unha curva C dende o punto $(0, \frac{\pi}{2}, 1)$ ata $(1, \pi, 3)$.

O campo vectorial F é conservativo, pois

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = -e^x \sin y = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Ademais, se $f(x, y, z)$ é unha función potencial de $F(x, y, z)$, entón

$$f_x(x, y, z) = e^x \cos y, \quad f_y(x, y, z) = -e^x \sin y, \quad f_z(x, y, z) = 2$$

e integrando respecto de x, y e z , respectivamente,

$$f(x, y, z) = \int e^x \cos y dx = e^x \cos y + g(y, z) + K$$

$$f(x, y, z) = \int -e^x \sin y dy = e^x \cos y + h(x, z) + K$$

$$f(x, y, z) = \int 2 dz = 2z + k(x, y) + K.$$

Comparando os tres valores de f , temos que

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + 2z + K,$$

polo que o traballo realizado polo campo vectorial F ó longo dunha curva calquera C entre os citados puntos é

$$W = \int_C F \cdot d\alpha = [e^x \cos y + 2z]_{(0, \frac{\pi}{2}, 1)}^{(1, \pi, 3)} = 4 - e.$$

Neste exercicio tamén poderíamos preguntarnos polo traballo realizado pola partícula se se move do punto $(0, \frac{\pi}{2}, 1)$ ata $(1, \pi, 3)$ e logo retorna a $(0, \frac{\pi}{2}, 1)$. O teorema fundamental afirma que este traballo é nulo, pois o traballo en sentido inverso é o mesmo en valor absoluto, pero de signo negativo.

Definición 7.29 Unha curva $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é pechada, se $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Utilizando as propiedades e o teorema fundamental das integrais de liña, temos que se F é un campo conservativo nun dominio aberto e conexo A , entón a integral de liña de F sobre calquera curva pechada contida en A vale cero.

Teorema 7.30 Sexa $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo vectorial continuo nun dominio aberto e conexo A e C unha curva regular a anacos en A . As seguintes condicións son equivalentes:

1. F é conservativo en A . Isto é, $F(x) = \nabla f(x)$, para algunha función f e para todo $x \in A$.
2. $\int_C F \cdot d\alpha$ é independente do camiño de integración que conserve a orientación para calquera curva C .
3. $\int_C F \cdot d\alpha = 0$ para calquera curva C regular a anacos e pechada en A .

Exemplo 7.31 Debemos ter coidado na aplicación do apartado 3 do teorema anterior, pois pode suceder que $\int_C F \cdot d\alpha = 0$ para unha infinidade de curvas pechadas, e o campo vectorial F pode non ser conservativo. Por exemplo para $F(x, y) = (y^2, xy)$, a integral de liña sobre tódolos círculos de centro a orixe e raio $r \in \mathbb{R}$ é sempre nula e con todo, o campo F non é conservativo.

Exemplo 7.32 Calcula a integral de liña da función $F(x, y) = (y^3 + 1, 3xy^2 + 1)$ sobre o camiño semicircular que vai de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ e ata $(2, 0)$.

Podemos utilizar o método orixinal para calcular a integral de liña sobre calquera curva. Por exemplo, sobre a parametrización $\alpha(t) = (1 - \cos t, \sin t)$, con $t \in [0, \pi]$, de onde,

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_0^\pi (\sin t + \sin^4 t + \cos t + 3 \sin^2 t \cos t - 3 \cos^2 t \sin^2 t) dt,$$

polo que parece desexable desbotar este método.

Podemos intentar calcular unha función potencial e avaliar a integral mediante o teorema fundamental das integrais de liña. Así, $f(x, y) = xy^3 + x + y$ é unha función potencial, e

$$\int_C F \cdot d\alpha = f(2, 0) - f(0, 0) = 2.$$

Ou tamén, como F é conservativo, o valor da integral é independente do camiño elixido, e podemos substituír o camiño semicircular por outro máis simple. Por exemplo, o segmento lineal que une ambos os puntos, $\alpha(t) = (t, 0)$, $t \in [0, 2]$, e

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_0^2 dt = 2.$$

Exercicios

9. Calcula o valor da integral de liña $\int_C F \cdot d\alpha$ para os seguintes casos. Debemos ter en conta que se a integral é independente do camiño de integración, ás veces pode resultar máis fácil buscar un camiño alternativo.

a) $F(x, y, z) = e^z(y, x, xy)$, $\alpha(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3)$, $t \in [0, \pi]$,

$\beta(t) = (4 - 8t, 0, 3)$, $t \in [0, 1]$

b) $F(x, y) = (2xy, x^2 + y^2)$, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ dende $(5, 0)$ ata $(0, 4)$,
 $y = 4 - x^2$ dende $(2, 0)$ ata $(0, 4)$.

10. Calcula o valor da integral de liña $\int_C y^2 dx + 2xy dy$ para as curvas da Figura 7.15.

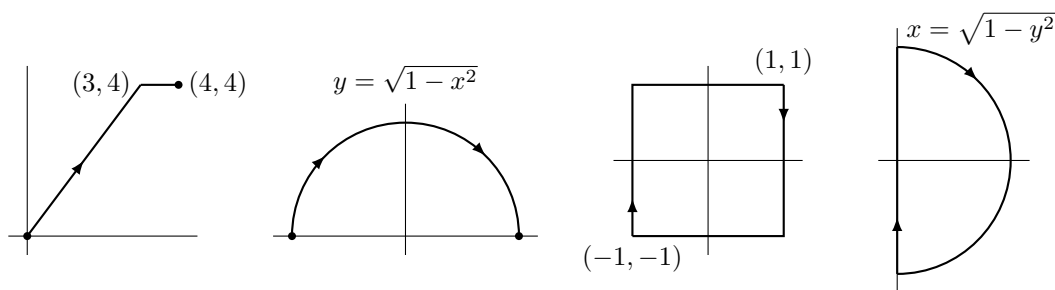


Figura 7.15: Varias curvas regulares no plano

11. Calcula as seguintes integrais de liña sobre os camiños indicados utilizando o teorema fundamental das integrais de liña.

- a) $\int_C \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} dy$, $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$ dende $(7, 5)$ ata $(1, 5)$.
- b) $\int_C (z + 2y)dx + (2x - z)dy + (x - y)dz$, 1) segmento dende $(0, 0, 0)$ ata $(1, 1, 1)$.
2) poligonal dende $(0, 0, 0)$ ata $(1, 1, 1)$.
12. Calcula o traballo realizado polo campo de forzas F para mover un obxecto de P a Q .
- a) $F(x, y) = (9x^2y^2, 6x^3y - 1)$, $P = (0, 0)$, $Q = (5, 9)$
- b) $F(x, y) = \left(\frac{2x}{y}, -\frac{x^2}{y^2}\right)$, $P = (-1, 1)$, $Q = (3, 2)$
13. Sexa F é un campo de forzas constante. Proba que F é conservativo e que o traballo realizado por F para mover unha partícula ó longo de calquera camiño dende un punto P a outro Q é, $W = F \cdot (Q - P)$.

7.7. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Unha parametrización da curva C que representa o arco de circunferencia con orientación negativa que vai dende $(-2, 0)$ a $(2, 0)$ é:
- a) $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. b) $\alpha(t) = (2 \sin t, 2 \cos t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
c) $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. d) $\alpha(t) = (2 \sin t, 2 \cos t)$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
2. O teorema fundamental das integrais de liña garantiza que se $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é un campo continuo e $C = \alpha[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ é unha curva regular a anacos, entón
- a) Existe $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\int_C F \cdot d\alpha = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$.
b) $\int_C F \cdot d\alpha = 0$
c) Se C é pechada entón $\int_C F \cdot d\alpha = 0$.
d) Se F é conservativo, existe $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\int_C F \cdot d\alpha = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$.
3. Sexan $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ unha curva regular a anacos nun dominio aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, $C = \alpha[a, b]$, $F = (F_1, F_2)$ un campo conservativo de clase un en A e f unha función potencial de F en A . Unha das seguintes igualdades é FALSA.

$$a) \int_C F \cdot d\alpha = \int_C \nabla f \cdot d\alpha$$

$$b) \int_C F \cdot d\alpha = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

$$c) \int_C \nabla f \cdot d\alpha = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

$$d) \int_C F \cdot d\alpha = \int_C f d\alpha$$

4. Sexan $C_1 = \alpha[0, \frac{4\pi}{3}]$ e $C_2 = \beta[0, 2\pi]$, onde $\alpha(t) = \begin{cases} (2 \cos t, 2 \sin t) & 0 \leq t \leq \pi \\ (\frac{3}{\pi}t - 5, 0) & \pi \leq t \leq \frac{4\pi}{3} \end{cases}$,

$\beta(t) = \begin{cases} (\frac{t}{\pi} - 1, 0) & 0 \leq t \leq \pi \\ (1 + \cos t, -\sin t) & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$, e sexa $F = (F_1, F_2)$ un campo conservativo de clase un en $\mathbb{R}^2$. Unha das seguintes afirmacións é, en xeral, FALSA.

a) $\alpha(0) = \beta(2\pi)$ e $\alpha(\frac{4\pi}{3}) = \beta(0)$ b) $\int_{C_1} F \cdot d\alpha + \int_{C_2} F \cdot d\beta = 0$

c) $\int_{C_1} F \cdot d\alpha = \int_{C_2} F \cdot d\beta$ d) Existe $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\int_{C_1} F \cdot d\alpha = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\alpha$.

5. Sexa W o traballo realizado polo campo de forzas $F(x, y, z) = (x, y, -5z)$ ó trasladar unha partícula unha volta enteira sobre a circunferencia $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 3)$, $t \in [0, 2\pi]$. Entón,

a) $W = 0$ b) $W = -1$ c) $W = 1$ d) $W = 2$

6. Sexan $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ e $C = \alpha[0, \pi]$ para $\alpha(t) = (3 \cos t, 2 \sin t, 1)$. Unha das seguintes afirmacións é FALSA.

a) F é un campo conservativo.

b) Existe $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\int_C F \cdot d\alpha = f(\alpha(\pi)) - f(\alpha(0))$.

c) $\int_C F \cdot d\alpha = 0$

d) A curva C é simple, pechada e regular.

7.8. Integrales de liña con MATLAB

Utilizamos a cadea de sentenzas que seguen para calcular a integral de liña do campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x^2y, x - z, xyz) \text{ sobre } \alpha(t) = (t, t^2, 2), t \in [0, 1], \text{ e que ten como solución } I = -\frac{17}{15}.$$

```
>>syms x y z t
>>F(x,y,z)=[x^2*y, x-z, x*y*z]
>>FC=F(t,t^2,2)
>>C=[t,t^2,2];
>>DC=diff(C,t)
>>PE=FC*DC.'
```

```
>>I=int (PE,t,0,1)
```

Observaremos que da sentenza $DC.'$ resulta a matriz trasposta de DC ; e do produto $FC*DC.'$ obtense o produto escalar destas dúas matrices.

Coas sentenzas que seguen, comprobamos se un campo é conservativo e calculamos, no seu caso, a función potencial e a integral de liña que indicamos, para dúas e tres variables, respectivamente. As solución son $IL = -1$ e $IL = 1$, respectivamente.

```
>>syms x y
>>F=[cos(x)*sin(y), sin(x)*cos(y)]
>>ROT=diff(F(2),x)-diff(F(1),y)
>>f(x,y)=int(F(1),x)+int(F(2)-diff(int(F(1),x),y),y)
>>IL=f(3*pi/2, pi/2)-f(0, -pi)

>>syms x y z
>>F=[3*x^2*y^2*z, 2*x^3*y*z, x^3*y^2]
>>ROT=[diff(F(3),y)-diff(F(2),z), diff(F(1),z)-diff(F(3),x), ...
diff(F(2),x)-diff(F(1),y)]
>>f(x,y,z)=int(F(1),x)+int(F(2)-diff(int(F(1),x),y),y)+int(F(3)-...
diff(int(F(1),x)+int(F(2)-diff(int(F(1),x),y),y),z),z)
>>IL=f(1,1,1)-f(0,0,0)
```

7.9. Solución dos exercicios propostos.

1-a. $\alpha(t) = (3 \cos t, 3 \sin t), t \in [0, 2\pi]$

1-b. $\alpha(t) = (4 \sin t, 3 \cos t), t \in [0, 2\pi]$

$$1\text{-c. } \alpha(t) = \begin{cases} (0, 3t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (3(t-1), 3) & \text{se } t \in [1, 2] \\ (3, 3(3-t)) & \text{se } t \in [2, 3] \\ (3(4-t), 0) & \text{se } t \in [3, 4] \end{cases}$$

$$1\text{-d. } \alpha(t) = \begin{cases} (t^2, t) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (2-t, 2-t) & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases}$$

2-a. $-\frac{40}{3}$

2-b. $-\frac{17}{15}$

3-a. $\frac{63}{2}$

3-b. $\frac{5}{2} - 6\pi$

4. $2\sqrt{2}\pi$

6-a. 0

6-b. 0

7. $-\frac{a^5}{4}\pi$

8-c. $f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

8-d. $f(x, y) = \frac{x}{y} + z^2 - z$

8-e. $f(x, y) = xye^z$

8-f. $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + z$

9-a. 0

9-b. $\frac{64}{3}$

10-a. 64

10-b. 0

10-c. 0

10-d. 0

11-a. $-\frac{12}{481}$

11-b. 2

12-a. 30366

12-b. $\frac{7}{2}$

Soluciones autoevaluación. 1b, 2d, 3d, 4c, 5a, 6d

Capítulo 8

Integración en $\mathbb{R}^2$

8.1. Integrales dobles sobre rectángulos

Para definir a integral dobre poderíamos extender a definición de integral de Riemann de función dunha variable como límite das sumas de Riemann dunha partición do dominio.

Sen embargo, a dificultade do estudo rigoroso da teoría da integración múltiple é o motivo fundamental para abordar este capítulo dende un punto de vista totalmente práctico utilizando os coñecementos da teoría de integración dunha variable e algunhas aproximacións xeométricas deste concepto.

Sexa S un rectángulo no plano, isto é, dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ fixos,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

ou, en termos de produto cartesiano, $S = [a, b] \times [c, d]$.

Definición 8.1 *A integral dobre dunha función continua $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre un rectángulo $S = [a, b] \times [c, d] \subset A$ é o número real*

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Exemplo 8.2 Calcula $\iint_S (x^2 + xy^2 + y^2 + 2xy) dx dy$, $S = [-2, 1] \times [0, 2]$. Debemos realizar o cálculo de

$$\int_{-2}^1 \left(\int_0^2 (x^2 + xy^2 + y^2 + 2xy) dy \right) dx,$$

polo que en primeiro lugar considerando a variable x como unha constante, debemos calcular

$$\int_0^2 (x^2 + xy^2 + y^2 + 2xy) dy = \left[x^2 y + (x+1) \frac{1}{3} y^3 + xy^2 \right]_0^2 = 2x^2 + \frac{8}{3}(x+1) + 4x,$$

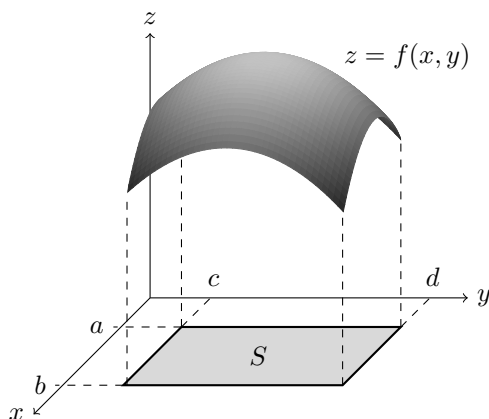


Figura 8.1: Función definida nun rectángulo

e, finalmente,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 \left(\int_0^2 (x^2 + xy^2 + y^2 + 2xy) dy \right) dx &= \int_{-2}^1 \left(2x^2 + \frac{8}{3}(x+1) + 4x \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}(x+1)^2 + 2x^2 \right]_{-2}^1 = \frac{2}{3} + \frac{16}{3} + 2 - \left(-\frac{16}{3} + \frac{4}{3} + 8 \right) = 4. \end{aligned}$$

8.2. Integrales dobles sobre recintos non rectangulares

Nesta sección consideraremos un caso máis xeral de recintos de integración. En primeiro lugar, estudaremos o caso no que os límites de integración da variable x son constantes e da forma $x = a$ e $x = b$, con $a < b$ e a variable y ten como límites de integración dúas funcións $y = u(x)$ e $y = v(x)$, no que $u(x) \leq v(x)$ para todo $x \in [a, b]$, Figura 8.2. Deste xeito, o recinto de integración, que deberá ser un conxunto pechado e limitado, é da forma

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}.$$

Definición 8.3 A integral dobre dunha función continua $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre o recinto pechado e limitado $S \subset A$ é o número real

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Obsérvese que se $u(x) = c$ e $v(x) = d$, o recinto S é rectangular e a integral coincide coa definida para recintos rectangulares.

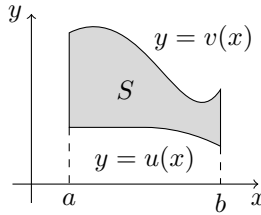


Figura 8.2: Rectinto de integración comprendido entre funcións $y = u(x)$ e $y = v(x)$

Exemplo 8.4 Calcula a integral dobre $\iint_S x^2 y dx dy$, sobre o rectinto do primeiro cuadrante limitado polas curvas $y = 4x^2$ e $x = 1$.

O rectinto S de integración está mostrado na Figura 8.3, no que a variable x varía entre 0 e 1 e, para cada valor de x neste intervalo, a variable y está limitada polas funcións $y = 0$ e $y = 4x^2$. Así, o rectinto de integración será

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4x^2\},$$

e a integral que queremos calcular

$$\iint_S x^2 y dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{4x^2} x^2 y dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{4x^2} x^2 dx = 8 \int_0^1 x^6 dx = \frac{8}{7}.$$

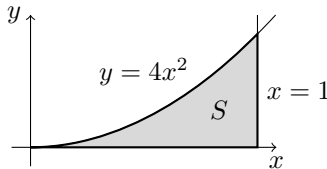


Figura 8.3: Rectinto de integración baixo a parábola $y = 4x^2$

Expresión similar pode obterse se no rectinto S os límites de integración son constantes na variable y . Isto é, $y = c$ e $y = d$, $c < d$ e os límites de integración da variable x veñen dados polas funcións $x = p(y)$ e $x = q(y)$, con $p(y) \leq q(y)$ para todo $y \in [c, d]$. Estes rectintos, representados na Figura 8.4, quedan definidos mediante

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(y) \leq x \leq q(y), c \leq y \leq d\}.$$

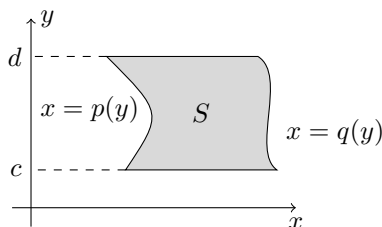


Figura 8.4: Recinto de integración comprendido entre funcións $x = p(y)$ e $x = q(y)$

Definición 8.5 A integral dobre dunha función continua $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre o recinto pechado e limitado $S \subset A$ é o número real

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Debemos ter en conta que nestes dous últimos casos non se pode cambiar a orde de integración sen realizar os cambios oportunos nos límites de integración, pois chegaríamos ó absurdo de que o resultado da integral dobre sobre o recinto S sería unha función da variable x ou da variable y . Con todo, existen bastantes situacións nas que é posible calcular a integral dobre nas dúas formas de integración estudadas, realizando previamente un cambio axeitado nos límites de integración. Por exemplo, na Figura 8.5 o recinto de integración pode poñerse de dúas formas distintas:

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : v^{-1}(y) \leq x \leq u^{-1}(y), c \leq y \leq d\}, \end{aligned}$$

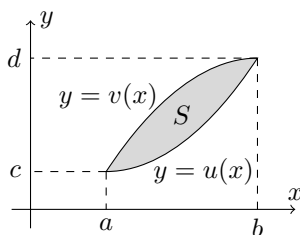


Figura 8.5: Recinto de integración comprendido entre dúas funcións

Polo tanto, a integral dobre dunha función continua $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre o recinto pechado e limitado $S \subset A$ pode expresarse nos dous ordes de integración:

$$\int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{v^{-1}(y)}^{u^{-1}(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Exemplo 8.6 A integral do exemplo 8.4 pódese calcular cambiando a orden de integración. Neste caso

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \frac{\sqrt{y}}{2} \leq x \leq 1\},$$

e a integral imos calcular

$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^1 x^2 y dx \right) dy = \frac{8}{7}.$$

Cando os dominios de integración son máis complexos que os indicados anteriormente, sempre poden reducirse ós tipos estudados mediante unha división axeitada nun número finito de subdominios.

Consideremos unha función $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua e non negativa sobre $S \subset A$; isto é, $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in S$. Utilizando o concepto de integral dobre, podemos atopar o volume limitado polo rectángulo S e a superficie que describe a gráfica da función f . Con maior precisión, o volume que determina o seguinte conxunto

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in S, 0 \leq z \leq f(x, y)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)\}. \end{aligned}$$

O número real determinado por este volume denomínase integral dobre da función f sobre o rectángulo S e denótase mediante

$$\iint_S f(x, y) dx dy.$$

Exemplo 8.7 Se $f(x, y) = k$ para todo $(x, y) \in S = [a, b] \times [c, d]$, onde k é unha constante positiva, entón o conxunto V é un paralelepípedo, polo que o seu volume será $V = (b-a)(d-c)k$. En efecto;

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d k dy \right) dx = \int_a^b k [y]_c^d dx = \int_a^b k(d-c) dx = k(d-c) [x]_a^b = k(d-c)(b-a).$$

Debemos ter en conta que nos pasos iniciais para chegar á definición de integral dobre, impuxemos a condición de que a función fose non negativa. Isto foi así só para ter a idea intuitiva de que a integral é un volume e, polo tanto, o resultado debe ser un número positivo. Por suposto a integral dobre admite outras interpretacións, polo que na definición estas condicións non foron tidas en conta. Obviamente, se o obxectivo do cálculo da integral dobre é a obtención dun volume e nalgúns subrecintos a función toma valores negativos, debemos obter en primeiro lugar estes subrecintos, calcular neles a integral da función cambiada de signo e, finalmente, sumar tódolos resultados obtidos.

Exemplo 8.8 Calcula o volume do sólido do primeiro octante limitado polo plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $a > 0, b > 0, c > 0$.

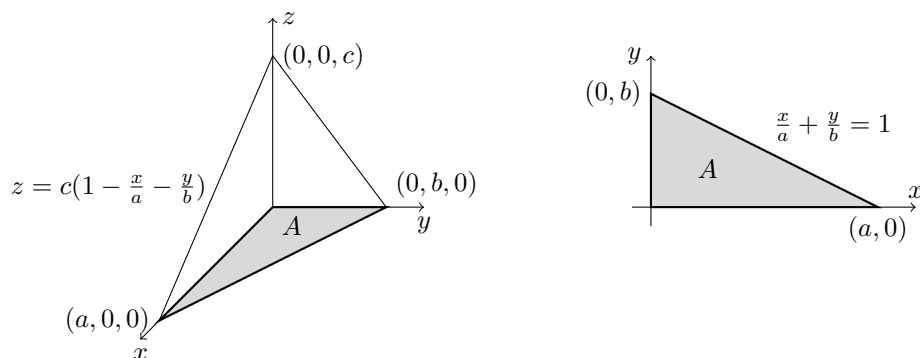


Figura 8.6: Volume dun sólido e recinto de integración

Temos que integrar, por exemplo, a función $z = c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b})$, sobre o recinto do primeiro cuadrante do plano xy , limitado polos eixes coordenados e a recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Daquela, o recinto de integración está limitado mediante, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b(1 - \frac{x}{a})$. Así,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}) dy dx = c \int_0^a \left[(1 - \frac{x}{a})y - \frac{1}{2b}y^2 \right]_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx \\ &= \frac{cb}{2a^2} \int_0^a (a-x)^2 dx = \frac{cb}{6a^2} [(x-a)^3]_0^a = \frac{abc}{6}. \end{aligned}$$

Exercicios

1. Calcula as integrais das funcións: a) $f(x, y) = x^2y^2$, no recinto do primeiro cuadrante limitado por $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$. b) $f(x, y) = xy$, no conxunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 9, x^2 - 12x + y^2 \geq -27, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq 6\}$.
2. a) Calcula o volume baixo a superficie $x + y - z = -2$ e sobre o recinto limitado por $y = x^2$ e $y = 2$. b) Analogamente, para a superficie $z = x + 2y + 4$ e o recinto limitado por $y = 2x$, $y = 3 - x$ e $y = 0$.

8.3. Cambio de variable

No estudado anteriormente en integrais dobres, sempre consideramos o dominio de integración no plano cartesiano xy , polo que a integral dobre resultaba na forma $\iint_S f(x, y) dx dy$. Ás veces, o cálculo directo da integral pode resultar moi complicado polo que, nalgúns casos, é conveniente realizar un cambio axeitado nas variables utilizadas. Isto é, a función a integrar é da forma $A \subset$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, onde o dominio de integración S está contido no conxunto $A \subset \mathbb{R}^2$. Preténdese agora cambiar as variables x e y do dominio de integración nunhas novas variables que denominaremos u e v , e que formalmente é utilizado a través dunha función $(x, y) = g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v))$, polo que a nova función a integrar vai ser a composición de g con f na forma

$$\begin{aligned} B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\xrightarrow{g} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow g(u, v) \rightarrow f(g(u, v)) \end{aligned}$$

e o recinto de integración será $g^{-1}(S) \subset B$. Nesta situación pode probarse

Teorema 8.9 (Cambio de variable en integrais dobres) Sexan $g: B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ unha función inxectiva, de clase un nun conxunto limitado B , con $g(B) \subset A$ e tal que $\det Dg(u, v) \neq 0$, para todo $(u, v) \in B$ e denotemos por $S' = g^{-1}(S)$. Se f é unha función continua no recinto S e a integral dobre $\iint_S f(x, y) dx dy$ existe, entón verifícase a igualdade

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{S'} f(g(u, v)) |\det Dg(u, v)| du dv.$$

En integración dobre existen dous cambios de variables estándar moi utilizados nos distintos campos da ciencia, que son o cambio lineal e o cambio a coordenadas polares.

8.3.1. Coordenadas polares

Un punto (x, y) no plano queda determinado de forma unívoca polo ángulo θ que forma o vector (x, y) e o eixe de abscisas, e a distancia, que denotaremos por r , do punto a orixe de coordenadas (Figura 8.7). Desta forma, a relación entre as coordenadas (x, y) e as novas coordenadas (r, θ) vén dada polas ecuacións, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Isto é, a función de cambio de variable é da forma $g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Para que esta función $g: B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sexa inxectiva, teremos que determinar o conxunto B . Pode observarse, mediante consideracións xeométricas, que se $B = [0, 2\pi) \times (0, +\infty)$, entón g é unha aplicación inxectiva e $\text{Im } g = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Ademais,

$$\det Dg(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

Deste xeito, a función g que define o cambio de variable a coordenadas polares é

$$\begin{aligned} (0, +\infty) \times [0, 2\pi) &\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (r, \theta) &\rightarrow g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \end{aligned}$$

e a integral da función f no recinto S resulta

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{S'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

e o recinto S' estaría limitado polas ecuacións das curvas que definen S en coordenadas polares.

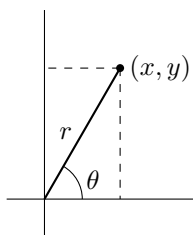


Figura 8.7: Coordenadas polares

Exemplo 8.10 Calcula a integral dobre $\iint_S \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$, sobre o recinto do primeiro cuadrante limitado pola circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ e a recta $x + y = 1$.

No recinto de integración en coordenadas polares, o ángulo θ está no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e o raio r está limitado inferiormente pola recta $x + y = 1$, que en coordenadas polares ten como ecuación $r(\cos \theta + \sin \theta) = 1$. De aquí deducimos que o límite inferior de integración da coordenada r é, $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$. Ademais, o límite superior de integración de r está sobre a circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, que en coordenadas polares ten como ecuación $r = 2$. Deste xeito, o recinto de integración en coordenadas polares é da forma

$$g^{-1}(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \leq r \leq 2\}.$$

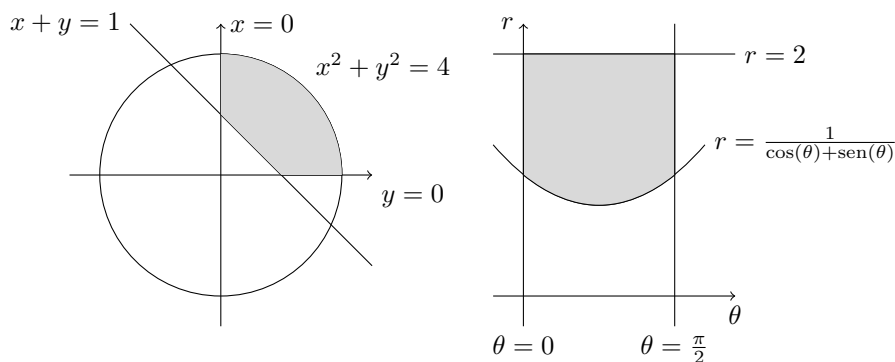


Figura 8.8: Recinto de integración en coordenadas cartesianas e polares

A función a integrar é $f(r \sin \theta, r \cos \theta) = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{r}$, e teremos que calcular

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^2 \frac{\cos \theta + \sin \theta}{r} r dr \right) d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) \left[r \right]_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^2 d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \theta + 2 \sin \theta - 1) d\theta = 4 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 8.11 Calcula o volume do sólido limitado polo cilindro $r = 4 \cos \theta$, a esfera $r^2 + z^2 = 16$ e o plano $z = 0$.

O cilindro $r = 4 \cos \theta$ corresponde a $x^2 + y^2 - 4x = 0$ en coordenadas cartesianas, e a esfera $r^2 + z^2 = 16$ corresponde a $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. O volume represéntase na figura 8.9. Polo tanto, debemos integrar a función que define a parte superior da superficie da esfera, $z = \sqrt{16 - r^2}$, sobre o recinto que define o cilindro no plano xy , $r = 4 \cos \theta$. Así, os límites de integración do recinto son, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 4 \cos \theta$.

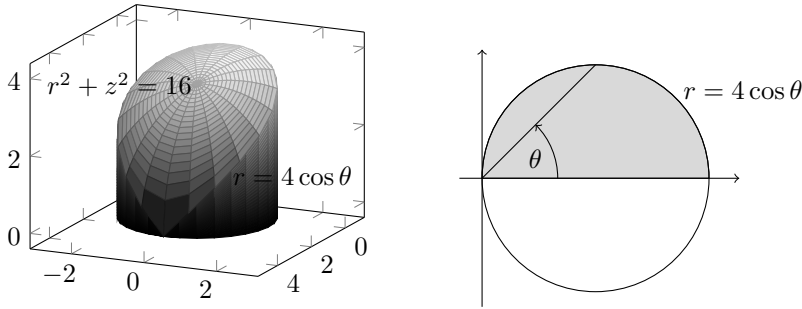


Figura 8.9: Volumen dun sólido e recinto de integración

Como o sólido é simétrico respecto do plano $y = 0$, podemos calcular o volume para $y \geq 0$, e multiplicalo por 2. Así,

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos \theta} r \sqrt{16 - r^2} dr d\theta = -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(16 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{4 \cos \theta} d\theta \\ &= -\frac{128}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \theta - 1) d\theta = -\frac{128}{3} \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} - \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64(3\pi - 4)}{9}. \end{aligned}$$

8.3.2. Cambio lineal

Neste caso, a función que define o cambio de variable é unha función lineal, da forma $(x, y) = g(u, v) = (au + bv, cu + dv)$. Isto é, o cambio é da forma $x = au + bv$, $y = cu + dv$.

Unha función lineal $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é inxectiva se, e só se, é bixectiva, e esta condición é equivalente a que o determinante da matriz asociada, que neste caso coincide coa matriz xacobiana, $Dg(u, v)$,

é distinto de cero. Isto é, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$. Nestas condicións, a función g verifica tódalas condicións do teorema do cambio de variable, polo que podemos poñer

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{S'} f(au + bv, cu + dv) |ad - bc| du dv.$$

Observaremos que se a función g é unha transformación afín en lugar de ser lineal, isto é, $x = au + bv + p$, $y = cu + dv + q$, o resultado é o mesmo.

Exemplo 8.12 Calcula $\iint_S e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$ sendo S o recinto limitado polos eixes coordenados e a recta $x + y = 3$. En coordenadas cartesianas os límites de integración son $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3 - x$, e a integral, $\int_0^3 \left(\int_0^{3-x} e^{\frac{y-x}{y+x}} dy \right) dx$.

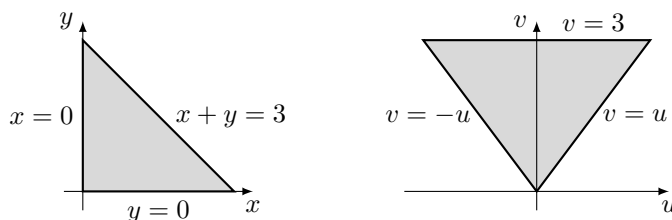


Figura 8.10: Exemplo de cambio de variable lineal

Realizando o cambio de variable $u = y - x$, $v = y + x$ ou, equivalentemente, $x = \frac{-u + v}{2}$

$y = \frac{u + v}{2}$, o determinante da matriz xacobiana é $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$, e aplicando o teorema do

cambio de variable a esta función g , resulta

$$\iint_S e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy = \frac{1}{2} \iint_{S'} e^{\frac{u}{v}} du dv.$$

O recinto de integración no novo sistema de coordenadas, $g^{-1}(S)$ obtense poñendo as ecuacións das curvas, $x + y = 3$, $x = 0$ e $y = 0$, que delimitan o recinto de integración, no novo sistema de coordenadas; isto é, $x + y = 3$ equivale a $v = 3$, $x = 0$ equivale a $v = u$ e $y = 0$ equivale a $v = -u$, polo que os límites do recinto de integración no novo sistema de coordenadas uv serían, $0 \leq v \leq 3$, $-v \leq u \leq v$. Ademais a integral é impropia, pois en calquera veciñanza do $(0, 0)$ $e^{\frac{u}{v}}$ non está limitada, polo que

$$\begin{aligned}\iint_S e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^3 \left(\int_{-v}^v \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} du \right) dv = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^3 \left[v e^{\frac{u}{v}} \right]_{-v}^v dv \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^3 (e - e^{-1}) v dv = \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{4} (e - e^{-1}).\end{aligned}$$

Enunciamos para dúas variables, aínda que tamén se verifica para n variables, un resultado moi útil utilizado no cálculo dalgunhas integrais.

Teorema 8.13 *Se $f(x, y) = h(x)g(y)$ e existe $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ para $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, entón*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \left(\int_a^b h(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right).$$

Exercicios

3. Calcula a integral da función f no recinto correspondente.

- a) $f(x, y) = x^2$ en $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25, x^2 + y^2 \geq 9, y \leq x, y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x\}$.
- b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, en $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$.
- c) $f(x, y) = xy$, en $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \geq 0, x^2 + y^2 - 4x \leq 0, y \geq 0\}$.

4. Utiliza coordenadas polares para calcular $\iint_R f(x, y) dx dy$, onde R é o recinto definido por $x^2 + y^2 \leq a^2$, $a > 0$, para as funcións,

- a) $f(x, y) = y^2$, b) $f(x, y) = \frac{1}{a^2 + x^2 + y^2}$, c) $f(x, y) = \frac{1}{a + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

5. A masa dunha lámina de densidade $\rho(x, y)$ que corresponde a un recinto plano R está dada por $m = \iint_R \rho(x, y) dx dy$. Os momentos de masa respecto dos eixes x e y defínense como $M_x = \iint_R y \rho(x, y) dx dy$ e $M_y = \iint_R x \rho(x, y) dx dy$. O centro de masas corresponde ó par de puntos $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right)$. Finalmente, o momento de inercia da lámina respecto dos eixes x e y defínense como $I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y) dx dy$ e $I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y) dx dy$. A suma $I_o = I_x + I_y$ defínese como momento polar de inercia.

Calcula a masa e o centro de masas da lámina limitada polas ecuacións que seguen e coa densidade que se especifica en cada caso.

- a) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$, $\rho(x, y) = k(a - y)y$
- b) $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$

c) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$, $\rho(x, y) = kxy$

d) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$, $\rho(x, y) = 1$

6. Verificar os momentos de inercia para cada figura supoñendo que a densidade é $\rho(x, y) = 1$ (Figura 8.11).

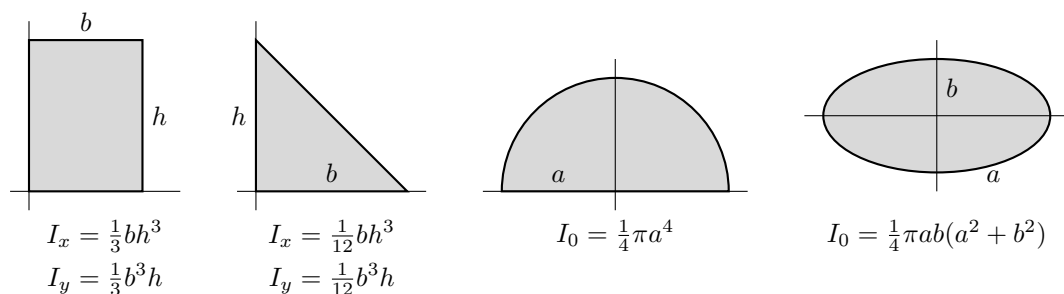


Figura 8.11: Momentos de inercia dalgunhas superficies planas

8.4. Teorema de Green

Moitos teoremas e resultados científicos identifícanse co nome dunha persoa concreta. Naturalmente, tendemos a pensar que así recoñecemos o mérito a quen primeiro fixo tal descubrimento. Pero, con certa frecuencia, e por diversas razóns, son esquecidos os nomes de persoas que fixeron achegas cando menos tan pioneiras como as daquelas cuxo nome honramos na denominación do teorema.

O teorema de Green é un resultado no plano que relaciona unha integral dobre cunha integral de liña. Leva o nome do matemático e físico británico George Green (1793–1841), quen no ano 1828 nun traballo titulado *Un ensaio sobre a aplicación da análise matemática ás teorías da electricidade e o magnetismo* que non chegou a publicar, enunciou e demostrou un resultado máis xeral no espazo, de feito, un caso particular do teorema da diverxencia que analizaremos no seguinte capítulo. Certamente, o caso bidimensional pode derivarse do resultado máis xeral probado por Green, pero non hai constancia de que o científico inglés o fixese. O teorema no plano aparece enunciado en 1846 nunha nota do matemático francés Agustin Louis Cauchy (1789-1857) e cinco anos despois, o matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866) presentaba unha demostración na súa disertación doutoral. Ambos autores formularon o teorema no marco da teoría de funcións de variable complexa.

Definición 8.14 *Unha curva $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é simple se $\alpha(t) \neq \alpha(t')$ para todo $t, t' \in (a, b)$, $t \neq t'$. Isto é, se a curva non se corta consigo mesma.*

Definición 8.15 *Un dominio $A \subset \mathbb{R}^2$ é simplemente conexo, se a súa fronteira é unha curva pechada simple.*

Nunha linguaxe menos precisa, se unha curva pechada encerra soamente puntos do conxunto A , ou se A non contén buratos, entón dicimos que A é un dominio simplemente conexo.

O teorema fundamental do cálculo integral, $\int_a^b \frac{d}{dx} F(x) = F(b) - F(a)$, interprétase dicindo que cando se integra a derivada dunha función nun intervalo $[a, b]$, o resultado que se obtén coincide coa diferenza do valor da función nos extremos do intervalo. O resultado que segue, teorema de Green, proba unha igualdade análoga para funcións de dúas variables, relacionando unha integral dobre sobre un recinto do plano cunha integral de liña sobre o bordo do recinto.

Teorema 8.16 (de Green) *Sexa $A \subset \mathbb{R}^2$ un dominio limitado simplemente conexo que ten como fronteira unha curva regular a anacos, $C = \alpha[a, b]$, orientada positivamente. Se $F = (F_1, F_2)$ é un campo vectorial de clase un nun dominio aberto que contén a A , entón*

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_C F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy. \quad (8.1)$$

Exemplo 8.17 Para calcular a integral de liña $\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2)dy$ sobre a curva da Figura 8.12 con orientación positiva, podemos parametrizar a curva mediante

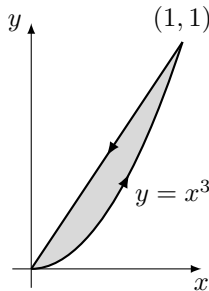


Figura 8.12: Aplicación do teorema de Green

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, t^3) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (2-t, 2-t) & \text{se } t \in [1, 2] \end{cases}.$$

$$\text{Se } t \in [0, 1], \begin{vmatrix} x = t & dx = dt \\ y = t^3 & dy = 3t^2 dt \end{vmatrix} e y^3 dx + (x^3 + 3xy^2)dy = (10t^9 + 3t^5)dt,$$

$$\text{e se } t \in [1, 2], \begin{vmatrix} x = 2-t & dx = -dt \\ y = 2-t & dy = -dt \end{vmatrix} e y^3 dx + (x^3 + 3xy^2)dy = -5(2-t)^3 dt,$$

polo que

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2)dy = \int_0^1 (10t^9 + 3t^5)dt - \int_1^2 5(2-t)^3 dt = \frac{1}{4}.$$

Por outra parte, tamén se pode calcular utilizando o teorema de Green,

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 \int_{x^3}^x 3x^2 dy dx = \frac{1}{4}.$$

Se realizamos tódolos cálculos anteriores utilizando ambos os métodos, podemos comprobar que o segundo é relativamente máis sinxelo.

Exemplo 8.18 Unha partícula que está sometida ó campo de forzas $F(x, y) = (y^3, x^3 + 3xy^2)$ dá unha volta enteira a un círculo centrado na orixe e raio 3 con orientación positiva. Para calcular o traballo realizado, utilizando o teorema de Green, temos que $W = \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \iint_A 3x^2 dy dx$, e utilizando coordenadas polares, resulta

$$W = \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \frac{243\pi}{4}.$$

Exemplo 8.19 Se a curva é regular a anacos, como por exemplo a da Figura 8.13, para calcular a integral $\int_C (\arctan x + y^2) dx + (e^y - x^2) dy$ coa orientación indicada, utilizamos o teorema de Green e a transformación do recinto A en coordenadas polares que vén descrita por $1 \leq r \leq 3$ e $0 \leq \theta \leq \pi$, polo que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -2x - 2y = -2r(\cos \theta + \sin \theta),$$

$$\begin{aligned} \int_C (\arctan x + y^2) dx + (e^y - x^2) dy &= \iint_A -2(x + y) dx dy \\ &= \int_0^\pi \int_1^3 -2r^2(\cos \theta + \sin \theta) dr d\theta = -\frac{104}{3}. \end{aligned}$$

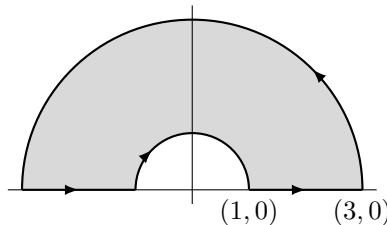


Figura 8.13: Aplicación do teorema de Green nunha semi-coroa circular

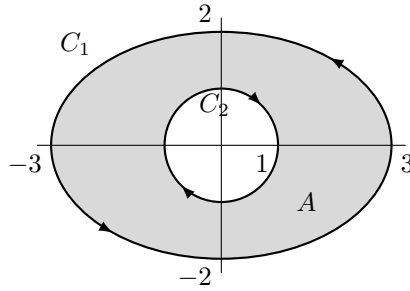


Figura 8.14: Descomposición dun recinto para aplicar o teorema de Green

Exemplo 8.20 Vexamos agora un exemplo do teorema de Green aplicado a un recinto con burato como o da Figura 8.14, coa orientación indicada.

A é o recinto entre a elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ e a circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Calcularemos a integral de liña $\int_C 2xydx + (x^2 + 2x)dy$, onde $C = C_1 \cup C_2$ é a fronteira de A .

Se denotamos por A_1 o dominio que encerra C_1 e A_2 o dominio que encerra C_2 , podemos poñer

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\alpha &= \int_{C_1} F \cdot d\alpha + \int_{C_2} F \cdot d\alpha \\ &= \iint_{A_1} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy - \iint_{A_2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_A (2x + 2 - 2x) dx dy = 2 \iint_A dx dy \\ &= 2(\text{área de } A) = 2(2 \cdot \pi \cdot 3 - \pi) = 10\pi. \end{aligned}$$

Por outra parte, se a orientación de C_2 fose a contraria,

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\alpha &= \int_{C_1} F \cdot d\alpha + \int_{C_2} F \cdot d\alpha \\ &= \iint_{A_1} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{A_2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 2(\text{área de } A_1 + \text{área de } A_2) = 14\pi. \end{aligned}$$

Exercicios

7. Comproba que se verifica a igualdade, $\int_C y^2 dx + x^2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$, para:

a) Triángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 4)$. b) Círculo $x^2 + y^2 = 1$.

8. Utiliza o teorema de Green para calcular a integral de liña de F sobre C .

a) $F(x, y) = (2 \arctan \frac{y}{x}, \ln(x^2 + y^2))$, $C: x = 4 + 2 \cos \theta, y = 4 + \sin \theta; \theta \in [0, 2\pi]$

b) $F(x, y) = (e^x \sin 2y, 2e^x \cos 2y)$, $C: x^2 + y^2 = a^2$.

c) $F(x, y) = (xy, x + y)$, $C: \text{fronteira do recinto } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

d) $F(x, y) = (3x^2 e^y, e^y)$, $C: \text{fronteira do recinto } 1 \leq \max\{|x|, |y|\} \leq 2$.

(Nos dous últimos apartados con orientación positiva na curva exterior e negativa na interior).

9. Utiliza o teorema de Green para calcular o traballo realizado polo campo de forzas F sobre unha partícula que se move, con orientación positiva, polo camiño pechado C .

a) $F(x, y) = (xy, x + y)$, $C: x^2 + y^2 = 4$.

b) $F(x, y) = (e^x - 3y, e^y + 6x)$, $C: r = 2 \cos \theta$.

10. Proba que se f, g son funcións derivables e C unha curva pechada simple regular a anacos, entón $\int_C f(x)dx + g(y)dy = 0$.

11. Calcula o traballo realizado polo campo $F(x, y, z) = (2xz^2 + y \sin(xy), x \sin(xy), 2x^2z)$ para desprazar unha partícula pola curva $\alpha(t) = (t, \cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$.

12. Calcula a integral se liña do campo $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ sobre o arco da elipse, no plano $y = 2$, de centro $(0, 2, 0)$ e semieixes $a = 2$ e $b = 3$, dende o punto $(0, 2, 3)$ ata $(0, 2, -3)$.

13. Calcula o traballo realizado polo campo $F(x, y) = (\ln(x^2 + 4) + 3y^4, \sin(y^2 + y) - 16x^3y)$ para desprazar unha partícula sobre a fronteira do recinto $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, y \geq 0$, con orientación negativa.

14. Calcula $\int_C ydx + zdy + xdz$ onde C é a intersección de $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$ con orientación negativa observada dende o eixe z para valores suficientemente grandes.

15. Calcula a integral de liña do campo $F(x, y, z) = (y, 3y^3 - x, z)$ sobre cada curva $\alpha(t) = (t, t^n, 0), t \in [0, 1]$, para $n = 1, 2, 3, \dots$

8.5. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. Consideremos o recinto do primeiro cuadrante comprendido entre as rectas $y = \sqrt{3}x, y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, e as circunferencias $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$. A integral $I = \iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ vén dada por,

- a) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^2 r dr \right) d\theta = \frac{\pi}{2}$ b) $I = \int_1^2 \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \right) dr = \frac{\pi}{6}$
 c) $I = \int_1^2 \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} dr \right) d\theta = \frac{\pi}{3} r\theta$ d) $I = \int_1^2 \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{r} d\theta \right) dr = \frac{\pi}{6} \ln(2)$
2. Consideremos o recinto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 2, 0 \leq y - x \leq 2\}$. Mediante o cambio lineal $u = x + y, v = x - y$, a integral da función $f(x, y)$ no recinto A é,
- a) $\int_0^2 \left(\int_{-2}^0 \frac{1}{2} f(x(u, v), y(u, v)) dv \right) du$ b) $\int_0^2 \left(\int_0^2 \frac{1}{2} f(x(u, v), y(u, v)) dv \right) du$
 c) $\int_0^2 \left(\int_{-2}^0 2f(x(u, v), y(u, v)) dv \right) du$ d) $\int_{-2}^0 \left(\int_0^2 2f(x(u, v), y(u, v)) du \right) dv$
3. Se I é a integral dunha función continua $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$, unha das seguintes igualdades é FALSA.
- a) $I = \int_{-1}^1 \int_1^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$ b) $I = \int_1^2 \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x, y) dy dx$
 c) $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^{2 \cos \theta} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$ d) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$
4. Sexa I a integral de $f(x, y)$ no recinto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 1, x \geq 0\}$. Entón,
- a) $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^{\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}} r f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) dr \right) d\alpha$ b) $I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx \right) dy$
 c) $I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$ d) $I = \int_{-1}^0 \left(\int_1^{x^2} f(x, y) dy \right) dx$
5. Sexa $F(x, y) = (2xy, x + y)$ e C a fronteira do recinto comprendido entre as curvas $y = 0$ e $y = 4 - x^2$, orientada positivamente. Se $I = \int_C F \cdot d\alpha$, unha das seguintes afirmacións é FALSA.
- a) $I = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} (1 - 2x) dy dx$
 b) $I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} (1 - 2x) dx dy$
 c) Se $\alpha(t) = \begin{cases} (-t, 4 - t^2) & -2 \leq t \leq 2 \\ (2t - 6, 0) & 2 \leq t \leq 4 \end{cases}$, $C = \alpha[-2, 4]$
 d) $I = \int_{-2}^4 (16t^2 - 6t) dt$
6. Sexan $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, C a curva fronteira de A con orientación positiva e $F(x, y) = (y + \ln \frac{1}{1+x^2}, 2x + \sin(y^2 + 1))$ e denotemos por $I = \int_C F \cdot d\alpha$. Verifícase que
- a) $I = 0$ b) $I = \pi$ c) $I = 2\pi$ d) $I = 3\pi$

8.6. Integración múltiple con MATLAB

A sentença `int` utilízase para calcular unha primitiva ou unha integral definida. Por exemplo, as sentenzas

```
>>syms r t
>>int(int(r^2*sin(t)^3,r,0,2),t,0,pi/4)
```

devólvennos a integral da función

$$f(r, \theta) = r^2 \sin^3 \theta$$

no recinto

$$(r, \theta) \in [0, 2] \times [0, \frac{\pi}{4}].$$

Este comando funciona tamén para integrais impropias e, no seu caso, ∞ substitúese por `inf`. Por exemplo, para calcular a integral impropia

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi.$$

utilizaremos as sentenzas

```
>>syms r t
>>I=int(int(r*exp(-r^2),t,0,2*pi),r,0,inf)
```

Utilizando o teorema de Green para $F(x, y) = (xy, x + y)$ sobre a fronteira do recinto plano $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ dá como solución $TG = 8\pi$, cos sentenzas que seguen.

```
>>syms x y r t
>>F=[x*y, x+y]
>>f(x,y)=diff(F(2),x)-diff(F(1),y)
>>fP=f(r*cos(t),r*sin(t))
>>TG=int(int(r*fP,r,1,3),t,0,2*pi)
```

8.7. Solución dos exercicios propostos.

1-a: $\frac{7}{3} \ln 2$

1-b. 27

2-a. $\frac{128\sqrt{2}}{15}$

2-b. 20

3-a. $34 + \frac{17\pi}{3} - 17\sqrt{3}$

3-b. $\frac{3\pi}{2}$

3-c. 10

4-a. $\frac{\pi a^4}{4}$

4-b. $\pi \ln 2$

4-c. $2a\pi(1 - \ln 2)$

$$5\text{-a. } m = \frac{ka^4(16-3\pi)}{24}, M_x = \frac{ka^5(15\pi-32)}{120}, M_y = 0$$

$$5\text{-c. } m = \frac{32k}{3}, M_x = \frac{256k}{21}, M_y = 32k$$

$$7\text{-a. } \frac{64}{3}$$

$$8\text{-a. } 0$$

$$8\text{-c. } 8\pi$$

$$9\text{-a. } 4\pi$$

$$11. 2$$

$$12. -18$$

$$14. \pi$$

$$5\text{-b. } m = \frac{k\pi a^4}{8}, M_x = M_y = \frac{ka^5}{5}$$

$$5\text{-d. } m = \frac{\pi}{2}, M_x = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}, M_y = 0$$

$$7\text{-b. } 0$$

$$8\text{-b. } 0$$

$$8\text{-d. } 16(e^{-2} - e^2) + 2(e - e^{-1})$$

$$9\text{-b. } 9\pi$$

$$13. \frac{384}{5}$$

$$15. \frac{3}{4} + \frac{1-n}{n+1}$$

Soluciones autoavaliación. 1b, 2a, 3d, 4c, 5d, 6b

Capítulo 9

Integrales de superficie

9.1. Superficies en $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo estudaremos a integración de campos vectoriais en $\mathbb{R}^3$ sobre superficies. Este tipo de integrais son similares á integración de funcións escalares de dúas variables, coa diferenza de que neste caso o plano, dominio das funcións, sofre unha deformación ata transformarse na superficie requirida. Para realizar este estudo necesitamos coñecer a teoría de representación de superficies en $\mathbb{R}^3$ mediante ecuacións paramétricas, isto é, utilizando unha función vectorial que vai depender de dous parámetros.

Intuitivamente, unha superficie é regular se ten plano tanxente en cada punto. Unha superficie é regular a anacos se está formada por un número finito de superficies que son regulares, de forma que se unen con continuidade. Así, unha esfera ou un elipsoide son superficies regulares. Un cubo ou un tetraedro son superficies regulares a anacos. Unha superficie en $\mathbb{R}^3$ non ten por que conter un recinto sólido en $\mathbb{R}^3$. Se, por exemplo, unha superficie en $\mathbb{R}^3$ é fronteira dun sólido, entón dicimos que é pechada. A metade dunha esfera é un exemplo dunha superficie non pechada.

Unha superficie regular é orientable se en cada punto ten un único vector normal unitario que varía con continuidade. Este tipo de superficies teñen dúas caras. A maioría das superficies utilizadas en $\mathbb{R}^3$ son orientables: planos, esferas, elipsoides, paraboloides, etc. Interesarémonos soamente por superficies con dúas caras. Polo contrario, non estudaremos superficies como a banda de Möbius, que non é orientable.

Definición 9.1 *Unha superficie paramétrica en $\mathbb{R}^3$ é unha función continua $r: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, (Figura 9.1).*

As ecuacións $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ denomínanse ecuacións paramétricas da superficie. A superficie dada por $r(u, v)$ tamén será denotada por $S = r(A)$.

Exemplo 9.2 1. A superficie dada por $r(u, v) = (3 \cos u, 3 \sin u, v)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 4]$, verifica $x^2 + y^2 = 9$, para calquera valor de z , polo que a superficie corresponde ó cilindro con eixe z , raio 3 e altura 4.

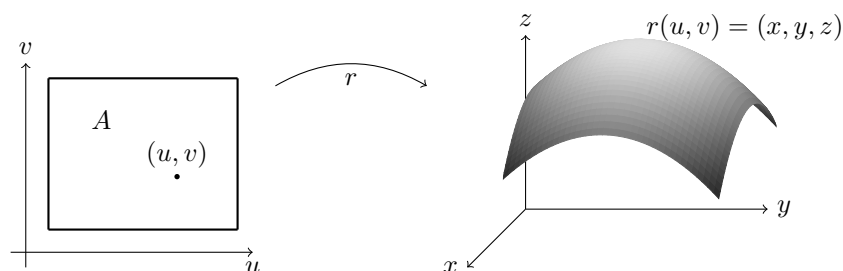


Figura 9.1: Parametrización dunha superficie

2. A superficie dada por $r(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, $u \in [0, \pi]$, $v \in [0, 2\pi]$, representa a esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio 1, pois verifica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Exemplo 9.3 1. Se unha superficie está representada pola gráfica dunha función $z = f(x, y)$, entón esta pode ser parametrizada mediante $r(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Por exemplo, o cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ pode ser representado mediante $r(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$, onde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Se quixeramos limitar a altura do cono ata $z = 4$, entón $(u, v) \in B((0, 0), 4)$.

2. A superficie triangular que ten como vértices os puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ está contida no plano $x + y + z = 1$. Logo, unha parametrización pode ser $r(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$, para $(x, y) \in A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$. Tamén pode poñerse como $r(x, z) = (x, 1 - x - z, z)$, para $(x, z) \in A = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x\}$.

É importante ter en conta que, neste tipo de representacións, o dominio de r é a proxección ortogonal da superficie sobre o plano dominio da función.

Outra clase de superficies facilmente representables son as superficies de revolución, como a mostrada na Figura 9.2. Se temos a gráfica de $z = f(y)$ nun intervalo $[a, b]$ e facemos xirar es-

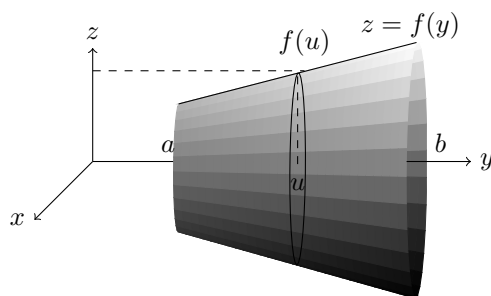


Figura 9.2: Superficie de revolución

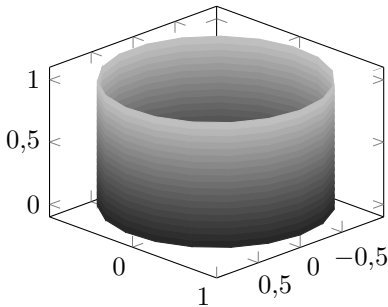
ta curva ó redor do eixe y , para dar unha parametrización da superficie xerada, fixamos a variable

independente da función, neste caso $y = u$, $a \leq u \leq b$, e logo, con raio $f(u)$, xeramos unha circunferencia no plano $y = u$, é dicir, nas variables x, z , $x^2 + z^2 = f(u)^2$. Esta circunferencia en forma paramétrica resultaría, por exemplo, $x = f(u) \sin v$ e $z = f(u) \cos v$, polo que a parametrización da superficie quedaría, $r(u, v) = (f(u) \sin v, u, f(u) \cos v)$, con $u \in [a, b]$ e $v \in [0, 2\pi]$.

Exemplo 9.4 1. Se $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $1 \leq x \leq 4$, entón a superficie xerada ó xirar sobre o eixe x será, $r(u, v) = (u, \frac{1}{u} \cos v, \frac{1}{u} \sin v)$, $u \in [1, 4]$ e $v \in [0, 2\pi]$.

2. Se $z = y^2$, con $z \in [0, 9]$, e facemos xirar sobre o eixe z , entón necesitamos poñer $y = f(z)$, de onde, $f(u) = \sqrt{u}$, e $r(u, v) = (\sqrt{u} \sin v, \sqrt{u} \cos v, u)$, con $u \in [0, 9]$ e $v \in [0, 2\pi]$. Esta superficie de revolución é o paraboloide $z = x^2 + y^2$. Este paraboloide tamén podería poñerse da forma, $r(u, v) = (u \sin v, u \cos v, u^2)$, con $u \in [0, 3]$ e $v \in [0, 2\pi]$.

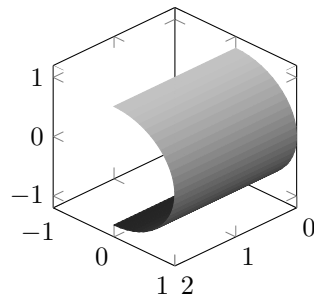
Exemplo 9.5 Algunhas parametrizacións de superficies coas ecuacións cartesianas e gráficas respectivas



$$x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$$

$$\alpha(t, z) = (\sin t, \cos t, z)$$

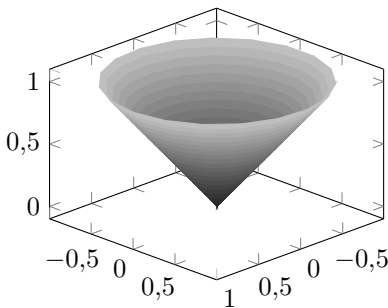
$$(t, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$$



$$y^2 + z^2 = 1, 0 \leq x \leq 2, y \geq 0$$

$$\alpha(t, x) = (x, \sin t, \cos t)$$

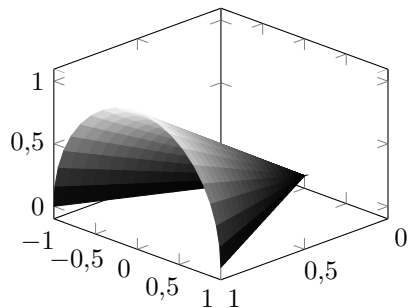
$$(t, x) \in [0, \pi] \times [0, 2]$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$$

$$\alpha(r, t) = (r \cos t, r \sin t, r)$$

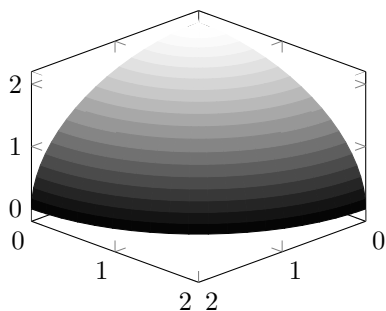
$$(r, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$



$$x = \sqrt{y^2 + z^2} \leq 1, z \geq 0$$

$$\alpha(r, t) = (r, r \cos t, r \sin t)$$

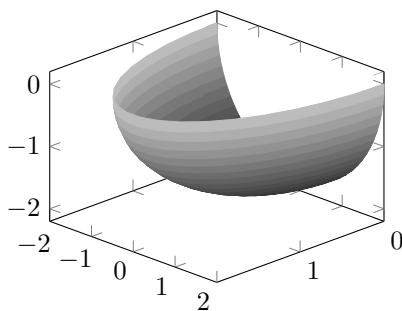
$$(r, t) \in [0, 1] \times [0, \pi]$$



$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$$\alpha(\varphi, \theta) = (2 \sin \varphi \cos \theta, 2 \sin \varphi \sin \theta, 2 \cos \varphi)$$

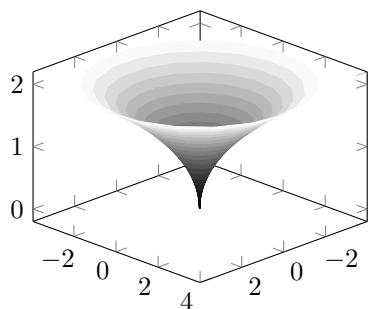
$$(\varphi, \theta) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$



$$z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad x \geq 0$$

$$\alpha(\varphi, \theta) = (2 \sin \varphi \cos \theta, 2 \sin \varphi \sin \theta, 2 \cos \varphi)$$

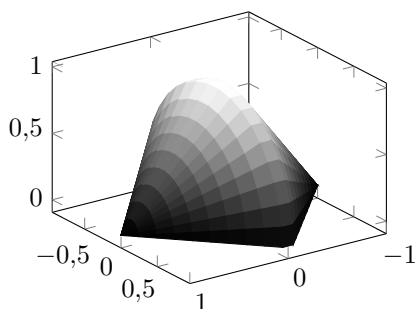
$$(\varphi, \theta) \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



Rotación de $y = z^2$ sobre eixe z , $0 \leq z \leq 2$

$$\alpha(u, v) = (u^2 \sin v, u^2 \cos v, u)$$

$$(u, v) \in [0, 2] \times [0, 2\pi]$$



Rotación de $z = 1 - |x|$ sobre eixe x , $-1 \leq x \leq 1$

$$\alpha(u, v) = (u, (1 - |u|) \cos v, (1 - |u|) \sin v)$$

$$(u, v) \in [-1, 1] \times [0, \pi]$$

Exemplo 9.6 Parametrizamos o cubo de lado unidade no octante positivo, cun vértice na orixe. Para unha mellor intuición gráfica da parametrización, desenvolvemos o cubo sobre o plano yz , como se mostra na Figura 9.3, de xeito que a tapa superior, que abrimos sobre ese plano, corresponde ó gris máis claro da figura e a tapa inferior que ten un tono máis escuro abrímosla sobre os valores negativos da variable z . Logo imos abrindo as tapas laterais sobre ese mesmo plano no sentido crecente dos valores de y . Observaremos que cada cadrado lateral está subliñado e numerado nun vértice, de xeito

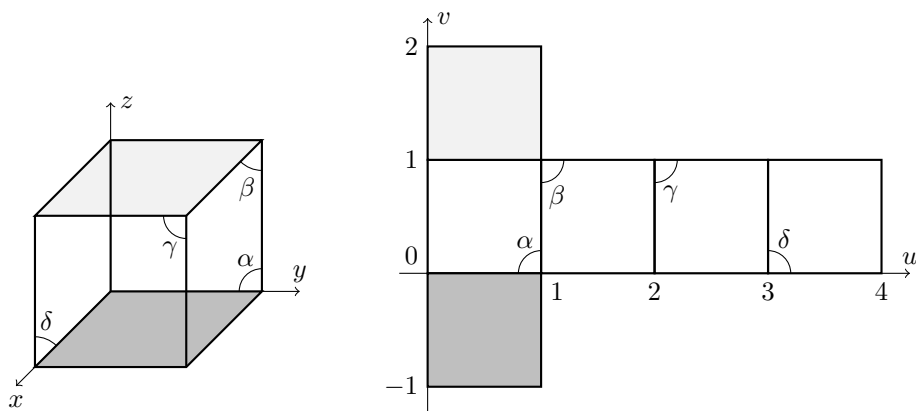


Figura 9.3: Parametrización dun cubo

que estas marcas coinciden nas dúas figuras. Desta forma obtemos a parametrización,

$$r(u, v) = \begin{cases} (v-1, u, 1) & \text{se } (u, v) \in [0, 1] \times [1, 2] \\ (0, u, v) & \text{se } (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ (-v, u, 0) & \text{se } (u, v) \in [0, 1] \times [-1, 0] \\ (u-1, 1, v) & \text{se } (u, v) \in [1, 2] \times [0, 1] \\ (1, 3-u, v) & \text{se } (u, v) \in [2, 3] \times [0, 1] \\ (4-u, 0, v) & \text{se } (u, v) \in [3, 4] \times [0, 1] \end{cases}$$

Exercicios

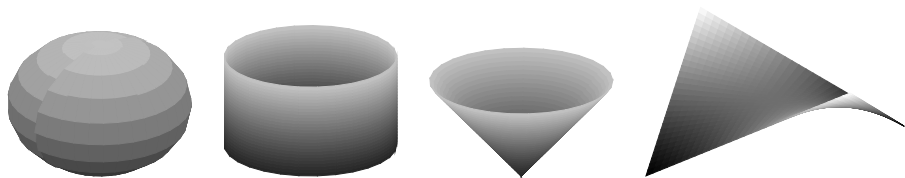
1. Asocia cada función vectorial coa gráfica correspondente.

a) $r(u, v) = (u, v, uv)$

b) $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$

c) $r(u, v) = (2 \cos v \cos u, 2 \cos v \sin u, 2 \sin v)$

d) $r(u, v) = (4 \cos u, 4 \sin u, v)$



2. Calcula a ecuación en coordenadas cartesianas da superficie parametrizada que se indica e identifica a superficie.

a) $r(u, v) = (u, v, \frac{v}{2})$

b) $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$

c) $r(u, v) = (2 \cos u, v, 2 \sin u)$

d) $r(u, v) = (5 \cos v \cos u, 5 \cos v \sin u, 5 \sin v)$

3. Atopa a función vectorial paramétrica tal que a gráfica coincida coa superficie indicada.

- a) $z = y$ b) $x + y + z = 6$ c) $x^2 + y^2 = 16$ d) $x^2 + 4y^2 = 16$
 e) $z = x^2$ f) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ g) $x^2 + y^2 \leq 9, z = 4$ h) $z^2 = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 9$

4. Escribe unha ecuación paramétrica para a superficie de revolución xerada pola gráfica da función ó xirar ó redor do eixe que se indica.

- a) $y = \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 6, \quad \text{eixe } x.$ b) $y = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad \text{eixe } x.$
 c) $y = \sin z, \quad 0 \leq z \leq \pi, \quad \text{eixe } z.$ d) $x = 4 - y^2, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad \text{eixe } y.$

9.2. Vectores normais, superficies regulares e orientación dunha superficie

En primeiro lugar, recordamos a definición de produto vectorial e algunhas das súas propiedades.

Definición 9.7 O produto vectorial de vectores en $\mathbb{R}^3$ é unha aplicación $\times: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida mediante

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$.

É inmediato verificar as seguintes propiedades do produto vectorial:

- a) $u \times v = -v \times u$ (antisimetría)
 b) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$ (distributiva)
 c) $(\alpha u) \times (\beta v) = (\alpha\beta)(u \times v)$ (asociativa respecto dos escalares)
 d) $e_i \times e_i = 0, i = 1, 2, 3.$
 e) $e_1 \times e_2 = e_3, e_2 \times e_3 = e_1, e_3 \times e_1 = e_2$ (regra do sacarrollas)

Sexa S unha superficie paramétrica dada por $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ de clase un nun recinto aberto A . As derivadas parciais de r respecto de u e v son,

$$\frac{\partial r}{\partial u} = r_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = r_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Cada unha destas derivadas é unha función vectorial interpretable en termos de vectores tanxentes. En efecto, se facemos $v = v_o$, $r(u, v_o)$ é unha función vectorial dun só parámetro que define unha curva C_1 contida na superficie S . O vector tanxente a C_1 no punto

$$(x(u_o, v_o), y(u_o, v_o), z(u_o, v_o)) = (x_o, y_o, z_o)$$

é

$$r_u(u_o, v_o) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_o, v_o), \frac{\partial y}{\partial u}(u_o, v_o), \frac{\partial z}{\partial u}(u_o, v_o) \right).$$

De forma análoga, se facemos constante $u = u_o$, $r(u_o, v)$ é unha función vectorial dun só parámetro que define unha curva C_2 contida na superficie S . No punto $(x(u_o, v_o), y(u_o, v_o), z(u_o, v_o))$, o vector tanxente a C_2 é

$$r_v(u_o, v_o) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_o, v_o), \frac{\partial y}{\partial v}(u_o, v_o), \frac{\partial z}{\partial v}(u_o, v_o) \right).$$

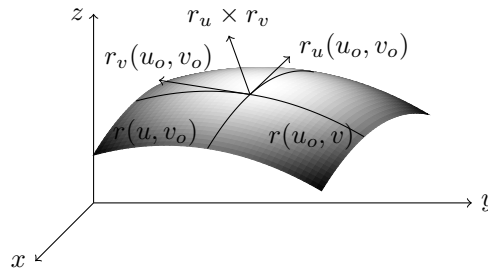


Figura 9.4: Vectores tanxente e normal a unha superficie

Definición 9.8 Unha superficie $S = r(A) \subset \mathbb{R}^3$ é regular, se r é de clase un e existe e é non nulo o vector $r_u \times r_v$ en cada punto $(u, v) \in A$, figura 9.4.

Xeometricamente, unha superficie S é regular se ten plano tanxente en cada punto $r(u_o, v_o) = (x_o, y_o, z_o)$ e pode definirse pola ecuación

$$(r_u(u_o, v_o) \times r_v(u_o, v_o)) \cdot (x - x_o, y - y_o, z - z_o) = 0.$$

Os puntos de A nos que r non é de clase un ou o produto $r_u \times r_v = 0$, denomínanse puntos singulares de $S = r(A)$.

Podemos poñer exemplos de superficies que, en función da parametrización, un punto pode ser singular ou non.

Exemplo 9.9 1. Consideremos a superficie dada por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ que representa o hemisferio superior da esfera de centro a orixe e raio 1 e consideremos a parametrización $r(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, definida en $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. As derivadas parciais de r existen e son continuas no interior de A , pero non existen nos puntos fronteira, que corresponden ó bordo da superficie sobre o plano $z = 0$, polo que estes puntos son todos singulares para esta parametrización.

2. Consideremos a mesma superficie anterior representada pola parametrización

$$r(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v),$$

definida no rectángulo $A = [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. Verifícase,

$$\begin{aligned} r_u &= (-\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} v \cos u, 0), \\ r_v &= (\cos v \cos u, \cos v \operatorname{sen} u, -\operatorname{sen} v), \end{aligned}$$

e

$$r_u \times r_v = -r(u, v) \operatorname{sen} v.$$

Así, r é de clase un en todo o dominio e o produto $r_u \times r_v = 0$ para os puntos $(u, v) = (u, 0)$ que corresponde soamente ó punto $(0, 0, 1)$ da superficie que é, para esta parametrización, o único punto singular.

Debemos observar, que no caso en que as superficies veñan dadas por parametrizacións baixo a forma

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

r é de clase un en A se, e soamente se, f é de clase un en A .

Definición 9.10 *Unha superficie $S = r(A)$ é regular a anacos, se S está formada por un número finito de superficies regulares.*

Observaremos que como r é unha función continua, entón as partes regulares da superficie S , regular a anacos, están unidas.

Definición 9.11 *Se S é unha superficie paramétrica regular, $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, un vector normal a S no punto $(x_o, y_o, z_o) = (x(u_o, v_o), y(u_o, v_o), z(u_o, v_o))$ defínese mediante*

$$\bar{N} = r_u(u_o, v_o) \times r_v(u_o, v_o) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Proposición 9.12 *Se a superficie S está dada pola ecuación $z = g(x, y)$, entón $\bar{N} = \nabla G(x, y, z)$, para $G(x, y, z) = z - g(x, y)$.*

Demostración. Unha parametrización da superficie S vén dada por $r(x, y) = (x, y, g(x, y))$, polo que $r_x = (1, 0, g_x)$, $r_y = (0, 1, g_y)$ e, $\bar{N} = r_x \times r_y = (-g_x, -g_y, 1) = \nabla G(x, y, z)$. ■

Exemplo 9.13 *Calcula a ecuación do plano tanxente ó paraboloide dado por $r(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ no punto $(1, 2, 5)$. As derivadas parciais de r son $r_u = (1, 0, 2u)$, $r_v = (0, 1, 2v)$, o vector normal $\bar{N} = r_u \times r_v = (-2u, -2v, 1)$, e no punto $(1, 2, 5)$, $\bar{N} = (-2, -4, 1)$, polo que a ecuación do plano pedido é $\langle (-2, -4, 1)(x - 1, y - 2, z - 5) \rangle = 0$ ou, equivalentemente, $-2x - 4y + z = -5$.*

Coa intención de utilizar unha orientación nunha superficie S no espazo, utilízanse vectores unitarios e normais á superficie.

Definición 9.14 Unha superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientable se pode definirse de forma única un vector normal unitario N , tal que varíe con continuidade sobre a superficie S .

Unha superficie orientable ten dúas caras distintas. Cando se orienta eliximos un dos dous vectores normais unitarios que hai en cada punto. Se a superficie S vén dada en forma paramétrica, $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, utilizando a definición 9.11 o vector normal unitario será

$$N = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}. \quad (9.1)$$

Observaremos que tamén hai outro vector normal unitario no sentido contrario, que é,

$$N = \frac{r_v \times r_u}{\|r_v \times r_u\|}.$$

Se a superficie S vén dada pola gráfica dunha función $z = g(x, y)$, entón S quedará orientada, utilizando a proposición 9.12, polo vector gradiente normalizado da función ecuación funcional que define a superficie S ,

$$N = \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} = \frac{(-g_x(x, y), -g_y(x, y), 1)}{\sqrt{[g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2 + 1}}. \quad (9.2)$$

Da mesma forma que no caso anterior, tamén hai outro vector normal unitario no sentido contrario, que é

$$N = \frac{-\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} = \frac{(g_x(x, y), g_y(x, y), -1)}{\sqrt{[g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2 + 1}}.$$

No caso en que as superficies orientables veñan dadas na forma $y = g(x, z)$ ou $x = g(y, z)$, entón temos que realizar os cambios correspondentes.

As superficies non orientables, ou que teñen só unha cara, son complicadas e pouco abundantes. A máis típica é a Banda de Möbius que aparece na Figura 9.5 e que foi logotipo da desaparecida entidade bancaria galega Caixanova.

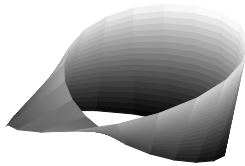


Figura 9.5: Banda de Möbius

Exercicios

5. Calcula a ecuación do plano tanxente á superficie dada pola función vectorial no punto indicado.
 - a) $r(u, v) = (u + v, u - v, v), \quad (1, -1, 1)$
 - b) $r(u, v) = (u, v, \sqrt{uv}), \quad (1, 1, 1)$
 - c) $r(u, v) = (2u \cos v, 3u \sin v, u^2), \quad (0, 6, 4)$

9.3. Integrales de fluxo

Exemplo 9.15 *Fluxo dun fluído a través dunha superficie.* Unha das principais aplicacións da integral de superficie dun campo vectorial refírese ó fluxo dun fluído a través dunha superficie S . Sexa S unha superficie orientada somerxida nun fluído. Supoñamos que un fluxo é un conxunto de partículas en movemento. A cada partícula (x, y, z) asignámoslle un campo vectorial $V(x, y, z)$ que pode representar a velocidade do fluído no punto. Supoñamos que o campo é estacionario, isto é, non depende do tempo senón que soamente depende do punto (x, y, z) . Denotemos por $\rho(x, y, z)$ a densidade do fluído no punto (x, y, z) (masa da fluído por unidade de volume). Observaremos que se o fluído é incomprensible, entón a densidade será constante.

Consideremos o campo vectorial

$$F(x, y, z) = \rho(x, y, z)V(x, y, z),$$

que se denomina densidade de fluxo da corrente. O campo vectorial F ten a mesma dirección que a velocidade e o seu módulo é

$$\frac{\text{masa}}{\text{unidade de volume}} \cdot \frac{\text{distancia}}{\text{unidade de tempo}} = \frac{\text{masa}}{(\text{unidade de área})(\text{unidade de tempo})}.$$

Doutra forma, o vector densidade de fluxo F indica a cantidade de fluído que pasa polo punto (x, y, z) por unidade de superficie e unidade de tempo.

Sexa $S = r(A)$ unha superficie en $\mathbb{R}^3$. En cada punto non singular de S denotemos por N o vector unitario normal á superficie,

$$N = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}.$$

Podemos observar na Figura 9.6, que o produto escalar $F \cdot N$ representa a compoñente do campo densidade de fluxo na dirección do vector normal N . A masa de fluído que pasa por unidade de superficie dS e por unidade de tempo na dirección de N será

$$dV = (\text{altura})(\text{área da base}) = (F \cdot N)dS.$$

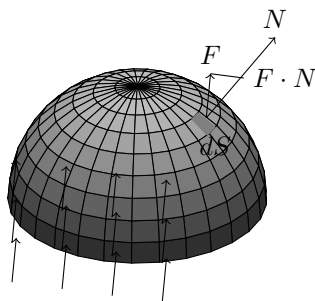


Figura 9.6: Fluxo que atravesa unha superficie

Así, o volume total de fluído que atravesa a superficie S por unidade de tempo vén dada pola “integral de superficie” da seguinte definición.

Definición 9.16 *A integral de fluxo dun campo vectorial $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continuo a través dunha superficie S regular a anacos orientada por un vector normal unitario N , defínese como*

$$\iint_S F \cdot N dS = \iint_A F(r(u, v)) \cdot (r_u \times r_v) dx dy,$$

se S está dada pola ecuación paramétrica $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in A$, e

$$\iint_S F \cdot N dS = \iint_A F(x, y, g(x, y)) \cdot (-g_x(x, y), -g_y(x, y), 1) dx dy, \quad (9.3)$$

se S está dada pola ecuación $z = g(x, y)$, $g \in C^1$, e A é a proxección de S sobre o plano $z = 0$.

No caso da igualdade 9.3, se a superficie está dada pola ecuación $x = g(y, z)$ ou $y = g(x, z)$, temos que realizar os cambios correspondentes na definición mediante as igualdades

$$\iint_S F \cdot N dS = \iint_A F(g(y, z), y, z) \cdot (1, -g_y(y, z), -g_z(y, z)) dy dz,$$

ou

$$\iint_S F \cdot N dS = \iint_A F(x, g(x, z), z) \cdot (-g_x(x, z), 1, -g_z(x, z)) dx dz,$$

respectivamente.

Se F represente un campo eléctrico ou magnético, $\iint_S F \cdot N dS$ tamén se coñece como o fluxo eléctrico ou magnético do campo.

As integrais de superficie tamén se aplican ó estudo do fluxo da calor. Se $T(x, y, z)$ representa a temperatura nun punto (x, y, z) e T é unha función de clase un, entón

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

representa o gradiente da temperatura, e a calor circula segundo o campo vectorial $F = -k\nabla T$, onde k é unha constante positiva. Deste xeito, $\iint_S F \cdot N dS$ é o fluxo neto de calor a través da superficie S .

Xeometricamente, unha integral de fluxo é a integral de superficie sobre S da compoñente normal do campo F . Se ademais $\rho(x, y, z)$ é a densidade do fluído en (x, y, z) , a integral de fluxo

$$\iint_S \rho F \cdot N dS$$

representa a masa do fluído que atravesa S por unidade de tempo.

Exemplo 9.17 A integral de fluxo dun campo vectorial a través dunha superficie S orientada por un vector normal N , non depende da parametrización de S escollida. Se $r: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $s: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son dúas parametrizacións tales que $S = r(A) = s(D)$ e $N = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{s_a \times s_b}{\|s_a \times s_b\|}$ entón

$$\iint_A F(r(u, v)) \cdot N(u, v) du dv = \iint_D f(s(a, b)) \cdot N(a, b) da db.$$

Vexamos un exemplo. Sexan $S = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ e $F(x, y, z) = (x + z, y, x^2)$. Consideremos as parametrizacións:

$$\begin{aligned} r(u, v) &= (u, v, 1), \quad (u, v) \in A = [0, 1] \times [0, 1] \\ s(a, b) &= \left(\frac{a^2}{4}, \frac{b}{2}, 1\right), \quad (a, b) \in D = [0, 2] \times [0, 2] \end{aligned}$$

Tense que $S = r(A)$, $r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = (1, 0, 0)$, $r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = (0, 1, 0)$ e $r_u \times r_v = (0, 0, 1)$. Ademais, $F(r(u, v)) = F(u, v, 1) = (u + 1, v, u^2)$ e $F(r(u, v)) \cdot N(u, v) = (u + 1, v, u^2) \cdot (0, 0, 1) = u^2$. Así pois,

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot N dS &= \iint_A F(r(u, v)) \cdot N(u, v) du dv = \int_0^1 \int_0^1 u^2 du dv \\ &= \left(\int_0^1 u^2 du \right) \left(\int_0^1 dv \right) \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Tense que $S = s(D)$, $s_a = \frac{\partial s}{\partial a} = \left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$, $s_b = \frac{\partial s}{\partial b} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ e $s_a \times s_b = \left(0, 0, \frac{a}{4}\right)$. Ademais, $F(s(a, b)) = F\left(\frac{a^2}{4}, \frac{b}{2}, 1\right) = \left(\frac{a^2}{4} + 1, \frac{b}{2}, \frac{a^4}{16}\right)$ e $F(s(a, b)) \cdot N(a, b) = \left(\frac{a^2}{4} + 1, \frac{b}{2}, \frac{a^4}{16}\right) \cdot \left(0, 0, \frac{a}{4}\right) = \frac{u^5}{64}$.

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot N dS &= \iint_D F(s(a, b)) \cdot N(a, b) da db = \int_0^2 \int_0^2 \frac{u^5}{64} da db \\ &= \frac{1}{64} \left(\int_0^2 a^5 da \right) \left(\int_0^2 db \right) = \frac{1}{64} \left[\frac{a^6}{6} \right]_0^2 \left[b \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Obviamente, no caso de que $S = r(A) = s(D)$ e $\frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = -\frac{s_a \times s_b}{\|s_a \times s_b\|}$ entón

$$\iint_A F(r(u, v)) \cdot N(u, v) du dv = - \iint_D f(s(a, b)) \cdot N(a, b) da db.$$

Exemplo 9.18 Sexa S a porción de paraboloide $z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ situado por encima do plano $z = 0$ e orientado por un vector normal e unitario dirixido para arriba (coordenada z positiva). O fluxo dun fluído de densidade constante ρ a través da superficie S vén dado polo campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcularemos o ritmo de fluxo de masa a través de S . Como $g_x = -2x$ e

$$g_y = -2y,$$

$$\begin{aligned}\iint_S \rho F \cdot N dS &= \rho \iint_A F \cdot (-g_x(x, y), -g_y(x, y), 1) dx dy \\ &= \rho \iint_A (x, y, 4 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy \\ &= \rho \iint_A (2x^2 + 2y^2 + 4 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \rho \iint_A (4 + x^2 + y^2) dx dy \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 + r^2) r dr d\theta = 24\pi\rho.\end{aligned}$$

Exemplo 9.19 Calcula o fluxo a través da esfera S de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, con orientación exterior, onde F é o campo cuadrático inverso

$$F(x, y, z) = \frac{q}{\|r\|^2} \frac{r}{\|r\|} = \frac{qr}{\|r\|^3}$$

e $r = (x, y, z)$.

A esfera está dada en forma paramétrica por

$$\begin{aligned}r(u, v) &= (a \sen u \cos v, a \sen u \sen v, a \cos u), \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi \\ r_u \times r_v &= a^2(\sen^2 u \cos v, \sen^2 u \sen v, \sen u \cos u) = r(u, v) a \sen u \\ F(r(u, v)) &= \frac{q}{a^2}(\sen u \cos v, \sen u \sen v, \cos u) \\ F \cdot (r_u \times r_v) &= q \sen u,\end{aligned}$$

polo que o fluxo a través da esfera resulta ser,

$$\iint_S F \cdot N dS = \iint_A q \sen u du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi q \sen u du dv = 4\pi q.$$

O resultado deste último exemplo mostra que o fluxo que atravesa a esfera S nun campo cuadrático inverso é independente do raio de S . En particular, se E é un campo eléctrico, o resultado do exemplo xunto coa lei de Coulomb, dá lugar a unha das leis fundamentais da electrostática, a **lei de Gauss**

$$\iint_S E \cdot N dS = 4\pi q,$$

onde q é unha carga puntual situada no centro da esfera. A lei de Gauss é válida para superficies pechadas en xeral que conteñan no seu interior a orixe, e establece unha relación entre o fluxo que sae a través da superficie coa carga total que hai no interior

Exemplo 9.20 Nos casos en que o campo non é cuadrático inverso, outra forma de formular a lei de Gauss é relacionar o fluxo dun campo eléctrico $\mathbf{E}$ sobre unha superficie pechada S coa carga neta Q encerrada pola superficie,

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot N dS = Q.$$

Supoñamos que $\mathbf{E} = EN$; é dicir, $\mathbf{E}$ é un múltiplo escalar constante da normal unitaria a S . Deste xeito, a lei de Gauss convértese en

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot N dS = \iint_S E dS = Q,$$

de onde deducimos que

$$E = \frac{Q}{A(S)},$$

sendo $A(S)$ a área da superficie S . No caso en que S é a esfera de raio R , esta ecuación transfórmase en

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Isto quere dicir que o campo eléctrico será da forma $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi R^2} N$.

Consideremos unha segunda carga puntual, Q_o , situada a unha distancia R de Q . A forza $\mathbf{F}$ que actúa sobre esta segunda carga está dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}Q_o = EQ_o N = \frac{QQ_o}{4\pi R^2} N.$$

Se F é o módulo de $\mathbf{F}$, entón temos que

$$F = \frac{QQ_o}{4\pi R^2},$$

que é a lei de Coulomb para a forza entre dúas cargas puntuais.

Exemplo 9.21 Sexa S unha superficie paramétrica dada en forma explícita $z = f(x, y)$, onde $(x, y) \in A$, que é a proxección ortogonal de S sobre o plano xy . Sexan $F = (P, Q, R)$ un campo vectorial e N o vector normal unitario a S de coordenada z non negativa. Utiliza a parametrización $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$ para probar que $\iint_S F \cdot N dS = \iint_A \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dx dy$, onde P, Q e R están valoradas en $(x, y, f(x, y))$.

Tendo en conta que $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, $N = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$ e $F(x, y, f(x, y)) = (P(x, y, f(x, y)), Q(x, y, f(x, y)), R(x, y, f(x, y))) = (P, Q, R)$, entón

$$F(x, y, f(x, y)) \cdot N((x, y, f(x, y))) = -P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R, \text{ e}$$

$$\iint_S F \cdot N dS = \iint_A \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dx dy.$$

Exercicios

6. Calcula o fluxo do campo F a través da superficie S , utilizando como vector unitario normal o que ten a coordenada z non negativa.

- a) $F(x, y, z) = (x, y, 0)$, $S: 2x + 3y + z = 6$, primeiro octante.
 b) $F(x, y, z) = (x, y, z)$, $S: z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.
 c) $F(x, y, z) = (4, -3, 5)$, $S: z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 4$.
 d) $F(x, y, z) = (x, y, -2z)$, $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
7. Consideremos a semiesfera S definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, o campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, 0)$ e collendo como N o vector normal unitario exterior a S . Calcula o valor da integral de superficie $\iint_S F \cdot N dS$, utilizando a parametrización $r(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$.
8. O campo de velocidades dun fluído está descrito mediante $F(x, y, z) = (1, x, z)$, medido en metros por segundo. Calcula a cantidade de metros cúbicos de fluído están cruzando a superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ en cada segundo.
9. Calcula o fluxo do campo F a través da superficie pechada S , utilizando como vector unitario normal o que apunta para fóra en cada superficie.
- a) $F(x, y, z) = (4xy, z^2, yz)$, S : cubo unidade no octante positivo.
 b) $F(x, y, z) = (x + y, y, z)$, $S: z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

9.4. Teorema de Stokes

Unha xeneralización de dúas a tres dimensións do teorema de Green é o teorema de Stokes. Este resultado establece a relación existente entre a integral de fluxo sobre unha superficie orientada e non pechada S e a integral de liña sobre a curva pechada en $\mathbb{R}^3$ que constitúe o bordo de S (Figura 9.7). A orientación positiva ó longo de C é antihoraria respecto ó vector normal N .

O físico irlandés Georges Gabriel Stokes (1819-1903) foi o encargado, durante varios anos, de elaborar o exame para o premio Smith que concedía anualmente a Universidade de Cambridge desde 1769 a dous investigadores en formación. A pregunta número 8 da proba de 1854 é a primeira formulación que se conserva do teorema. Non se sabe se algún dos estudantes que optaban ao premio demostrou o resultado. Stokes coñecía o enunciado do teorema, xa que aparece nunha carta, con data do 2 de xullo de 1850, dirixida a el por William Thomson, Lord Kelvin (1824-1907). A primeira demostración que se publicou é do matemático alemán Hermann Hankel (1839-1873) en 1861.

Sexa $S \subset \mathbb{R}^3$ unha superficie orientable, regular a anacos, limitada e non pechada.

Definición 9.22 Chamamos bordo de S , á curva regular a anacos, C , pechada e simple que limita a superficie S e que deixa a S a un único lado de C .

Definición 9.23 Se $C = \alpha[a, b]$ é o bordo dunha superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, dicimos que as orientacións de C e S son compatibles, se a orientación de C é positiva cando visualizamos a curva C dende o vector N .

Consideremos o operador nabla ou gradiente, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ e $F = (F_1, F_2, F_3)$.

Definición 9.24 O rotacional do campo vectorial $F = (F_1, F_2, F_3)$ defínese como o campo vectorial

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x, y, z) &= \nabla \times F(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_1, F_2, F_3) \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 9.25 Se $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, 2zy)$, entón $\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + z^2 & 2zy \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$.

O concepto de rotacional dun campo vectorial é útil para caracterizar un campo conservativo no espazo $\mathbb{R}^3$.

Corolario 9.26 Sexan $A \subset \mathbb{R}^3$ un conxunto aberto, $w_o = (x_o, y_o, z_o)$, $B(w_o, r) \subset A$ e $F: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, $F \in C^1(B(w_o, r))$. Entón o campo F é conservativo en $B(w_o, r)$ se, e soamente se, $\operatorname{rot} F(w) = 0 \in \mathbb{R}^3$, para todo $w \in B(w_o, r)$.

Exemplo 9.27 Consideremos a curva definida pola intersección do plano $2x + 2y + z = 6$ cos planos coordenados, coa orientación representada na Figura 9.8. Unha parametrización da curva C vén dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (3t, 3(1-t), 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (3(2-t), 0, 6(t-1)) & \text{se } t \in [1, 2] \\ (0, 3(t-2), 6(3-t)) & \text{se } t \in [2, 3] \end{cases}.$$

Para o campo $F(x, y, z) = (-y^2, z, x)$, temos que

$$F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \begin{cases} -27(1-t)^2 & \text{se } t \in [0, 1] \\ 18(2-t) & \text{se } t \in [1, 2] \\ 18(3-t) & \text{se } t \in [2, 3] \end{cases},$$

polo que

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_0^1 -27(1-t)^2 dt + \int_1^2 18(2-t) dt + \int_2^3 18(3-t) dt = 9.$$

Utilizando o rotacional do campo F , veremos que o teorema de Stokes vains permitir calcular esta integral dunha forma máis sinxela e, o que é máis importante, independentemente da superficie S que teña como bordo a curva dada C .

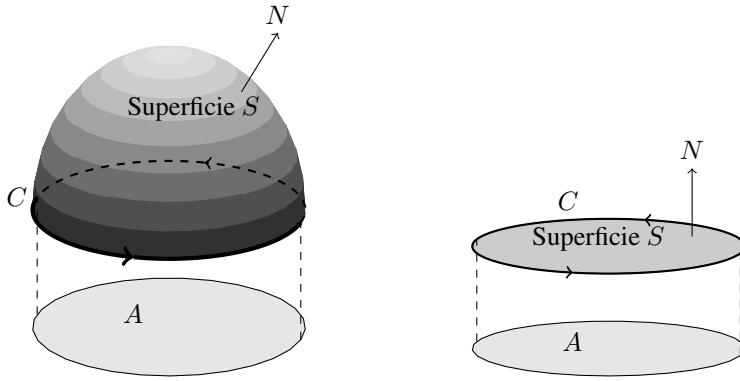


Figura 9.7: Aplicación do teorema de Stokes

Teorema 9.28 (de Stokes) Sexa $C = \alpha[a, b] \subset \mathbb{R}^3$ unha curva pechada, simple e regular a anacos, que é o bordo dunha superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, orientada, regular a anacos limitada e non pechada, con orientacións compatibles. Se $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é un campo vectorial de clase un nun dominio aberto que contén a S e a C , entón

$$\int_C F \cdot d\alpha = \iint_S (\text{rot } F) \cdot N dS.$$

Exemplo 9.29 Sexa S o triángulo orientado da Figura 9.8 b) contido no plano $2x + 2y + z = 6$.

Calcula $\int_C F \cdot d\alpha$, para $F(x, y, z) = (-y^2, z, x)$.

Para aplicar o teorema de Stokes, calculamos o rotacional de F ,

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, 2y).$$

Tomando $z = g(x, y) = 6 - 2x - 2y$, aplicamos o teorema de Stokes, cun vector normal con coordenada z negativa, para que a orientación sexa compatible coa tomada no exemplo 9.27,

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\alpha &= \iint_S (\text{rot } F) \cdot N dS \\ &= \iint_S (-1, -1, 2y) \cdot (g_x, g_y, -1) dS \\ &= \iint_S (-1, -1, 2y) \cdot (-2, -2, -1) dS \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (4 - 2y) dx dy = 9. \end{aligned}$$

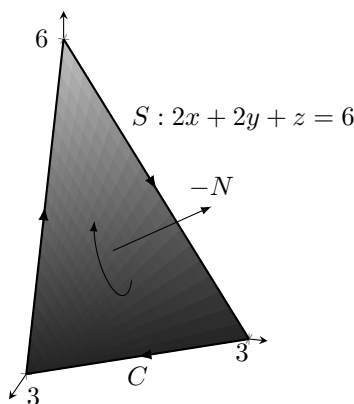


Figura 9.8: Aplicación do teorema de Stokes

Unha cuestión importante que debemos observar no teorema de Stokes é que a integral de fluxo do campo $\text{rot } F$ é independente da superficie que teña como bordo a curva fixada C . Así, sempre podemos utilizar como superficie de integración aquela que nos resulte máis simple, se é posible, nos cálculos que imos realizar, de forma que o resultado sempre será o mesmo.

Exemplo 9.30 Verifica o teorema de Stokes para $F(x, y, z) = (2z, x, y^2)$, onde S é a superficie do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ e C é o bordo de S no plano $z = 0$.

Como integral de superficie temos, $z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$,

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & y^2 \end{vmatrix} = (2y, 2, 1), \quad \bar{N} = (2x, 2y, 1), \quad (\text{rot } F) \cdot \bar{N} = 4xy + 4y + 1$$

e, polo teorema de Stokes, con vector normal cara arriba,

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\alpha &= \iint_S (\text{rot } F) \cdot N dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4r^3 \sin \theta \cos \theta + 4r^2 \sin \theta + r) d\theta dr \\ &= \left[r^4 \right]_0^2 \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{2\pi} + \left[\frac{4r^3}{3} \right]_0^2 \left[-\cos \theta \right]_0^{2\pi} + \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 2\pi = 4\pi. \end{aligned}$$

Non obstante, podemos utilizar como superficie que ten como bordo a curva $x^2 + y^2 = 4$ no plano xy , a dada pola ecuación $z = 0$. Así, $\bar{N} = (0, 0, 1)$, $(\text{rot } F)(x, y, 0) = (2y, 2, 1)$, $(\text{rot } F) \cdot (0, 0, 1) = 1$, $A = B((0, 0), 2)$ e, finalmente,

$$\iint_S (\text{rot } F) \cdot N dS = \iint_A dx dy = 4\pi.$$

Por outra parte, tamén podemos resolver utilizando a definición de integral de liña. Parametrizamos C mediante $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, que ten orientación compatible con $\bar{N} = (0, 0, 1)$, polo que

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_C 2zdx + xdy + y^2dz = \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 t dt = 4\pi.$$

Exemplo 9.31 Denotemos por H un campo magnético, que depende do tempo, producido por un imán e E o campo eléctrico correspondente creado sobre unha espiral pechada parametrizada por unha curva $C = \alpha[a, b]$ que rodea ó campo magnético en $\mathbb{R}^3$, e sexa S unha superficie que ten a C como bordo. A lei de Faraday (Figura 9.9) establece que a circulación do campo eléctrico ó redor de C é igual a taxa de cambio do fluxo do campo magnético a través de C cambiada de signo. Demostraremos que a lei de Faraday é consecuencia da seguinte ecuación diferencial (unha das ecuacións de Maxwell):

$$\nabla \times E = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

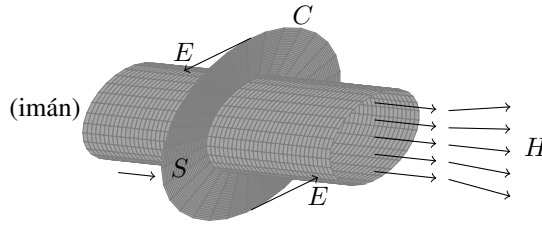


Figura 9.9: Lei de Faraday

Utilizando a ecuación de Maxwell e o teorema de Stokes, temos que

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iint_S H \cdot dS = \iint_S -\frac{\partial H}{\partial t} \cdot dS = \iint_S (\nabla \times E) \cdot dS = \int_C E \cdot d\alpha.$$

Exemplo 9.32 Supoñamos que a temperatura nun punto de $\mathbb{R}^3$ vén dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Calcula o fluxo da calor ($F(x, y, z) = -\nabla T$) a través da superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, para $k = 1$.

A densidade de fluxo da calor é $F(x, y, z) = -\nabla T$. Deste xeito,

$$F(x, y, z) = (-6x, 0, -6z).$$

A superficie pode parametrizarse mediante

$$r(u, v) = (2 \sin u, v, 2 \cos u), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2].$$

Así,

$$\begin{aligned} F(r(u, v)) &= (-12 \operatorname{sen} u, 0, -12 \cos u), \\ r_u \times r_v &= (2 \operatorname{sen} u, 0, 2 \cos u), \\ F(r(u, v)) \cdot r_u \times r_v &= -24, \end{aligned}$$

polo que

$$\iint_S F \cdot N dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -24 dv du = -96\pi.$$

Exemplo 9.33 Calcula o fluxo de calor a través da esfera unidade S para o foco de temperatura $T(x, y, z) = x$.

Para a desidade de fluxo $F(x, y, z) = (1, 0, 0)$ e a superficie

$$r(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \cos \varphi), (\varphi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi],$$

temos que

$$\begin{aligned} r_\varphi \times r_\theta &= \operatorname{sen} \varphi r(\theta, \varphi), \\ F(r(\theta, \varphi)) \cdot (r_\varphi \times r_\theta) &= \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \theta \end{aligned}$$

e

$$\iint_S F \cdot N dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \theta d\varphi d\theta = 0.$$

Exemplo 9.34 Supoñamos que o campo de velocidades dun fluído está dado por $F(x, y, z) = (\sqrt{y}, 0, 0)$, medido en metros por segundo. Calcula a cantidade de metros cúbicos de fluído que atravesan a superficie $x^2 + z^2 = 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$, en cada segundo.

Verifícase que

$$\begin{aligned} r(u, v) &= (\operatorname{sen} u, v, \cos u), \quad (u, v) \in [0, \pi] \times [0, 1], \\ F(r(u, v)) &= (\sqrt{v}, 0, 0), \\ r_u \times r_v &= (\operatorname{sen} u, 0, \cos u), \\ F(r(u, v)) \cdot r_u \times r_v &= \sqrt{v} \operatorname{sen} u. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\iint_S F \cdot N dS = \int_0^\pi \int_0^1 \sqrt{v} \operatorname{sen} u dv du = \frac{4}{3}.$$

Exemplo 9.35 a) Un fluído uniforme cae en vertical segundo o campo $F(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Calcula o fluxo total por unidade de tempo a través do cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1$.

b) O campo $F(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{z}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{z}}{2}\right)$ describe a choiva cando esta se desvía lateralmente polo vento cun ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radiáns. Calcula neste caso o fluxo a través do mesmo cono.

16. Sexa $C = \alpha[a, b] \subset \mathbb{R}^3$ unha curva pechada, simple e regular a anacos, que é o bordo dunha superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, orientada, regular a anacos limitada e non pechada, con orientacións compatibles. Sexan $p = p(x, y, z) = (x, y, z)$ e $\beta \in \mathbb{R}^3$ un vector constante, e consideremos o campo vectorial $F(x, y, z) = \beta \times p$. Demostra que $\int_C F \cdot d\alpha = 2 \iint_S \beta \cdot NdS$.
17. Consideremos o sólido $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z \geq 3\}$ e denotemos por $S = S_1 \cup S_2$ a superficie fronteira de A con orientación exterior, onde S_1 e S_2 son as partes esférica e plana de S , respectivamente. Calcula a integral de superficie do campo $F(x, y, z) = (xz, yz, 1)$ sobre as superficies S, S_1 e S_2 .

9.5. Integración en $\mathbb{R}^3$

Para o caso máis xeral de integración dunha función de 3 variables, a extensión do concepto de integral dobre a integral tripla sobre un rectángulo 3-dimensional, é relativamente sinxela.

Un rectángulo 3-dimensional é un conxunto da forma

$$\begin{aligned} S &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}. \end{aligned}$$

Se $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función continua en $S \subset A$, a integral tripla de f sobre o rectángulo S defínese mediante

$$\begin{aligned} &\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz. \end{aligned}$$

Coa hipótese de que f é unha función continua, pode probarse tamén que a definición non depende da orde de integración.

Utilizando integrais triplas, o volume dun sólido $S \subset \mathbb{R}^3$ calcúlase mediante a expresión

$$V = \iiint_S dx dy dz.$$

Exercicios

18. Calcula as integrais triplas,

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \int_1^2 \int_0^1 \int_{-1}^2 8x^2 y z^3 dx dy dz & \text{b) } \int_{-1}^2 \int_0^\pi \int_1^4 yz \cos xy dz dx dy \\
 \text{c) } \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta & \text{d) } \int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} xyz dz dy dx \\
 \text{e) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^2 \int_0^{2-r} r z dz dr d\theta & \text{f) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos \theta} \rho^2 \sin \phi \cos \phi d\rho d\theta d\phi
 \end{array}$$

19. Calcula $\iiint_R x dx dy dz$, onde $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 2y + z \leq 4, z \geq 0\}$.

O teorema de cambio de variable pode ser xeneralizado para o caso de integración en recintos en $\mathbb{R}^3$ nos seguintes termos.

Teorema 9.36 (Cambio de variable para integraís triplas) *Consideremos unha función inxectiva $g: B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de clase un no conxunto limitado B , $g(B) \subset A$, e tal que $\det(Dg(u, v, w)) \neq 0$, para todo $(u, v, w) \in B$ e sexa $S' = g^{-1}(S)$. Se $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función continua e limitada no recinto S e a integral $\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz$ existe, entón verifícase que*

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{S'} f(g(u, v, w)) |\det(Dg(u, v, w))| du dv dw.$$

9.5.1. Coordenadas cilíndricas

O cambio de variable a coordenadas cilíndricas está dado pola aplicación $g(r, \theta, z)$, onde $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e $z = z$, para os mesmos valores de r e θ utilizados no cambio a coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$ (Figura 9.10). Esta función é inxectiva e de clase un no dominio $B = (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, e ten como xacobiano $J = \det Dg(r, \theta, z) = r > 0$, para todo $(r, \theta, z) \in B$. Así, verifícase que

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{g^{-1}(S)} f(g(r, \theta, z)) r dr d\theta dz,$$

para calquera recinto $S \subset g(B)$ pechado e limitado e calquera función $f: g(B) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Exemplo 9.37 Calcula $\iiint_B \frac{1}{9}(x^2 + y^2) \cos z dx dy dz$, onde B é o sólido en $\mathbb{R}^3$ limitado por $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$ e $z = \frac{\pi}{2}$.

Consideremos o cambio de variable a coordenadas cilíndricas e denotemos por $f(x, y, z) = \frac{1}{9}(x^2 + y^2) \cos z$. Temos que $f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) |J| = \frac{1}{9} r^3 \cos z$, e o recinto de integración, Figura 9.11, que é un cilindro de raio 3 e altura $\frac{\pi}{2}$,

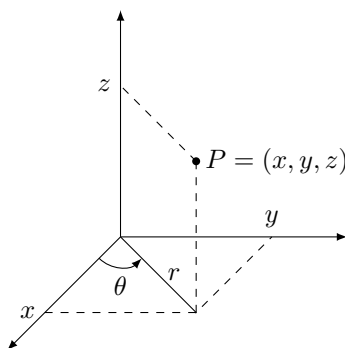


Figura 9.10: Coordenadas cilíndricas

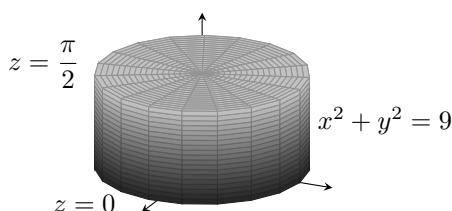


Figura 9.11: O cilindro como recinto de integración

transfórmase no rectángulo limitado por, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}$. Así, temos que

$$\begin{aligned} \iiint_B \frac{1}{9}(x^2 + y^2) \cos z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{9} r^3 \cos z \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{36} \left[\theta \right]_0^{2\pi} \left[r^4 \right]_0^3 \left[\sin z \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

9.5.2. Coordenadas esféricas

O cambio a coordenadas esféricas está definido pola función $g(r, \varphi, \theta) = (x, y, z)$, onde

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi.$$

É inmediato comprobar, tanto analiticamente como xeometricamente (Figura 9.12), que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distancia da orixe de coordenadas ó punto $P = (x, y, z)$; φ o ángulo formado polo vector correspondente ó punto co semieixe z positivo e θ o ángulo que forma o vector correspondente á proxección do punto P sobre o plano xy , co semieixe x positivo.

Esta función é inxectiva e de clase un no dominio $B = (0, +\infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^3$, se ben a imaxe $g(B)$ é todo $\mathbb{R}^3$ menos o eixe z , e a matriz xacobiana de g é a matriz das derivadas de $x, y,$

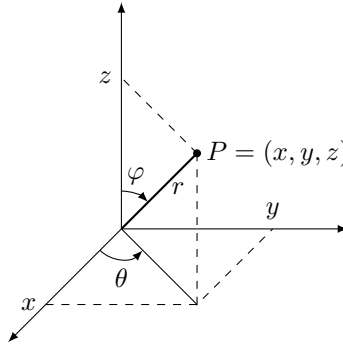


Figura 9.12: Coordenadas esféricas

z , respecto de r , φ e θ . Isto é,

$$J = Dg(r, \varphi, \theta) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifícase que $J = \det Dg(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin \varphi > 0$, para todo $(r, \varphi, \theta) \in B$, e

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{g^{-1}(S)} f(g(r, \varphi, \theta)) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta,$$

para calquera recinto $S \subset g(B)$ pechado e limitado e calquera función $f: g(B) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Exemplo 9.38 Calcula a integral $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, onde $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq z \leq \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$.

O recinto de integración, representado na Figura 9.13, é o sólido $x \geq 0, y \geq 0$, limitado inferiormente pola esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e superiormente polo elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$.

Resolvemos o exercicio mediante dous cambios de variables, dividindo o recinto en dous subre-

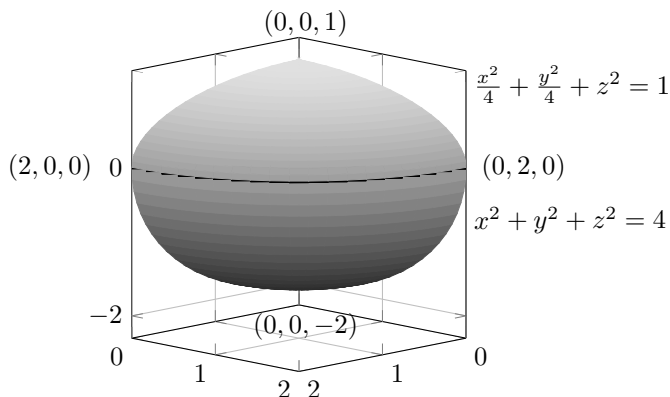


Figura 9.13: Recinto de integración

cintos,

$$R_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq z \leq 0\}$$

$$R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2 - y^2}\}.$$

O primeiro subrecinto transfórmasse mediante o cambio a coordenadas esféricas no rectángulo

$$g^{-1}(R_1) = \{(r, \varphi, \theta) : 0 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Se $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $f(g(r, \varphi, \theta))|\det Dg(r, \varphi, \theta)| = r^4 \sin \varphi$ e

$$I_1 = \iiint_{R_1} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^4 \sin \varphi d\varphi d\theta dr$$

$$= \frac{1}{5} \left[r^5 \right]_0^2 \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos \varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{16\pi}{5}.$$

No subrecinto R_2 utilizamos o cambio $h(r, \varphi, \theta) = (x, y, z)$, con $x = 2r \sin \varphi \cos \theta$, $y = 2r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \varphi$ de onde, $\det Dh(r, \varphi, \theta) = 4r^2 \sin \varphi$. Con este cambio de variable, o recinto de integración transfórmasse en

$$h^{-1}(R_2) = \{(r, \varphi, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

e a función que se quere integrar é $f(g(r, \varphi, \theta))|\det Dh(r, \varphi, \theta)| = 4r^4(4 \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi)$.

De aquí, temos que

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \iiint_{R_2} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4r^4 (4 \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi) d\varphi d\theta dr \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16r^4 \sin \varphi - 12r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi) d\varphi d\theta dr \\
 &= \frac{16}{5} \left[r^5 \right]_0^1 \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{5} \left[r^5 \right]_0^1 \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos^3 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6\pi}{5}.
 \end{aligned}$$

Da soma das integrais I_1 e I_2 , séguese que

$$\begin{aligned}
 \iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4r^4 (4 \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi) d\varphi d\theta dr \\
 &\quad + \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^4 \sin \varphi d\varphi d\theta dr = \frac{22\pi}{5}.
 \end{aligned}$$

Exercícios

20. Calcula o volume:
 - a) Do elipsoide de semieixes a , b e c .
 - b) Do cono de altura h e raio da base a .
 - c) Do sólido limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$.
 - d) Do sólido determinado por $z = \frac{xy}{1 + x^2 y^2}$ e o recinto $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 5, 1 \leq x \leq 5\}$.
 - e) Do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, o cono $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ e o plano $z = 0$.
 - f) Dunha esfera de raio a , como unha integral tripla.
 - g) Do sólido limitado pelo cilindro $r = 4 \cos \theta$ a esfera $r^2 + z^2 = 16$ e o plano $z = 0$.
21.
 - a) Escreve a integral tripla que determina o volume de $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y + z \geq 2\}$.
 - b) Calcula o volume do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4 - (x^2 + y^2)$, polo plano $z = 0$ e polo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
 - c) Calcula $\iiint_R (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dx dy dz$ onde R é o cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq \frac{1}{\pi}$.
22. Calcula as integrais:
 - a) $\iiint_R z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, onde R é o sólido limitado por $2z = x^2 + y^2$ e $z = 2$.

- b) $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^9 \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx$
- c) $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\frac{x^2+y^2}{2}} (x^2+y^2) dz dy dx$
- d) $\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} dz dy dx$
- e) $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2) dz dy dx$
- f) $\iiint_R z dx dy dz, R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$
- g) $\iiint_R z^2 dx dy dz, R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az\}$, (Figura 9.14).
- h) $\iiint_R xyz dx dy dz$, e R o tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

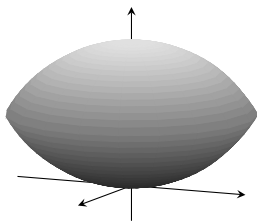


Figura 9.14: Recinto de integración

23. O centro de masas dun recinto sólido $A \subset \mathbb{R}^3$ de densidade $\rho(x, y, z)$ está dado por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}$, $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$, sendo $m = \iiint_A \rho(x, y, z) dx dy dz$ é a masa do sólido e $M_{yz} = \iiint_A x \rho(x, y, z) dx dy dz$, $M_{xz} = \iiint_A y \rho(x, y, z) dx dy dz$, $M_{xy} = \iiint_A z \rho(x, y, z) dx dy dz$, os momentos de primeira orde respecto dos planos yz , xz e xy , respectivamente. Ademais, os momentos de inercia ou momentos de segunda orde respecto dos eixes x , y e z están definidos por $I_x = \iiint_A (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$, $I_y = \iiint_A (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$, $I_z = \iiint_A (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$, respectivamente. Se denotamos por $I_{xy} = \iiint_A z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$, entón é inmediato, e útil para os

cálculos, as igualdades: $I_x = I_{xz} + I_{xy}$, $I_y = I_{yz} + I_{xy}$, $I_z = I_{xz} + I_{yz}$.

Calcula os momentos de inercia para os sólidos da Figura 9.15 coas densidades que se especifican.

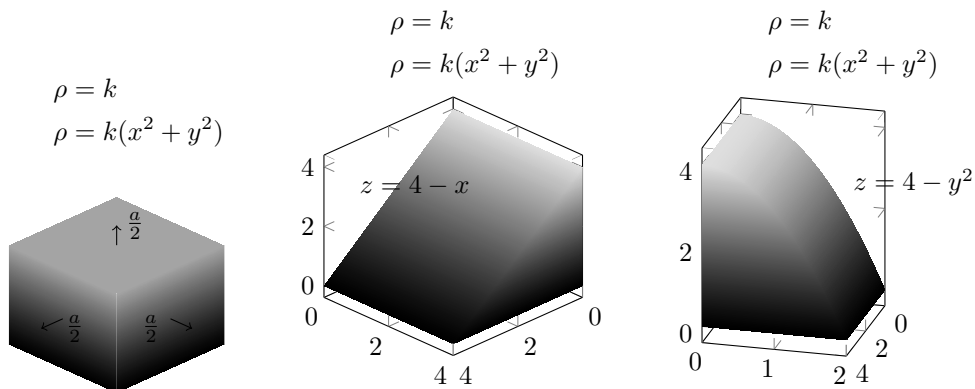


Figura 9.15: Momentos de inercia dalgúns sólidos no espazo

24. Calcula a masa e o centro de masas do sólido limitado polas superficies de cada un dos apartados que seguen coa densidade que se especifica en cada caso.
 - a) $R: x = 0, y = 0, y = 4, z = 0, z = 4 - x, \rho(x, y, z) = kx$.
 - b) $R: x = 0, y = 0, z = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, a, b, c > 0, \rho(x, y, z) = kx$.
 - c) $R: x = 0, x = b, y = 0, y = b, z = 0, z = b, \rho(x, y, z) = kxy$.
 - d) $R: x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c, \rho(x, y, z) = kz$.
25. Calcula o centro de masas do cono que ten como densidade: a) Proporcional á distancia de cada punto ó eixe do cono. b) Proporcional á distancia de cada punto á base do cono.
26. a) Proba que o momento de inercia do cono de densidade uniforme respecto do eixe z vale $I_z = \frac{3}{10}ma^2$. b) Calcula o momento de inercia do cono respecto do eixe z que ten como densidade $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2)$. c) Proba que para o sólido $r = 2a \sin \theta, 0 \leq z \leq h$, con densidade uniforme, $I_z = \frac{3}{2}ma^2$.
27. Calcula o centro de masas do sólido de densidade uniforme: a) Hemisferio sólido de raio a . b) Sólido comprendido entre dous hemisferios concéntricos de raios a e $A, a < A$.

9.5.3. Exemplos de outros cambios de variable

Exemplo 9.39 Calcula $\iiint_R \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}, R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

O cambio de variable $u = x$, $v = y$, $w = 1 + x + y + z$, ou, equivalentemente,

$$x = u, \quad y = v, \quad z = -u - v + w - 1,$$

ten como xacobiano $J = 1$, e os planos que definen o recinto orixinal transfórmanse, respectivamente, en

$$\begin{aligned} x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, & \quad x + y + z = 1 \\ u = 0, \quad v = 0, \quad -u - v + w = 1, & \quad w = 2. \end{aligned}$$

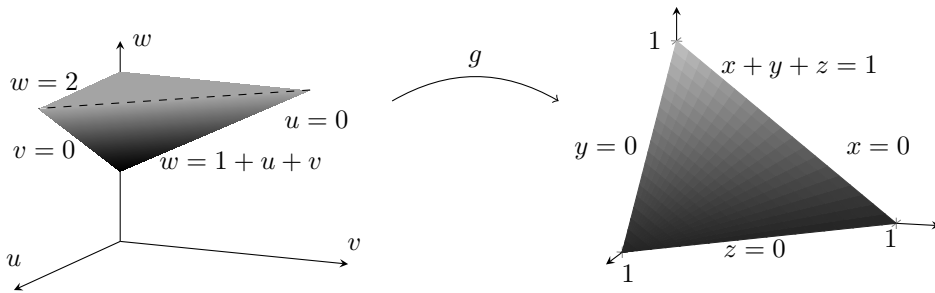


Figura 9.16: Cambeo de variable lineal

Estes constitúen novamente un tetraedro no novo sistema de coordenadas, Figura 9.16, que ten como límites, $1 \leq w \leq 2$, $0 \leq u \leq w - 1$, $0 \leq v \leq w - u - 1$. Así,

$$\begin{aligned} \iiint_R \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3} &= \int_1^2 \int_0^{w-1} \int_0^{w-u-1} \frac{1}{w^3} dv du dw \\ &= \int_1^2 \int_0^{w-1} \frac{1}{w^3} (w - u - 1) du dw \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{w^3} [2wu - u^2 - 2u]_0^{w-1} dw \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{w^3} (w^2 - 2w + 1) dw \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{w} - \frac{2}{w^2} + \frac{1}{w^3} \right) dw = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Exemplo 9.40 Calcula o volume do casquete esférico sobre unha esfera de raio a e altura h da esfera sobre o plano.

O volume a calcular está determinado polo sólido $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq a - h\}$. A base do casquete é o círculo $x^2 + y^2 \leq 2ah - h^2$ sobre o plano $z = a - h$. Utilizando coordenadas esféricas, temos que $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \arctan \frac{\sqrt{2ah - h^2}}{a - h}$, $\frac{a - h}{\cos \varphi} \leq r \leq a$.

Ademais, é inmediato que $\cos\left(\arctan \frac{\sqrt{2ah-h^2}}{a-h}\right) = \frac{a-h}{a}$. De aquí temos que

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan \frac{\sqrt{2ah-h^2}}{a-h}} \int_{\frac{a-h}{\cos \varphi}}^a r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan \frac{\sqrt{2ah-h^2}}{a-h}} \frac{1}{3} \sin \varphi \left[r^3 \right]_{\frac{a-h}{\cos \varphi}}^a d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan \frac{\sqrt{2ah-h^2}}{a-h}} \frac{1}{3} \sin \varphi \left(a^3 - \frac{(a-h)^3}{\cos^3 \varphi} \right) d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \left[-a^3 \cos \varphi - \frac{(a-h)^3}{2 \cos^2 \varphi} \right]_0^{\arctan \frac{\sqrt{2ah-h^2}}{a-h}} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}(a-h)a^2 + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{6}(a-h)^3 \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{6} h^2 (3a-h) d\theta = \frac{\pi h^2}{3} (3a-h).
 \end{aligned}$$

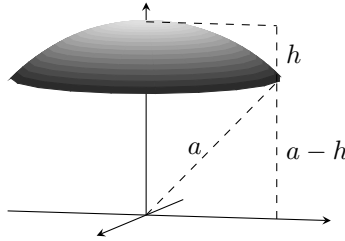


Figura 9.17: Volume dun sólido

Exemplo 9.41 Calcula a integral da función $f(x, y, z) = xy(x^2 + z^2)$ sobre o recinto determinado por $x \geq 0$, $z \geq 0$, $y \geq \sqrt{3(x^2 + z^2)}$, $x^2 + z^2 \leq 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$, Figura 9.18.

Calculamos esta integral en coordenadas cilíndricas tomando o eixe y como eixe dos cilindros do cambio de variable. É dicir, realizamos o cambio $x = r \cos \theta$, $y = y$, $z = r \sin \theta$, onde o valor absoluto do xacobiano desta transformación vale $|J| = r$. Con este cambio, para $x \geq 0$ e $z \geq 0$, temos que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; o valor de r está limitado polo raio do cilindro, polo que $0 \leq r \leq 1$ e a variable y ten como límite inferior o cono, $y = \sqrt{3}r$, e como límite superior a esfera, $y = \sqrt{16 - r^2}$,

polo que $\sqrt{3}r \leq y \leq \sqrt{16-r^2}$. Ademais, $f(r \cos \theta, y, r \sin \theta)|J| = yr^4 \cos \theta$. Daquela temos que

$$\begin{aligned} \iiint_R xy(x^2 + z^2) dx dy dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{16-r^2}} yr^4 \cos \theta dy dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (16r^4 - 4r^6) \cos \theta dy dr d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{16}{5} r^5 - \frac{4}{7} r^7 \right]_0^1 \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{46}{35}. \end{aligned}$$

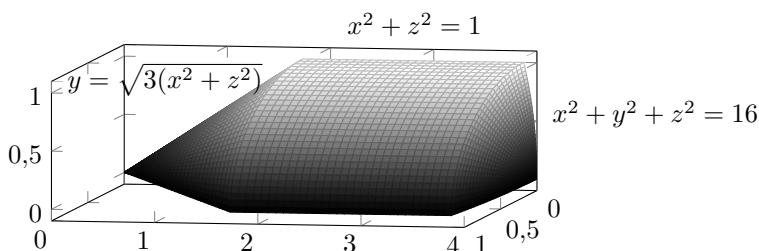


Figura 9.18: Cambio de variable cilíndricas

9.6. Teorema da diverxencia

Aínda que na nosa exposición o teorema da diverxencia é o último dos teoremas que enunciámos relacionando unha integral nunha dimensión con outra nunha dimensión menos (os outros son os teoremas de Green e o de Stokes), historicamente foi o primeiro en ser enunciado e demostrado. Nun traballo de 1813, o grande matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) probou tres casos particulares do resultado e, por tal motivo, en moitos textos o teorema leva o seu nome. Posteriormente, en 1833 e 1839, Gauss publicou máis casos particulares. Pero, entremedias, o matemático ruso Mikhail Ostrogradsky (1801-1862) presentaba, o día 13 de febreiro de 1826, diante da Academia de Ciencias de París, o traballo *Demostración dun teorema do cálculo integral*, no que daba unha formulación e unha demostración xeral do teorema da diverxencia. A publicación do traballo adiouise ata 1831. Polo menos outros tres matemáticos publicaron nese período resultados directamente relacionados co teorema da diverxencia: o xa mencionado no capítulo anterior de George Green (1793-1841) en 1828, e os dos matemáticos franceses Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) en 1828 e Simeon Denis Poisson (1781-1840) en 1831. Todos estes autores chegaron ao teorema da diverxencia investigando en distintos problemas físicos: Gauss na atracción magnética, Ostrogradsky na teoría da calor, Green na electricidade e o magnetismo, Poisson nos corpos elásticos e Sarrus nos corpos flotantes.

Definición 9.42 Un sólido en $\mathbb{R}^3$ é un conxunto pechado e limitado $A \subset \mathbb{R}^3$ tal que calquera veciñanza de todo punto fronteira de A contén puntos interiores de A .

Definición 9.43 Unha superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ regular a anacos é pechada se é fronteira dun sólido en $\mathbb{R}^3$.

Unha esfera, un elipsoide, un cubo, un tetraedro, un cilindro con tapas ou un cono coa tapa da base, son os exemplos máis comúns de superficies pechadas en $\mathbb{R}^3$.

Definición 9.44 A diverxencia dun campo vectorial diferenciable $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que é denotado por $\operatorname{div} F(x)$ ou $\nabla \cdot F(x)$, defínese como $\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$.

Observaremos que a notación $\nabla \cdot F$, corresponde ó produto escalar do operador ∇ co vector $F(x)$. No caso, por exemplo, de $n = 3$, $\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$.

Vexamos unha propiedade importante que relaciona a diverxencia co rotacional dun campo.

Teorema 9.45 Se $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de clase dous, entón $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} F) &= \nabla \cdot (\nabla \times F) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} = 0. \end{aligned}$$

■

O teorema da diverxencia relaciona unha integral tripla sobre un recinto sólido A cunha integral de fluxo sobre a superficie que limita o sólido A .

Teorema 9.46 (da diverxencia) Sexa A un recinto sólido limitado por unha superficie S regular a anacos, pechada e orientada por vectores normais unitarios N dirixidos para o exterior de A . Se $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é un campo vectorial de clase un en A , entón

$$\iint_S F \cdot N dS = \iiint_A \operatorname{div} F dx dy dz.$$

Exemplo 9.47 Sexan A o recinto sólido limitado polos planos coordenados e o plano $2x + 2y + z = 6$, e $F(x, y, z) = (x, y^2, z)$. Se S é a fronteira de A e como o recinto A está limitado por catro planos distintos, serían necesarias catro integrais de superficie para calcular $\iint_S F \cdot N dS$. Non obstante, o

teorema da diverxencia permite chegar ó resultado co cálculo dunha única integral tripla. En efecto, como

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2 + 2y,$$

temos que

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot N dS &= \iiint_A \operatorname{div} F dx dy dz = \int_0^3 \int_0^{3-y} \int_0^{6-2x-2y} (2+2y) dz dx dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} [2z + 2yz]_0^{6-2x-2y} dx dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (12 - 4x + 8y - 4xy - 4y^2) dx dy \\ &= \int_0^3 [12x - 2x^2 + 8xy - 2x^2y - 4y^2x]_0^{3-y} dy \\ &= \int_0^3 (18 + 6y - 10y^2 + 2y^3) dy = \left[18y + 3y^2 - \frac{10y^3}{3} + \frac{y^4}{2} \right]_0^3 \\ &= \frac{63}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 9.48 Sexa A o recinto sólido entre o paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano $z = 0$, Figura 9.19. Verificar o teorema da diverxencia para o campo $F(x, y, z) = (2z, x, y^2)$.

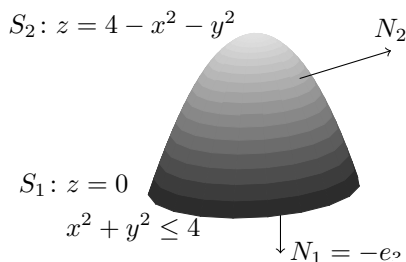


Figura 9.19: Fluxo que atravesa un paraboloide

Se aplicamos o teorema da diverxencia, temos que

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x} 2z + \frac{\partial}{\partial y} x + \frac{\partial}{\partial z} y^2 = 0,$$

de onde

$$\iint_S F \cdot N dS = \iiint_A \operatorname{div} F dx dy dz = 0.$$

Por outra parte, veremos que se resolvemos o exercicio utilizando a definición o volume de operacións aumenta considerablemente.

O vector normal á superficie S_1 que apunta cara a fóra é $\bar{N}_1 = -e_3$ e $\bar{N}_2 = (2x, 2y, 1)$ o vector normal á superficie S_2 . Así,

$$\begin{aligned}
 \iint_S F \cdot N dS &= \iint_{S_1} F \cdot N_1 dS + \iint_{S_2} F \cdot N_2 dS \\
 &= \iint_{S_1} F \cdot (-e_3) dS + \iint_{S_2} F \cdot (2x, 2y, 1) dS \\
 &= \iint_A -y^2 dx dy + \iint_A (4xz + 2xy + y^2) dx dy \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} -y^2 dx dy + \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy + y^2) dx dy \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy) dx dy \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} [4x(4 - x^2 - y^2) + 2xy] dx dy \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (16x - 4x^3 - 4xy^2 + 2xy) dx dy \\
 &= \int_{-2}^2 \left[8x^2 - x^4 - 2x^2y^2 + x^2y \right]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dy \\
 &= \int_{-2}^2 0 dy = 0.
 \end{aligned}$$

Exemplo 9.49 Sexa A o sólido limitado polo cilindro $x^2 + y^2 = 4$, o plano $x + z = 6$ e o plano $z = 0$, Figura 9.20. Calcula $\iint_S F \cdot N dS$ onde S denota a fronteira de A e $F(x, y, z) = (x^2 + \sin z, xy + \cos z, e^y)$.

A avaliación directa desta integral sería moi traballosa. Non obstante, o teorema da diverxencia permite simplificar o seu cálculo. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \iint_S F \cdot N dS &= \iiint_A \operatorname{div} F dx dy dz \\
 &= \iiint_A 3x dx dy dz \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{6-r \cos \theta} 3r^2 \cos \theta dz dr d\theta = -12\pi.
 \end{aligned}$$

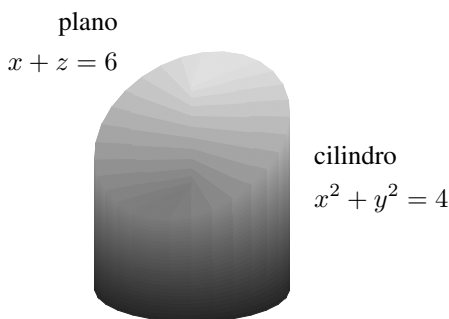


Figura 9.20: Aplicación do teorema da diverxencia

Exemplo 9.50 Para calcular o fluxo do campo vectorial $F(x, y, z) = (2x^3, 2y^3, 2z^3)$ que atravesa cara a fóra a superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$, utilizamos o teorema da diverxencia,

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot N dS &= \iiint_A \operatorname{div} F dx dy dz \\ &= \iiint_A 6(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= 6 \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin \varphi d\theta d\varphi d\rho = \frac{768\pi}{5}. \end{aligned}$$

Exemplo 9.51 Sexa S a superficie pechada formada polo hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ e a base, $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$, e consideremos o campo eléctrico $E(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Calcula o fluxo eléctrico a través de S .

Utilizamos o teorema da diverxencia, $\operatorname{div} E = 6$, e coordenadas esféricas para calcular directamente o fluxo pedido,

$$\iint_S E \cdot N dS = \iiint_A 6 dx dy dz = 4\pi.$$

Exercicios

28. Calcula a diverxencia do campo vectorial F . a) $F(x, y, z) = (xe^x, ye^y, 0)$
b) $F(x, y, z) = (\sin x, \cos y, z^2)$ c) $F(x, y, z) = (\ln(x^2 + y^2), xy, \ln(y^2 + z^2))$
29. Calcula a diverxencia do campo vectorial F , no punto indicado.
a) $F(x, y, z) = (e^x \sin y, -e^x \cos y, 0)$, $(0, 0, 3)$ b) $F(x, y, z) = e^{-xyz}(1, 1, 1)$, $(3, 2, 0)$
30. Calcula $\operatorname{div}(F \times G)$, para $F(x, y, z) = (1, 2x, 3y)$, e $G(x, y, z) = (x, -y, z)$.
31. Calcula $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \nabla \cdot (\nabla \times F)$, para a) $F(x, y, z) = (xyz, y, z)$, b) $F(x, y, z) = (x^2 z, -2xz, yz)$

32. Consideremos a función $F(x, y, z) = (x, y, z)$ e definamos $f(x, y, z) = \|F(x, y, z)\|$. Proba que se verifica: a) $\nabla(\ln f) = \frac{F}{f^2}$. b) $\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{F}{f^3}$. c) $\nabla f^n = n f^{n-2} F$.
33. Comproba que se verifica o teorema da diverxencia para os campos e superficies definidos polas ecuacións respectivas.
- a) $F(x, y, z) = (2x, -2y, z^2)$, $S: \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq a, a > 0$.
 b) $F(x, y, z) = (2x, -2y, z^2)$, $S: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = h$.
 c) $F(x, y, z) = (2x - y, -2y + z, z)$, $S: 2x + 4y + 2z = 12, x = 0, y = 0, z = 0$.
 d) $F(x, y, z) = (xy, z, x + y)$, $S: y = 4, z = 4 - x, x = 0, y = 0, z = 0$.
34. Utiliza o teorema da diverxencia para calcular o fluxo do campo F que atravesa a superficie do sólido limitada polas gráficas das ecuacións:
- a) $F(x, y, z) = (x^2, -2xy, xyz^2)$, $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z = 0$.
 b) $F(x, y, z) = (xy^2 + \cos z, x^2y + \sin z, e^z)$, $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 4$.
35. Calcula $\iint_S \text{rot } F \cdot N dS$, onde S é a superficie pechada que é fronteira do sólido limitado polas gráficas de $x = 4, z = 9 - y^2$ e os planos coordenados.
- a) $F(x, y, z) = (4xy + z^2, 2x^2 + 6yz, 2xz)$ b) $F(x, y, z) = (xy \cos z, yz \sin x, xyz)$
36. Sexa $S \subset \mathbb{R}^3$ unha superficie pechada. Proba que se $F(x, y, z) = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, entón:
- a) $\iint_S \text{rot } F \cdot N dS = 0$ b) $\iiint_S F \cdot N dS = 0$

9.7. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. A superficie $r(u, v) = (u, 3 \cos v, 3 \sin v)$, $0 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, corresponde,
- a) a un cilindro de eixe z b) á parte do octante positivo do cilindro $y^2 + z^2 = 9$, para $0 \leq x \leq 4$.
 c) ó cilindro $y^2 + z^2 = 9$ d) ó paraboloide $x = y^2 + z^2$
2. Sexan $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \leq 0\}$, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $g(r, \varphi, \theta) = f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi)$. Se denotamos por $I = \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$, entón
- a) $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^\pi g(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi d\varphi dr d\theta$ b) $I = \int_0^\pi \int_0^1 \int_0^\pi g(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi d\varphi dr d\theta$
 c) $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi d\varphi dr d\theta$ d) $I = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi d\varphi dr d\theta$

3. Se denotamos por $I = \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$, para $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1, \}$ e $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entón

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r^2 \sin \theta dz d\theta dr$

b) $I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^1 f(x, y, z) dx dy dz$

c) $I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz d\theta dr$

d) $I = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz$

4. Sexan $F(x, y, z) = (2z, x, y^2)$, S a superficie do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$ e C o bordo de S . Unha das seguintes igualdades é FALSA.

a) $\text{rot } F = (2y, 2, 1)$

b) $\iint_S (\text{rot } F) \cdot N dS = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xy + 4y + 1) dx dy$

c) $\int_C F \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 t dt = \pi$

d) $C = \alpha[0, 2\pi]$, para $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$.

5. A integral de fluxo, $I = \iint_S F \cdot N dS$, dun campo continuo $F(x, y, z)$ sobre unha superficie S definida por $y = g(x, z)$ nun dominio $A \subset \mathbb{R}^2$ está definida por

a) $I = \iint_A F(x, g(x, z), z) \cdot (-g_x, 1, -g_z) dx dz$ b) $I = \iint_A F(x, y, z) \cdot (x, y, z) dx dy dz$

c) $I = \iint_A F(x, y, g(x, y)) \cdot (-g_x, -g_y, 1) dx dy$ d) $I = \iiint_A \text{div } F(x, y, z) dx dy dz$.

6. O fluxo que o campo vectorial $F(x, y, z) = (2x^3, 2y^3, 2z^3)$ atravesa de dentro hacia fora a superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ vale,

a) $\int_C F \cdot d\alpha$ b) $\iint_S \text{div } F dx dy$.

c) $\iiint_A (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ d) $6 \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin \varphi d\theta d\varphi d\rho = \frac{768\pi}{5}$

7. A cantidade de fluxo por unidade de tempo do vector de posición $r(x, y, z) = (x, y, z)$ que atravesa a superficie que é fronteira da esfera $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ vale

a) $\iiint_A dx dy dz$ b) $\frac{4}{3}\pi a^3$ c) $4\pi a^3$ d) πa^3

9.8. Integrales triples e de superficie con MATLAB

Para calcular a integral tripla da función $f(r, \varphi, \theta) = r^3 \sin^2 \varphi \cos^3 \theta$ no recinto $(r, \varphi, \theta) \in [0, 2] \times [0\pi] \times [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$, utilizamos as sentenzas

```
>>syms r f t
>>I=int(int(int(r^3*sin(f)^2*cos(t)^3,r,0,2),f,0,pi),t,-pi/2,pi/4)
```

Para o campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$ sobre a superficie $z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0$, temos que $\iint_S F \cdot N dS = \frac{243\pi}{2}$, utilizando as sentenzas

```
>>syms u v x y z
>>S=[u*cos(v), u*sin(v), 9-u^2]
>>DS=jacobian(S,[u,v])
>>N=simplify(cross(DS(:,1),DS(:,2)))
>>F=[x,y,z]
>>FS=subs(F,[x,y,z],S)
>>PE=simplify(FS*N)
>>I=int(int(PE,u,0,3),v,0,2*pi)
```

As seguintes sentenzas utilizan o teorema da diverxencia para calcular mediante unha integral triple o fluxo do campo $F(x, y, z) = (xy^2 + \cos z, x^2y + \sin z, e^z)$ que atravesa a superficie S limitada e pechada definida por $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 4$.

```
syms x y z r t
F=[x*y^2+cos(z), x^2*y+sin(z), exp(z)]
DIVF(x,y,z)=diff(F(1),x)+diff(F(2),y)+diff(F(3),z)
DIVFC=simplify(DIVF(r*cos(t),r*sin(t),z))
FLUXO=int(int(int(DIVFC*r,z,r,4),t,0,2*pi),r,0,4)
```

Aplicamos o teorema de Stokes para calcular a circulación do campo $F(x, y, z) = (-y + z, x - z, x - y)$ sobre o bordo da superficie $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

```
syms x y z r t
F=[-y+z, x-z, x-y]
S=[r*cos(t), r*sin(t), 0]
DS=jacobian(S,[r,t])
N=simplify(cross(DS(:,1),DS(:,2)))
ROTF=[diff(F(3),y)-diff(F(2),z), diff(F(1),z)-diff(F(3),x), ...
diff(F(2),x)-diff(F(1),y)]
ROTFs=subs(ROTF,[x,y,z],S);
PE=ROTFs*N
CIRCULACION=int(int(PE,r,0,1),t,0,2*pi)
```

9.9. Solución dos exercicios propostos.

1-a. Silla

1-c. Esfera

2-a. $z = \frac{y}{2}$

2-c. $x^2 + z^2 = 4$

3-a. $r(x, y) = (x, y, y)$

3-c. $r(u, v) = (4 \operatorname{sen} u, 4 \cos u, v)$

3-e. $r(x, y) = (x, y, x^2)$

3-g. $r(u, v) = (u \operatorname{sen} v, u \cos v, 4)$

4-a. $r(u, v) = (u, \frac{u}{2} \operatorname{sen} v, \frac{u}{2} \cos v)$

4-c. $r(u, v) = (\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos v, u)$

5-a. $x - y - 2z = 0$

5-c. $12 - 4y + 3z = 0$

6-a. $I = 12$

6-c. $I = 20\pi$

7. $I = \frac{4}{3}\pi$

9-a. $I = \frac{5}{2}$

10-a. $(0, 0, -2)$

11. $(0, 6x, -3y)$

12-a. $(0, z, y)$

13-a. $I = 2\pi$

13-c. $I = 0$

14-a. $I = 0$

14-c. $I = 0$

15-a. $I = \frac{2}{3}\pi$

1-b. Cono

1-d. Cilindro

2-b. $z = x^2 + y^2$

2-d. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

3-b. $r(x, y) = (x, y, 6 - x - y)$

3-d. $r(u, v) = (4 \operatorname{sen} u, 2 \cos u, v)$

3-f. $r(u, v) = (3 \operatorname{sen} v \cos u, 2 \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos v)$

3-h. $r(u, v) = (u \operatorname{sen} v, u \cos v, u)$

4-b. $r(u, v) = (u, \sqrt{u} \operatorname{sen} v, \sqrt{u} \cos v)$

4-d. $r(u, v) = ((4 - u^2) \sin v, u, (4 - u^2) \cos v)$

5-b. $-x - y + 2z = 0$

6-b. $I = \frac{243}{2}\pi$

6-d. $I = 0$

8. $I = \frac{2}{3}\pi$

9-b. $I = \frac{3}{2}\pi$

10-b. $(6, -6, 0)$

12-b. $(0, 1, 2x)$

13-b. $I = 8\pi$

13-d. $I = a^3 - a^4$

14-b. $I = 0$

15-b. $I = \pi^2$

17-a. $I = 128\pi$

17-b. $I_1 = 144\pi$

17-c. $I = -16\pi$

18-a. 45

18-b. $\frac{-15}{\pi}$

18-c. $\frac{\pi}{8}$

18-d. $\frac{68}{9}$

18-e. $\frac{\pi}{6}$

18-f. $\frac{5\sqrt{2}}{144}$

19. 0

20-a. $\frac{4}{3}\pi abc$

20-b. $\frac{1}{3}\pi a^2 h$

20-c. 8π

20-d. $\frac{1}{2} \ln 5 \ln 13$

20-e. $\frac{32}{9}$

20-f. $\frac{4}{3}\pi a^3$

20-g. $\frac{64\pi}{3}$

21-a. $\frac{2\pi}{3}(8 - 5\sqrt{2})$

21-b. $\frac{7\pi}{2}$

21-c. $\frac{a^6}{3}$

22-a. $\frac{128\pi}{21}$

22-b. $\frac{405\pi}{2}$

22-c. $\frac{32\pi}{3}$

22-d. $\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi \arctan 5}{2}$

22-e. $\frac{4\pi a^5}{15}$

22-f. $\frac{\pi}{8}$

22-g. $\frac{59}{480}\pi a^5$

22-h. $\frac{1}{720}$

23-a1. $M_{xy} = M_{xz} = M_{yz} = 0$, $I_x = I_y = I_z = \frac{ka^5}{6}$, $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = \frac{ka^5}{12}$

23-a2. $M_{xy} = M_{xz} = M_{yz} = 0$, $I_x = I_y = \frac{ka^7}{30}$, $I_z = \frac{7ka^7}{180}$, $I_{xy} = \frac{ka^7}{72}$, $I_{xz} = I_{yz} = \frac{7ka^7}{360}$

23-b1. $M_{xy} = M_{yz} = \frac{128k}{3}$, $M_{xz} = 64k$, $I_x = I_z = 256k$, $I_y = \frac{512k}{3}$,

$$I_{xy} = I_{yz} = \frac{256k}{3}, I_{xz} = \frac{512k}{3}$$

23-b2. $M_{xy} = M_{yz} = \frac{256k}{3}$, $M_{xz} = \frac{512k}{3}$, $I_x = I_z = \frac{2048k}{3}$, $I_y = \frac{1024k}{3}$,

$$I_{xy} = I_{yz} = \frac{512k}{3}, I_{xz} = 512k$$

23-c1. $M_{xy} = \frac{512k}{15}$, $M_{xz} = 16k$, $M_{yz} = \frac{128k}{3}$, $I_x = \frac{3328k}{35}$, $I_y = \frac{60416k}{315}$, $I_z = \frac{5888k}{45}$,

$$I_{xy} = \frac{8192k}{105}, I_{xz} = \frac{256k}{15}, I_{yz} = \frac{102k}{9}$$

23-c2. $M_{xy} = \frac{2048k}{35}$, $M_{xz} = \frac{128k}{3}$, $M_{yz} = \frac{512k}{5}$, $I_x = \frac{48128k}{315}$, $I_y = \frac{118784k}{315}$, $I_z = \frac{11264k}{35}$,

$$I_{xy} = \frac{32768k}{315}, I_{xz} = \frac{1024k}{21}, I_{yz} = \frac{4096k}{15}$$

$$24\text{-a. } m = \frac{128k}{3}, M_{xy} = \frac{128k}{3}, M_{xz} = \frac{256k}{3}, M_{yz} = \frac{256k}{3}, \text{ centro} = (2, 2, 1)$$

$$24\text{-b. } m = \frac{ka^2bc}{24}, M_{xy} = \frac{ka^2bc^2}{120}, M_{xz} = \frac{ka^2b^2c}{120}, M_{yz} = \frac{ka^3bc}{60}, \text{ centro} = \left(\frac{2a}{5}, \frac{b}{5}, \frac{c}{5}\right)$$

$$24\text{-c. } m = \frac{kb^5}{4}, M_{xy} = \frac{kb^6}{8}, M_{xz} = \frac{kb^6}{6}, M_{yz} = \frac{kb^6}{6}, \text{ centro} = \left(\frac{2b}{3}, \frac{2b}{3}, \frac{b}{2}\right)$$

$$24\text{-d. } m = \frac{kabc^2}{2}, M_{xy} = \frac{kabc^3}{3}, M_{xz} = \frac{kab^2c^2}{4}, M_{yz} = \frac{ka^2bc^2}{4}, \text{ centro} = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{2c}{3}\right)$$

$$25\text{-a. } (0, 0, \frac{5h}{6})$$

$$25\text{-b. } (0, 0, \frac{4h}{5})$$

$$26\text{-a. } \frac{3ma^2}{10}$$

$$26\text{-b. } k\pi \frac{a^7}{21}$$

$$26\text{-c. } \frac{3ma^2}{2}$$

$$27\text{-a. } (0, 0, \frac{3a}{8})$$

$$27\text{-b. } \left(0, 0, \frac{3(A^4 - a^4)}{8(A^3 - a^3)}\right)$$

$$28\text{-a. } (1+x)e^x + (1+y)e^y$$

$$28\text{-b. } \cos x - \sin y + 2z$$

$$28\text{-c. } \frac{2x}{x^2+y^2} + x + \frac{2z}{y^2+z^2}$$

$$29\text{-a. } 0$$

$$29\text{-b. } -6$$

$$30. 3x + 2z$$

$$31\text{-a. } 0$$

$$31\text{-b. } 0$$

$$33\text{-a. } I = 0$$

$$33\text{-b. } I = \pi h^2$$

$$33\text{-c. } I = 18$$

$$33\text{-d. } I = 64$$

$$34\text{-a. } I = 0$$

$$34\text{-b. } I = \left(\frac{512}{5} + 10e^4\right)\pi$$

$$35\text{-a. } I = 0$$

$$35\text{-b. } I = 0$$

Soluciones autoevaluación. 1b, 2a, 3c, 4c, 5a, 6d, 7c

Capítulo 10

Ecuacións diferenciais de primeira orde

10.1. Introducción

Consideremos unha variable y que está suxeita a modificacións en forma continua en función doutra variable x , e sexa $y'(x)$ a taxa de cambio da variable y por unidade de variación da variable x . Se supoñemos que a taxa de cambio é proporcional ó valor da variable, entón $y'(x) = ay(x)$. Este caso particular de ecuación, que aparece en numerosos problemas, denomínase ecuación diferencial. Esta é unha hipótese que aparece, afortunadamente, en numerosos problemas. Por exemplo, sexa $y(x)$ o número de individuos nunha poboación dada, como pode ser unha colonia de bacterias. Baixo condicións ideais de crecemento, parece razoable supoñer que, en calquera instante de tempo, a taxa de crecemento é proporcional ó número de individuos presentes. Neste caso o parámetro a é unha constante positiva, que depende das características biolóxicas da poboación e das condicións no medio.

Noutros casos, a constante a pode ser negativa. Por exemplo, cando un anaco de material radioactivo está desintegrándose, a taxa de desintegración é proporcional á cantidade de material radioactivo perdido. A constante de proporcionalidade a depende do tipo de material que estea desintegrándose.

Parece natural preguntarse que función verifica esta ecuación. É importante indicar que a función exponencial e^{ax} ten como derivada ae^{ax} e, polo tanto, satisface esta ecuación.

Con maior xeneralidade, se $y(x) = ce^{ax}$, onde c é unha constante, entón $y'(x) = cae^{ax} = ay(x)$. De aquí deducimos que, entre outras, as funcións $-15e^{ax}$, $22e^{ax}$, $\frac{1}{2}e^{ax}$, verifican a ecuación $y'(x) = ay(x)$. Cada unha destas funcións (Figura 10.1) denomínase solución particular, ou simplemente solución, da ecuación diferencial.

Pola contra, se intentamos probar con calquera outra función, por exemplo, $y(x) = ax^2 + 2$, $y(x) = axe^{ax}$, etc. podemos observar que non verifican esta ecuación. De feito, $y(x) = ce^{ax}$ é o único tipo de funcións que verifican esta ecuación para tódolos valores de x . Para probar esta afirmación, consideremos unha función calquera $g(x)$, que verifique esta ecuación, isto é, $g'(x) =$

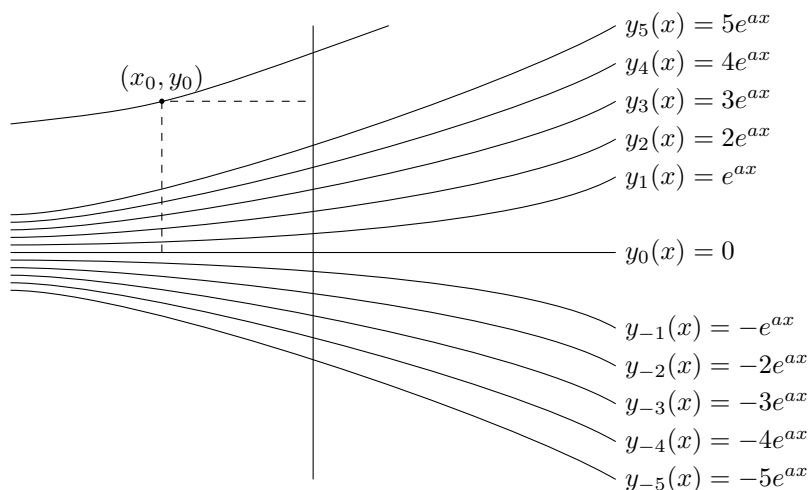


Figura 10.1: Solucións dunha ecuación diferencial

$ag(x)$ para todo x . Definimos unha nova función h por $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Entón

$$h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = e^{-ax}(g'(x) - ag(x)) = 0, \text{ para todo } x.$$

Como $h'(x) = 0$, a función h é constante, $h(x) = c$ para algún número real c , polo que $g(x)e^{-ax} = c$, de onde se deduce que $g(x) = ce^{ax}$. En consecuencia temos probado que

$$y'(x) = ay(x) \text{ se, e só se, } y(x) = ce^{ax} \text{ para algunha constante } c.$$

A familia de funcións $y_g(x) = y(c, x) = ce^{ax}$ denomínase solución xeral da ecuación diferencial.

Exemplo 10.1 Consideremos a ecuación diferencial

$$y' = y + x.$$

Esta é unha ecuación diferencial de primeira orde; é dicir, a derivada máis alta que contén é de primeira orde. Inicialmente, atopar solucións dunha ecuación diferencial non é fácil. As funcións $y(x) = -x - 1$, $y(x) = e^x - x - 1$ son solucións desta ecuación. Con maior xeneralidade, a función $y(x) = ce^x - x - 1$, onde c é unha constante calquera, é unha solución da ecuación diferencial. De feito, ningún outro tipo de funcións verifica esta ecuación. É fácil comprobar, por exemplo, que $y(x) = e^x - 1$, ou $y(x) = \sin x$, ou $y(x) = \ln(x + 1)$ non son solucións da ecuación. A pregunta inmediata é: como poden obterse as solucións desta ecuación?

Polos exemplos que estudamos, podemos observar que unha ecuación diferencial pode ter infinitas solucións. O conxunto de tódalas solucións dunha ecuación diferencial vai denominarse *solución xeral* da ecuación diferencial, pero máis adiante daremos a definición formal deste concepto. Por

exemplo, a solución xeral da ecuación $y' = ay$ é $y(x) = ce^{ax}$; hai unha solución para cada valor da constante c . A solución xeral de $y'' - y = 0$ é $y(x) = ae^x + be^{-x}$, onde a e b son constantes arbitrarias.

Unha ecuación de primeira orde ten, usualmente, a solución xeral que depende dunha constante arbitraria. Cando a ecuación é de segunda orde (a derivada máis alta que aparece na ecuación é de segunda orde), a solución xeral vai depender de dúas constantes. A solución xeral dunha ecuación de orde n vai depender de n constantes arbitrarias. Estes elementos serán estudados con precisión máis adiante.

Xeralmente, o problema de resolución dunha ecuación diferencial leva asociado unha condición adicional, non expresada pola mesma ecuación. Esta condición adicional denomínase *dato inicial* da ecuación diferencial. O acometido deste dato será asignar un valor específico e único ás constantes arbitrarias que definen a solución xeral. Por exemplo, nun modelo de crecemento dunha poboación que está descrito por unha ecuación diferencial de primeira orde, o número de individuos existentes nun instante de tempo será coñecido e utilízase para determinar a única solución da ecuación que verifica ese dato.

Exemplo 10.2 Consideremos a ecuación $y' = ay$. A solución xeral está dada por $y(x) = ce^{ax}$. Se esiximos que a solución pase polo punto (x_o, y_o) , debe verificarse $y(x_o) = ce^{ax_o} = y_o$, de onde se segue que a constante $c = y_o e^{-ax_o}$. De aquí obtemos que a única solución da ecuación diferencial que verifica o dato inicial (x_o, y_o) é,

$$y(x) = y_o e^{-ax_o} e^{ax} = y_o e^{a(x-x_o)}.$$

Por exemplo, se $x_o = 0$ e $y_o = 1$, entón $y(x) = e^{ax}$ é a solución tal que a curva pasa por $(0, 1)$.

10.2. Solución dunha ecuación diferencial

Definición 10.3 *Unha ecuación diferencial de primeira orde (en forma normal) ten unha expresión xeral da forma $y' = f(x, y)$, para unha función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.*

Definición 10.4 *Unha función $u: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é unha solución da ecuación $y' = f(x, y)$, se u é derivable en I e verifica $u'(x) = f(x, u(x))$ para todo $x \in I$.*

Se ademais unha solución $u(x)$ verifica $u(x_o) = u_o$, dicimos que u é a solución que verifica o dato inicial (x_o, u_o) .

A gráfica da solución u no plano coordenado xy , denomínase *curva integral* ou *curva solución* da ecuación diferencial.

En termos xerais, non é fácil resolver ecuacións diferenciais de primeira orde, en particular, ou de orde n en xeral. A ecuación $y' = f(x, y)$ non pode resolverse, en xeral, no sentido de que non existen métodos para obter a solución en tódolos casos posibles. Non obstante, existen certos tipos de ecuacións para as que si se dispoñen de métodos rutinarios de resolución. En calquera caso, existen resultados que, baixo certas hipóteses, aseguran a existencia de solución para unha ecuación diferencial, aínda que analiticamente sexa imposible atopala. Nestes casos recórrese ó cálculo numérico para obter unha solución aproximada. Outras veces a solución, a pesar de existir, non pode obter-se de forma explícita, pero está definida implicitamente por unha ecuación funcional. En realidade

existe unha cantidade moi limitada de tipos de ecuación diferencial tal que a solución pode darse nos sentidos explicados anteriormente.

En consecuencia, soamentes estudaremos algúns tipos de ecuación diferencial, para os cales é posible obter a súa solución, ben en forma explícita, ben definida implicitamente.

Existen ecuacións diferenciais que non teñen solución. Por exemplo, é evidente que ningunha función $y(x)$ satisface a ecuación diferencial $y'^2 + x^2 = -1$ en ningún dominio. Polo tanto, é importante coñecer as condicións baixo as cales unha ecuación diferencial ten solución. Os resultados que existen neste sentido aseguran que, se unha ecuación diferencial ten solución, esta é única para cada dato inicial. En efecto, para ecuacións diferenciais de primeira orde pode probarse o resultado seguinte:

Teorema 10.5 (Teorema de existencia local e unicidade de solucións para ecuacións de primeira orde). *Consideremos a ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ e supoñamos que f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funcións continuas nun dominio $A \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $(x_o, y_o) \in A$, existe unha única solución da ecuación diferencial, definida nunha veciñanza de x_o , que verifica o dato inicial (x_o, y_o) .*

Vexamos un par de observacións importantes deste resultado.

a) Se se verifican as condicións deste teorema e (x_o, y_o) é un punto arbitrario en A , entón existe un intervalo (a, b) que contén a x_o , e unha función $y: x \in (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow y(x) \in \mathbb{R}$, que é unha solución da ecuación en (a, b) . O teorema asegura a existencia do intervalo (a, b) , que é unha veciñanza do punto x_o , pero non asegura nada sobre a súa amplitude. Posiblemente este sexa un intervalo moi pequeno. Esta é a razón pola que o teorema é de existencia *local*.

b) Por cada punto (x_o, y_o) pasa unha única curva integral. De feito, pode demostrarse que se $y(x)$ e $z(x)$ son solucións da mesma ecuación diferencial, definidas nos intervalos I_y e I_z , respectivamente, que verifican $y(x_o) = z(x_o)$, entón $y(x) = z(x)$ para todo $x \in I_y \cap I_z$.

Exemplo 10.6 Consideremos a ecuación diferencial $y' = ay$.

Neste caso as funcións $f(x, y) = ay$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = a$ son continuas, por ser funcións polinómicas e, en aplicación do teorema 10.5, podemos asegurar que por cada dato inicial (x_o, y_o) pasa unha única curva integral.

A continuación definiremos o concepto de solución xeral para unha ecuación diferencial de primeira orde que, como dixemos anteriormente, é o conxunto de tódalas curvas integrais asociadas á ecuación diferencial.

Definición 10.7 *A solución xeral da ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ é unha función $g(x, c)$ tal que $g(x, c)$ é solución para todo $c \in \mathbb{R}$ e para cada solución $y(x)$ da ecuación, existe un único número real $\bar{c}$ que verifica, $y(x) = g(x, \bar{c})$.*

Exemplo 10.8 Como se probou na introdución, a función $y = ce^{ax}$ é a solución xeral da ecuación $y' = ax$.

Exercicios

- Obtén a ecuación da curva que pasa por $(0, -2)$ e tal que a pendente da recta tanxente á gráfica da función en cada punto é igual ó valor da función aumentado en tres unidades.
- Demostra que cada unha das seguintes funcións é unha solución da ecuación diferencial correspondente.
 - $y(x) = cx^2$, $xy' = 2y$
 - $y(x) = a \cos x + b \sin x$, $y'' + y = 0$
- Demostra que as funcións definidas implicitamente polas seguintes ecuacións son solucións das ecuacións diferenciais correspondentes.
 - $\frac{1}{2}e^{x^2} + (y-1)e^{-y} + c = 0$, $yy' - 2y' = xe^{x^2+y}$
 - $(1-x)y^2 = x^3$, $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$
- Proba que $y(x) = cx - c^2$ é unha solución de $y'^2 - xy' + y = 0$ para calquera valor de $c \in \mathbb{R}$.
Proba tamén que $y(x) = \frac{x^2}{4}$ é unha solución da mesma.

10.3. Ecuacións en variables separadas

O caso máis simple de ecuacións diferenciais que teñen solución relativamente sinxela de obter é aquel en que as variables son separadas. Estas teñen unha expresión xeral da forma

$$y' = h(x)g(y),$$

onde h e g son funcións continuas nos seus dominios. Este tipo de ecuacións denomínanse *ecuacións en variables separadas*, ou simplemente *ecuacións separadas*.

Exemplo 10.9 As ecuacións

$$1) y' = x^2 - 1, \quad 2) y' = y^3, \quad 3) yy' = (\sin x)e^{y+x}, \quad 4) y' = yx + x,$$

son todas separadas. Cales son as funcións h e g en cada caso? Non obstante, as ecuacións

$$5) y' = \sin(y^2 + x), \quad 6) y' = yx + x^2, \quad 7) y' = F(x) + G(y),$$

non son separadas.

En xeral non existe un método para atopar solucións deste tipo de ecuacións, en forma explícita, salvo algúns casos particulares. Supoñamos que $y = u(x)$ é unha solución da ecuación nalgún intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e supoñamos que $g(u(x)) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Por definición, $y = u(x)$ é unha solución da ecuación $y' = h(x)g(y)$ se, e soamente se, para todo $x \in I$, $u'(x) = h(x)g(u(x))$, que equivale a, $\frac{u'(x)}{g(u(x))} = h(x)$ para todo $x \in I$. Pero estas funcións son iguais en I se, e só se,

$$\int \frac{u'(x)}{g(u(x))} dx = \int h(x) dx + c$$

calquera que sexa a constante c . Agora, se introducimos o cambio de variable, $y = u(x)$, $dy = u'(x)dx$, na integral da esquerda, obtemos

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx + c$$

ou

$$G(y) = F(x) + c,$$

onde $G(y)$ é unha primitiva de $\frac{1}{g(y)}$ e $F(x)$ é unha primitiva de $h(x)$.

Este argumento expresa que $y = u(x)$ é unha solución de $y' = h(x)g(y)$ se, e só se, $y = u(x)$ satisface a ecuación $G(y) = F(x) + c$.

Obsérvese que desta forma de resolver este tipo de ecuacións resulta, con xeneralidade, unha solución en forma implícita.

Algunhas veces, para resolver este tipo de ecuacións utilízanse métodos pouco ortodoxos, matematicamente falando, pero dos que resulta a mesma solución. Por exemplo, se realizamos as seguintes operacións

$$y' = \frac{dy}{dx} = h(x)g(y); \quad \frac{dy}{g(y)} = h(x)dx; \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx + c,$$

e resolvemos estas integrais obtemos a solución xeral desta ecuación diferencial.

Exemplo 10.10 A ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^6 + 1}$ pode poñerse da forma $(y^6 + 1)dy = x^3dx$, e integrado

$$\int (y^6 + 1)dy = \int x^3dx + c,$$

temos a solución

$$\frac{1}{7}y^7 + y = \frac{1}{4}x^4 + c,$$

que neste caso está dada en forma implícita mediante esta ecuación.

Exemplo 10.11 Resolve a ecuación diferencial $y' = -2y^2x$, $y \neq 0$, e atopa a solución que verifica o dato inicial $(x_o, y_o) = (1, -1)$.

Procedendo como no caso anterior, debemos resolver a igualdade

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x dx + c \Leftrightarrow \frac{1}{y} = x^2 + c$$

de onde se obtén que

$$y(x) = \frac{1}{x^2 + c}$$

é unha solución da ecuación, neste caso en forma explícita, calquera que sexa $c \in \mathbb{R}$.

Para atopar a solución que verifica o dato inicial $(1, -1)$, debemos elixir o valor apropiado da constante c . Pero a partir de que $y = -1$ para $x = 1$, e utilizando a solución, obtemos a ecuación $-1 = \frac{1}{1+c}$, que equivale a $c = -2$, polo que a solución que verifica este dato inicial será

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - 2}.$$

Exemplo 10.12 Atopa a solución xeral da ecuación loxística, $y' = ay - by^2$.

A ecuación diferencial tamén pode poñerse baixo a forma, $y' = y(a - by)$, de onde temos de forma inmediata que as funcións $y(x) = 0$ e $y(x) = \frac{a}{b}$ son solucións da ecuación diferencial. Ademais, as restantes solucións obtéñense de resolver a igualdade,

$$\int \frac{dy}{y(a - by)} = \int dx + C,$$

de onde resulta a igualdade $\ln \left| \frac{y}{a - by} \right| = ax + c$ e, finalmente, $y(x) = \frac{a}{b + ce^{-ax}}$. Nesta familia de solucións tamén temos unha das solucións anteriores $y(x) = \frac{a}{b}$, cando a constante de integración vale cero.

Exemplo 10.13 Dúas substancias químicas en solución reaccionan para formar un novo composto. Se a reacción se produce por colisión e interacción das moléculas, espérase que a taxa de formación do novo composto sexa proporcional ó número de colisións por unidade de tempo e ás cantidades de substancias que aínda non se transformaron. Este tipo de reaccións químicas denomínanse de *segunda orde*, e a lei de reacción coñécense como *lei de acción de masas*. Consideremos entón unha reacción de segunda orde, na que en cada instante x gramos do novo composto contén ax gramos da primeira substancia e bx gramos da segunda, sendo $(a + b) = 1$. Supoñamos, ademais, que inicialmente dispoñemos de aA e bB gramos da primeira e segunda substancia, respectivamente, e que $x(0) = 0$. Calcularemos a función de formación do novo composto no tempo.

En cada instante quedan por transformar $aA - ax$ e $bB - bx$ gramos de cada substancia, polo que a taxa de formación do novo composto segue a ecuación diferencial,

$$x'(t) = k(aA - ax)(bB - bx), \quad x(0) = 0.$$

Esta é unha ecuación en variables separadas na que hai que distinguir dous casos:

1. $A = B$. Neste caso a ecuación queda $\frac{dx}{dt} = kab(A - x)^2$, e ten como solución $\frac{1}{A - x} = kabt + \frac{1}{A}$, onde o sumando $\frac{1}{A}$ é o valor da constante de integración. De aquí obtemos

$$x(t) = \frac{kA^2abt}{1 + kabAt}.$$

Observaremos que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = A$, valor esperado pola lei de conservación de masas.

2. $A \neq B$. Neste caso temos que

$$\int \frac{dx}{(A - x)(B - x)} = \frac{1}{A - B} \left[\ln \frac{B - x}{A - x} - \ln \frac{B}{A} \right] = kabt,$$

onde $-\frac{1}{A-B} \ln \frac{B}{A}$ é a constante de integración. Esta igualdade tamén pode poñerse da forma

$$\ln \frac{A(B-x)}{B(A-x)} = kabt,$$

de onde, finalmente, obtemos

$$x(t) = \frac{AB(1 - e^{-k(A-B)abt})}{A - Be^{-k(A-B)abt}}.$$

Pode comprobarse facilmente que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \min\{A, B\}$, valor tamén esperado ó igual que no primeiro caso.

Exercicios

5. Atopa as solucións xerais das seguintes ecuacións diferenciais, así como as solucións que verifican os datos iniciais dados

- a) $xy' = y(1-x)$, $(1, e^{-1})$ b) $yy' = e^{x+2y} \sin x$, $(0, 1)$
 c) $(1+x^3)y' = x^2y$, $(0, 2)$ d) $yy' = x$, $(\sqrt{2}, 1)$
 e) $e^{2x}y' - y^2 - 2y - 1 = 0$, $(0, 0)$

6. Realizando o cambio $z = yx^{-n}$ e elixindo un valor axeitado de n , demostra que as ecuacións diferenciais seguintes poden transformarse en ecuacións de variables separadas, e resólveas.

- a) $y' = \frac{1-xy^2}{2x^2y}$ b) $y' = \frac{2+3xy^2}{4x^2y}$ c) $y' = \frac{xy^2-y}{x+x^2y}$

10.4. Ecuacións exactas

A ecuación diferencial que ten como solución xeral a familia de curvas $f(x, y) = c$ é

$$D_1f(x, y)dx + D_2f(x, y)dy = 0.$$

O problema recíproco, isto é, dada a ecuación diferencial $F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = 0$, pretendemos saber se existe unha función $f(x, y)$, tal que $D_1f(x, y) = F_1(x, y)$ e $D_2f(x, y) = F_2(x, y)$. Neste caso, a familia de curvas $f(x, y) = c$ sería a solución da ecuación diferencial. Esta cuestión, que xa foi estudada no capítulo de integración de liña, equivale ó estudo dos campos conservativos, onde $F = (F_1, F_2)$ é o campo vectorial e f é a función potencial.

Definición 10.14 Unha ecuación diferencial $F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = 0$ denomínase exacta se existe unha función de clase un $f(x, y)$, tal que $D_1f(x, y) = F_1(x, y)$ e $D_2f(x, y) = F_2(x, y)$.

Observaremos que unha ecuación diferencial $F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = 0$ é exacta se, e soamente se, $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ é un campo conservativo.

Teorema 10.15 Se $F = (F_1, F_2)$ é de clase un en $\mathbb{R}^2$, $F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = 0$ é unha ecuación diferencial exacta se, e soamente se, $D_2F_1(x, y) = D_1F_2(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Nas condicións do teorema anterior, estudar se unha ecuación diferencial é exacta é moi sinxelo e incluso, se é o caso, atopar a función potencial que nos xera a solución xeral tamén está exento de dificultade. Isto é, se existe unha función $f(x, y)$ tal que $D_1f(x, y) = F_1(x, y)$ e $D_2f(x, y) = F_2(x, y)$, entón,

$$f(x, y) = \int F_1(x, y)dx + g(y)$$

e

$$D_2f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int F_1(x, y)dx + g'(y) = F_2(x, y),$$

polo que

$$g(y) = \int \left[F_2(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int F_1(x, y)dx \right] dy,$$

sendo a solución xeral,

$$f(x, y) = \int F_1(x, y)dx + \int \left[F_2(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int F_1(x, y)dx \right] dy = c.$$

Exemplo 10.16 A ecuación diferencial $y^2dx + 2xydy = 0$ é exacta, pois $D_2F_1(x, y) = 2y = D_1F_2(x, y)$. Ademais, $f(x, y) = \int y^2dx + g(y) = xy^2 + g(y)$ e $D_2f(x, y) = 2xy + g'(y) = 2xy$, polo que $g'(y) = 0$, $g(y) = k$ e a solución xeral da ecuación é $f(x, y) = xy^2 = c$.

Exemplo 10.17 A ecuación diferencial $(3y + e^x)dx + (3x + \cos y)dy = 0$ é exacta. A función potencial é da forma, $f(x, y) = \int (3y + e^x)dx + g(y) = 3yx + e^x + g(y)$, e $D_2f(x, y) = 3x + g'(y) = 3x + \cos y$, polo que $g'(y) = \cos y$ e $g(y) = \sin y$, polo que a solución xeral da ecuación diferencial é $3yx + e^x + \sin y = C$.

Exercicios

7. Determina as ecuacións diferenciais que sexan exactas e resólveas.

a) $\frac{xdx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ydy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$

b) $3y + e^x + (3x + \cos y)y' = 0, y(0) = 0$

c) $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0, y(0) = 0$

d) $4x^3e^{x+y} + x^4e^{x+y} + 2x + (x^4e^{x+y} + 2y)y' = 0, y(0) = 1$

10.4.1. Factores integrantes

As ecuación exactas son relativamente raras, xa que a exactitude esixe un equilibrio axeitado nos termos da ecuación; equilibrio que desaparece baixo moi pequenas variacións. Nesta situación, parece razoable preguntar se existen métodos para transformar ecuacións non exactas en ecuacións exactas. A resposta é afirmativa.

Supoñamos unha ecuación diferencial, $F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = 0$, que non verifica a igualdade das derivadas cruzadas pero que ten solución xeral, $g(x, y) = c$. Sempre podemos poñer a ecuación diferencial baixo a forma $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)}$ e a solución xeral tamén verifica $\frac{dy}{dx} = -\frac{D_1g(x, y)}{D_2g(x, y)}$. Entón, $\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)} = \frac{D_1g(x, y)}{D_2g(x, y)}$ ou, equivalentemente, verificase a igualdade

$$\frac{D_1g(x, y)}{F_1(x, y)} = \frac{D_2g(x, y)}{F_2(x, y)}.$$

Se esta razón común se denota por $\mu(x, y)$, entón

$$D_1g(x, y) = \mu F_1 \quad \text{e} \quad D_2g(x, y) = \mu F_2.$$

Se multiplicamos a ecuación orixinal por μ , temos

$$\mu F_1 dx + \mu F_2 dy = 0$$

ou, equivalentemente,

$$D_1g(x, y)dx + D_2g(x, y)dy = 0,$$

que é exacta.

Definición 10.18 *Se existe unha función $\mu(x, y)$ tal que a ecuación diferencial*

$$\mu(x, y)F_1(x, y)dx + \mu(x, y)F_2(x, y)dy = 0$$

é exacta, entón $\mu(x, y)$ denomínase factor integrante da ecuación diferencial.

O razoamento anterior mostra que se unha ecuación diferencial ten solución xeral, entón admite polo menos un factor integrante μ . Na práctica, en xeral é moi difícil de atopar un factor integrante, pero nalgúns casos existen métodos relativamente sinxelos para atopar algún factor.

Teorema 10.19 *Sexa $\mu(x, y)F_1(x, y)dx + \mu(x, y)F_2(x, y)dy = 0$ exacta. Verifícase,*

$$1. \text{ se } \mu = \mu(x), \text{ entón } \ln |\mu(x)| = \int \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}}{F_2} dx.$$

$$2. \text{ se } \mu = \mu(y), \text{ entón } \ln |\mu(y)| = \int \frac{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}}{F_1} dy.$$

Demostración. Se μ é un factor integrante, entón a ecuación diferencial $\mu F_1 dx + \mu F_2 dy = 0$ é exacta, polo que

$$\frac{\partial(\mu F_1)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu F_2)}{\partial x}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} F_1 + \mu \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} F_2 + \mu \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Pero se $\mu(x, y) = \mu(x)$, entón a ecuación anterior queda

$$\mu \frac{\partial F_1}{\partial y} = \mu'(x) F_2 + \mu(x) \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}}{F_2},$$

de onde se obtén o resultado buscado. ■

Exemplo 10.20 Resolve a ecuación diferencial $ydx + (x^2y - x)dy = 0$, co dato inicial $y(1) = 0$.

Comprobamos que non é exacta pois $D_2F_1(x, y) = 1 \neq 2xy - 1 = D_1F_2(x, y)$. Pero, $\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{2}{x}$, polo que $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{2}{x}$, de onde $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$. Así, se multiplicamos a ecuación diferencial por $\frac{1}{x^2}$, $\frac{y}{x^2}dx + \frac{x^2y - x}{x^2}dy = 0$, resulta unha ecuación diferencial exacta. Se resolvemos temos que $f(x, y) = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = c$ e, co dato inicial $y(1) = 0$, temos que $c = 0$, polo que a solución da ecuación que verifica este dato é $f(x, y) = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = 0$.

Ás veces pode suceder que un factor integrante dependa das dúas variables, pero o outro dependa soamente dunha variable.

Exemplo 10.21 Estuda a solución da ecuación diferencial $-2xydx + (3x^2 - y^2)dy = 0$.

A ecuación diferencial non é exacta, pois $D_2F_1(x, y) = -2x \neq 6x = D_1F_2(x, y)$. Por outra parte,

$$\left(\frac{\partial(-2xy)}{\partial y} - \frac{\partial(3x^2 - y^2)}{\partial x} \right) \frac{1}{3x^2 - y^2} = -\frac{8x}{3x^2 - y^2}$$

non depende soamente da variable x , polo que debemos probar que pasa co factor integrante na variable y .

$$\left(\frac{\partial(3x^2 - y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(-2xy)}{\partial y} \right) \frac{-1}{2xy} = -\frac{4}{y},$$

polo que $\mu(y) = \frac{1}{y^4}$. Agora a ecuación diferencial

$$-\frac{2x}{y^3}dx + \frac{3x^2 - y^2}{y^4}dy = 0$$

é exacta, con solución xeral $f(x, y) = -\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{y} = c$.

Se en ningún dos dous casos resulta unha función soamente dunha variable, entón determinar un factor integrante é bastante complicado.

Exercicios

8. Resolve

a) $(yx - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0$ b) $\frac{1}{2}y^2 + 2ye^x + (y + e^x)\frac{dy}{dx} = 0$

9. Resolve as ecuacións que sexan exactas, ou as que se convertan en exactas mediante un factor de integración que dependa só dunha variable.

a) $(x + \frac{2}{y})dy + ydx = 0$ b) $(\sin x \tan y + 1)dx - \cos x \sec^2 y dy = 0$
 c) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$ d) $(2y^2 - 4x + 5)dx = (-2y + 4xy)dy$
 e) $(y + y \cos xy)dx + (x + x \cos xy)dy = 0$ f) $-\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} dx + \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} dy = 0$
 g) $(1 + y)dx + (1 - x)dy = 0$ h) $(2xy^3 + y \cos x)dx + (3x^2y^2 + \sin x)dy = 0$

10.5. Ecuacións homoxéneas

Outro tipo de ecuacións diferenciais dos que pode obterse solución son as homoxéneas, que poden ser reducidas a ecuacións en variables separadas.

Unha función $f(x, y)$ é homoxénea de grao α se verifica $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$, para todo (x, y) , e para todo $\lambda > 0$. Así, por exemplo, as funcións $x^2 + y^2$, $\sqrt{y^3 + x^3 + x^2y}$ son funcións homoxéneas de graos 2 e $\frac{3}{2}$ respectivamente.

Se na ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, a función f é homoxénea de grao $\alpha = 0$, podemos poñer para $x \neq 0$ e realizando o cambio de variable $z = \frac{y}{x}$,

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(1, z),$$

e posto que $y = zx$

$$y' = z + xz',$$

a ecuación $y' = f(x, y)$ convértese en

$$z + xz' = f(1, z),$$

que é unha ecuación en variables separadas en $z(x)$, xa que

$$z' = \frac{1}{x}(f(1, z) - z)$$

da cal sabemos obter a solución xeral, e da que pode obterse a solución xeral da ecuación orixinal, desfazendo o cambio $y(x) = xz(x)$.

Definición 10.22 *Unha ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ é homoxénea se a función f é homoxénea de grao cero.*

Exemplo 10.23 Resolve a ecuación $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

A función do segundo membro é, obviamente, unha función homoxénea de grao $\alpha = 0$, de forma que se dividimos numerador e denominador entre x , e realizamos o cambio de variable $z = \frac{y}{x}$, temos

$$y' = z + xz' = \frac{1+z}{1-z},$$

e operando, resulta

$$\frac{(1-z)z'}{1+z^2} = \frac{1}{x},$$

que é unha ecuación en variables separadas, e calculando as primitivas respectivas temos

$$\arctan z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) = \ln|x| + c.$$

Finalmente, substituíndo z por $\frac{y}{x}$, concluímos que

$$\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + c$$

é a solución xeral, en forma implícita, da ecuación.

Exemplo 10.24 Resolve a ecuación $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

Dividindo numerador e denominador entre x^2 e realizando o cambio $z = \frac{y}{x}$, obtemos

$$y' = xz' + z = \frac{1+z^2}{2z},$$

e reordenando,

$$\frac{2z}{1-z^2} z' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{2z}{1-z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx + c.$$

Resolvendo e desfazendo o cambio

$$-\ln|1-z^2| = \ln|x| + c \Leftrightarrow -\ln\left|1 - \frac{y^2}{x^2}\right| = \ln|x| + c$$

ou, equivalentemente, $y_g^2(x) = x^2 - cx$.

10.5.1. Ecuacións reducibles a homoxéneas

A ecuación diferencial

$$y' = f\left(\frac{a_0x + b_0y + c_0}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$$

pode transformarse nunha ecuación homoxénea realizando un cambio de variable adecuado. En efecto, se $c_0 = c_1 = 0$ a ecuación é trivialmente homoxénea. En caso contrario, o problema pode resolverse realizando un cambio que nos permita anular os termos c_0 e c_1 . Isto conséguese mediante unha translación da orixe de coordenadas ó punto de intersección das rectas que definen o numerador e denominador da variable de f (Figura 10.2).

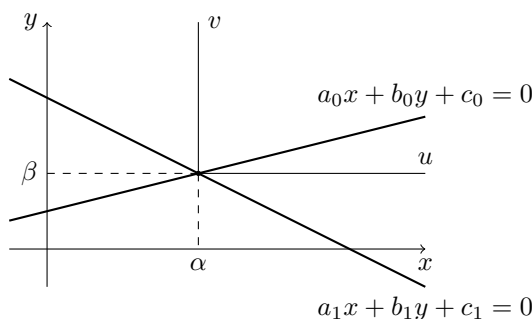


Figura 10.2: Ecuacións reducibles a homoxéneas

Sexa entón (α, β) o punto de intersección das rectas $a_0x + b_0y + c_0 = 0$ e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Se realizamos o cambio $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ e tendo en conta que $a_0\alpha + b_0\beta + c_0 = a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$, obtemos a ecuación diferencial

$$v' = y' = f\left(\frac{a_0(u + \alpha) + b_0(v + \beta) + c_0}{a_1(u + \alpha) + b_1(v + \beta) + c_1}\right) = f\left(\frac{a_0u + b_0v}{a_1u + b_1v}\right)$$

que é unha ecuación homoxénea en u, v .

Exercicios

10. Comproba que as ecuacións seguintes son homoxéneas e resólveas.

- a) $y' = -\frac{x^2 - 2y^2}{xy}$ b) $x^2y' = 3(x^2 + y^2) \arctan \frac{y}{x} + xy$
 c) $x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0$ d) $x \sin \frac{y}{x} y' = y \sin \frac{y}{x} + x$
 e) $xy' = y + 2xe^{-\frac{y}{x}}$ f) $(x - y)dx - (x + y)dy = 0$

11. Resolve as seguintes ecuacións.

a) $y' = \frac{x+y+4}{x-y-6}$

b) $y' = \frac{x+y+4}{x+y-6}$

c) $y' = -\frac{2x-2y}{y-1}$

d) $y' = \frac{2x+3y-1}{4(x+1)}$

e) $y' = \frac{y}{x} + 1$

f) $y' = \frac{y}{x} - \cos^2 \frac{y}{x}$

g) $y' = \frac{4y^3 - x^3}{3xy^2}$

h) $2xydy - (x^2 + 3y^2)dx = 0$

12. Demuestra que se $b \neq 0$, o cambio $z = ax + by + c$ transforma a ecuación $y' = f(ax + by + c)$ nunha ecuación en variables separadas. Aplica este método para resolver as seguintes ecuacións.

a) $y' = (y+x)^2$ b) $y' = \sin^2(x-y+1)$

10.6. Ecuacións diferenciais lineais de primeira orde

Unha ecuación diferencial que pode ser escrita da forma

$$y' + a(x)y = b(x),$$

onde a e b son funcións continuas nalgún intervalo, denomínase *ecuación diferencial lineal de primeira orde*. Obsérvase que o primeiro membro da ecuación está caracterizado por ser unha función lineal en y e y' .

As ecuacións,

a) $y' + y = x$, b) $y' + 2xy = 4x$, c) $(x^2 + 1)y' + e^x y = x \sin x$,

son exemplos de ecuación diferencial lineais de primeira orde.

10.6.1. Caso de coeficientes constantes

Procederemos a atopar a solución da ecuación lineal, considerando en primeiro lugar que as funcións $a(x)$ e $b(x)$ son constantes; é dicir, $a(x) = a$ e $b(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$y' + ay = b, \quad a \neq 0.$$

Esta ecuación pode ser resolta como unha ecuación en variables separadas, pero utilizaremos outro método que posteriormente será utilizado para estudar a solución da ecuación lineal xeral. Para isto, se multiplicamos os dous membros da ecuación por e^{ax} , obtemos a ecuación equivalente

$$y'e^{ax} + aye^{ax} = be^{ax}.$$

O primeiro membro desta ecuación é igual a $(ye^{ax})'$, polo que podemos poñer

$$(ye^{ax})' = be^{ax},$$

en consecuencia, as primitivas de ambos os membros da igualdade deben ser iguais, é dicir,

$$ye^{ax} = \int be^{ax} + c = \frac{b}{a}e^{ax} + c,$$

de onde concluímos que a solución xeral da ecuación é da forma

$$y(x) = ce^{-ax} + \frac{b}{a}.$$

calquera que sexa a constante $c \in \mathbb{R}$.

Obsérvase que a función $y(x) = \frac{b}{a}$ tamén é unha solución desta ecuación, para o caso $c = 0$. Esta solución, $y(x) = \frac{b}{a}$, denomínase *solución de equilibrio* ou *solución estacionaria*. Se a constante a é positiva, obtemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \frac{b}{a}$. Neste caso dicimos que a ecuación diferencial é *estable*.

Exemplo 10.25 A solución xeral da ecuación $y' + 2y = 8$ é da forma $y(x) = ce^{-2x} + 4$, $y(x) = 4$ é a solución de equilibrio, e a ecuación é estable, xa que $a = 2 > 0$.

10.6.2. Crecemento, desintegración, reaccións químicas e mesturas

Supoñamos que unha poboación crece proporcionalmente, cunha taxa k , ó número de individuos que hai en cada instante. Se y_0 e o número de individuos no instante $t = 0$ e denotamos por $y(t)$ o número de individuos no instante t , verifícase que $y'(t) = ky(t)$, polo que podemos coñecer o número de individuos que hai en cada instante, utilizando a solución da ecuación diferencial, $y(t) = y_0 e^{kt}$. De aquí deducimos que este tipo de problemas presentan un crecemento exponencial.

Exemplo 10.26 Supoñamos que un cultivo de bacterias experimenta unha taxa media de crecemento mensual dun dous por cento, $k = 0,02$. A poboación crece mensualmente segundo a ecuación $y' = \frac{1}{50}y$. É dicir, esta presenta un crecemento exponencial da forma $y(t) = y_0 e^{\frac{t}{50}}$. Se inicialmente hai 10^5 bacterias, ó cabo de 100 días, o número de bacterias no cultivo será de

$$y\left(\frac{100}{30}\right) = 10^5 e^{\frac{1}{15}}.$$

Para calcular o tempo T necesario para que se duplique o número de bacterias, temos que

$$2y_0 = y_0 e^{\frac{T}{50}}.$$

De aquí, $T = 50 \ln 2 = 34,65$ meses.

Habitualmente, a constante k coñécese como taxa de crecemento da poboación.

Exemplo 10.27 Algúns tipos de moléculas teñen tendencia a desintegrarse en moléculas máis pequenas a un ritmo constante e proporcional ó número de moléculas existentes en cada instante. Este tipo de reaccións químicas coñécese como reaccións de primeira orde. Neste caso, a variación da poboación está representada pola ecuación $y'(t) = -ky$, $k > 0$. Así, a poboación decrece exponencialmente da forma $y(t) = y_0 e^{-kt}$, sendo $y_0 = y(0)$.

O exemplo típico deste tipo de problemas é a desintegración radioactiva. Con frecuencia exprésase o ritmo de desintegración en termos da semivida, que é o tempo requirido para que a cantidade de substancia quede reducida á metade. Isto é,

$$\frac{y_o}{2} = y_o e^{-kT},$$

de onde $T = \frac{\ln 2}{k}$ e se coñecemos un parámetro podemos calcular o outro.

Neste caso, é frecuente denominar a k como taxa de desintegración da poboación.

Exemplo 10.28 Sabendo que a semivida do carbono 14 é de 5730 anos, calcula a idade dun obxecto que perdeu o 85 % do carbono 14.

Tendo en conta o exercicio anterior, $y(t) = y_o e^{-kt}$, onde $k = \frac{\ln 2}{5730}$. Por outra parte, se no instante t só queda un 15 % do material, $0,15y_o$, podemos poñer $y(t) = y_o e^{-kt} = 0,15y_o = \frac{3}{20}y_o$, de onde obtemos

$$t = -5730 \frac{\ln 3 - \ln 20}{\ln 2} = 15682,81 \text{ anos.}$$

Exemplo 10.29 Con frecuencia o estado do carbono 14 utilízase para determinar a idade dun fósil. Imaxinemos que atopamos os ósos dun animal xunto cos restos dunha fogueira. Os arqueólogos entenden que a idade dos ósos é igual á idade da fogueira. Se controlamos que só queda o 20 por cento da cantidade orixinal de carbono 14 nos restos da madeira da fogueira, podemos confirmar que a idade dos ósos é de $T = -\frac{5730 \ln 0,2}{\ln 2} = 13304,6$ anos.

Exemplo 10.30 Un depósito contén 100 litros de salmoira no que hai disoltos 30 kg de sal. A partir do instante $t = 0$ comeza a entrar outra salmoira que contén 0,5 kg por litro a un ritmo de 4 litros por minuto. A mestura, que se remove constantemente, sae do depósito ó mesmo ritmo. En que instante haberá disoltas 40 kg de sal no depósito? Que concentración de sal haberá cando transcorre un tempo suficientemente longo?

Sexa $y(t)$ o número de kg de sal disolto no depósito no instante t . A concentración de sal en cada instante é de $\frac{y(t)}{100}$ quilos por litro de salmoira. A taxa de cambio da cantidade de sal é

$$y'(t) = \text{ritmo de entrada} - \text{ritmo de saída.}$$

pero,

$$\text{ritmo de entrada} = 0,5 \cdot 4 = 2 \text{ kg/minuto}$$

e

$$\text{ritmo de saída} = \frac{y}{100} \cdot 4 = \frac{y}{25} \text{ kg/minuto,}$$

polo que

$$y' = 2 - \frac{y}{25},$$

que ten como solución xeral $y(t) = ce^{-\frac{t}{25}} + 50$, e como $y(0) = 30$, temos que $y(t) = 50 - 20e^{-\frac{t}{25}}$. Polo tanto, $\frac{1}{2} = e^{-\frac{t}{25}}$, e $t = 25 \ln 2 = 17,33$ minutos.

Ademais, cando t se fai suficientemente grande, y aproxímase a 50 kg, que é o resultado esperado.

Exemplo 10.31 A lei de arrefriamento de Newton di que a taxa de cambio da temperatura da superficie dun obxecto é proporcional á diferenza entre a temperatura do obxecto e a temperatura ambiente.

A temperatura dun motor no momento que se apaga é de 200 graos centígrados e a temperatura do aire que o rodea é de 30 graos. Despois de 10 minutos, a temperatura da superficie do motor é de 180 graos. Canto tempo pasará para que a temperatura do motor baixe a 40 graos?

A ecuación diferencial que rexe a lei de arrefriamento de Newton é $y' = k(y - 30)$, cos datos iniciais $y(0) = 200$ e $y(10) = 180$. De aquí temos que a solución xeral é $y(t) = ce^{kt} + 30$, de onde co dato inicial $y(0) = 0$ queda $y(t) = 170e^{kt} + 30$. Coa outra información do problema, $y(10) = 180$, obtemos o valor da constante $k = \frac{1}{10} \ln \frac{15}{17}$. Finalmente, para calcular o instante no que a temperatura do motor estará a 40 graos, resolvemos a ecuación $y(T) = 170e^{kT} + 30 = 40$, de onde obtemos $T = -\frac{\ln 17}{k} = 226,36$ minutos.

Exercicios

13. Un cultivo de bacterias de poboación x medra proporcionalmente a x a unha taxa k . Entre as 6 p.m. e as 7 p.m. a poboación triplicase. A que hora a poboación é cen veces máis grande ca existente ás 6 p.m.?
14. Un fungo medra a un ritmo proporcional á cantidade presente. Inicialmente había 2 gramos e en dous días pasou a ter 3 gramos. a) Se $y(t)$ é a masa de fungo no instante t , proba que $y(t) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$. b) Calcula a cantidade de fungo ó cabo de dez días.
15. Sabendo que a semivida do plutonio 239 é de 24.360 anos e que despois de 10.000 anos quedan 0,4 gramos, calcula a cantidade inicial de plutonio, e a cantidade despois dos primeiros 1.000 anos.
16. Se a metade de certa cantidade de radio se desintégresa en 1.600 anos, que porcentaxe da cantidade orixinal quedará ó cabo de 2.400 anos? E de 8.000 anos?
17. O uranio 238 desintégresa a un ritmo proporcional á cantidade presente. Se hai x_1 e x_2 gramos nos instantes t_1 e t_2 , proba que a semivida é $\frac{(t_2 - t_1) \ln 2}{\ln \frac{x_1}{x_2}}$.
18. Un depósito contén 250 litros de salmoira no que hai 20 kg de sal. Deséxase reducir a concentración ata 0,01 kg por litro botando auga no depósito a razón de 10 litros por minuto e permitindo que saia a mesma cantidade do depósito mentres se mantén a mestura uniforme removéndoa. Canto tempo tardaremos en conseguir o propósito?

19. Sacamos unha torta dun forno a 1500°F e colócámola nun ambiente a unha temperatura de 90°F . Ó cabo dunha hora a temperatura da torta baixou a 1120°F . Calcula a súa temperatura ás cinco horas de sacala do forno.
20. A fisión nuclear produce neutróns nunha pila atómica a unha taxa proporcional ó número de neutróns presentes en cada momento. Se hai n_o neutróns inicialmente e hai n_1 e n_2 nos instantes t_1 e t_2 , respectivamente, probar que $\left(\frac{n_1}{n_o}\right)^{t_2} = \left(\frac{n_2}{n_o}\right)^{t_1}$.

10.6.3. Ecuación xeral lineal de primeira orde

No que segue resolveremos a ecuación diferencial lineal de primeira orde, no seu caso máis xeral, utilizando a mesma técnica que no caso dos coeficientes constantes. Non obstante, para esta situación, en lugar de multiplicar os dous membros da ecuación por e^{ax} , probaremos en axustar cunha función $e^{A(x)}$, onde $A(x)$ será unha función que deberemos determinar. En efecto, dada a ecuación diferencial

$$y' + a(x)y = b(x),$$

se multiplicamos os dous membros da ecuación por $e^{A(x)}$, resulta

$$y'e^{A(x)} + a(x)ye^{A(x)} = b(x)e^{A(x)},$$

elixindo a función $A(x)$ de forma que $A'(x) = a(x)$.

Podemos escribir entón

$$\frac{d}{dx}(ye^{A(x)}) = b(x)e^{A(x)}$$

que calculando as primitivas, de ambos os membros, resulta

$$ye^{A(x)} = \int b(x)e^{A(x)} dx + c,$$

e de aquí

$$y(x) = ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)} dx, \quad \text{onde } A(x) = \int a(x) dx.$$

Deste xeito, queda probado o resultado seguinte

Teorema 10.32 *A solución xeral da ecuación $y' + a(x)y = b(x)$ é da forma*

$$y(x) = ce^{-\int a(x) dx} + e^{-\int a(x) dx} \int b(x)e^{\int a(x) dx} dx.$$

Exemplo 10.33 Atopa a solución xeral da ecuación $y' + 2xy = 4x$.

Neste caso $a(x) = 2x$ e $b(x) = 4x$, polo que $A(x) = \int 2x dx = x^2$, de onde

$$y(x) = ce^{-x^2} + e^{-x^2} \int e^{x^2} 4x dx = ce^{-x^2} + e^{-x^2} 2e^{x^2} = ce^{-x^2} + 2$$

é a solución xeral da ecuación. Para obter a solución que verifica o dato inicial, $(x, y) = (0, -2)$, temos que $-2 = ce^0 + 2$ que equivale a $c = -4$, e a solución buscada será $y(x) = 2 - 4e^{-x^2}$.

Exemplo 10.34 Un tanque de 100 litros contén inicialmente a metade da súa capacidade de auga pura. Engadimos unha solución de auga con sal que contén 10 gramos de sal por litro, a unha taxa de 4 litros por minuto. O contido ben mesturado sae do tanque por un tubo a unha taxa de 2 litros por minuto, de xeito que se desborda ó encherse. Calcula a cantidade e a concentración de sal ó longo do tempo. Que pasa se o proceso continúa indefinidamente?

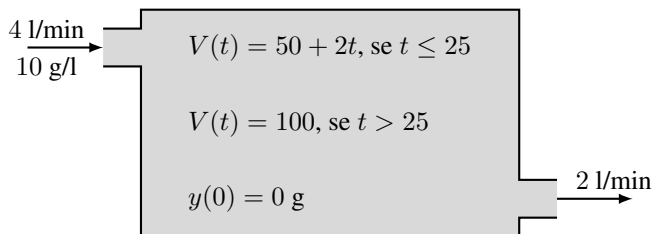


Figura 10.3: Exemplo de mesturas

En cada instante t denotemos por $y(t)$ a cantidade de sal que hai no tanque, $V(t)$ o volume de auga e $C(t) = \frac{y(t)}{V(t)}$ a concentración de sal. Obviamente $y(0) = 0$ e $V(t) = 50 + 2t$ se $t \leq 25$ e $V(t) = 100$ se $t > 25$.

Por outra parte, a taxa instantánea de cambio da cantidade de sal no estanque, y' coincide co ritmo de entrada menos o de saída de sal do estanque. Isto é,

$$y' = \begin{cases} 40 - \frac{y}{25+t}, & \text{se } t \leq 25 \\ 40 - \frac{1}{25}y, & \text{se } t > 25 \end{cases},$$

que ten como solución xeral,

$$y_g(t) = \begin{cases} \frac{c_1}{25+t} + 20(25+t), & \text{se } t \leq 25 \\ c_2 e^{-\frac{1}{25}t} + 1000, & \text{se } t > 25 \end{cases}.$$

Cos datos iniciais $y(0) = 0$ e, da primeira solución, $y(25) = 750$, temos que as constantes de integración valen $c_1 = -12500$ e $c_2 = -250e$, polo que

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{12500}{25+t} + 20(25+t), & \text{se } t \leq 25 \\ 1000 - 250e^{1-\frac{1}{25}t}, & \text{se } t > 25 \end{cases}.$$

Finalmente, coñecidos $y(t)$ e $V(t)$, temos o valor da concentración en cada instante,

$$C(t) = \begin{cases} 10 - \frac{12500}{(25+t)^2}, & \text{se } t \leq 25 \\ 10 - \frac{5}{2}e^{1-\frac{1}{25}t}, & \text{se } t > 25 \end{cases}.$$

Exemplo 10.35 En problemas de caídas de corpos, Figura 10.4 a), a resistencia exercida polo aire é proporcional á velocidade do obxecto que cae. Se g é a aceleración da gravidade, a forza cara abaixo sobre un obxecto de masa m é a diferenza $mg - kv$. Pero, pola segunda lei de Newton, temos que

$F = m \frac{dv}{dt}$, e de aquí temos a ecuación diferencial que regula a caída

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g.$$

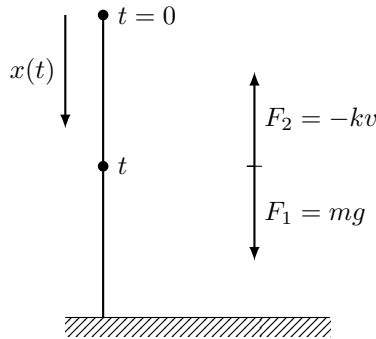


Figura 10.4: Caída de corpos

Tendo en conta que en $t = 0$ a velocidade do obxecto é $v = 0$, a velocidade deste en cada instante t vale

$$v(t) = \frac{gm}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

Por outra parte, se queremos calcular a distancia percorrida durante o descenso, como $v(t) = \frac{dx}{dt}$, entón

$$x(t) = \int v(t) dt = \frac{gm}{k} \left(t + \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right) + C.$$

Ademais, como $x = 0$ en $t = 0$, $x(0) = 0$, temos que $C = -\frac{gm^2}{k^2}$, polo que

$$x(t) = \frac{gm}{k}t - \frac{gm^2}{k^2} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

Exemplo 10.36 Neste exemplo presentamos unha ecuación diferencial lineal que rexe o fluxo dun circuíto eléctrico como o da Figura 10.5. Este circuíto consta de catro elementos que actúan como segue:

1. Un xerador dunha forza electromotriz E (unha batería ou un xerador de corrente), en voltios, que fai circular unha corrente de intensidade I , en amperes. Segundo a natureza da fonte xeradora, E pode ser constante ou función do tempo.
2. Unha resistencia R , en ohmios, que se opón ó paso da corrente producindo unha caída de potencial de magnitude proporcional á corrente I que circula por ela; $E_R = RI$ (Lei de Ohm). A constante de proporcionalidade R denomínase resistencia.
3. Un indutor de indutancia L , en henrios, que se opón a calquera cambio na corrente, producindo unha caída de potencial proporcional á taxa de cambio da corrente; $E_L = L \frac{dI}{dt}$. A constante de proporcionalidade L denomínase indutancia.
4. Un condensador de capacitancia C , en faradays, que almacena unha carga Q , en coulombs. A carga acumulada nel resístese á entrada dunha nova carga provocando unha caída de potencial proporcional á carga eléctrica Q almacenada; $E_C = \frac{1}{C}Q$. A constante de proporcionalidade é inversamente proporcional á capacitancia.
5. A suma das caídas de potencial no circuíto debe ser igual á forza electromotriz xerada no mesmo (principio de conservación de enerxía), $E(t) = E_R + E_L + E_C$, e a corrente I é a taxa de cambio do fluxo de carga e, polo tanto, o ritmo ó que a carga se acumula no condensador; $I = \frac{dQ}{dt}$.

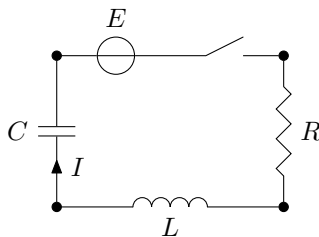


Figura 10.5: Circuíto eléctrico

Estes circuítos rexidos por estas leis, denominadas de Kirchoff, denomínanse do tipo RCL en serie, e dan lugar á ecuación diferencial

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t).$$

Supoñemos, neste capítulo, que o circuíto é do tipo RL en serie; é dicir, non dispón de condensador, polo que o sumando na ecuación diferencial relativa á carga desaparece. Deste xeito, a

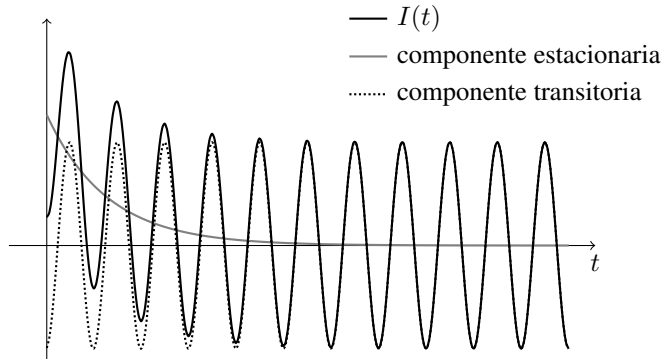


Figura 10.6: Intensidade nun circuíto eléctrico

intensidade de corrente verifica a ecuación diferencial

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E.$$

Se supoñemos que a forza electromotriz xerada en cada instante está dada pola función sinusoidal $E(t) = 220 \sin(2t)$ e a resistencia R e a indutancia L son constantes, a intensidade de corrente que circula polo circuíto en cada instante coincide coa solución da ecuación diferencial lineal

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{220}{L} \sin(2t).$$

Utilizando a expresión da solución xeral da ecuación diferencial lineal, temos que

$$I(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{220}{4L^2 + R^2} (R \sin(2t) - 2L \cos(2t)).$$

Ademais, tendo en conta que

$$\begin{aligned} & \frac{220}{4L^2 + R^2} (R \sin(2t) - 2L \cos(2t)) \\ &= \frac{220}{\sqrt{4L^2 + R^2}} \left(\frac{R}{\sqrt{4L^2 + R^2}} \sin(2t) - \frac{2L}{\sqrt{4L^2 + R^2}} \cos(2t) \right), \end{aligned}$$

e que existe $\varphi_o \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos \varphi_o = \frac{R}{\sqrt{4L^2 + R^2}}$ e $\sin \varphi_o = -\frac{2L}{\sqrt{4L^2 + R^2}}$, temos que

$$\begin{aligned} I(t) &= Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{220}{\sqrt{4L^2 + R^2}} (\cos \varphi_o \sin(2t) + \sin \varphi_o \cos(2t)) \\ &= Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{220}{\sqrt{4L^2 + R^2}} \sin(\varphi_o + 2t). \end{aligned}$$

O primeiro sumando do segundo membro é un termo transitorio, pois tende a desaparecer co tempo, e o segundo sumando é un termo estacionario que se coñece como fase estacionaria que ten como amplitude $\frac{220}{\sqrt{4L^2 + R^2}}$. O período T desta fase estacionaria é o tempo requirido para completar un ciclo. Así, $2T = 2\pi$, de onde $T = \pi$. A frecuencia é o numero de ciclos por unidade de tempo $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi}$.

A figura 10.6 mostra a parte transitoria (exponencial negativa), a parte estacionaria (sinusoidal) e a suma de ambas que constitúe a intensidade que circula polo circuito, para os valores; $L = 0,2$; $R = 0,5$; $I_o = 15$; $\omega = 20$, onde ω é o coeficiente de t no argumento da función $\sin(\omega t)$ que, neste caso substitúe a $\omega = 2$. Ademais, o desfaseamento desta corrente vale $\varphi_o = \arctan(\frac{-\omega L}{R}) = -1,4464$ e a constante de integración $C = 69,154$.

Exercicios

21. Atopa as solucións xerais das seguintes ecuacións diferenciais

- | | |
|---|--|
| a) $y' - 3y = 5$ | b) $y' + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} = 0$ |
| c) $3y' + 2y + 16 = 0$ | d) $y' + 2y = x^2$ |
| e) $y' - \frac{2}{x}y + \frac{2a^2}{x^2} = 0$ | f) $y' - \frac{y}{x} = x$ |
| g) $y' - \frac{y}{x^2 - 1} = x$ | h) $y' - y = \sin x$ |
| i) $y' \cos x + y \sin x = \sin x \cos x + x$ | |

22. Celébrase unha festa nun local que contén 1800 metros cúbicos de aire. No instante inicial varias persoas comezan a fumar. O fume, que contén un 6 % de monóxido de carbono, entra no local a razón de $0,15 \text{ m}^3$ por minuto e a mestura, removida por ventilación, sae ó mesmo ritmo por unha fiestra. Cando deberá abandonar unha persoa “prudente” a festa, se o nivel de monóxido de carbono comeza a ser perigoso a partir dunha concentración de 0,0018?

23. Inxéctase glicosa no sangue a razón de q unidades por minuto e o corpo expulsa glicosa do sangue a un ritmo proporcional á cantidade presente en cada instante. Denotemos por $Q(t)$ a cantidade de glicosa no sangue no instante t . a) Determina a ecuación diferencial que describe o ritmo de cambio da glicosa no sangue con respecto ó tempo. b) Determina a cantidade de glicosa no sangue en cada instante se $Q(0) = Q_o$. c) Calcula o límite $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$ e interpreta o seu valor.

24. No exemplo 10.36: a) Resolve a ecuación diferencial para unha voltaxe constante E_o . b) Calcula a función intensidade se $I(0) = 0$, $E_o = 110$ voltios, $R = 550$ ohmios e $L = 4$ henrios. c) Resolve a ecuación diferencial para unha forza electromotriz $E_o \sin(\omega t)$. c) Comproba que a solución deste último apartado é: $I(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_o}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \sin(\varphi_o + \omega t)$, onde $\varphi_o = \arctan \frac{-\omega L}{R}$ é o ángulo fase da corrente. Observar que cando t é suficientemente grande, o termo exponencial tende a cero e a corrente tende a unha función periódica.

10.7. A ecuación de Bernoulli

A ecuación diferencial da forma

$$y' + a(x)y = f(x)y^n,$$

onde n é un número real arbitrario fixo e $y = y(x)$ é a función a determinar, denomínase *ecuación de Bernoulli*. Esta pode ser resolta mediante un cambio de variable que transforma a ecuación noutra lineal de primeira orde. Para os valores de $n = 0, 1$, a ecuación de Bernoulli é lineal. Noutros casos, se dividimos os dous membros da ecuación entre y^n , e para $y \neq 0$ obtemos

$$y^{-n}y' + a(x)y^{1-n} = f(x),$$

que, introducindo unha nova variable $z = y^{1-n}$, temos que $z' = (1-n)y^{-n}y'$ e substituíndo na ecuación anterior, obtemos

$$z' + (1-n)a(x)z = f(x)(1-n),$$

que é unha ecuación diferencial lineal na función $z(x)$.

Exemplo 10.37 Resolve a ecuación $y' + xy = x^3y^3$.

O cambio de variable que debemos realizar é $z = y^{1-3} = y^{-2}$, resultando a ecuación

$$-\frac{1}{2}z' + xz = x^3, \text{ isto e, } z' - 2xz = -2x^3,$$

que ten como solución,

$$\begin{aligned} z(x) &= ce^{-\int -2xdx} + e^{-\int -2xdx} \int e^{\int -2xdx} (-2x^3)dx \\ &= ce^{x^2} - 2e^{x^2} \int x^3 e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Esta última integral resólvese en primeiro lugar realizando o cambio de variable $u = -x^2$, $du = -2xdx$ e posteriormente integrando por partes, resultando

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int u e^u du = \frac{1}{2} u e^u - \frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2},$$

de onde se obtén a solución xeral da ecuación lineal

$$z(x) = ce^{x^2} - 2e^{x^2} \left(\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} \right) = ce^{x^2} + x^2 + 1.$$

Finalmente, a solución xeral da ecuación orixinal obtense desfecendo o cambio de variable realizado $z = y^{-2}$ ou, equivalentemente, $zy^2 = 1$

$$(ce^{x^2} + x^2 + 1)y^2 = 1.$$

Observaremos que a solución está dada en forma implícita por esta ecuación.

Exercicios

25. Resolve as ecuación de Bernoulli,

- | | | |
|----------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| a) $xy' + 2y = xy^2$ | b) $xy' + y = x^4y^3$ | c) $xy^2y' + y^3 = x \cos x$ |
| d) $x dy + y dx = xy^2 dx$ | e) $y' = y + e^{-x}y^2$ | f) $y' - y = y^2$ |
| g) $y' - y = xy^2$ | h) $x^2y' + 2xy = x^3$ | i) $xy' + y = -y^2$ |
| j) $y' = 2y - e^x y^2$ | k) $xy dx + (x^2 - 3y) dy = 0$ | |

10.8. A ecuación de Ricatti

En xeral non existe un procedemento para atopar a solución xeral dunha ecuación diferencial da forma

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 \quad (\text{ecuación de Ricatti}).$$

Pero, se coñecemos unha solución particular $u(x)$ desta ecuación, entón o cambio $y = u + \frac{1}{z}$ transformará esta ecuación nunha ecuación lineal en $z(x)$. O mesmo efecto é producido polo cambio $y = u + z$.

En efecto, neste último caso, $y' = u' + z'$, e substituíndo na ecuación,

$$u' + z' = p(x) + q(x)u + q(x)z + r(x)u^2 + 2r(x)uz + r(x)z^2$$

e xa que $u' = p(x) + q(x)u + r(x)u^2$, resulta

$$z' + (p(x) - 2uq(x))z = q(x)z^2$$

que é unha ecuación de Bernoulli. Finalmente, o cambio $w = \frac{1}{z}$ converte esta ecuación nunha lineal.

Se tivésemos traballado orixinalmente co cambio $y = u + \frac{1}{z}$, entón obteríase unha ecuación lineal directamente.

Exercicios

26. Resolve as ecuacións de Ricatti,

- | | | | |
|--|--------------|---|--------------|
| a) $y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$, | $y_p(x) = x$ | b) $y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} + 1$, | $y_p(x) = x$ |
| c) $y' = xy^2 + (1 - 2x)y + x - 1$, | $y_p(x) = 1$ | d) $xy' = y - (y - x)^2$, | $y_p(x) = x$ |
| e) $y' = x^3(y - x)^2 + \frac{y}{x}$, | $y_p(x) = x$ | | |

27. Resolve as ecuacións diferenciais seguintes

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $x^2y' = \frac{x^2 + 1}{3y^2 + 1}$ | b) $y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$ |
| c) $y' = 1 + x + y + xy$, $y(0) = 0$ | d) $y' = \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{yx^3}$ |
| e) $y' = 3x^2(y^2 + 1)$, $y(0) = 1$ | f) $(x^2 + 4)y' + 3xy = x$, $y(0) = 3$ |

10.9. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

1. A solución xeral da ecuación diferencial $xy' = (1 - x)y$ é,
 - a) $y(x) = cxe^{-x}$ b) $y(x) = x + e^{-x} + c$ c) $y(x) = 3$ d) $y = \ln x - x + c$
2. A solución xeral da ecuación diferencial $2y(x^2 + 1)y' = x(y^2 + 1)$ é,
 - a) $y(x)^2 = -1 + c\sqrt{x^2 + 1}$ b) $y(x)^2 = c\sqrt{x^2 + 1}$
 - c) $y(x)^2 = -1 + \sqrt{x^2 + 1}$ d) $y(x)^2 = \sqrt{x^2 + 1}$
3. Consideremos o campo $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (2xy + y^2 + 1, 2xy + x^2 + 1)$ e a ecuación diferencial $y' = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)}$ (1). Temos que
 - a) o campo F non é conservativo. b) $x^2y + xy^2 + x + y = c$ é a solución xeral de (1)
 - c) a ecuación diferencial (1) é lineal. d) a ecuación diferencial (1) non é exacta.
4. Cal das seguintes afirmacións é FALSA?
 - a) $y(x) = ce^{3x}$ é a solución xeral da ecuación diferencial $y' - 3y = 0$.
 - b) $y(x) = ce^{3x} - 2$ é a solución xeral da ecuación diferencial $y' - 3y = 6$.
 - c) $y(x) = e^x$ é a solución xeral da ecuación diferencial $y' - y = 0$.
 - d) $y(x) = ce^x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$ é a solución xeral da ecuación diferencial $y' - y = \sin x$.
5. Para a ecuación diferencial $y' + y = x + 3$ verifícase que
 - a) $y = 0$ é unha solución.
 - b) $y = x + 2$ é unha solución.
 - c) $y = e^{-x} + x + 2$ é a solución xeral.
 - d) $y = e^{-x}$ é a solución xeral da homoxénea asociada.
6. A solución xeral da ecuación diferencial $xy' + y = e^x$ é,
 - a) $y(x) = \frac{c}{x}e^x$ b) $y(x) = \frac{1}{x}e^x$ c) $y(x) = \frac{1}{x}(c + e^x)$ d) $y(x) = \frac{1}{x}(1 + e^x)$

10.10. Ecuacións diferenciais con MATLAB

O paquete simbólico de MATLAB non é todo o satisfactorio que desexamos para resolver ecuacións diferenciais. A pesar de que nos permite resolver directamente unha proporción alta de ecuacións diferenciais, por exemplo tódalas as lineais, hai algunhas que non é capaz de atopar a solución directamente. Neste último caso, podemos utilizar este paquete como elemento de axuda para a resolución desas ecuacións.

Utilízase o comando `dsolve` para resolver unha ecuación diferencial. Se queremos atopar a solución xeral da ecuación $y' + \frac{1}{x}y = x^2$, e a solución particular que verifica o dato inicial $(1, 2)$, escribiremos as sentenzas

```
syms y(x); Dy=diff(y,x); yg=dsolve(Dy+1/x*y==x^2)
yp=dsolve(Dy+1/x*y==x^2, y(1)==2)
```

Non obstante, ecuacións diferenciais tan sinxelas como $yy' = e^{x+2y} \sin x$ non poden resolverse directamente co paquete simbólico. Así, para resolver esta ecuación, colocamos a ecuación coas variables separadas en cada sumando da ecuación, $ye^{-2y}dy - e^x \sin x dx = 0$, e resolvemos utilizando a sentenza

```
syms x y
C=int(y*exp(-2*y),y)-int(exp(x)*sin(x),x)
```

Aínda así, hai bastantes ecuacións diferenciais que MATLAB é capaz de resolver directamente.

Ás veces podemos utilizar os coñecementos do capítulo 2 para resolver as ecuacións diferenciais exactas. Por exemplo para resolver a ecuación exacta $4x^3e^{x+y} + x^4e^{x+y} + 2x + (x^4e^{x+y} + 2y)y' = 0$, $y(0) = 1$, escribiremos

```
syms x y
F=[4*x^3*exp(x+y)+x^4*exp(x+y)+2*x, x^4*exp(x+y)+2*y];
diff(F(2),x)-diff(F(1),y)
f(x,y)=simplify(int(F(1),x)+int(F(2)-diff(int(F(1),x),y),y))
C=f(0,1)
```

Na liña das restricións de cálculo que indicabamos inicialmente, observaremos que coa última sentenza non podemos obter a solución que verifica $y(0) = 1$. No caso de que teñamos que calcular un factor integrante,

```
syms x y
F=[1/2*y^2+2*y*exp(x), y+exp(x)];
P=diff(F(2),x)-diff(F(1),y)
mux=exp(int(-P/F(2),x))
F=mux*F
simplify(diff(F(2),x)-diff(F(1),y))
f=int(F(1),x)+int(F(2)-diff(int(F(1),x),y),y);
syms y(x)
Dy=diff(y); yg=dsolve(Dy==-(1/2*y^2+2*y*exp(x))/(y+exp(x)))
yp=dsolve(Dy==-(1/2*y^2+2*y*exp(x))/(y+exp(x)),y(0)==-2)
```

10.11. Solución dos exercicios propostos

1. $y_g(x) = ce^x - 3$, $y_p(x) = e^x - 3$

5.a- $y_g(x) = cxe^{-x}$, $y_p(x) = xe^{-x}$

5.b- $-\frac{1}{2}ye^{-2y} - \frac{1}{4}e^{-2y} + \frac{1}{2}e^x \cos x - \frac{1}{2}e^x \sin x = \frac{2e^2-3}{4e^2}$

5.c- $y_g(x) = c(1+x^3)^{\frac{1}{3}}$, $y_p(x) = 2(1+x^3)^{\frac{1}{3}}$

$$5.d- y_g(x)^2 = x^2 + c, \quad y_p(x)^2 = x^2 - 1$$

$$5.e- y_g(x) = \frac{-e^{-2x}+2+c}{e^{-2x}-c}, \quad y_p(x) = \frac{-e^{-2x}+1}{e^{-2x}+1}$$

$$6.a- n = -\frac{1}{2}, \quad y_g(x)^2 = \frac{1}{x} \ln(cx)$$

$$6.b- n = \frac{3}{4}, \quad y_g(x)^2 = cx^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5x}$$

$$6.c- n = 1, \quad \frac{1}{xy} + \ln \frac{cx}{y} = 0$$

$$7.a- \sqrt{x^2 + y_g^2} = c$$

$$7.b- 3xy_g + e^x + \operatorname{sen} y_g = c, \quad 3xy_p + e^x + \operatorname{sen} y_p = 1$$

$$7.c- xe^{y_g} + y_g^2 = c, \quad xe^{y_p} + y_p^2 = 0$$

$$7.d- x^2 + y_g^2 + x^4 e^{x+y_g} = c, \quad x^2 + y_p^2 + x^4 e^{x+y_p} = 1$$

$$8.a- xy - \frac{1}{2}y^2 - \ln x = c \quad 8.b- e^x(y^2 + 2ye^x) = c$$

$$9.a- xy + 2 \ln y = c \quad 9.b- x - \tan y \cos x = c$$

$$9.c- 4xy - x^4 + y^4 = c \quad 9.d- \frac{2y^2+3-2\ln(2x-1)+4x\ln(2x-1)}{2x-1} = c$$

$$9.e- xy + \operatorname{sen}(xy) = c \quad 9.f- \cos \frac{x}{y} = c$$

$$9.g- \frac{x-1}{y+1} = c \quad 9.h- x^2y^3 + y \operatorname{sen} x = c$$

$$10.a- y_g(x)^2 = (cx^2 + 1)x^2 \quad 10.b- y_g(x) = x \tan(cx^3)$$

$$10.c- y_g(x) = \frac{x^3}{x^2+c} \quad 10.d- y_g(x) = x \arccos(c - \ln x)$$

$$10.e- y_g(x) = x \ln(c + 2 \ln x) \quad 10.f- y^2 + 2xy - x^2 = c$$

$$11.a- \frac{1}{2} \ln \frac{(x-1)^2+(y+5)^2}{(x-1)^2} - \arctan \frac{y+5}{x-1} + \ln(x-1) = c$$

$$11.b- y - x - 5 \ln(x + y - 1) = c$$

$$11.c- \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(y-1)^2}{(x-1)^2} + \frac{2(y-1)}{x-1} + 2 \right] + \arctan \frac{y-x}{x-1} + \ln(x-1) = c$$

$$11.d- y = c(x+1)^{\frac{3}{4}} + 3 + 2x$$

$$11.e- y_g(x) = x \ln x + cx$$

$$11.f- y_g(x) = x \arctan(c - \ln x)$$

$$11.g- y_g(x) = x(1 + cx)^{\frac{1}{3}}$$

$$11.h- y_g(x)^2 = x^2(cx - 1)$$

$$12.a- y_g(x) = -x + \tan(x + c)$$

$$12.b- y_g(x) = x + 1 - \arctan(x + c)$$

$$13. T = 6 + \frac{\ln 100}{\ln 3}$$

$$14. y(10) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$15. T_i = 0,5317, \quad T_f = 0,5167$$

16. $35,3\%, 3,1\%$

19. $T = 383,2984$

21.b- $y_g(x) = \frac{1}{2} + ce^{\frac{1}{2}x}$

21.d- $y_g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + ce^{-2x}$

21.f- $y_g(x) = x(c - x)$

21.h- $y_g(x) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + ce^x$

22. $T = 365,5$ minutos

23.b- $Q(t) = (Q_o - \frac{q}{k})e^{-\frac{q}{k}t} + \frac{q}{k}$

25.a- $y_g(x) = \frac{1}{x(1+cx)}$

25.c- $y_g(x)^3 = \frac{c+(3x^3-18x)\sin x+(9x^2-18x)\cos x}{x^3}$

25.e- $y_g(x) = \frac{2}{(c-e^{2x})e^{-x}}$

25.g- $y_g(x) = \frac{1}{1-x+ce^{-x}}$

25.i- $y_g(x) = \frac{1}{cx-1}$

25.k- $x^2y^2 - 2y^3 = c$

26.a- $y_g(x) = x + \frac{cx}{e^{\frac{2}{5}x^5}-1}$

26.c- $y_g(x) = 1 + \frac{1}{1-x+ce^{-x}}$

26.e- $y_g(x) = x + \frac{5x}{c-x^5}$

27.b- $y_g(x) = x \sin(\ln cx)$

$y_p(x) = e^{\frac{1}{2}(x^2+x)} - 1$

27.e- $y_g(x) = \tan(x^3 + c)$

27.f- $(3y_g - 1)^{\frac{2}{3}}(x^2 + 4) = c$

18. $T = 25 \ln 8$

21.a- $y_g(x) = -\frac{5}{3} + ce^{3x}$

21.c- $y_g(x) = -8 + ce^{-\frac{2}{3}x}$

21.e- $y_g(x) = \frac{2a^2}{3x} + cx^2$

21.g- $y_g(x) = x^2 - 1 + c\sqrt{x^2 - 1}$

21.i- $y_g(x) = x \sin x + c \cos x$

23.a- $Q' = q - kQ$

23.c- $\frac{q}{k}$

25.b- $y_g(x)^2 = -\frac{1}{(c-x^2)x^2}$

25.d- $y_g(x) = \frac{1}{x(c-\ln x)}$

25.f- $y_g(x) = \frac{1}{ce^{-x}-1}$

25.h- $y_g(x) = \frac{x^4+c}{4x^2}$

25.j- $y_g(x) = \frac{3}{e^x+ce^{-2x}}$

26.b- $y_g(x) = x + \frac{2x}{cx^2-1}$

26.d- $y_g(x) = x + \frac{x}{c+x}$

27.a- $y^3 + y - x + \frac{1}{x} = c$

27.c- $y_g(x) = ce^{\frac{1}{2}(x^2+x)} - 1$

27.d- $y_g(x)^2 = x^2 \tan(\ln cx^2)$

$y_p(x) = \tan(x^3 + \frac{1}{4}\pi)$

$(3y_p - 1)^{\frac{2}{3}}(x^2 + 4) = 16$

Solucións autoavaliación. 1a, 2a, 3b, 4c, 5b, 6c

Capítulo 11

Ecuacións diferenciais de orde n

11.1. Introducción

No capítulo anterior estudamos a resolución dalgúns tipos especiais de ecuacións diferenciais. Os métodos utilizados na resolución necesitaron de distintas técnicas de integración. Non obstante, debemos recoñecer que esa parte non é máis ca unha pequena parcela do amplo temario constituído polas ecuacións diferenciais. Neste capítulo discutiremos unha clase importante de ecuacións, que ten unha teoría máis rica e ampla. En primeiro lugar, formularemos as definicións e o correspondente teorema de existencia e unicidade, para o caso xeral.

Unha ecuación diferencial de orde n ten unha expresión xeral da forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

onde $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Nalgunhas situacións, unha ecuación diferencial de orde dous ou superior pode ser reducida de orde. Supoñamos, por exemplo, unha ecuación de segunda orde, $y'' = f(x, y, y')$, na cal non aparece explicitamente a variable y . Neste caso podemos facer $z(x) = y'(x)$, isto é, $z = y'$, de onde se obtén a ecuación diferencial de primeira orde, $z' = f(x, z)$ e, unha vez obtida a solución desta ecuación, $v = v(x)$, a solución da ecuación orixinal é da forma $y(x) = \int z(x)dx + c_2$. Se na ecuación non aparece explicitamente a variable x , $y'' = f(y, y')$, entón, facendo neste caso $y' = z(y)$, temos que $y'' = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z'z$, onde temos a ecuación en z , $z'z = f(y, z)$, ou, $z' = \frac{f(y, z)}{z}$.

Exemplo 11.1 Dada a ecuación diferencial $y'' - 2xy' = x$, realizando o cambio $z(x) = y'(x)$, resulta a ecuación $z' - 2xz = x$, que é unha ecuación diferencial lineal de primeira orde con solución $z_g(x) = -\frac{1}{2} + c_1 e^{x^2}$ e, por integración, $y_g(x) = -\frac{1}{2}x + c_1 \int e^{x^2} dx + c_2$ é a solución xeral da ecuación orixinal.

Exemplo 11.2 Consideremos a ecuación diferencial $yy'' - (y')^2 = 0$, na que non aparece a variable x explicitamente. Para empezar, $y = 0$ é unha solución da ecuación diferencial. Agora realizamos o

cambio $y' = z(y)$, polo que $y'' = z'z$, de onde resulta a ecuación $yz'z - z^2 = 0$. Desta ecuación tamén deducimos que $z = 0$ ou, equivalentemente, $y = c$ tamén son solucións da ecuación orixinal que, ademais, tamén engloba a solución anterior. Esta ecuación, $\frac{z'}{z} = \frac{1}{y}$, en variables separadas, ten como solución xeral $z_g = c_1 y$ e, de $y' = c_1 y$, temos a solución xeral da ecuación orixinal $y_g(x) = c_2 e^{c_1 x}$, que tamén engloba as solucións anteriores tomando $c_1 = 0$.

Exercicios

1. Resolve, reducindo a orde da ecuación diferencial, as seguintes ecuacións diferenciais de segunda orde.

a) $xy'' + y' = 4x$

b) $y'' - 2xy' = x$

c) $(x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

d) $xy'' = y' + (y')^3$

e) $y'' = y'e^y, y(0) = 0, y'(0) = 2$

f) $yy'' + (y')^2 = 0$

g) $2yy'' = 1 + (y')^2$

h) $yy'' = y^2 y' + (y')^2, y(0) = -\frac{1}{2}, y'(0) = 1$

Definición 11.3 *Unha función $u: I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é unha solución, ou solución particular, da ecuación diferencial $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, se u é derivable ata a orde n en I , e verifica*

$$u^{(n)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)) \text{ para todo } x \in I.$$

Se ademais a solución $u(x)$ verifica

$$u(x_0) = y_0, u'(x_0) = y_0^1, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1},$$

entón dicimos que u é a solución da ecuación diferencial $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ que verifica o dato inicial $(x_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1})$.

Teorema 11.4 (Teorema de existencia e unicidade de solucións) *Consideremos a ecuación diferencial,*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

e supoñamos que f é unha función de clase un, nun dominio $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Para cada punto do dominio de f , $(x_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}) \in A$, existe unha única solución da ecuación diferencial, definida nunha veciñanza de x_0 , que verifica o dato inicial $(x_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1})$.

Definición 11.5 *A solución xeral da ecuación diferencial*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

é unha función $y_g(x) = g(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, tal que para cada solución $y(x)$ da ecuación, existen n constantes únicas, $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n) \in \mathbb{R}^n$, que verifican, $y(x) = g(x, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n)$.

11.2. Ecuacións diferenciais lineais de orde n

Definición 11.6 *Unha ecuación diferencial lineal de orde n é da forma*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (11.1)$$

onde $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$ son funcións continuas, e $y(x)$ é a función a determinar.

A ecuación

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (11.2)$$

denomínase ecuación homoxénea asociada a ecuación orixinal ou completa.

Se denotamos $y(x) = y^{(0)}(x)$ e $a_0(x) = 1$ para todo x , a ecuación homoxénea pode escribirse da forma

$$\sum_{i=0}^n a_i(x)y^{(n-i)}(x) = 0.$$

A expresión sinxela dunha ecuación diferencial lineal, non debe levarnos a pensar que a obtención da solución xeral é relativamente fácil. En contraposición coas ecuacións diferenciais de primeira orde, non é posible obter unha solución desta ecuación para o caso xeral. En calquera caso, obteremos a estrutura da solución xeral.

Neste sección, despois da obtención da estrutura da solución xeral, encontraremos os métodos de resolución para o caso particular en que as funcións coeficientes $a_i(x)$ son constantes en todo o seu dominio.

En primeiro lugar, probaremos que o conxunto de solucións dunha ecuación diferencial lineal homoxénea é un subespazo vectorial de dimensión n do espazo de tódalas funcións $u: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 11.7 *Se $y_1(x), \dots, y_k(x)$ son solucións da ecuación diferencial homoxénea, a función $y(x) = \sum_{j=1}^k c_j y_j(x)$ tamén é unha solución da ecuación diferencial homoxénea, calquera que sexan os números reais $c_1, \dots, c_n$.*

Demostración. Para cada $j = 1, \dots, k$, por ser $y_j(x)$ unha solución da ecuación homoxénea, verifica a igualdade $\sum_{i=0}^n a_i(x)y_j^{(n-i)}(x) = 0$. Vexamos que $y(x) = \sum_{j=1}^k c_j y_j(x)$ tamén verifica a ecuación. En efecto, tendo en conta as propiedades lineais da derivada dunha función,

$$\sum_{i=0}^n a_i(x)y^{(n-i)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x) \sum_{j=1}^k c_j y_j^{(n-i)}(x) = \sum_{j=1}^k c_j \left[\sum_{i=0}^n a_i(x)y_j^{(n-i)}(x) \right] = 0.$$

■

Debemos observar que este resultado segue sendo válido se as constantes $c_1, \dots, c_k$ son números complexos.

Deste resultado obtemos que o conxunto das solucións dunha ecuación diferencial homoxénea de orde n é un subespazo vectorial do espazo das funcións $u: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Probaremos, no que segue que a dimensión deste espazo coincide coa orde da ecuación diferencial.

Por outra parte, utilizando este teorema, podemos preguntarnos se $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ son n solucións da ecuación homoxénea, calquera que sexa $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, a función $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, é a solución xeral da ecuación homoxénea?. A resposta é negativa, a non ser que se imponha algunha propiedade nas función $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. A condición que deben verificar as funcións $y_j(x)$ está recollida na seguinte definición.

Definición 11.8 *As funcións $y_1(x), \dots, y_k(x)$, definidas nun intervalo $I = (a, b)$, son linealmente independentes, se $c_1 y_1(x) + \dots + c_k(x) y_k(x) = 0$ para todo $x \in I$, entón $c_1 = \dots = c_k = 0$.*

Definición 11.9 *Se as funcións $y_1(x), \dots, y_k(x)$, definidas nun intervalo $I = (a, b)$, non son linealmente independentes, entón dicimos que son linealmente dependentes. Isto é, se existen números reais non nulos $c_1, \dots, c_k$ tales que $c_1 y_1(x) + \dots + c_k(x) y_k(x) = 0$ para todo $x \in I$.*

Exemplo 11.10 As funcións $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{2x}$ son linealmente independentes, pero $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = k e^x$ son linealmente dependentes.

Definición 11.11 *Un conxunto de n solucións da ecuación homoxénea, $y_1(x), \dots, y_n(x)$, linealmente independentes nun intervalo I , denomínase sistema fundamental de solucións da ecuación homoxénea.*

Damos a continuación unha condición suficiente para que n funcións sexan linealmente independentes, que será moi útil no que segue.

Teorema 11.12 *Se existe $x_o \in I$ tal que o determinante*

$$W = W(y_1(x_o), \dots, y_n(x_o))$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x_o) & y_2(x_o) & \dots & y_n(x_o) \\ y_1'(x_o) & y_2'(x_o) & \dots & y_n'(x_o) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_o) & y_2^{(n-1)}(x_o) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_o) \end{vmatrix} \neq 0$$

entón $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son linealmente independentes.

Demostración. Por hipótese, existe $x_o \in I$ tal que

$$W = W(y_1(x_o), \dots, y_n(x_o)) \neq 0.$$

Supoñamos que $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son linealmente dependentes. Entón existen números reais, $c_1, \dots, c_n$, non todos nulos, tales que

$$c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \text{ para todo } x \in I.$$

En particular,

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 y_1(x_o) & + c_2 y_2(x_o) & + \cdots & + c_n y_n(x_o) & = & 0 \\ c_1 y_1'(x_o) & + c_2 y_2'(x_o) & + \cdots & + c_n y_n'(x_o) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_o) & + c_2 y_2^{(n-1)}(x_o) & + \cdots & + c_n y_n^{(n-1)}(x_o) & = & 0, \end{array}$$

polo que este sistema ten solución en $c_1, \dots, c_n$ non trivial e, polo teorema de Rouché-Frobenius, o determinante dos coeficientes deste sistema debe ser nulo, o que contradí a hipótese $W \neq 0$. ■

O determinante W utilizado neste teorema, e que mencionaremos con bastante frecuencia, denomínase *Wronskiano* das funcións $y_1(x), \dots, y_n(x)$ no punto x_o .

Se ademais as funcións $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son solucións da ecuación homoxénea, o recíproco deste teorema tamén é certo en tódolos puntos do intervalo I .

Teorema 11.13 *Se $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son n solucións linealmente independentes da ecuación diferencial lineal homoxénea, entón o wronskiano asociado é distinto de cero en tódolos puntos do intervalo I .*

Demostración. Por redución ó absurdo, supoñamos que existe $x_o \in I$ tal que o wronskiano das funcións $y_1(x), \dots, y_n(x)$ no punto x_o é nulo, $W = W(y_1(x_o), \dots, y_n(x_o)) = 0$. En particular, os vectores columnas desta matriz son linealmente dependentes, polo que existen $c_1, \dots, c_n$, non todos nulos, tales que

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 y_1(x_o) & + c_2 y_2(x_o) & + \cdots & + c_n y_n(x_o) & = & 0 \\ c_1 y_1'(x_o) & + c_2 y_2'(x_o) & + \cdots & + c_n y_n'(x_o) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_o) & + c_2 y_2^{(n-1)}(x_o) & + \cdots & + c_n y_n^{(n-1)}(x_o) & = & 0. \end{array} \quad (11.3)$$

Por outra parte, a proposición 11.7 permite afirmar que a función $z(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ tamén é solución da ecuación homoxénea, e polas igualdades (11.3), a solución z verifica o dato inicial $(x_o, 0, \dots, 0)$, que tamén é verificado pola función nula, $y(x) = 0$ para todo $x \in I$. Polo teorema de existencia e unicidade de solucións,

$$z(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in I,$$

e, como os escalares c_i non son todos nulos, obtemos que as funcións $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son linealmente dependentes, o que contradí a hipótese de independencia. ■

Utilizando o teorema de existencia e unicidade de solucións, podemos probar resultados que dan a estrutura da solución xeral dunha ecuación diferencial lineal de orde n . Equivalentemente, podemos probar que a ecuación homoxénea ten un sistema fundamental de solucións formado por n solucións ou que a dimensión do espazo vectorial das solucións do sistema homoxénea é n .

Teorema 11.14 *Existe un sistema fundamental de solucións da ecuación homoxénea (11.2).*

Demostración. Sexa $x_o \in I$ e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ unha base en $\mathbb{R}^n$. Polo teorema de existencia e unicidade de solucións, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, dado o dato inicial (x_o, e_i) existe unha única solución y_i do sistema homoxéneo que verifica este dato; $(y_i(x_o), y'_i(x_o), \dots, y_i^{(n-1)}(x_o)) = e_i$. Finalmente, o wronskiano destas funcións en x_o resulta

$$W(y_1(x_o), \dots, y_n(x_o)) = \det(e_1, \dots, e_n) \neq 0,$$

por ser $\mathcal{B}$ unha base en $\mathbb{R}^n$ e, polo teorema 11.12, as funcións $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son linealmente independentes. ■

Teorema 11.15 *Se $y_1(x), \dots, y_n(x)$, é un sistema fundamental de solucións da ecuación diferencial lineal homoxénea, entón a solución xeral desta ecuación é da forma, $y_h(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, para todo $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sexa $z(x)$ unha solución calquera da ecuación homoxénea. Demostraremos que existen n números reais únicos $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$, tales que $z(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \dots + \bar{c}_n y_n(x)$.

Sexa $x_o \in I$ e denotemos

$$z(x_o) = z_o, z'(x_o) = z_1, \dots, z^{(n-1)}(x_o) = z_{n-1}.$$

Xa que $y_1(x), \dots, y_n(x)$ son linealmente independentes, o sistema de ecuacións

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 y_1(x_o) & + c_2 y_2(x_o) & \cdots & + c_n y_n(x_o) & = & z_o \\ c_1 y'_1(x_o) & + c_2 y'_2(x_o) & \cdots & + c_n y'_n(x_o) & = & z_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_o) & + c_2 y_2^{(n-1)}(x_o) & \cdots & + c_n y_n^{(n-1)}(x_o) & = & z_{n-1} \end{array}$$

ten solución única $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ e ademais, a partir deste sistema, a función $\bar{c}_1 y_1(x) + \dots + \bar{c}_n y_n(x)$, tamén verifica o mesmo dato inicial $(x_o, z_o, z_1, \dots, z_{n-1})$ que a función z e, polo teorema de existencia e unicidade de solucións,

$$z(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \dots + \bar{c}_n y_n(x). \quad \blacksquare$$

Teorema 11.16 *Se $y_1(x), \dots, y_n(x)$, son n solucións linealmente independentes da ecuación diferencial lineal homoxénea,*

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

e $y_p(x)$ é unha solución particular da ecuación completa, entón a solución xeral desta ecuación é da forma,

$$y_g(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p(x).$$

Demostración. Sexa $z(x)$ unha solución calquera da ecuación completa. A función $z(x) - y_p(x)$ é unha solución da ecuación homoxénea e, polo teorema anterior, existen n números reais únicos, $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$, tales que

$$z(x) - y_p(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \dots + \bar{c}_n y_n(x),$$

de onde,

$$z(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \dots + \bar{c}_n y_n(x) + y_p(x).$$

■

Exemplo 11.17 Atopa a solución xeral da ecuación $y'' + y = e^x$.

Esta ecuación é lineal de segunda orde, con $a_1(x) = 0$, $a_2(x) = 1$ e $f(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A ecuación homoxénea asociada é $y'' + y = 0$. Obviamente, as funcións $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = \cos x$ son solucións da ecuación homoxénea e, ademais, ningunha delas é múltiplo constante da outra, polo que $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ é a solución xeral da ecuación homoxénea. Por outra parte, a función $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$ é unha solución particular da ecuación completa, polo que a función $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{1}{2}e^x$ é a solución xeral da ecuación completa.

Exercicios

- Atopa a curva solución da ecuación, $y'' + a^2 y = 0$, que pasa por (x_o, y_o) e que sexa tanxente, nese punto, á recta $y = mx$.
- Demostra que existe un conxunto de solucións linealmente independentes da ecuación diferencial $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$, formado por funcións do tipo $y(x) = x^p$.
- a) Proba que $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = xe^x$ son solucións da ecuación $y'' - 2y' + y = 0$. Proba que y_2 non é múltiplo constante de y_1 e atopa a solución xeral da ecuación.
b) Atopa a solución xeral da ecuación $y'' - 2y' + y = 5$.
- Proba que $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = 5e^{x+2}$ son solucións da ecuación $y'' - y = 0$. En consecuencia, a función $y(x) = c_1 e^x + c_2 5e^{x+2}$ tamén é unha solución desta ecuación. ¿É esta a solución xeral da ecuación $y'' - y = 0$? Razona a resposta.
- Sexan $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Proba que a ecuación diferencial

$$(x+a)(x+b)y'' + 2(2x+a+b)y' + 2y = 0$$

ten dúas solucións da forma $(x+k)^{-1}$, para algunhas constantes k . Atopa a solución xeral da ecuación. [Indicación: Proba coa solución $y(x) = (x+k)^{-1}$, e axusta a constante k para que y sexa solución da ecuación].

- Atopa a solución xeral da ecuación $y''' - 2y'' - y' + 2y = 10$. [Indicación: e^x , e^{-x} e e^{2x} son solucións da ecuación homoxénea asociada].

No que segue veremos que no caso dunha ecuación diferencial lineal homoxénea de orde dous, se coñecemos unha solución, entón podemos atopar outra que sexa linealmente independente coa primeira.

Teorema 11.18 *Se y é unha solución da ecuación homoxénea $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, entón*

$z(x) = y(x) \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y(x)^2} dx$ é outra solución da ecuación homoxénea, linealmente independente con y .

Demostración. Atoparemos unha función non constante $v = v(x)$, tal que $z = vy$ tamén é unha solución, polo que y, z son linealmente independentes. Xa que logo, procedemos a calcular a función v . Derivando dúas veces a función produto $z = vy$,

$$z' = y'v + yv' \quad \text{e} \quad z'' = y''v + 2y'v' + yv'',$$

e para que z sexa solución da ecuación homoxénea,

$$\begin{aligned} y''v + 2y'v' + yv'' + a(x)y'v + a(x)yv' + b(x)yv \\ = yv'' + (2y' + a(x)y)v' + (y'' + a(x)y' + b(x)y)v \\ = yv'' + (2y' + a(x)y)v' = 0, \end{aligned}$$

de onde

$$\frac{v''}{v'} = -\frac{2y' + a(x)y}{y} = -\frac{2y'}{y} - a(x).$$

De aquí temos que

$$\ln |v'| = -2 \ln |y| - \int a(x)dx = \frac{1}{\ln y^2} - \int a(x)dx,$$

polo que

$$v' = \frac{1}{y^2} e^{-\int a(x)dx}, \quad \text{e} \quad v = \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y(x)^2} dx.$$

■

Exemplo 11.19 Obtén a única solución da ecuación diferencial $x^2y'' + xy' - y = 0$ que verifica $y(1) = 1$ e $y'(1) = 1$, sabendo que $y(x) = x$ é unha solución da ecuación.

Calculamos a función

$$v = \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2},$$

polo que $z(x) = vy = -\frac{1}{2x}$ é outra solución da ecuación homoxénea linealmente independente con $y(x) = x$. Logo, a solución xeral da ecuación é,

$$y_g(x) = c_1y + c_2z = c_1x + c_2\frac{1}{x}$$

e, para o dato inicial dado, $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, polo que a solución buscada é $y = x$.

Exercicios

8. Resolve as ecuacións que seguen, coñecendo a solución dada.

- | | |
|-------------------------------------|-----------------|
| a) $x^2y'' + xy' - y = 0$, | $y(x) = x$ |
| b) $y'' + y = 0$, | $y(x) = \sin x$ |
| c) $y'' - y = 0$, | $y(x) = e^x$ |
| d) $xy'' + 3y' = 0$, | $y(x) = 1$ |
| e) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, | $y(x) = x$ |

11.3. Ecuacións lineais de segunda orde con coeficientes constantes

Consideremos a ecuación homoxénea

$$y'' + ay' + by = 0$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Utilizando a proposición anterior, para chegar á solución xeral desta ecuación, debemos atopar dúas solucións y_1, y_2 , tales que unha non sexa múltiplo constante da outra. Tendo en conta a linealidade da ecuación e que os coeficientes da mesma son constantes, a solución $y(x)$, debe ter a propiedade de que, y, y', y'' deben ser múltiplos constantes unhas das outras.

A función exponencial, $y(x) = e^{\lambda x}$, ten esta propiedade, polo que debemos atopar o valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $e^{\lambda x}$ verifique a ecuación diferencial. Tendo en conta que $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$, e introducindo estes resultados na ecuación, temos

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = e^{\lambda x} (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$$

Tendo en conta que $e^{\lambda x}$ non se anula en ningún valor de $x \in \mathbb{R}$, podemos concluír que, $e^{\lambda x}$ é solución da ecuación $y'' + ay' + by = 0$, se, e soamente se, λ é raíz da ecuación

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Esta ecuación denomínase *ecuación característica* da ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$, e a función polinómica $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$, *polinomio característico* asociado a ecuación diferencial. As raíces da ecuación característica son da forma

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$$

e denomínanse raíces características da ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$. Podemos considerar tres situacións distintas, dentro das raíces características.

Caso 1. Raíces características reais e distintas, $a^2 - 4b > 0$.

Neste caso, $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ son solucións da ecuación diferencial, linealmente independentes, pois $W = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{x(\lambda_2 + \lambda_1)} \neq 0$, polo que a solución xeral da ecuación $y'' + ay' + by = 0$, é da forma

$$y_g(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Caso 2. Dúas raíces reais e iguais, $a^2 - 4b = 0$.

Neste caso $\lambda = -\frac{a}{2}$ é unha raíz dobre da ecuación característica, e $y_1(x) = e^{\lambda x}$ é unha solución da ecuación. Ademais, a función $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ tamén é unha solución da ecuación diferencial. En efecto, $y_2'(x) = e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x}$, e $y_2''(x) = \lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + x\lambda^2 e^{\lambda x}$. Substituíndo estes valores na ecuación diferencial e ordenando, obtemos

$$e^{\lambda x}(a + 2\lambda) + xe^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b)$$

que é igual a cero. Entón, $y_1(x) = e^{\lambda x}$ e $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ son solucións linealmente independentes da ecuación diferencial, xa que $W = e^{2\lambda x} \neq 0$, polo que a solución xeral da ecuación $y'' + ay' + by = 0$ é

$$y_g(x) = (c_1 + c_2x)e^{-\frac{1}{2}ax}.$$

Outra forma de atopar a segunda solución linealmente independente coa primeira, e unha vez coñecida a primeira solución, $y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}$, é utilizando o teorema 11.18. En efecto,

$$z(x) = \int \frac{e^{-\int adx}}{y_1^2} dx = \int \frac{e^{-ax}}{e^{-ax}} dx = x,$$

polo que $y_2(x) = xe^{-\frac{a}{2}x}$.

Caso 3. Dúas raíces complexas, $\frac{1}{4}a^2 - b < 0$.

Neste caso as raíces son

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \text{onde } \alpha = -\frac{1}{2}a, \text{ e } \beta = \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}.$$

Como estas solución son complexas, debemos realizar as consideracións oportunas para chegar a dúas solucións reais, a partir de λ_1 e λ_2 . Utilizando as expresións en forma polar e trigonométrica dun número complexo, a función exponencial complexa, $e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$, e $e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$. Ambas as funcións verifican a ecuación $y'' + ay' + by = 0$. Pero, calquera combinación lineal destas, tamén é unha solución da ecuación, en particular,

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{e} \quad y_2(x) = \frac{1}{2i}(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

son solucións da ecuación, linealmente independentes, pois $W = -\beta e^{2\alpha x}$. Deste xeito e neste caso, a solución xeral é

$$y_g(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)).$$

Exemplo 11.20 Obtén a solución xeral das ecuacións: a) $y'' - a^2y = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. b) $y'' - 4y' + 4y = 0$. c) $y'' - 6y' + 10y = 0$.

a) A ecuación característica, $\lambda^2 - a^2 = 0$ ten dúas raíces reais distintas $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = -a$, polo que a solución xeral é $y_g(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$.

b) A ecuación característica, $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, ten unha raíz dobre $\lambda = 2$, polo que a solución xeral é da forma $y_g(x) = (c_1 + c_2x)e^{2x}$.

c) A ecuación característica é $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$, con raíces complexas, $\lambda_1 = 3 + i$ e $\lambda_2 = 3 - i$, polo que a solución xeral da ecuación é $y_g(x) = e^{3x}(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x))$.

11.3.1. Oscilador masa-resorte

Un oscilador masa-resorte amortecido está formado por unha masa m unida a un resorte fixado no outro extremo, como se mostra na Figura 11.1. Se desprazamos a masa a partir da posición de equilibrio, $y(t) = 0$, o resorte estírase ou comprímese e exerce unha forza que se resiste ó desprazamento, proporcional ó mesmo, $F_{\text{resorte}} = -ky$, onde a constante positiva k é a rixidez e o signo negativo reflicte a natureza de oposición á forza. Esta ecuación coñécese como lei de Hooke e só é válida para desprazamentos pequenos.

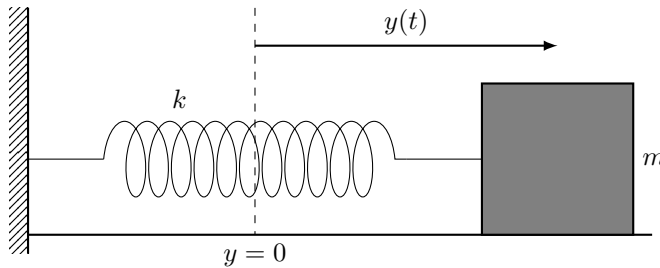


Figura 11.1: Oscilador masa-resorte

Practicamente tódolos sistemas mecánicos presentan fricción e, para o movemento con vibración, esta forza modélase mediante a ecuación, $F_{\text{fricción}} = -by'$, onde b , non negativa, coñécese como coeficiente de amortecemento e o signo negativo ten o mesmo significado que o dado anteriormente.

Outras forzas que actúan sobre o oscilador considéranse como externas do sistema F_{externa} . Aínda que poden ser gravitacionais, eléctricas ou magnéticas, o común é que sexan transmitidas á masa axitando a base do resorte.

A segunda lei de Newton establece que a suma destas forzas debe ser igual ó produto da masa pola aceleración do sistema, my'' .

Deste xeito, o movemento do sistema queda rexido pola ecuación diferencial

$$my'' = -by' - ky + F_{\text{externa}}(t)$$

ou, equivalentemente,

$$my'' + by' + ky = F_{\text{externa}}(t).$$

Cando analizamos unha ecuación diferencial de segunda orde, é frecuente comparar os coeficientes da ecuación cos valores

$$[\text{inerxia}] \cdot y'' + [\text{amortecemento}] \cdot y' + [\text{rixidez}] \cdot y = F_{\text{externa}}(t) \quad (11.4)$$

como inspiración para interpretar os resultados.

Oscilacións non forzadas, non amortecidas

Este caso preséntase cando non hai fricción ($b = 0$) ou unha forza externa. Neste caso, a ecuación diferencial do oscilador está dada por,

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0. \quad (11.5)$$

Esta ecuación é lineal, homoxénea e con coeficientes constantes. As raíces do polinomio $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$, son os complexos conjugados ωi , $-\omega i$, con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Polo tanto, a solución xeral da ecuación (11.5) é da forma:

$$y_g(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (11.6)$$

Se denotamos por $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, entón (11.6) pode escribirse como

$$y_g(t) = A \left(\frac{c_1}{A} \cos(\omega t) + \frac{c_2}{A} \sin(\omega t) \right). \quad (11.7)$$

Agora ben, $\frac{c_1}{A}, \frac{c_2}{A} \in [-1, 1]$ e $\left(\frac{c_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{A}\right)^2 = 1$, polo que existe un único $\varphi_o \in [0, 2\pi]$, tal que $\cos \varphi_o = \frac{c_1}{A}$ e $\sin \varphi_o = -\frac{c_2}{A}$. Substituíndo en (11.7) e utilizando a fórmula do coseno da suma chegamos finalmente a que

$$\begin{aligned} y_g(t) &= A(\cos(\varphi_o) \cos(\omega t) - \sin(\varphi_o) \sin(\omega t)) \\ &= A \cos(\omega t + \varphi_o). \end{aligned} \quad (11.8)$$

Esta é a fórmula clásica da solución xeral cando as oscilación non se consideran amortecidas. Os movementos son oscilacións periódicas do tipo senoidal, Figura 11.2 a). A constante A denomínase amplitude e depende do desprazamento e da velocidade inicial e o ángulo φ_o é a fase inicial. A frecuencia angular, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, é máis rápida para resortes máis ríxidos e máis lenta para masas máis pesadas, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, sendo T o período de oscilación.

Oscilacións non forzadas, subamortecidas

Cando hai fricción, as oscilacións son amortecidas e os movementos son do tipo representados na Figura 11.2 b). O amortecemento prodúcese ó multiplicar a función senoidal por unha exponencial negativa. De feito, unha maior fricción produce un amortecemento máis intenso, polo que a amplitude senoidal decrece máis rapidamente, e menores frecuencias angulares ω .

Exemplo 11.21 Un péndulo simple, representado na Figura 11.3, consta dunha masa $m > 0$ suspendida nun cable de masa desprezable e lonxitude $\ell > 0$.

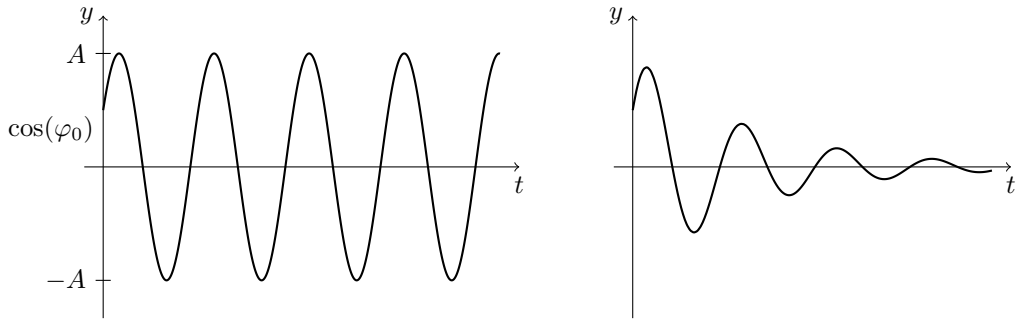


Figura 11.2: Solucións de osciladores non forzados

Se denotamos por $y(t)$ o ángulo que forma o péndulo coa vertical en cada instante de tempo t , entón a compoñente tanxencial do peso vén dada por $P_t = mg \sin y$. Como ademais, o desprazamento tanxencial é $\ell y(t)$, pola segunda lei de Newton tense que $P_t = -m\ell y''$. Así pois, a ecuación do movemento dun péndulo simple é

$$y'' + \frac{g}{\ell} \sin y = 0,$$

que tamén podemos poñer,

$$my'' + \frac{mg \sin y}{\ell} y = 0, \quad (11.9)$$

Unha análise da ecuación 11.4 lévanos a unha inercia fixa m , amortecemento nulo e unha rixidez expresada mediante

$$k = \frac{mg \sin y}{\ell}.$$

Está rixidez está representada na figura 11.4. Os movementos de amplitude pequena son controlados por unha rixidez de resorte case constante, $\frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow 1$, próxima ó valor $\frac{mg}{\ell}$, e a frecuencia angular das oscilacións case senoidais valen $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (ecuación (11.5)).

Exemplo 11.22 Unha masa de $\frac{1}{4}$ kg está unida a un resorte cunha rixidez de 4 N/m. A constante de amortecemento b para o sistema é de 1 N·s/m. Se desprazamos a masa $\frac{1}{2}$ m estirando o resorte e recibe unha velocidade inicial de 1 m/s no sentido de contracción do resorte, determinar a ecuación do movemento. Cál é o desprazamento máximo que pode alcanzar a masa?

A ecuación diferencial que debemos resolver é

$$\frac{1}{4}y'' + y' + 4y = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = -1. \quad (11.10)$$

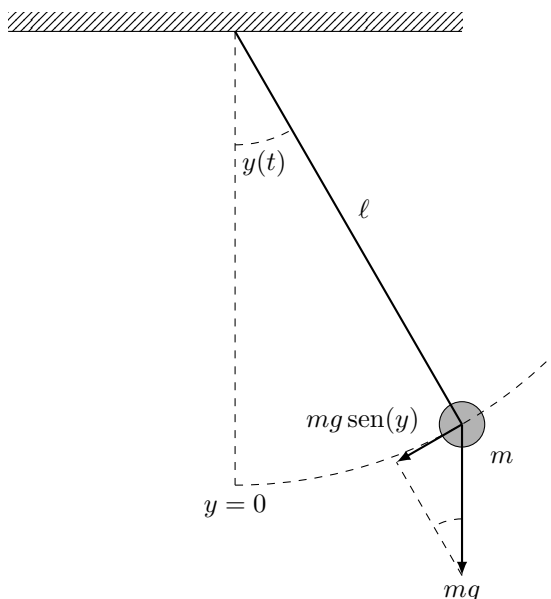


Figura 11.3: Péndulo simple

É fácil verificar que a solución desta ecuación diferencial é

$$y(t) = e^{-2t} \left[-\frac{1}{2} \cos(2\sqrt{3}t) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(2\sqrt{3}t) \right],$$

ou tamén,

$$y(t) = \sqrt{\frac{7}{12}} e^{-2t} \sin(2\sqrt{3}t + \phi),$$

onde $\tan \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, e ϕ está no terceiro cuadrante.

Para determinar o máximo desprazamento con respecto da posición de equilibrio, temos que determinar o máximo da función $|y(t)|$. Como $y(t)$ se extingue de forma exponencial, o máximo vai darse no primeiro punto crítico de y . Isto é, se calculamos a derivada de $y(t)$, igualamos a cero, utilizamos a igualdade $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ e resolvemos, temos a solución,

$$\tan(2\sqrt{3}t) = \frac{\sqrt{3}}{5},$$

que ten como primeira raíz positiva

$$t = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{5} = 0,096.$$

Substituíndo este valor na ecuación (11.10), temos que $y(0,096) = -0,55$, que é o máximo desprazamento, que ocorre á esquerda do punto de equilibrio.

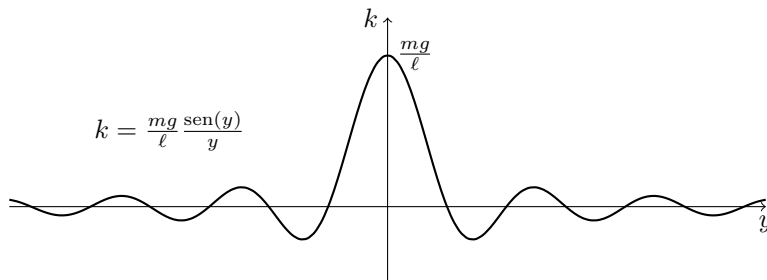


Figura 11.4: Rixidez dun péndulo

11.4. A ecuación completa

No que segue realizaremos o estudo da ecuación completa

$$y'' + ay' + by = f(x),$$

onde $f(x)$ é unha función arbitraria. Utilizando o teorema 11.16, a solución xeral desta ecuación é da forma

$$y_g(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x),$$

polo que nos ocuparemos de atopar unha solución particular $y_p(x)$, da ecuación completa. Unha forma moi xeral para atopar unha solución particular da ecuación completa é utilizando o método de variación de parámetros que estudaremos ó final do capítulo. Non obstante, ás veces é máis útil o método dos coeficientes indeterminados, onde se utilizan aproximacións intuitivas das solución particulares.

11.4.1. Método dos coeficientes indeterminados

Se $b = 0$, realizando o cambio de variable $y' = z$, resulta a ecuación $z' + az = f(x)$, da que xa sabemos obter a solución. No caso de que $b \neq 0$, atoparemos unha solución particular da ecuación completa utilizando, sempre que sexa posible, o método dos *coeficientes indeterminados*. Supoñamos en primeiro lugar que a función $f(x)$ é constante e igual a A para todo x . É fácil de ver que esta ecuación vai ter unha solución particular da forma $y_p(x) = c$ para todo x . En efecto, $y'_p(x) = y''_p(x) = 0$ e, substituíndo na ecuación, resulta $bc = A$, polo que $c = \frac{A}{b}$ e $y_p(x) = \frac{A}{b}$ é unha solución particular da ecuación.

No caso de que a función $f(x)$ sexa unha función polinómica de grao n , $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$. Para buscar unha solución particular neste caso, parece obvio probar cunha función

polinómica de grao n ; $y_p(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n$, e determinar os coeficientes polo método dos coeficientes indeterminados. O método consiste en substituír y_p e as súas derivadas na ecuación diferencial, da que resulta unha igualdade de dous polinomios de grao n e igualar os coeficientes de igual potencia en x , de onde se determinan as constantes $A_0, A_1, \dots, A_n$.

Exemplo 11.23 Resolveremos unha ecuación na que a función $f(x)$ é un polinomio. $y'' - 4y' + 4y = x^2 + 2$.

A función $f(x)$ é unha función polinómica de grao dous, polo que a solución particular debería ser unha función da forma $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, coas constantes A, B e C que hai que calcular. Para isto, $y'_p(x) = 2Ax + B$, $y''_p(x) = 2A$, e substituíndo na ecuación, temos

$$2A - 4(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 2$$

e reordenando os termos

$$4Ax^2 + (4B - 8A)x + (2A - 4B + 4C) = x^2 + 2.$$

Así, igualando coeficientes de igual potencia en x , $4A = 1$, $4B - 8A = 0$ e $2A - 4B + 4C = 2$, e resolvendo este sistema, resulta, $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ e $C = \frac{7}{8}$. De aquí temos finalmente, que $y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}$ é unha solución particular da ecuación.

O método dos coeficientes indeterminados pode ser aplicado a outros casos. Supoñamos, por exemplo, a ecuación

$$y'' + ay' + by = pe^{\alpha x}.$$

Parece natural elixir a función $y_p(x) = Ae^{\alpha x}$ como candidata a ser unha solución particular da ecuación. $y'_p(x) = A\alpha e^{\alpha x}$, $y''_p(x) = A\alpha^2 e^{\alpha x}$, e substituíndo na ecuación, resulta a igualdade

$$Ae^{\alpha x}(\alpha^2 + a\alpha + b) = pe^{\alpha x}$$

de onde, se $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$, dedúcese que $A = \frac{p}{\alpha^2 + a\alpha + b}$, e

$$y_p(x) = \frac{p}{\alpha^2 + a\alpha + b} e^{\alpha x}$$

é unha solución particular da ecuación se $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$. A condición $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$, significa que α non é unha raíz da ecuación característica; é dicir, que $e^{\alpha x}$ non é unha solución da ecuación homoxénea asociada. Se α fose unha raíz simple de $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, podemos atopar unha constante B tal que $Bxe^{\alpha x}$ é unha solución particular da ecuación. Se α é unha raíz dobre, $Bx^2e^{\alpha x}$ é unha solución particular da ecuación para algún valor de $B \in \mathbb{R}$.

O método dos coeficientes indeterminados tamén é válido se na función $f(x)$ aparecen funcións trigonométricas

Exemplo 11.24 Son moi sinxelos os casos onde aparecen a función seno ou coseno, por exemplo, $y'' - 4y' + 4y = 2\cos(2x)$.

Neste caso podería parecer que unha solución particular debería ser da forma $y(x) = A \cos(2x)$, pero no termo $-4y'$ da ecuación, aparecería $-2A \sin(2x)$, e na función $f(x)$ non aparece un termo similar para igualar coeficientes. Isto esixe que debe probarse cunha solución particular da forma $y_p(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x)$. Para determinar os parámetros A e B , calculamos $y'_p(x) = 2A \cos(2x) - 2B \sin(2x)$, $y''_p(x) = -4A \sin(2x) - 4B \cos(2x)$, e substituindo na ecuación e reordenando

$$8B \sin(2x) - 8A \cos(2x) = 2 \cos(2x),$$

ecuación que é válida para todo x , se $B = 0$ e $A = -\frac{1}{4}$, polo que $y_p(x) = -\frac{1}{4} \sin(2x)$ é unha solución particular da ecuación diferencial.

Para xeneralizar este método no exemplo anterior, supoñamos que a función $f(x)$ é da forma $f(x) = p \sin(rx) + q \cos(rx)$. Neste caso probaremos a determinar as constantes A e B introducindo a función, $y_p(x) = A \sin(rx) + B \cos(rx)$. Esta solución é válida se r non é raíz da ecuación característica. En caso contrario, pode comprobarse que a función $y_p(x) = Ax \sin(rx) + Bx \cos(rx)$, é unha solución particular.

Esta técnica é totalmente válida se a función $f(x)$ é suma ou produto de funcións polinómicas, exponenciais ou trigonométricas do tipo mencionado anteriormente. Por exemplo, se $f(x) = (x^2 + 1)e^{3x} + \sin(2x)$, debemos probar coa función, $y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x} + D \sin(2x) + E \cos(2x)$, sempre que $\lambda = 3$ ou $\lambda = 2i$ non sexan unha raíz característica.

Se a función y_p é doutro tipo, por exemplo $f(x) = x \ln x$, posiblemente o método dos coeficientes indeterminados non poida ser utilizado. En calquera caso, existe un método xeral para obter unha solución particular da ecuación lineal con coeficientes constantes, o *método de variación dos parámetros*, que se estuda na sección 11.7.

O resultado que enunciámos a continuación, que ten unha demostración inmediata, é moi útil na busca dunha solución particular da ecuación completa.

Teorema 11.25 *Consideremos a ecuación diferencial lineal completa*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x) + \cdots + f_k(x). \quad (11.11)$$

Se $y_{p_i}(x)$ é unha solución particular da ecuación completa

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_i(x)$$

para cada $i = 1, \dots, p$, entón a función $y_p(x) = y_{p_1}(x) + \cdots + y_{p_k}(x)$ é unha solución particular da ecuación (11.11).

Exercicios

9. Resolve as ecuacións diferenciais

- a) $y'' + 4y = 4x + 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$ b) $y'' - 2y' + y = e^{-x} \sin x - 4e^x$
 c) $y'' - y = 2 \sin x + e \cos x$ d) $y'' - y = x \cos x + 2 \sin x$
 e) $y'' - 2ay' + a^2y = e^x$ ($a \neq 1$) f) $y'' + 2y' + y = e^{-x} x^2 \cos x$
 g) $y'' + a^2y = \sin(ax)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ h) $y'' + 4y = 3x^3$
 i) $y'' - y = 3e^x$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ j) $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$
 k) $y'' + 2y' + y = x^2$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

10. Demuestra que a solución xeral da ecuación $y'' + ay' + by = 0$, no caso de raíces complexas $\alpha \pm \beta i$, pode poñerse na forma, $y(x) = Ae^{\alpha x} \cos(\beta x + \omega)$, onde A e ω son constantes arbitrarias.
11. A suspensión dun automóbil pode modelarse como un resorte vibrante con amortecemento debido ós amortecedores. Isto conduce á ecuación diferencial $mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0$, onde m é a masa do automóbil, b é a constante de amortecemento do amortecedor, k é a constante do resorte e $x(t)$ é o desprazamento vertical do automóbil no instante t . Se a masa do automóbil é de 1000 kg e a constante do resorte é de 3000 kg/s², determina o valor mínimo para a constante de amortecemento (en quilogramos/segundo) que proporcione unha viaxe suave libre de oscilacións.

11.5. Ecuacións lineais de orde n con coeficientes constantes

Consideremos a ecuación diferencial lineal completa de orde n con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (11.12)$$

tal que a ecuación homoxénea asociada é da forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \quad (11.13)$$

Utilizando os resultados da sección anterior, a solución xeral da ecuación completa é da forma

$$y_g(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x)$$

onde $y_1(x), \dots, y_n(x)$, son solucións linealmente independentes da ecuación homoxénea, $y_p(x)$ é unha solución particular da completa, e $c_1, \dots, c_n$ son n constantes arbitrarias.

11.5.1. Solucións da ecuación homoxénea

Utilizando o mesmo método que o das ecuacións de orde $n = 2$, probaremos a atopar as solucións da ecuación homoxénea da forma $y(x) = e^{\lambda x}$, para valores apropiados de λ . Se substituímos $y(x) = e^{\lambda x}$, na ecuación homoxénea, temos

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0,$$

que sacando factor común $e^{\lambda x}$, obtemos

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Esta é a ecuación característica da ecuación homoxénea, e $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ o polinomio característico.

Proposición 11.26 $e^{\lambda x}$ é solución da ecuación lineal homoxénea (11.13) se, e soamentes se, λ é raíz da ecuación característica asociada.

Polo teorema fundamental da álgebra, a ecuación característica ten exactamente n raíces, se cada raíz é contada de acordo coa súa multiplicidade.

Supoñamos en primeiro lugar que a ecuación característica ten n raíces reais, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, e distintas. Entón as funcións $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ son solucións linealmente independentes da ecuación homoxénea, xa que o wronskiano destas funcións é

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \\ &= e^{x \sum_{i=1}^n \lambda_i} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{x \sum_{i=1}^n \lambda_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0, \end{aligned}$$

polo que a solución xeral da ecuación homoxénea é da forma

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

No caso de que existan raíces múltiples, temos que modificar lixeiramente estas funcións exponenciais para obter a solución xeral. Así, unha raíz real λ_i de multiplicidade n_i , xera n_i solucións linealmente independentes,

$$e^{\lambda_i x}, x e^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, \dots, x^{n_i-1} e^{\lambda_i x}$$

Deste xeito, a solución xeral da ecuación diferencial (11.13) é da forma

$$y_g(x) = P_{n_1-1}(x) e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_{n_k-1}(x) e^{\lambda_k x}$$

onde

$$P_{n_i-1}(x) = c_{i1} + c_{i2}x + \cdots + c_{in_i}x^{n_i-1}, \quad i = 1, \dots, k$$

con $c_{ij} \in \mathbb{R}$

Por outra parte, un par de raíces complexas, $\lambda_k = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda}_j = \alpha - i\beta$, con multiplicidade n_j , xera $2n_j$ solucións,

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, \\ x^{n_j-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x), x^{n_j-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Isto é, despois de realizar consideracións análogas ás feitas para o caso das raíces reais, pode probarse que

$$e^{\alpha x} (P_{n_j-1}(x) \cos(\beta x) + Q_{n_j-1}(x) \sin(\beta x))$$

é a función real correspondente ás $2n_j$ solucións linealmente independentes asociadas á raíz λ_j , onde

$$P_{n_j-1}(x) = A_{j1} + A_{j2}x + \dots + A_{jn_j}x^{n_j-1} \\ Q_{n_j-1}(x) = B_{j1} + B_{j2}x + \dots + B_{jn_j}x^{n_j-1}$$

con $A_{jr}, B_{jr} \in \mathbb{R}$. Utilizando este procedemento, sempre atoparemos as n solucións linealmente independentes da ecuación homoxénea (11.13) que xeneran a ecuación xeral desta.

Exemplo 11.27 Consideremos a ecuación

$$y^v + 5y^{iv} + 12y''' + 16y'' + 12y' + 4y = 0.$$

O polinomio característico é da forma

$$p(\lambda) = \lambda^5 + 5\lambda^4 + 12\lambda^3 + 16\lambda^2 + 12\lambda + 4 = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2(\lambda + 1)$$

e ten unha raíz real simple $\lambda_1 = -1$ e as raíces complexas $\lambda_2 = -1 + i$, $\lambda_3 = -1 - i$, ambas con multiplicidade 2. En consecuencia, a solución xeral é da forma

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} \cos x + c_3 e^{-x} \sin x + c_4 x e^{-x} \cos x + c_5 x e^{-x} \sin x.$$

11.6. Solución xeral da ecuación completa

11.6.1. Método dos coeficientes indeterminados

Cando a función $f(x)$ é do tipo $P_k(x)$, $e^{\alpha x}$, $\sin x$, $\cos x$ ou calquera combinación lineal ou produto destas funcións, entón a ecuación diferencial completa (11.12) ten unha solución particular deste mesmo tipo. A introdución dunha función do tipo da función $f(x)$, que contén uns parámetros indeterminados, permite obter uns valores concretos destes por igualación de coeficientes e, con eles, a solución particular buscada.

Por exemplo, se $f(x) = P_k(x)$, isto é, un polinomio en x de grao k , e a ecuación característica non ten a raíz $\lambda = 0$, entón unha solución particular será da forma

$$y_p(x) = A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1} x + A_k,$$

e a introdución desta función na ecuación completa (11.12), permite calcular $A_0, A_1, \dots, A_k$.

Se a ecuación característica ten $\lambda = 0$ como raíz, de multiplicidade m , entón unha solución particular será da forma

$$y_p(x) = x^m (A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1} x + A_k).$$

Se $f(x) = P_k(x)e^{\alpha x}$, e α non é raíz da ecuación característica, entón unha solución particular da ecuación completa é da forma

$$y_p(x) = (A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1} x + A_k) e^{\alpha x}.$$

Se α é unha raíz característica de multiplicidade m , entón unha solución particular da ecuación completa é da forma

$$y_p(x) = x^m (A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1} x + A_k) e^{\alpha x}.$$

Se $f(x) = e^{\alpha x} (P_k(x) \cos(\beta x) + P_r(x) \sin(\beta x))$, e $\alpha + i\beta$ non é raíz da ecuación característica, entón unha solución particular da ecuación completa é da forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x} (P_s(x) \cos(\beta x) + Q_s(x) \sin(\beta x)),$$

onde $P_s(x)$ e $Q_s(x)$ son polinomios en x de grao $s = \max\{k, r\}$.

Se $\alpha + i\beta$ é unha raíz característica de multiplicidade m , entón unha solución particular da ecuación completa é da forma

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x} (P_s(x) \cos(\beta x) + Q_s(x) \sin(\beta x)).$$

Tódolos coeficientes indeterminados das solucións particulares obtéñense introducindo a función $y_p(x)$ na ecuación completa (11.12) e resolvendo as ecuacións que igualan os coeficientes.

Exemplo 11.28 Calcula unha solución particular da ecuación

$$y^v + 5y^{iv} + 12y''' + 16y'' + 12y' + 4y = x^2 + x + 1.$$

A solución xeral da homoxénea asociada xa foi atopada no exemplo 11.27, polo que falta atopar a solución particular da completa. A función $f(x) = x^2 + x + 1$ suxire unha solución $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Substituíndo na ecuación completa, temos

$$32A + 24Ax + 12B + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = x^2 + x + 1$$

e reordenando e igualando coeficiente das potencias de igual orde, obtemos as ecuacións

$$4A = 1, \quad 24A + 4B = 1, \quad 32A + 12B + 4C = 1$$

e, polo tanto, $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{5}{4}$, $C = 2$. En consecuencia, $y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + 2$, é unha solución particular da ecuación completa.

Exercicios

12. Atopa a solución completa de

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y''' + 3y'' + 3y' + y = 3 & \text{b) } y^v - y^{iv} - y' + y = 0 \\ \text{c) } y^{iv} - 3y''' + y'' + 4y = 2x - 1 \end{array}$$

13. Atopa a solución da ecuación diferencial $y''' - y'' - y' + y = 8xe^{-x}$ que verifique o dato inicial $(0, 1, 0, 0)$.

14. Atopa a solución xeral da ecuación $y^v - 10y^{iv} + 46y''' - 116y'' + 161y' - 98y = e^{2x} + e^{2x} \cos(3x)$. [Indicación: As raíces características da ecuación son, 2 e $2 \pm \sqrt{3}i$ con multiplicidade dous].

11.7. Método de variación de parámetros

O método que estudamos nesta sección é suficientemente xeral como para poder obter solucións particulares independentemente da forma do termo independente $f(x)$. Tamén é válido, como veremos na demostración, para o caso en que as funcións coeficientes da ecuación lineal non son constantes. Como podemos comprobar na resolución dos exercicios, a aplicación deste método resulta máis laborioso ca o método dos coeficientes indeterminados que xa estudamos en seccións anteriores.

Teorema 11.29 Sexan $y_1(x), \dots, y_n(x)$ un sistema fundamental de solucións, definidas nun intervalo $I \subset \mathbb{R}$, da ecuación lineal homoxénea (11.13) e $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$, funcións que verifican

$$\begin{array}{rcll} \alpha'_1 y_1 & + \cdots & + \alpha'_n y_n & = 0 \\ \alpha'_1 y'_1 & + \cdots & + \alpha'_n y'_n & = 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \alpha'_1 y_1^{(n-2)} & + \cdots & + \alpha'_n y_n^{(n-2)} & = 0 \\ \alpha'_1 y_1^{(n-1)} & + \cdots & + \alpha'_n y_n^{(n-1)} & = f(x) \end{array} \quad (11.14)$$

A función $y_p(x) = \alpha_1(x)y_1(x) + \cdots + \alpha_n(x)y_n(x)$ é unha solución particular da ecuación lineal completa.

Exemplo 11.30 Obtén a solución xeral da ecuación diferencial $y' - y = 3e^x$, sabendo que $y(x) = e^x$ e $z(x) = e^{-x}$ son solucións linealmente independentes da ecuación homoxénea.

A solución xeral da ecuación homoxénea é, trivialmente, $y_g(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. O sistema

$$\begin{array}{rcl} \alpha'_1(x)e^x + \alpha'_2(x)e^{-x} & = & 0 \\ \alpha'_1(x)e^x - \alpha'_2(x)e^{-x} & = & 3e^x \end{array}$$

ten como solucións

$$\begin{aligned}\alpha_1'(x) &= \frac{3}{2} & \text{e} & \alpha_1(x) = \frac{3}{2}x \\ \alpha_2'(x) &= -\frac{3}{2}e^{2x} & \text{e} & \alpha_2(x) = -\frac{3}{4}e^{2x}\end{aligned}$$

e unha solución particular da homoxénea é

$$y_p(x) = \frac{3}{2}xe^x + \left(-\frac{3}{4}e^{2x}\right)e^{-x} = \left(\frac{3x}{2} - \frac{3}{4}\right)e^x.$$

Exemplo 11.31 Atopa a solución xeral da ecuación $(x^2-1)y''-2xy'+2y = (x^2-1)^2$, $x \in (-1, 1)$, sabendo que $y(x) = x$ é unha solución da ecuación homoxénea.

Dividindo a ecuación entre $x^2 - 1$, temos $y'' - \frac{2x}{x^2-1}y' + \frac{2}{x^2-1}y = x^2 - 1$. Calculamos a segunda solución da ecuación homoxénea, $z = vy$, onde

$$\begin{aligned}v &= \int \frac{e^{\int \frac{2x}{x^2-1}dx}}{x^2} dx = \int \frac{e^{\ln|x^2-1|}}{x^2} dx = \int \frac{e^{\ln(1-x^2)}}{x^2} dx \\ &= \int \frac{1-x^2}{x^2} dx = -x - \frac{1}{x},\end{aligned}$$

polo que

$$\begin{aligned}z(x) &= \left(-x - \frac{1}{x}\right)x = -(1+x^2) \\ y_h &= c_1x + c_2(1+x^2).\end{aligned}$$

Para atopar unha solución particular, y_p , utilizamos o método de variación de parámetros, resolvendo o sistema $a'y + b'z = 0$, $a'y' + b'z' = x^2 - 1$. Tendo en conta que $W = \det \begin{pmatrix} x & -1-x^2 \\ 1 & -2x \end{pmatrix} = 1 - x^2 \neq 0$,

$$\begin{aligned}a' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1-x^2 \\ x^2-1 & -2x \end{vmatrix}}{1-x^2} = \frac{x^4-1}{1-x^2} = -(1+x^2), \\ b' &= \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x^2-1 \end{vmatrix}}{1-x^2} = \frac{x(x^2-1)}{1-x^2} = -x,\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$a = \int -(1+x^2)dx = -x - \frac{x^3}{3} \quad \text{e} \quad b = \int -x dx = -\frac{x^2}{2},$$

polo que a solución particular da ecuación é

$$y_p(x) = \left(-x - \frac{x^3}{3}\right)x + \frac{x^2}{2}(1+x^2) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6},$$

e a solución xeral da ecuación completa,

$$y_g(x) = c_1x + c_2(1 + x^2) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6}.$$

Exemplo 11.32 Atopa a solución xeral da ecuación $(x^2 + x)y'' + (2 - x^2)y' - (2 + x)y = x(x + 1)$, $x > 0$, sabendo que $y(x) = e^x$ é unha solución da ecuación homoxénea.

É fácil comprobar que $y(x) = e^x$ é unha solución da ecuación homoxénea. A ecuación diferencial tamén se pode poñer como $y'' + \frac{2 - x^2}{x^2 + x}y' - \frac{2 + x}{x^2 + x}y = (x + 1)$. Para calcular a segunda solución da ecuación homoxénea, $z = vy$,

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{e^{\int \frac{x^2 - 2}{x^2 + x} dx}}{e^{2x}} dx = \int \frac{e^{x + \ln \frac{x+1}{x^2}}}{e^{2x}} dx = \int \frac{e^x e^{\ln \frac{x+1}{x^2}}}{e^{2x}} dx \\ &= \int e^{-x} \frac{x+1}{x^2} dx = \int \frac{e^{-x}}{x} dx + \int \frac{e^{-x}}{x^2} dx \\ &\left\| \begin{array}{ll} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{1}{x^2} dx \\ dv = e^{-x} dx & v = -e^{-x} \end{array} \right\| = -\frac{e^{-x}}{x}, \end{aligned}$$

polo que $z(x) = -\frac{e^{-x}}{x}e^x = -\frac{1}{x}$ e $y_h(x) = c_1e^x + c_2\frac{1}{x}$.

Para atopar unha solución particular, y_p , utilizamos o método de variación de parámetros, resolvendo o sistema $a'y + b'z = 0$, $a'y' + b'z' = x^2 - 1$. Tendo en conta que

$$\begin{aligned} W &= \det \begin{pmatrix} e^x & \frac{1}{x} \\ e^x & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} = -\frac{1+x}{x^2}e^x, \\ a &= \int -\frac{(x+1)\frac{1}{x}}{\frac{1+x}{x^2}e^x} dx = \int -xe^{-x} dx = (x+1)e^{-x}, \\ b &= \int -\frac{e^x(x+1)}{\frac{1+x}{x^2}e^x} dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}, \end{aligned}$$

de onde,

$$y_g(x) = c_1e^x + c_2\frac{1}{x} + \frac{x^2}{3} + x + 1.$$

Neste caso máis xeral, e para calcular a solución particular da ecuación completa, pode utilizarse calquera dos métodos estudados anteriormente, como pode ser o método de variación de parámetros ou dos operadores diferenciais, sempre en función da facilidade dos cálculos que hai que realizar.

Exemplo 11.33 Resolve $y''' + 4y' = \frac{3}{\sin(2x)}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

As raíces da ecuación característica son $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \pm 2i$, polo que a solución xeral da ecuación homoxénea é $y_g = c_1 + c_2 \cos(2x) + c_3 \sin(2x)$. Utilizando o método de variación de parámetros para atopar unha solución particular da ecuación completa, temos que resolver o sistema,

$$\begin{aligned}\alpha'_1 + \alpha'_2 \cos(2x) + \alpha'_3 \sin(2x) &= 0 \\ -2\alpha'_2 \sin(2x) + 2\alpha'_3 \cos(2x) &= 0 \\ -4\alpha'_2 \cos(2x) - 4\alpha'_3 \sin(2x) &= \frac{3}{\sin(2x)}\end{aligned}$$

tendo en conta que $W(y_1, y_2, u_3) = 8$. Así,

$$\alpha'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos(2x) & \sin(2x) \\ 0 & -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \\ \frac{3}{\sin(2x)} & -4\cos(2x) & -4\sin(2x) \end{vmatrix}}{8} = \frac{3}{4\sin(2x)}$$

$$\alpha'_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin(2x) \\ 0 & 0 & 2\cos(2x) \\ 0 & \frac{3}{\sin(2x)} & -4\sin(2x) \end{vmatrix}}{8} = -\frac{3\cos(2x)}{4\sin(2x)}$$

$$\alpha'_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos(2x) & 0 \\ 0 & -2\sin(2x) & 0 \\ 0 & -4\cos(2x) & \frac{3}{\sin(2x)} \end{vmatrix}}{8} = -\frac{3}{4},$$

de onde

$$\alpha_1 = \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\sin(2x)} \quad \left\| \begin{array}{l} t = \tan x \quad x = \arctan t \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x \end{array} \right\| = \frac{3}{8} \ln \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\alpha_2 = -\frac{3}{4} \int \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} dx = -\frac{3}{8} \ln(\sin(2x))$$

$$\alpha_3 = -\frac{3}{4}x,$$

polo que a solución xeral da ecuación completa é

$$y_g(x) = c_1 + c_2 \cos(2x) + c_3 \sin(2x) - \frac{3}{4}x \sin(2x) - \frac{3}{8}(\ln \sin(2x)) \cos(2x) + \frac{3}{8} \ln \frac{\sin x}{\cos x}.$$

11.8. Autoavaliación

As seguintes cuestións teñen só unha resposta correcta.

- A solución da ecuación diferencial $y'' - 4y = 12$ que verifica $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$, é,
 a) $3e^{2x} + 3e^{-2x} - 3$ b) $3e^{2x} - 3e^{-2x} - 3$ c) $3e^{2x} + 3ye^{2x} + 3$ d) $3e^{2x} - 3ye^{2x} - 3$
- Consideremos a ecuación diferencial $y'' - y' + a(1-a)y = x$, e denotemos por λ_1 e λ_2 as raíces características, y_h a solución xeral da homoxénea asociada e y_g a solución xeral da ecuación completa. Unha das seguintes afirmacións é FALSA.
 a) $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = 1 - a$.
 b) Se $a \neq \frac{1}{2}$, $y_h(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{(1-a)x}$.
 c) Se $a = \frac{1}{2}$, $y_g(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{\frac{1}{2}x} + 4x + 16$.
 d) Se $a = 0$ ou $a = 1$, $y_g(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$.
- Unha das seguintes afirmacións é FALSA.
 a) $y(x) = \sin x$ e $z(x) = \cos x$ son solucións de $y'' = -y$.
 b) $y(x) = 1$ é unha solución de $y'' + y = 1$.
 c) $y(x) = \sin x + \cos x + 1$ é unha solución de $y'' + y = 1$.
 d) $y(x) = \sin x + \cos x$ é unha solución de $y'' + y = 1$.
- A solución xeral da ecuación diferencial $y'' + y' - 6y = 1$ é,
 a) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{6}$ b) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$
 c) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{-3x} - \frac{1}{6}$ d) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{6}x$
- Consideremos a ecuación diferencial $y'' - 2ay' + a^2y = e^{ax}$, denotemos por y_g e y_h as solucións xerais da ecuación completa e homoxénea, respectivamente, e por y_p unha solución particular da ecuación completa. Unha das seguintes afirmacións é FALSA.
 a) $y_h(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{ax}$
 b) Existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $y_p(x) = Ax^2 e^{ax}$.
 c) Existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $y_g(x) = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax} + Ax^2 e^{ax}$.
 d) Existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $y(x) = x e^{ax} + Ax^2 e^{ax}$ é unha solución da ecuación completa.
- Unha das seguintes afirmacións é FALSA.
 a) $y_h(x) = c_1 e^x + c_2 \sin x + c_3 \cos x$ é a solución xeral da ecuación $y''' - y'' + y' - y = 0$.
 b) Existen $A, B \in \mathbb{R}$ tales que $y_p(x) = A \cos x + B \sin x$ é unha solución de $y''' - y'' + y' - y = \sin x$.
 c) $y(x) = e^x + \sin x$ é unha solución da ecuación $y''' - y'' + y' - y = 0$.
 d) $y(x) = \cos x + \sin x$ é unha solución da ecuación $y''' - y'' + y' - y = 0$, que verifica $y(0) = 1$.

11.9. Ecuacións diferenciais con MATLAB

A técnica para resolver ecuacións diferenciais de orde superior é a mesma que para ecuacións de primeira orde. Por exemplo, para atopar a solución xeral da ecuación diferencial de segunda orde $y'' + y' - 2y = x^2 + 3$ e a solución que verifica o data inicial $(0, 1, -1)$, utilizamos as sentenzas

```
syms y(x); Dy=diff(y,x); D2y=diff(y,x,2)
yg=dsolve(D2y+Dy-2*y==x^2+3)
yp=dsolve(D2y+Dy-2*y==x^2+3,y(0)==1,Dy(0)==-1)
```

11.10. Solución dos exercicios propostos.

$$1.a- y_g(x) = c_1 \ln x + c_2 + x^2$$

$$1.b- y_g(x) = c_1 \int_0^x e^{t^2} dt + c_2 - \frac{1}{2}x$$

$$1.c- y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x^3$$

$$1.d- y_g(x) = \pm \sqrt{c_1 - x^2} + c_2$$

$$1.e- y(x) = -\ln(2e^{-x} - 1)$$

$$1.f- y_g^2(x) = c_1 x + c_2$$

$$1.g- y_g(x) = c_1(x + c_2)^2 + \frac{1}{c_1}$$

$$1.h- y(x) = -\frac{3}{4e^{-\frac{3}{2}x} + 2}$$

$$3. y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^4$$

$$4.a- y_g(x) = (c_1 + c_2 x)e^x$$

$$4.b- y_g(x) = (c_1 + c_2 x)e^x + 5$$

5. Non, pois y_1 e y_2 non son linealmente independentes.

$$6. y_g(x) = \frac{c_1}{x+a} + \frac{c_2}{x+b}$$

$$7. y_g(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + 5$$

$$8.b- y_g(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$8.c- y_g(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

$$8.e- y_g(x) = c_1 x + c_2 x \ln \frac{x-1}{x+1}$$

$$9.a- y(x) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\right) \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + x + \frac{1}{4}$$

$$9.b- y_g(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{4}{25} e^{-x} \cos x + \frac{3}{25} e^{-x} \operatorname{sen} x - 2x^2 e^x$$

$$9.c- y_g(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} e \cos x$$

$$9.d- y_g(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x +$$

$$9.e- y_g(x) = yg = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax} + \frac{1}{a^2 - 2a + 1} e^x$$

$$9.f- y_g(x) = e^{-x} (c_1 + c_2 x - x^2 \cos x + 6 \cos x + 4x \operatorname{sen} x)$$

$$9.g- y(x) = \frac{1-2a}{2a^2} \operatorname{sen}(ax) + \cos(ax) - \frac{1}{2a} x \cos(ax)$$

$$9.h- y_g(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x) + \frac{3}{4} x^3 - \frac{9}{8} x$$

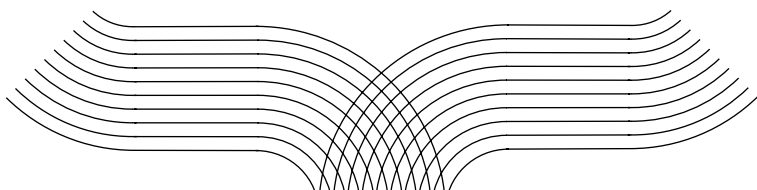
$$9.i- y_p(x) = \frac{3}{2} x e^x - \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x}$$

$$11. y_g(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + (2+x) x e^{-x}$$

Soluciones autoavaliación. 1a, 2c, 3d, 4a, 5a, 6b

Bibliografía

- [1] T.M. Apostol. *Calculus*. Ed. Reverté, Barcelona, 1998. Vol. 1 y 2.
- [2] M. Besada, F.J. García, M. Mirás, C. Quinteiro, C. Vázquez. *MATLAB: todo un mundo*. Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo, Vigo, 2007.
- [3] M. Besada, F.J. García, M. Mirás, C. Quinteiro, C. Vázquez. *Matemáticas para Química*. Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo, Vigo, 2008.
- [4] M. Besada, F.J. García, M. Mirás, C. Vázquez. *Cálculo de varias variables*. Prentice Hall, Madrid, 2001.
- [5] G.L. Bradley, K.J. Smith. *Cálculo de varias variables*. Prentice Hall, Madrid, 2008. Vol. 2.
- [6] H. Campbel. *Introducción a las ecuaciones diferenciales*. McGraw Hill, Madrid, 1997.
- [7] H.F. Davis, A.D. Snider. *Análisis Vectorial*. McGraw-Hill, 1992.
- [8] M.W. Hirsch, S. Smale. *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y algebra lineal*. Alianza Editorial, Madrid, 1996.
- [9] R.E. Larson, R.P. Hostetler, B.H. Edwards. *Cálculo*. McGraw Hill, Madrid, 2006. Vol. 2.
- [10] J.E. Marsden, A.J. Tromba. *Cálculo vectorial*. Prentice Hall, Madrid, 2004.
- [11] R.K. Nagle, E.B. Saff, A.D. Snider. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores frontera*. Pearson - Addison Wesley, 2005.
- [12] C. Pita Ruiz. *Cálculo Vectorial*. Prentice Hall, Madrid, 1995.
- [13] P. Quintela. *Ecuaciones diferenciales*. Andavira, Santiago de Compostela, 2001.
- [14] S.L. Ross. *Ecuaciones diferenciales*. Ed. Reverté, Madrid, 1980.
- [15] G. Simmons. *Ecuaciones diferenciales*. McGraw-Hill, Madrid, 1993.
- [16] M.C. Suarez, A.M. Vieites. *Cálculo Integral y aplicaciones con MATLAB*. Prentice Hall, Madrid, 2004.
- [17] G.B. Thomas, R.L. Finney. *Cálculo. Varias Variables*. Addison Wesley Longman, 2000.
- [18] D.G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamericana, 2000.



Manuais

Serie de manuais didácticos

Últimas publicacións na colección

Modelado e Simulación de Sistemas Biomédicos (2024)

Alejandro Fernández Villaverde

Traduçon comentada de textos didáticos e divulgadores.

Um modelo orientativo para tradutor em formaçon (2023)

Carlos Garrido Rodríguez

Bioestatística para a Enxeñaría Biomédica (2023)

Juan Carlos Pardo Fernández

Fundamentos de Dereito de Defensa da Competencia (2022)

Julio Costas Comesaña

Sistemas Fluidomecánicos no transporte: Prácticas de simulacións numéricas (2022)

María Concepción Paz Penín, Eduardo Suárez Porto,
Jesús Vence Fernández e Adrián Cabarcos Rey.



MAReMÁTICAS

Contidos matemáticos para os estudos universitarios de Ciencias

Este libro de texto inclúe o contido das dúas materias de Matemáticas do primeiro curso do grao de Ciencias do Mar. Preténdese dotar o estudante de capacidade para comprender e utilizar a linguaxe matemática, para asimilar novos conceptos, adquirir habilidades de cálculo e propoñer modelos matemáticos sinxelos, tamén é desexable que o estudante se adestre no uso de aplicacións informáticas para experimentar en matemáticas e resolver problemas.

Recóllense os resultados teóricos necesarios e, sobre todo, unha ampla recompilación de exercicios como material de traballo para o alumnado, algúns resoltos con todo detalle, outros cunha resolución menos pormenorizada e tamén moitos propostos, a maior parte coa solución final.

Obviamente este material pode ser usado para as materias de matemáticas de outras titulacións aínda que non teñan un programa tan extenso.

Servizo de Publicacións

Universidade de Vigo